

有限周期性弦球链系统的振动模^{*}

荀 坤, 郭 猜, 田正阳

(北京大学 物理学院, 北京 100871)

摘要:用实验和数值模拟的方法研究了一个有限周期性弦球链系统的振动模. 观察到了振动谱的带状结构, 表面态模. 考察了表面态模的振动频率与第一个小球距弦端的距离 τ 的关系. 用离散差分法对该弦球链系统作了数值模拟并对实验和数值模拟结果作了简单讨论.

关键词:周期系统; 弦振动; 振动模; 表面态

中图分类号: O 32; O 481

文献标识码: A

文章编号: 1000-0712(2009)10-0004-04

按照量子论的观点, 物质以波的形式存在. 从某种意义上讲, 对各种类型物质波的研究构成了物理学的主要内容. 其中, 对晶体中电子和声子的布洛赫波的研究对理解固体的各种性质有基础性的意义. 布洛赫波并非晶体所特有, 而是所有周期结构体系都同样具有的波动形式. 正如布里渊在其《波在周期系统中的传播》一书的引言中所指出的那样, “无论是纵波还是横波, 是电磁波还是机械波, 波总是表现出相似的行为”^[1]. 在某个系统中存在的波动行为, 一般在其他具有类似结构的系统中也同样可以观察到. 因此, 我们总可以期待通过研究某一特定周期性体系中波的特性来理解其他类似系统的一般性质.

虽然现实世界是三维的, 但一维的模型要更简单和更容易理解, 是研究实际问题的基础. 对一维周期系统的研究, 可以追溯到 300 多年前. 1686 年, 为推导空气中的声速公式, 牛顿引入了一个周期排列的弹簧质点链模型. 在此模型中, 空气的弹性和质量被分离开来, 分别被用一无质量的弹簧和一质点代表. 牛顿根据此模型得到了正确的声速公式. 但是, 在牛顿的模型中弹簧没有质量, 系统的自由度等于质点的数目, 也即是系统的周期数, 因此, 得不到振动谱带和带隙的概念.

近年来, 电磁波在折射率周期性变化的介质中(光子晶体)^[2]和声波在声学性质周期性变化的介质中(声子晶体)^[3]的行为又吸引了人们的较大兴趣. 因此, 对具有周期性结构的系统中的波的研究具有更普遍的意义.

现实世界中的所有系统(整个宇宙除外)都是

有限的, 严格具有平移不变性的周期系统并不存在. 虽然对大晶粒来说边界效应可以忽略, 可按其具有平移不变性来处理, 但对于亚微米和纳米尺度的晶粒, 边界的影响将变得不可忽略, 可能会引起一些新现象. 对有限周期系统中电子结构的研究也有现实的需要^[4]. 因此, 研究一个有限、简单、直观、理论上易于处理的周期性系统中的波动性质将会是非常有意义的.

我们这里提出的弦球链系统是一个具有无限自由度, 理论上可以精确求解(至少在数值上), 实验参数易于控制, 简单直观的有限周期系统. 借助于此系统的研究, 可以很好地建立谱带、带隙、表面态等周期结构体系中的波所共有的概念. 此外, 通过弦、球的不同配置, 还可以进一步研究杂质和无序引起的局域态等有意思的内容.

我们完整测量了此系统的前 3 个振动带, 观察到了由于弦球链长度有限所引起的“表面态”(带边态), 研究了带边态振动频率与小球到固定端距离 τ 的关系, 通过理论分析和数值模拟, 对所观察到的实验结果作了解释.

1 实验装置

我们采用的弦球系统如图 1 所示, 其中钢弦的一端固定在固定端 F 上, 另一端跨过一定滑轮后由砝码加一固定张力 F_T , 弦上穿有质量相等的小球, 两小球间距离相等为 a . S_1 和 S_2 是两个可以沿弦滑动并可固定卡块的, 改变卡块的位置可以改变卡块 S_1 到第一个小球的距离 τ . 在本实验中最后一

^{*} 全国大学物理学术研讨会暨《大学物理》第八届编委会扩大会议征文

收稿日期: 2009-05-27

作者简介: 荀坤(1961—), 男, 贵州兴义人, 北京大学物理学院副教授, 博士, 主要从事近代物理实验教学和磁学及表面物理研究工作.

一个小球到卡块 S_2 的距离为 $a-\tau$.

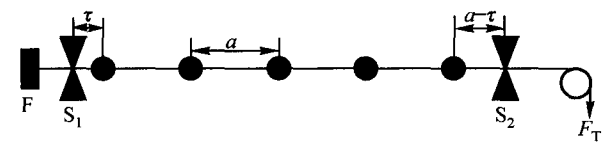


图 1 周期性的弦球链系统

实验中所用钢弦的弦直径为 (0.320 ± 0.005) mm,线密度 $\mu=0.64$ g/m,小球质量 $m=0.28$ g,小球直径为 5.0 mm,两小球间距 $a=200$ mm,弦的总长为 1.000 m,张力 $F_T=11.8$ N.

采用 PASCA 公司弦音计实验提供的 WA-9613 驱动线圈来激励弦振动,激励电流由 SG1005P5MHZ 数字信号发生器供给.由于 WA-9613 驱动线圈铁芯和钢弦均是软磁材料,激励力的频率是信号频率的 2 倍.采用 PASCA 公司弦音计实验提供的 WA-9613 探测线圈来感应弦的振动,并将感应信号送到示波器显示或 7265 DSP 型锁相放大器作测量.探测线圈的中心为一永磁磁芯.当探测器靠近弦时,永磁芯会使钢弦磁化,被磁化的钢弦振动会在线圈中产生感应电动势.虽然感生信号与弦振动振幅间是单调函数,但不是线性关系,故不能简单地定量测量弦上不同点的相对振幅.

逐步增加激励电流的频率,同时检测感应线圈输出信号的大小.当激励频率等于系统的某一固有振动模的频率时,将会发生共振,感应线圈的输出信号会剧烈增加.我们认为此时信号发生器输出信号的频率的 2 倍即为该振动模的固有频率.我们的实验结果表明,驱动线圈的位置对固有频率的测量结果没有影响.改变感应线圈的位置会发现某些点没有感应信号输出,且其两侧的感应信号相位相反,这些点被认为是弦上驻波的节点.我们可以用节点数来唯一标记振动模.在作锁相测量时,用数字信号发生器的输出作参考信号,探测其二次谐波成分.信号发生器的频率分辨率为 0.1 Hz,但由于非线性效应,共振频率会随振幅增大而增大,所以固有频率的测量误差可达 5 Hz.根据探测器线圈的直径和其到弦的距离估计探测的空间分辨率约为 3 mm.

2 实验结果

我们测量得到此周期弦球链系统的前 13 个振动模,结果见表 1.图 2 是由表 1 数据画出的振动谱,其中横轴为驻波振动的节点数,纵轴是振动频率.

表 1 两种 τ 值情况下周期弦球链系统的振动模

节点数 N	固有频率 f/Hz (实验)		固有频率 f/Hz (理论)	
	$\tau=100$ mm	$\tau=170$ mm	$\tau=100$ mm	$\tau=170$ mm
0	37	38	38	38
1	73	75	74	74
2	105	106	106	106
3	127	131	129	129
4	136	206	137	194
5	343	352	351	351
6	361	371	365	365
7	379	400	381	381
8	400	430	394	394
9	672	450	689	420
10	684	694	692	692
11	711	714	700	700
12	738	745	709	709

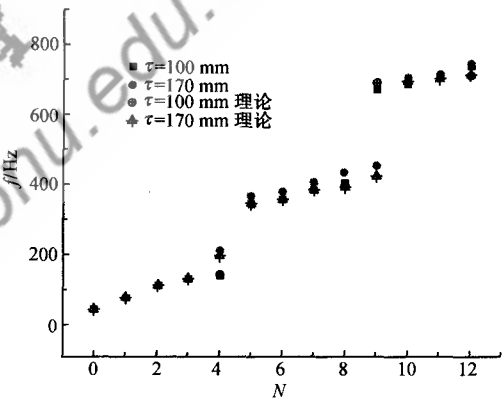


图 2 周期弦球链系统的振动模

从图 2 可以看出, $\tau=100$ mm 和 $\tau=170$ mm 时振动谱均具有带状结构,且当 $0<ka<\pi$ 时(以后称“带内态”),两者的数据点几乎重合.而当 $ka=0$ 或 π 时,不同 τ 值对应的振动频率有较大差别.此结果与任尚元从理论上讨论有限晶体电子结构时给出的结论以及我们所作的数值模拟结果一致^[4].

$\tau=170$ mm 时,当节点数为 4 时弦球链系统振动的包络波形如图 3 所示.在此振动模式下,弦的一端振幅较大而另一端振幅非常小,几乎检测不到振动,和固体中电子局域在表面附近的表面态情况类似,这里我们也称其为“表面态”.表面态的波形与激发源的位置无关.激发源在弦的左、中、右 3 个位置时得到的波形没有可观测的变化.除了节点数为 4 的情况外,在节点数为 9 和 14 时,我们也同样观察到了表面态.一般地,当 $j\times n-1$ 时(j 是整数, n 是弦球链所包含的周期数),都应该存在表面态.

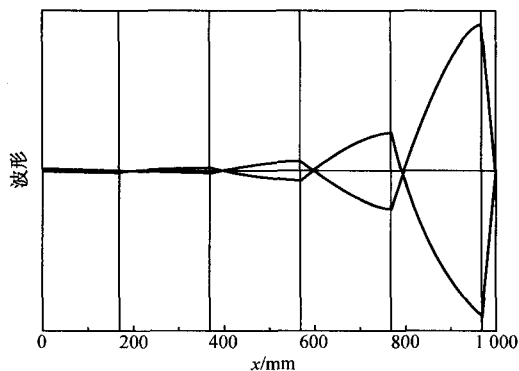


图3 节点数为4的表面态包络波形示意图(由于不能精确测量振动的振幅,这里给出的只是一个实验图.图中用竖线标记小球的位置.)

$\tau = 100$ mm时,弦球链相对于其中心是对称的,因此,弦的两端振幅相同,我们没有观察到表面态.

我们还考察了 τ 不同时,节点数为4的表面态振动频率的变化,得到的结果见图4.考虑到弦两端距相邻小球的距离之和应为20 cm, τ 的变化范围只需取0到10 cm.对节点数为9的表面态,要作精确测量较困难,但我们还是观察到 f 和 τ 间的关系与节点数为4时的情况不同,不是单调的,存在一个极值.

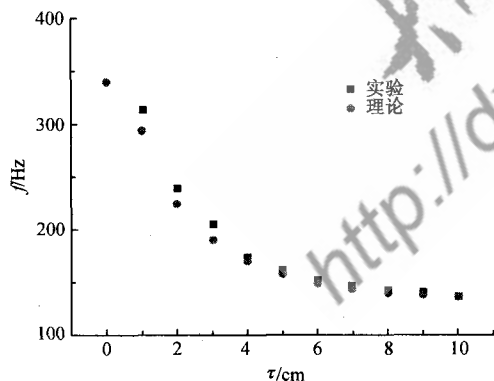


图4 第一个能隙中表面态频率与 τ 的关系

3 分析与讨论

取 x 轴为弦球链方向,设弦的横向位移为 u ,忽略空气摩擦等耗散作用,弦上 x 处一小线元 dx 的运动方程可写为

$$\mu dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + f(x, t) dx \quad (1)$$

其中 μ 是弦的线质量密度, $f(x, t)$ 是 t 时刻 x 处单位长度弦所受的外力.化简式(1)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{F_T}{\mu} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) / \mu \quad (2)$$

对自由振动, $f=0$.分离变量,设

$$u(x, t) = y(x) g(t) \quad (3)$$

经简单的推导,可得

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{\mu(x) \omega^2}{F_T} y(x) = 0 \quad (4)$$

式(4)中 ω 是本征振动频率, $|y(x)|$ 是弦球链在 x 点处的振幅.在我们这里, $\mu(x) = \mu_0 + \sum_{i=0}^{N-1} m \cdot \delta(x - \tau - ia)$,其中 μ_0 和 m 分别是未加小球时弦的线质量密度和小球质量.显然, $\mu(x)$ 是周期函数,式(4)是周期系数的二阶常微分方程,与一维周期势中的薛定谔方程

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (5)$$

非常相似.因此,弗洛盖定理、布洛赫定理等关于周期系数二阶常微分方程的定理及许多关于周期系统内电子波函数和能谱结构的讨论均适用于式(4).我们这里讨论的情况和电子在狄拉克梳中的运动情况非常相似^[5].

尽管所研究的有限周期弦球链系统并不具有平移对称性,我们可以将其延拓得到一无限周期系统.凡无限周期系统中满足 $x=0$ 和 $x=na$ 处值为零的解也一定是我们讨论的含有 n 个周期的有限系统的解.所以,虽然我们讨论的系统不是布洛赫波矢的本征态,但可以与之对应的无限周期系统的布洛赫波矢联系起来,在此意义下,我们可以在第一布里渊区画出周期弦球链系统的振动谱带图,见图5.

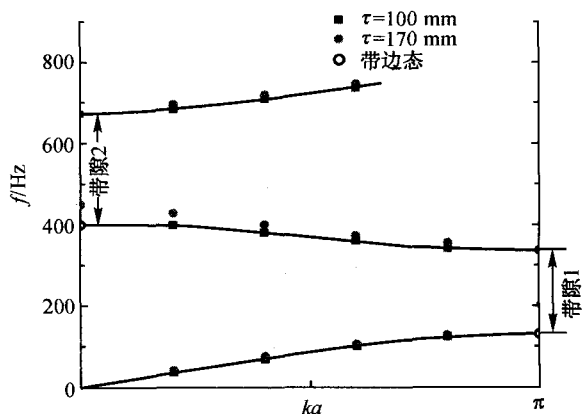


图5 周期性弦球链系统的振动带图
(图中 k 为相应的无限周期系统的布洛赫波矢, a 为相邻小球间距.)

任尚元对有限晶体中的电子态的一般性质做过很详尽的讨论^[4].借用他的结论,我们很容易得到:

- 1) 振动谱具有带结构(与电子的能带结构类似),两振动谱带间存在带隙;
- 2) 对带内态,有限弦球链的振动谱是无限弦球

链振动谱的一个子集,且 τ 不影响振动模的频率;

3) 除 $\tau=a/2$ 的特殊情况外,在带隙中会出现振动主要局限在弦一端的表面态,且一个带隙内只能有一个表面态. 表面态的振动频率不随弦球链的长度而改变.

图 5 除两种 τ 对应的部分实验点不完全重合外,基本反映了上面的结论.

通过将实验参数代入式(4),计算得到两种 τ 值下的频谱数值解,见表 1 和图 1. 在低频情况下,理论模拟与实验结果一致,但在高频时实验测得的频率要略高于理论计算值,其原因还有待进一步研究.

我们还用数值计算的方法给出了不同振动模所对应的波形,其结果与实验观察定性一致. 其中, $\tau=170\text{ mm}$ 时的前 10 个振动模的波形见图 6. 所有非表面态均有对应的无限系统的解与之对应,所以弦两端的导数一定相等.

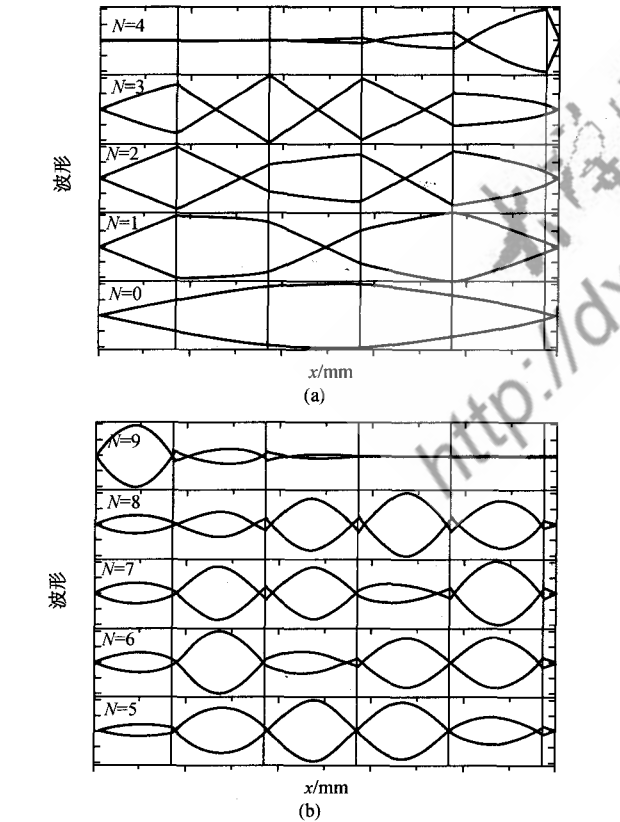


图 6 $\tau=170\text{ mm}$ 时的前 10 个振动模的波形
(图中 N 为节点数目,竖线用于指出小球的位置. 其中, $N=4$ 和 $N=9$ 的态为表面态.)

对表面态,距弦端 $l \times a$ 处一定是节点,此处 l 为整数. 因此,表面态和仅含 1 个周期的球链系统的本征态对应,相邻周期的表面态的解只差一个常数 $e^{-\gamma a}$,其中 γ 为表面态的衰减系数. 显然,表面态的振

动频率不会随系统包含的周期数的增加而变化. 但是,如果我们只考察包含 1 个小球的一段弦(单个弦球链周期),其本征频率显然会随小球在弦上的位置而变化. 我们计算了最初几个能隙中的表面态的频率随 τ 的变化,结果见图 7,作为对比,我们也将第一个能隙的结果画在了图 4 中. 从图 4 可以看出,理论与实验的结果基本一致. 图 7 的结果显示, $f-\tau$ 关系在第 1 个带隙中没有极值点,第 2 个带隙中有 1 个极值点,第 3 个带隙中有 2 个极值点,第 4 个带隙中有 3 个极值点,这和直观的物理图像一致.

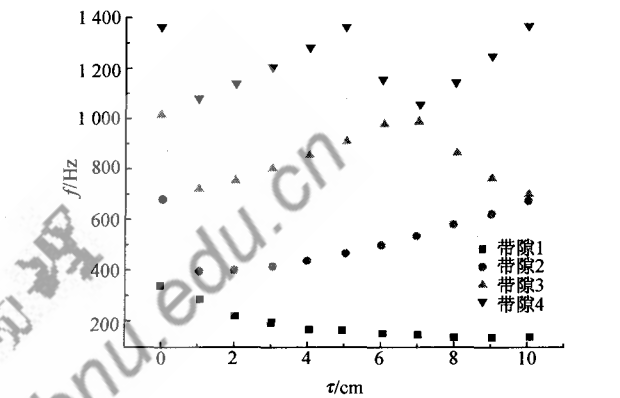


图 7 数值计算得到的表面态频率 f 与 τ 的关系

有一个事实应该指出,就是所有带底的频率(带隙上沿,也即是该带隙中表面态的可能的最高频率)只由弦的线密度和张力决定,与小球质量无关. 这一结果可由所有小球均处于节点位置时,振动模与弦上无小球时的情况一样得到.

上面讨论的仅仅是最简单的弦球链系统. 如果在弦上穿上两种不同质量的小球可以得到类似双原子系统的振动谱,改变其中一个小球的质量可以研究杂质态,无规改变小球质量或小球间的间距可以研究无序态,让两端小球与内部的小球质量不同或间距不等可以研究表面重构对振动谱的影响等.

致谢:本工作是在任尚元教授的建议下开始的,在研究过程中得到了他的热情鼓励和帮助,在此特致谢意!

参考文献:

[1] Brillouin L. Lattices wave propagation in periodic structures : electric filters and crystal [M]. 2nd edition. New York: Dover Publications, Inc. , 1953.
[2] 张蜡宝,熊予莹,费贤翔,等. 光半导体-光子晶体[J]. 大学物理,2006,25(4):49.

- [2] 曾谨言. 量子力学[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
[3] 苏汝铿. 量子力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1997.

- [4] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 北京: 气象出版社, 2002.

The Landau energy in two-dimensional ring infinite potential well

FENG Jun-sheng¹, LIU Zheng²

(1. Department of Physics and Electronic Engineering, Hefei Teachers College, Hefei, Anhui 230061, China;

2. Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology, Chinese Academy of Science, Shanghai 200050, China)

Abstract: The motion of a charged particle in the magnetic field is described in many textbooks, however, the charged particle in two-dimensional infinite potential well has been not mentioned yet. In this paper we investigate the energy of charged particle and Landau energy levels with the bound of two-dimensional infinite potential well.

Key words: two-dimensional ring infinite potential well; Pauli equation; Bessel equation; Sturm-Liouville equation; Landau energy

(上接 3 页)

- [8] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程: 力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 297.

Plane wave motion in elastic solids

LI Fu

(Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The wave equations of plane wave in elastic solids are derived from Hooke law.

Key words: Hooke law; elastic solids; plane wave; wave equation

(上接 7 页)

- [3] Lin S C S, Huang T J, Sun J H, et al. Gradient-index phononic crystals [J]. *Phys Rev B*, 2009, 79: 094302. 社, 2006.
[4] 任尚元. 北京大学物理学丛书: 有限晶体的电子结构——Bloch 波的量子限域[M]. 北京: 北京大学出版
[5] 曾谨言. 量子力学: 上册[M]. 北京: 科学出版社, 1984: 90.

Studies on the vibration modes of a finite periodical string-ball chain

XUN Kun, GUO Cai, TIAN Zheng-yang

(School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: The vibration modes of a finite periodical string-ball chain are studied with both experimental and calculation methods. The vibration spectrum of the system appears band structure and the surface states could be observed in band gap. The eigenfrequencies of the surface states are measured and calculated for different distances τ from the start of the chain to the first ball. A brief discussion is given for the observations and calculations.

Key words: periodical system; string vibration; vibration modes; surface state