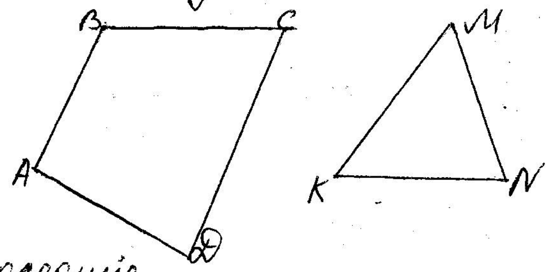
Геометрия 8 класс

Билет 1

1. Многоугольник - геометр. фигура, ограниченная ломаной

Многоуг-к с n вершинами называется n-угольником, он имеет n сторон



$n=3$ Δ, $n=4$ четырёхугольник

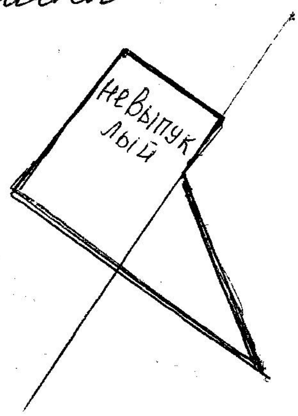
Две вершины, принадлежащие одной стороне, наз. соседними.

Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, наз-ся диагональю

Периметр - сумма длин всех сторон многоугольника

Выпуклый м/к, если м/к лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины

Сумма углов выпуклого n-угольника $=(n-2)\cdot 180$



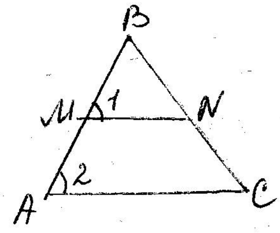
② Теорема о средней линии Δ

Средняя линия Δ - отрезок, соединяющий середины двух его сторон

Т. Средняя линия $\Delta \parallel$ одной из сторон и равна половине этой стороны

Дано: MN - средняя линия ΔABC

Док-ть: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2} AC$



Док-во: 1). $\Delta BMN \sim \Delta BAC$ (II признаку подобия: $\angle B$-общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$)

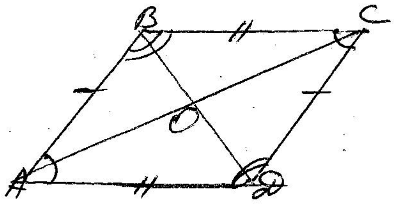
2) $\Delta BMN \sim \Delta BAC \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} AC$

3) $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow MN \parallel AC$
углы соответственные

2MN = 1AC

AC = 1/2AC = AC/2

① Параллелограмм - четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны



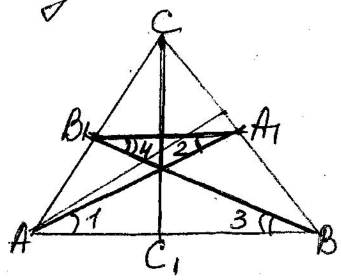
Свойства ① В парал-ме противоположные стороны и углы равны
$AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
~~AB ∥ CD~~

② Диагонали парал-ма точкой пересечения делятся пополам $AO = OC$, $BO = OD$

② Свойство медиан $\triangle$

Медианы $\triangle$ пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины

Дано: $\triangle ABC$, $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$, AA_1, BB_1, CC_1 - медианы $\triangle$



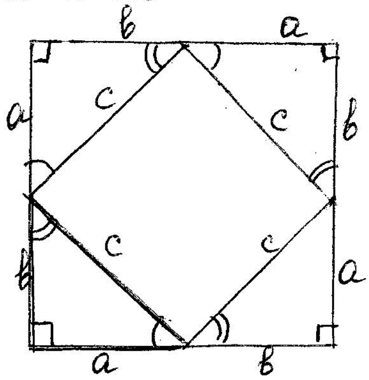
1. A_1B_1 - средняя линия $\triangle$
2. $A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ накрест лежащие
   $\angle 3 = \angle 4$ AA_1, BB_1 - секущие
3. $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ (I признаку подобия) $\Rightarrow$
4. $\Rightarrow \frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$
5. Но $AB = 2A_1B_1 \Rightarrow AO = 2A_1O$, $BO = 2B_1O$ $\Rightarrow AA_1 \cap BB_1 = O$ точка O делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

Билет №3

① Прямоугольник - параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства: 1. Противоположные стороны равны
2. Диагонали точкой пересечения делятся пополам
3. Диагонали равны.

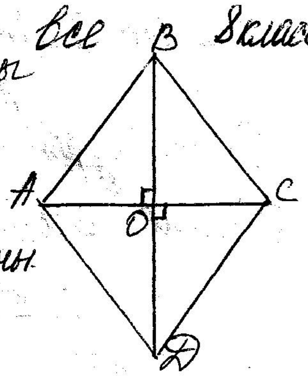
② Т. Пифагора: В прямоугольном $\triangle$ квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов



Дано: $\triangle$, a, b - катеты, c - гипотенуза
Док-ть: $a^2 + b^2 = c^2$

Док-во: 1. Достроим $\triangle$ до квадрата со стороной $a+b$
2. $S_K = (a+b)^2$
3. Квадрат из 4^x прямоуг. $\triangle$, $S_\triangle = \frac{1}{2}ab$
4. Квадрат со стороной c
$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$
$(a+b)^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

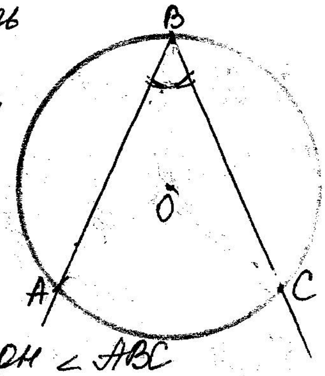
Билет 4. Ромб - параллелограмм, у которого все ~~углы прямые~~ стороны равны   8 класс



Свойство: 1. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам

2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
$BD \perp AC$

② Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность

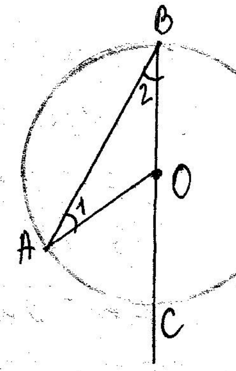


Теорема: Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается

Дано: $\angle ABC$ - вписанный угол, опирается на дугу AC

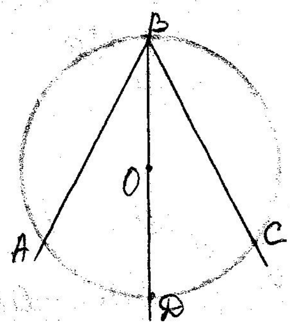
Док-ть: $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

Док-во: 1 случай: Луч BO совпадает с одной из сторон $\angle ABC$



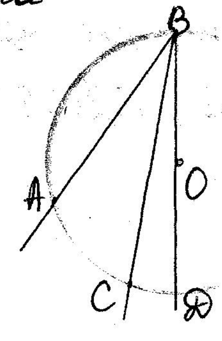
1. BO и BC совпадает
2. $\angle AOC = \overset{\frown}{AC}$
3. $\angle AOC$ - внешний $\angle$ равнобедр. $\triangle ABO$
4. $\angle 1 = \angle 2$ по свойству равноб. $\triangle$
5. $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1$
6. $2\angle 1 = \overset{\frown}{AC}$ или $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

2 случай: Луч BO делит $\angle ABC$ на два угла



1. луч $BO \cap \overset{\frown}{AC} = D$ 2. $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{DC}$
3. $\angle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ $\angle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$
4. $\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} \Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

3 случай: Луч BO не делит $\angle ABC$ на два угла и не совпадает со стороной этого угла

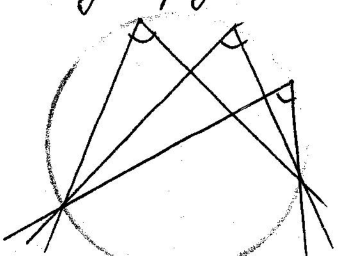


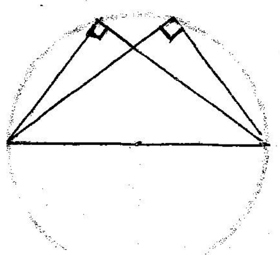
Следствие 1:

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны

Следствие 2:

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой.

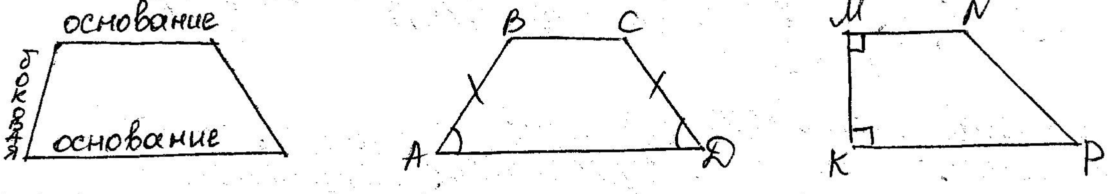




Билет 5. Трапеция - четырехугольник, у которого две стороны $\parallel$, а две другие стороны не параллельны — 8 класс

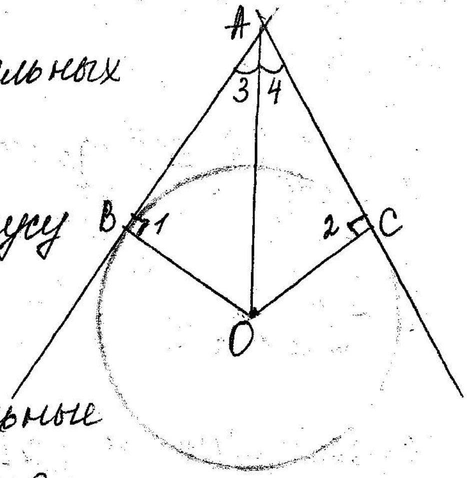
Равнобедренная трапеция - боковые стороны равны $ABCD$

Прямоугольная трапеция: один из углов трапеции - прямой $KMNP$



② Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки

Теорема: Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Дано: окружность, AB, AC - отрезки касательных

Док-ть: $AB=AC$, $\angle 3=\angle 4$

Док-во: касательная к окружности $\perp$ радиусу

$AB\perp BO \Rightarrow \angle ABO=90^\circ=\angle ACO$
$AC\perp CO$

$\angle 1=\angle 2=90^\circ \Rightarrow \triangle ABO$ и $\triangle ACO$ прямоугольные

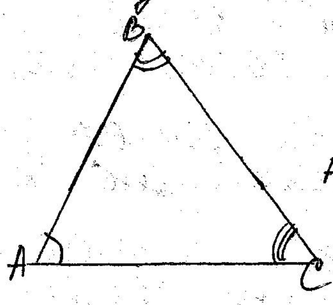
$\triangle ABO=\triangle ACO$ (OA - общая гипотенуза
$OB=OC$ катеты

$\Downarrow$
$AB=AC$
$\angle 3=\angle 4$.

Признак касательной: (обратная теорема)
Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности и $\perp$ к этому радиусу, то она является касательной.

Билет 6. Подобные △ 8 класс

Два △ называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного △ пропорциональны сходственным сторонам другого △



△ $ABC \sim$ △ $A_1B_1C_1$ $\angle A = A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

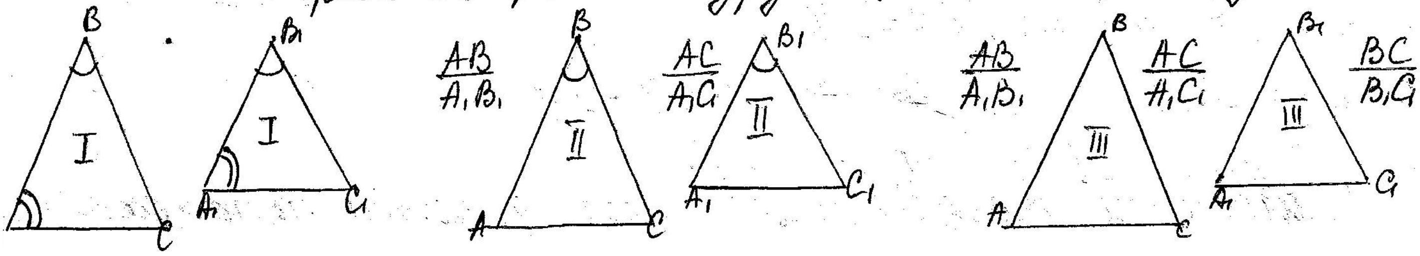
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$ – коэффициент подобия

Признаки подобия

I признак: Если два угла одного △ соответственно равны двум углам другого, то такие △ подобны

II признак: Если две стороны одного △ пропорциональны двум сторонам другого △ и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие △ подобны

III признак: Если три стороны одного △ пропорциональны трем сторонам другого, то такие △ подобны



② Признак параллелограмма

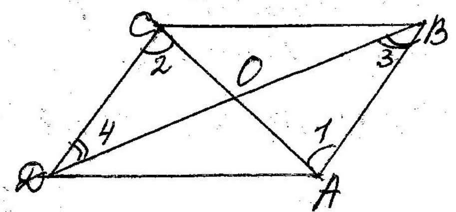
Теорема: Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм

Дано: $ABCD$ - четырехугольник, диагонали $AC \cap BD = O$
$AO = OB$, $OC = OD$

Док-ть: $ABCD$ - параллелограмм

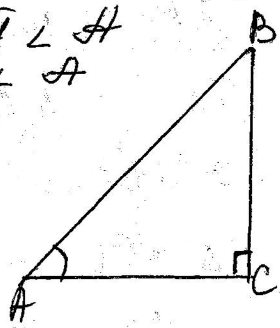
Док-во: 1. △AOB = △COD (I признаку: $AO = OC$, $BO = OD$ (усл)
$\angle AOB = \angle COD$ вертикальные
$\Downarrow$
2. $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow AB \parallel CD$

Вывод: в четырехугольнике $ABCD$
$AB = CD$, $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ - параллелограмм



Билет 7 Определение sin, cos, tg острого угла 8 класс

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, катет BC – противолежащий $\angle A$
катет AC – прилежащий $\angle A$



Синусом острого угла $\triangle$ называется отношение противолежащего катета к гипотенузе

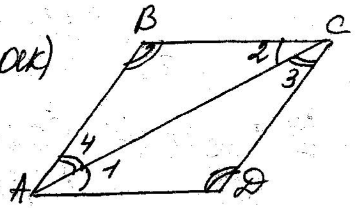
Косинусом острого угла $\triangle$ называется отношение прилежащего катета к гипотенузе

Тангенсом острого угла $\triangle$ – отношение противолежащего катета к прилежащему катету

$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$ $tg A = \frac{BC}{AC}$

② Свойство параллелограмма
Док-во свойства: (билет № 8)

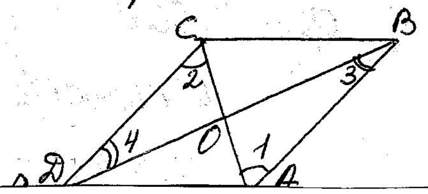
I. Противоположные стороны и углы равны



1. Диагональ AC на 2 $\triangle$: $\triangle ABC = \triangle ADC$ (II признак)
AC - общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ накрест лежащие
2. $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$
3. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 \Rightarrow \angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$

II. Док-ть св-во: (билет № 7)
Диагонали точкой пересечения делятся пополам

1. диагонали $AC \cap BD = O$
2. $\triangle AOB = \triangle COD$ (II признак) $AB = CD$ противоп. стороны
3. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ накрест лежащие
4. $AO = OC$, $OB = OD$



Билет 8

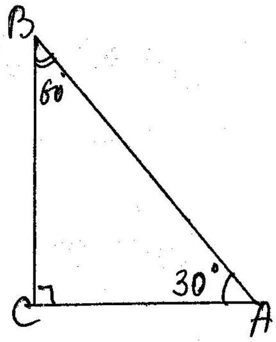
1. Значение sin, cos, tg углов в 30°, 45°, 60°

	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$BC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$

$\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$

$\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$

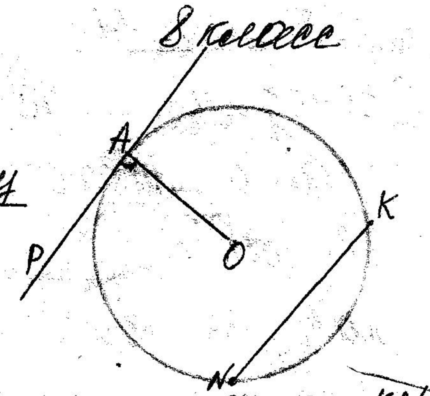


2. Док-ть св-ва противоположных сторон и углов.

Билет 9

8 класс

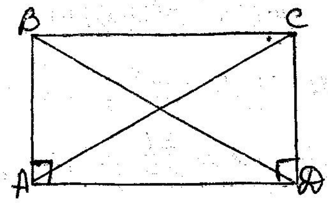
1. Касательная к окружности - прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, p - касательная, A - точка касания



Секущая к окружности - прямая, которая пересекает окружность в двух различных точках - KN

2. Свойство диагоналей прямоугольника

Диагонали прямоугольника равны.



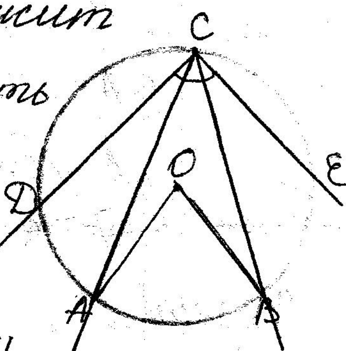
1. Δ ACD = Δ DBA (катет CD = BA, AD - общий катет)
   ⇓
2. гипотенуза AC = гипотенузе BD ⇒ AC = BD.

Билет 10.

1) Центральный угол - угол, с вершиной в центре окружности

Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность

$\angle$ AOB - центральный, $\angle$ DCE, $\angle$ ACB - вписанный
$\angle$ DCA, $\angle$ BCE



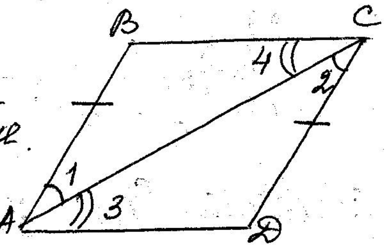
2) Признак параллелограмма

Если в четырехугольника две стороны равны и ‖, то этот четырехугольник - параллелограмм.

Дано: ABCD - четырехугольник, AB = CD, AB ‖ CD.
Док-ть: ABCD - парал-м.

Док-во: 1. AC - диагональ

2. Δ ABC = Δ CDA (I признак: $\angle 1 = \angle 2$ накрест лежащие, AC - общая, AB = CD (по условию).



$\angle 1 = \angle 2$ накрест лежащие (AB ‖ CD, AC - секущая)

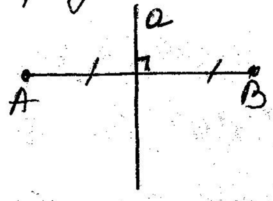
$\angle 3 = \angle 4$ накрест лежащие (AD и BC, AC - секущая) ⇒ AD ‖ BC

В четырехугольнике ABCD противоположные стороны попарно ‖ ⇒ ABCD - параллелограмм

Билет 11. 8 класс

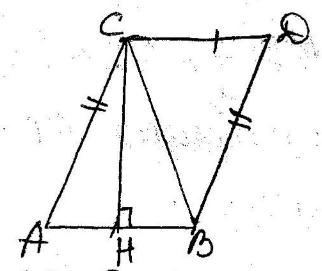
① Серединный перпендикуляр к отрезку – прямая, проходящая через середину данного отрезка и $\perp$

Свойство:



Каждая точка серединного $\perp$ к отрезку равноудалена от концов этого отрезка

② Площадь $\triangle$ равна половине произведения его основания на высоту



Дано: $\triangle ABC$, S - площадь $\triangle ABC$

AB - основание, CH - высота

Док-ть: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

Док-во: 1. Достроим $\triangle ABC$ до парал-ма $ABCD$

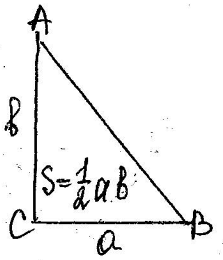
2. $\triangle ABC = \triangle DCB$ (III признак: BC - общая, $AB = CD$, $AC = BD$ как противоположные стороны $ABDC$

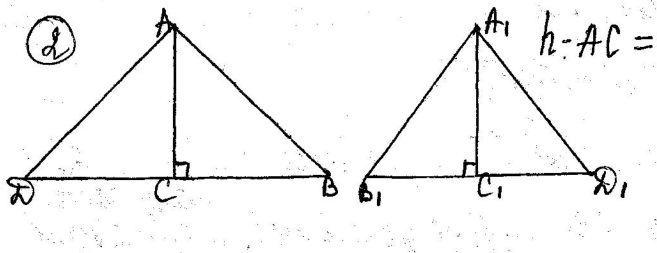
3. $\triangle ABC = \triangle DCB \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$

4. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

Следствие 1: Площадь прямоугольного $\triangle$ = половине произведения его катетов

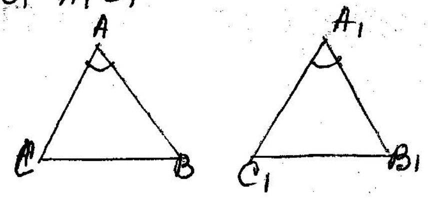
Следствие 2: Если высоты двух $\triangle$ равны, то их площади относятся как основания

① 

② 

h - $AC = A_1C_1 \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{A_1B_1D_1}} = \frac{BD}{B_1D_1}$

Теорема: Если угол одного $\triangle$ равен углу другого $\triangle$, то площади этих $\triangle$ относятся как произведения сторон, заключающих равные углы $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$



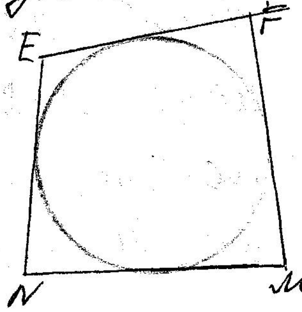
Формула Герона

$S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-в)(p-c)}$

$p = \frac{a+в+c}{2}$

Билет 12.

① Окружность вписанная в многоугольник - если все стороны многоугольника касаются окружности



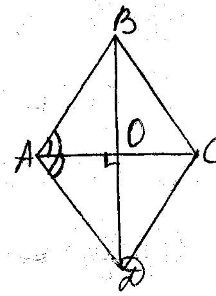
многоугольник EFMN описан около окружности

Свойство: В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны

$EN + FM = EF + NM$

обратное: Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

② Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Дано: ABCD - ромб Док-ть: $AC \perp BD$, $\angle BAC = \angle DAC$

Док-во: 1. $\triangle BAD$ ($AB = AD$) равнобедренный, по определению ромба

2. ABCD - ромб - параллелограмм $\Rightarrow AO = OC$, $BO = OD$ по свойству

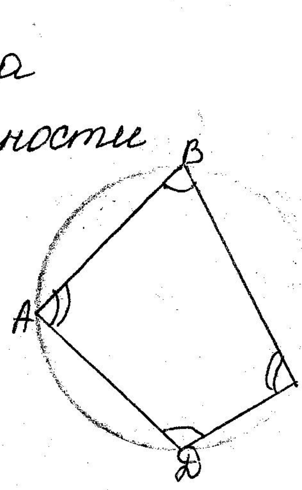
3. AO - медиана $\triangle BAD \Rightarrow$

AO - высота $\Rightarrow AC \perp BD$

AO - биссектриса $\Rightarrow \angle BAC = \angle DAC$

Билет 13

① Окружность описанная около многоугольника если все вершины многоуг-ка лежат на окружности



ABCD - вписанный в окружность.

Свойство четырехугольника, вписанного в окружность:

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов $= 180°$.

$\angle B + \angle D = \angle A + \angle C$

$\angle A = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BCD}$ $\angle C = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BAD}$

$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 360 = 180°$

Билет 13

② Свойство биссектрисы угла

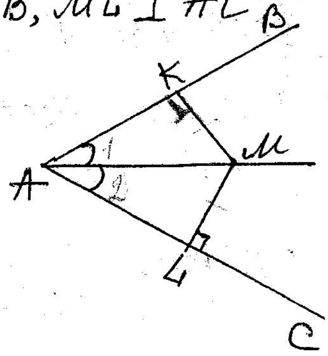
Теорема: Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон

Дано: $\angle BAC$, AM - биссектриса, $M \in AM$, $MK \perp AB$, $ML \perp AC$

Док-ть: $MK = ML$

Док-во: 1. $\triangle AMK = \triangle AML$ (AM - общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ биссект.)

2. $\triangle AMK = \triangle AML \Rightarrow MK = ML$



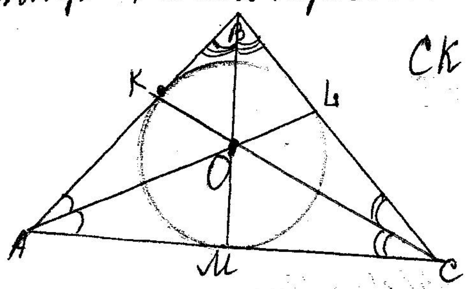
Билет 14

① Окружность, вписанная в $\triangle$ - это окружность, касающаяся всех сторон $\triangle$.

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис $\triangle$

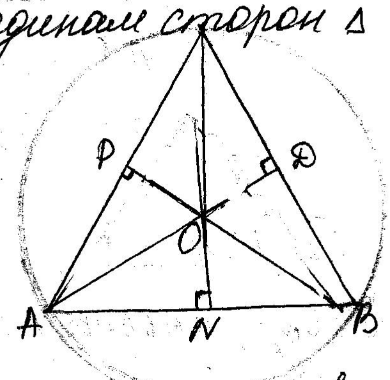
Окружность, описанная около $\triangle$ - окружность, проходящая через все вершины $\triangle$

Центр - точка пересечения перпендикуляров к серединам сторон $\triangle$



$CK \cap AL \cap BM = O$

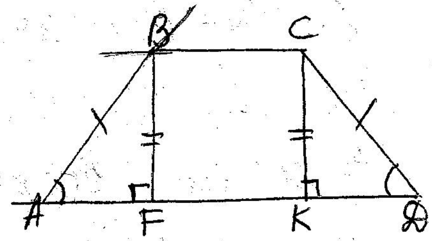
$AD \cap BP \cap CN = O$



② Углы при основании равнобедренной трапеции равны

Дано: $ABCD$ - трапеция, $AD \parallel BC$, $AB = CD$

Док-ть: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$



Док-во: 1. $BF \perp AD$, $CK \perp AD$

2. $\triangle ABF = \triangle DCK$ ($AB = CD$, $BF = CK = h$) $\Rightarrow \angle A = \angle D$

3. $\angle A + \angle ABC = 180°$ (односторонние $AD \parallel BC$, AB - секущая)

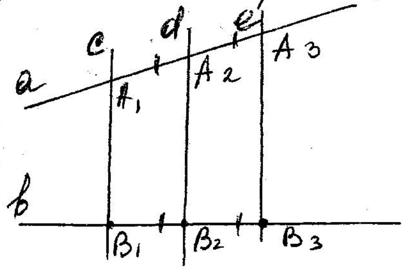
$\angle D + \angle DCB = 180°$ (одностор. $AD \parallel BC$, CD - секущая)

4. $\angle \cancel{A = \angle D} \Rightarrow \angle ABC = \angle DCB$; $\angle B = \angle C$

Билет 15.

① Теорема Фалеса

Если на одной из двух прямых отмерить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то пересекая вторую прямую они отсекут на ней равные между собой отрезки

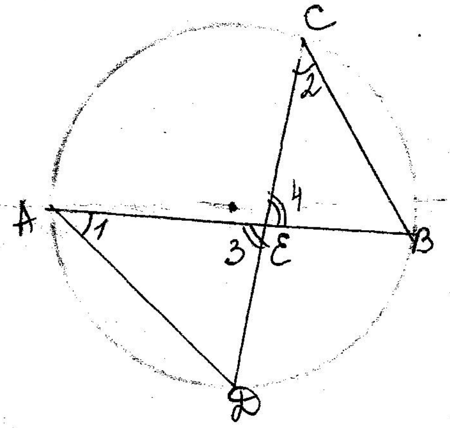


$A_1A_2 = A_2A_3 \ldots \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3$

$c \parallel d \parallel e$

② Свойство отрезков пересекающихся хорд

Теорема: Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



Дано: AB, CD - хорды, $AB \cap CD = O$

Док-ть: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$

Док-во: 1) $\triangle ADE \sim \triangle CBE$:

$\angle 1 = \angle 2$ вписанные, опираются на одну $\overset{\frown}{BD}$

$\angle 3 = \angle 4$ вертикальные

2) $\triangle ADE \sim \triangle CBE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow AE \cdot BD = CE \cdot DE$