1、推导弦链系统的振动方程：

$f(x,t)=0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

其中 $\mu=\mu(x) \Rightarrow \mu(x+a)=\mu(x)$ 具有周期性

分离变量法 $u(x,t)=y(x)e^{\pm i\omega t}$

$$\Rightarrow y(x)(-\omega^2)\cancel{e^{\pm i\omega t}}-\frac{T}{\mu(x)}\frac{d^2y(x)}{dx^2}\cancel{e^{\pm i\omega t}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{\omega^2}{T}\mu(x)y(x)=0 \Longrightarrow \mu(x)=\mu_0+\sum_k m\delta(x-ka) \qquad k=1,2\cdots$$

$Q(x)=\frac{\omega^2}{T}\mu(x)$

$$\begin{cases} y''(x)+Q(x)y(x)=0 \\ Q(x)=Q(x+a) \end{cases}$$

0 —— 1

$y(x+a)=\rho y(x)$

$y(x)=e^{ikx}p(x)$; $ik=\frac{\ln\rho}{a}$

其中 $p(x)$ 是以 a 为周期的周期函数.

$(ik)^2\cancel{e^{ikx}}p(x)$
$+\cancel{e^{ikx}}p''(x)$
$+2p'(x)ik\cancel{e^{ikx}}$
$+Q(x)\cancel{e^{ikx}}p(x)=0$

$$p''(x)+2ikp'(x)+(Q(x)-k^2)p(x)=0$$

在 $x\neq ka$ 处. 应满足 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\mu_0\omega^2}{T}y=0$ $\quad k=\sqrt{\frac{\mu_0}{T}}\,\omega$

$$\Rightarrow \quad y=A\sin kx+B\cos kx$$

$$y(x+Na)=y(x)$$
$$y'(x+Na)=y'(x)$$

$ik=\frac{\ln\rho}{a}$ $\qquad \rho^N=1$

$$y(x)=e^{ikx}p(x) \qquad y'(x)=ike^{ikx}p(x)+e^{ikx}p'(x)$$

$$ike^{ikx}e^{ikNa}p(x+Na)+e^{ikx}e^{ikNa}p'(x+Na)$$
$$=ike^{ikx}p(x)+e^{ikx}p'(x)$$

$$e^{ikNa}=1 \Rightarrow k=\frac{2n\pi}{Na} \quad (n\in \mathbb{Z})$$

$$y(x)=e^{ikx}p(x) \qquad k=\frac{n\pi}{Na} \quad (n=1.2\cdots N-1)$$

$$\mu(x)=\mu_0+\sum_{i=0}^{N-1} m\,\delta(x-ia) \qquad -\Delta<x<Na-\Delta$$

$$\xi=\frac{x}{a} \qquad \delta^2=\frac{\mu_0\omega^2a^2}{T}$$

$$\eta=\frac{m}{\mu_0 a} \qquad \tau=\frac{\Delta}{a}$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\delta^2 y=0 \qquad \xi\neq 0.1.2\cdots N-1$$

$$\begin{cases} \left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\xi+}-\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\xi-}+\eta\,\delta^2 y(\xi)=0 & \xi=0.1.2\cdots N-1 \\ y(\xi_+)=y(\xi_-) & \xi=0.1.2\cdots N-1 \end{cases}$$

$$y(-\tau)=y(N-\tau)=0$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} y \\ \frac{y'}{\delta} \end{pmatrix} \qquad T(\phi)=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

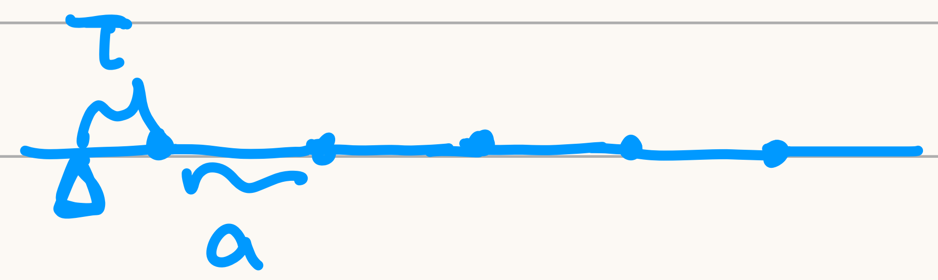
$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\eta\delta & 1 \end{pmatrix} \qquad y=A\cos\delta\xi+B\sin\delta\xi$$

$$\varphi(\xi)=\begin{cases} T(\delta(\xi+\tau))\,\varphi(-\tau) & \xi<0 \\ T(\delta\xi)\,M\,T(\delta\tau)\,\varphi(-\tau) & 0\leq\xi<1 \\ T(\delta(\xi-\mathrm{trunc}(\xi)))\,M\,T(\delta(\mathrm{trunc}(\xi)-\xi+1))\,\varphi(\xi-1) & \xi\geq 1 \end{cases}$$

不妨令 $\varphi(-1)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

实验步骤：

N m_b μ



① 测 a，平均间距和方差

② 在 $N=6$ $\begin{cases} \tau = 0 \\ \tau = \frac{1}{3} \\ \tau = \frac{1}{2} \end{cases}$ 测前13个本征 f

③ 在 $N=7$ ···

④ 画出前两部分的色散关系

⑤ $N\to\infty$，弦球链的前两个通带

给出第一禁带宽度

⑥ 定性测 $\tau=\frac{1}{3}$（②中），第一禁带内的本征函数

标出节点位置

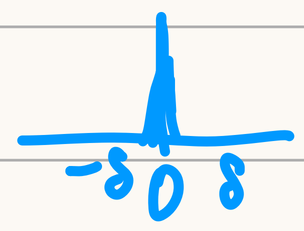
⑦ 第二频带和第三～，推导频率的理论表达式和

理论值，并与实验结果比较

理论求解办法：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^2}{T}\left[\mu_0+m_b\sum_{i=0}^{N-1}\delta(x-ia)\right]y=0$$

$0<x<a$ 时：



$$y'\Big|_{-\delta}^{\delta}+m_b\int_{-\delta}^{\delta}\delta(x-0)y\,dx=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\omega^2}{T}\mu_0 y=0 \qquad \frac{\omega^2}{T}m_b\,y(0)\;B$$

设 $k=\sqrt{\frac{\mu_0}{T}}\,\omega$，则 $y=A\sin kx+B\cos kx \quad (0<x<a)$

利用布洛赫定理 ($-\Delta<x<0$ 时)

$$y=e^{-ika}\left[A\sin k(x+a)+B\cos k(x+a)\right]$$

$x=0$ 处连续；和导数突变：

$$\begin{cases} B=e^{-ika}\left[A\sin ka+B\cos ka\right] \\ Ak-e^{-ika}k\left[A\cos ka-B\sin ka\right]=\frac{\omega^2 m_b B}{T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ae^{-ika}\sin ka+B(e^{-ika}\cos ka-1)=0 \\ A(k-e^{-ika}k\cos ka)+B\left(ke^{-ika}\sin ka-\frac{m_b}{T}\omega^2\right)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos Ka=\underbrace{\cos ka-\frac{m\omega^2}{2Tk}\sin ka}$$

令 $ka=z=\sqrt{\frac{\mu_0}{T}}\,\omega a$，$\beta=\frac{m\omega^2 a}{2T}$

$$f(z)=\cos z+\beta\frac{\sin z}{z}$$

加入边界条件 $x=-\Delta$ 时 $y=0$

$e^{-ika}(A\sin k(a-\Delta)+B\cos k(a-\Delta))=0$

$x=Na-\Delta$ 时 $y=0$

$e^{i(N-1)ka}(A\sin k(x-(N-1)a)$
$+B\cos k(x-(N-1)a))=0$

$Na-\Delta$

$a-\Delta$