

Statement

This is a note from the course Input-Output Analysis taught by Professor Qiuyang Hu at the School of Economics, Nankai University. Input-output analysis is widely used in Mathematical Political Economy and Industrial Economics, expressed using matrices and implemented using Excel. This note is divided into two parts: theoretical knowledge and computer operation. Textbooks are listed in the Reference section.

Contact

Errors in this note are my own. If you find any mistakes in the note or would like to discuss with me, please feel free to contact me via 2113133@mail.nankai.edu.cn.

PLEASE DO NOT DUPLICATE OR DISTRIBUTE WITHOUT ZHENYU ZHAO'S PERMISSION.

This note is written in Overleaf, an open-source online real-time collaborative LATEX editor. Last updated, October 13, 2024



1	理论部分	. 5
1.1	投入产出表的结构	5
2	Excel 操作	. 7
2.1	部门合并矩阵	7
2.2	均衡产出模型操作	10
3		13



1.1 投入产出表的结构

我们对经济生活的研究总是从生产活动开始的:无论是新古典微观经济学中对厂商生产技术的考察,例如 Cobb-Douglas 生产函数:

$$y = f(\mathbf{x}) = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$$

还是数理政经里的线性生产理论:

$$(pa + pbl)(1+r) = p$$

$$(ax + blx)(1+g) = x$$

有了生产才有交换、流通、分配和消费等等话题。 而要从事生产,首先就要有一定的投入。在 Cobb-Douglas 生产函数中:

$$Y = f(K, L)$$

等式右边的资本和劳动是存量,而左边的产出是一个流量(如 GDP); 不考虑公司内部组织架构、公司治理等问题, 整个企业的生产就像是一个黑匣子, 有一定量的投入就有相应的产出。劳动或资本的幂刻画的是两种生产要素取得的报酬比例, 由 Euler 定理:

$$Y = MPK \times K + MPL \times L$$

Leontief 在考虑投入-产出问题时,则将其分为了中间投入与初始投入、中间需求与最终需求。

我们首先来看投入端,尝试考察投入要素的差异并对其进行分类。新古典中生产过程的投入涵盖了劳动、资本、土地、企业家才能、数据等等要素,没有生产的具体过程,这里的资本主要是指机器、厂房、设备,类似固定资本,即在一次生产过程中不会被全部耗尽,机器设备的使用以折旧来处理。马克思则将生产划分成了对生产力与生产关系的考察,生产力分为了劳动者与生产资料,即劳动者使用劳动资料对劳动对象进行改造的过程;资本是流动的,不断循环周转,在时间上继起、空间上并存。

先不考虑斯拉法提出的用商品生产商品,单看一个农业生产过程:"春种一粒粟,秋收万颗子",这就是一个简单的投入-产出,但仅仅有种子就够了吗?诗里还有一个重要的动词"种",需要农民伯伯来完成这个动作,当然还需要锄头、镰刀这样的农具、包括现代化的农业机器设备等,而如何选种、机器如何使用需要专家或有经验的人指导;生长过程除了适宜的温度与土壤环境外,可能还需要适时的浇水、施肥、驱避虫害等等。

首先对上面提到的要素做一个分类,在西经和马经的对比中我们隐约感觉到,有的要素一次性被消耗而有的没有,例如劳动力、农具就是在生产过程中可重复使用的,而种子、化肥、技术服务在一次生产活动中完成了价值形式的转换,实体消失,进入到最终产品中。

再来对一次性的要素进行划分,根据《国民经济行业分类》:

第一产业是指农、林、牧、渔业。

第二产业是指采矿业,制造业,供应业,建筑业。

第三产业包括服务业,金融业等。

种子、化肥、技术服务刚好对应三大产业的产品。把这些完整消耗掉的产品称为中间品(或中间投入、中间消耗),把劳动力、资本品称为初始要素(或初始投入、初始消耗、增加值)。值得强调的是:初始投入(即劳动投入和资本投入)(产出)的价值不等于劳动力和资本品自身的价值——工人生产出的产品被资本家无偿占有,工人的剩余价值进入到产品当中,资本家出售商品完成价值增殖的实现,即惊险的一跃,商品本身可能创造出更多的价值;劳动投入即劳动,李嘉图在内的古典经济学家没有对劳动和劳动力进行区分,直至马克思才将其作了阐释分别。所以第一产业(以种植业为例)的投入结构如图1.1

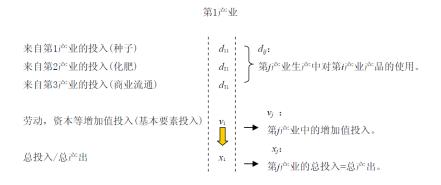


Figure 1.1: 第一产业的投入结构



2.1 部门合并矩阵

在下表2.1中显示的年度投入产出基本流量表中有17个细分行业,在分析时通常需要将一些行业合并。

A	3-20	C 20024	D E+tc)立山	基本流量	事/市间债	田並公)	Н	1	J	K	L	M	N	0	Р	Q	R	S	_
	3 20	20024	-1X/\/ L	本 中 川 里 ・	仅(中国区	ת נקשם מדי													
货当年生产者价格计算。																			
 位:万元																			
	农 业	采掘业	食品制造业	纺织、缝纫及	其他制造业	力、热力及水的	炼焦、煤气及	化学工业	筑材料及其	金属产品	机械设备	建筑业			房地产业、租赁	金融保险业	其他服务业	中间使用合计	
产出				皮革产品制造业		生产和供应业	石油加工业	*	金属矿物制品	創業业	制造业			住實和餐飲业	和商务服务业				7
农业	46368196	400482	48665195	14929518	7931416	19983	46879	6630650	44797	36820	111059	22862990	1316764	12693380		113678	1215546	163387352	_
光輝小	980425	3522633	578518		\$93993	13643672	37394821	9642000	5614025	19883597	2442911	7025824	777986	497301	26722	432647	2049320	105916124	
食品制造业	15717460	24150	19517192	2469542	116667	0	0	1661306	1202	0	345	246056	361187	18104503	9953	207354	2892178	61329095	
纺织、缝纫及皮革产品制造	213490	518175	288534	58077334	4460309	221071	\$9675	1460688	460094	561993	1934548	1058879	619770	2058539	272666	378748	8835238	81509752	
其他制造业	1614621	981772	3445672	2194545	31922391	331806	196089	3977155	2555284	8221507	7263083	10758040	1442646	7801290	1607616	6100944	17194380	107608842	
电力、热力及水的生产和供	3310203	6675985	1601606	2582378	2918722	4055205	1604967	10315568	3572869	10665427	6776944	4167503	2104395	4859462	798105	2361387	5909391	74280115	
炼焦、煤气及石油加工业	2814692	2673374	351415	465640	995110	3392373	3156409	7271507	1757973	6066174	2221719	7156192	18079701	2911038		508050	2863678	62947316	
化学工业	19248702	3577633	4769907	13670509	12591762	760984	1113519	80972315	3879191	4294500	30438266	10542466	1372514	3987849		654988	18134775	210343221	
建筑材料及其他丰金属矿物	900994	717725	829371	327418	722486	180593	151072	1217392	4693308	3355112	5821777	30577593	256964	398615	85177	917321	1318824	52471743	
金属产品制造业	1162704	4127089	1267906		5347287	752453	611561	3407253	3026136	75074277	62980221	46912747	828340	772648		1930528	2057449	211073326	
机械设备制造业	3964841	7306034	1268582	2929627	3875755	7732293	1760948	5388156	2940913	8342401	161357092	25951714	14442299	14273143	2651481	26819656	14587378	305592313	
建筑业	497113	140575	39328	66420	101527	77805	22243	119142	48680	110440	217570	338610	1961900	2304846		3697728	7555931	18414894	
运输邮电业	6152180	3817729	3898697	3335444	4865707	3241727	2963538	7146430	3386468	8713316	11346933	12759813	16286143	6678045		2445890	10099726	109204780	
批发零售贸易、住害和餐饮	7957970	3175037	7751175	8525567	8187931	3418921	2215739	9280771	3277284	9019176	20006053	14037234	4253101	12949236		6479816	17946337	141317694	
房地产业、租赁和商务服务	1194941	2002090	3359790	4018055	2640751	709478	679107	4536877	1202562	3505604	11947151	14944249	3046150	14608221	7965246	8025661	17503094	101889028	
金融保险业	4513873	1612782	1146339	1560269	1585900	2274867	558037	2447272	1783718	1882277	5142131	2350743	7251456	11228354	4985406	7589118	5165042	63077584	
其他服务业	2870359	2232664	1056734	1414760	1071940	1508736	714243	2159017	713582	2230749	3713337	3694276	1404093	5026127	1212033	2504684	11825462	45352797	,
中间投入合计	119482762	43505928	99835961	117744730	90229653	42321967	53278848	157633500	38958086	161963370	333721140	215384929	75805409	121152599	26375147	71168199	147153749 113467464	1915715976	
劳动者报酬 生产税净额	133159686	25695041	12041768	18459317	17791707	9820296	3422128	20406171	9880149	22819739	45865651	38985990	30961105	49227169	13759179	23742432		589504993	
生产税净额 国空资产折旧	5446504 7649132	6513463 7116017	16584325 6419373	6093462 5010472	8443995 6067509	8324572 12057082	3711262 2295399	13351240 10376852	4513542 3690998	10050860 8632348	22052279 15039312	2848851 7021012	6110360	40432340 10020801	1143905 5736725	11241913 40344121	7759242 21524857	174622113 187405672	_
曹小至余	20049338	20341442	9926401	9046378		12057082	1776316	13958406	1002562	10187100	27644510	17086036	18403662 14783756	22077109	26124360		17601752	267056263	
					16383488											26809654			
增加值合计	166304661	59665963	44971867	38609628	48686700	42459604	11205104	58092668	19087251	51690048	110601752	65941888	70258883	121757419	46764169	102138121	160353315	1218589041	
总投入合计	285787423	103171891	144807828	156354358	138916353	84781571	64483952	215726168	58045337	213653418	444322891	281326817	146064292	242910018	73139316	173306319	307507064	3134305017	

Figure 2.1: 2002 年投入产出基本流量表 (中间使用部分)

我们化繁为简,以三个部门/行业/产业为例,想要实现表2.2中三个部门合并成两个,可以直接使用 Excel 的加法功能实现,但问题是现实问题中部门较多,能否有一种一劳永逸的方法让我们在处理不同年份的数据时不用一行一列相加重复操作?

结合矩阵乘法和 Excel 的内置函数恰好能很好的解决这个问题 (需要注意 Excel 的版本,早期版本可能无法实现矩阵乘法)。

如果直接选择两片区域用*号直接相乘是不能实现矩阵乘法的!需要用到 MMULT 函

数: 在函数里选择数学和三角函数 (Maths & Trig), 找到 MMULT, 其中参数 array1 选择一 个矩阵, array2 选定右乘的矩阵, 就可以得到相乘之后的矩阵。

如表2.3所示,记从左到右的矩阵依次为P,A,B,Q,C,则PA=B,BQ=C,PAQ=C,C即 为合并后的目标矩阵, 我们称 P,Q 为部门合并矩阵。

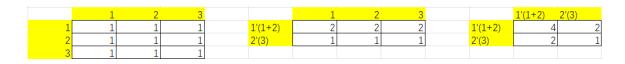


Figure 2.2: 三个部门合并为两个

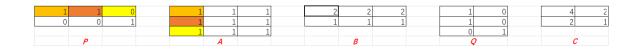


Figure 2.3: 矩阵乘法分步实现部门合并

原理其实很简单, 我们知道:

- 非零矩阵乘单位阵都等于自身;
- 矩阵 A 左乘一个矩阵相当于对 A 做行变换;
- 矩阵 B 右乘一个矩阵相当于对 B 做列变换。

在单位阵的基础上考虑三种初等变换:

- 对换 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 相当于一二行互换 $(r_1 \mapsto r_1 \times 0 + r_2 \times 1, r_2 \mapsto r_2 \times 0 + r_1 \times 1)$ / 一二列互 换 $(c_1 \mapsto c_1 \times 0 + c_2 \times 1, c_2 \mapsto c_2 \times 0 + c_1 \times 1)$
- ・ 倍乘 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 相当于第二行/列乘了 k 倍 $(r_2 \mapsto r_2 \times k / c_2 \mapsto c_2 \times k)$ ・ 倍加 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ 相当于第一行乘了 k 倍加到第二行上 $(r_2 \mapsto r_2 + r_1 \times k)$ / 第二列乘了 k倍加到第一列上 $(c_1 \mapsto c_1 + c_2 \times k)$

表2.2从第一步到第二步,可以看作先左乘了方阵
$$P'=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
,得到 $\begin{pmatrix}2&2&2\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$,不需要第二行,去掉矩阵 P' 的第二行,实际左乘的矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,得到 $\begin{pmatrix}2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$.

2.1 部门合并矩阵 9

同理从第二步到第三步,可以看作先右乘了方阵
$$Q'=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
,得到 $\begin{pmatrix}4&0&2\\2&0&1\end{pmatrix}$,不需要第二列,去掉矩阵 Q' 的第二列,实际右乘的矩阵 $Q=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$,得到 $\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$.

容易观察到矩阵 P(P') 和矩阵 Q(Q') 互为转置。

回到表2.1处的问题,部门合并矩阵就是下表2.4所示的矩阵(记为P)及其转置矩阵(记为Q)(Excel 粘贴时能实现行/列向量、矩阵的转置,或者使用 TRANSPOSE 函数),当我们拿到不同年份的表时就可以用矩阵乘法很快地解决这类问题。

	农业	矿业	轻工业	重工业	基础设施	其他第三产业
农业	1	0	0	0	0	0
采掘业	0	1	0	0	0	0
食品制造业	0	0	1	0	0	0
纺织、缝纫及皮革产品制造业	0	0	1	0	0	0
其他制造业	0	0	1	0	0	0
电力、热力及水的生产和供应业	0	0	0	0	1	0
炼焦、煤气及石油加工业	0	0	0	0	1	0
化学工业	0	0	0	1	0	0
建筑材料及其他非金属矿物制品业	0	0	0	1	0	0
金属产品制造业	0	0	0	1	0	0
机械设备制造业	0	0	0	1	0	0
建筑业	0	0	0	0	1	0
运输邮电业	0	0	0	0	1	0
批发零售贸易、住宿和餐饮业	0	0	0	0	0	1
房地产业、租赁和商务服务业	0	0	0	0	0	1
金融保险业	0	0	0	0	0	1
其他服务业	0	0	0	0	0	1

Figure 2.4: 部门合并矩阵 P

	0	农 业	采掘业	食品制注	纺织、纟	其他制定	电力、対	炼焦、炸	化学工业	建筑材料	金属产品	机械设备	建筑业	运输邮E	批发零售	房地产业	金融保障	其他服务业
农业		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
矿业		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
轻工业		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
重工业		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
基础设施相关产业		0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
其他第三产业		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Figure 2.5: 部门合并矩阵 *Q*

接下来我们应用部门合并矩阵 P 和 Q 对表2.1进行处理。运用分块矩阵的思维,表2.6中 黄色部分需要将列合并(即右乘 P),绿色部分需要将行合并(即左乘 Q),而橙色部分既需要将行合并、又需要将列合并,可以使用函数的嵌套来完成(即在 array 处再使用一次矩阵相乘):

MMULT(MMULT(Q, 橙色部分),P)

等价于 MMULT(Q,MMULT(橙色部分,P))

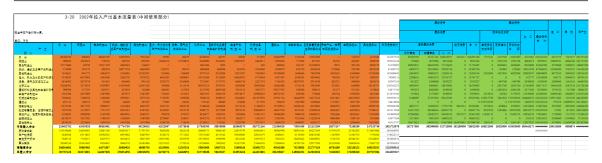


Figure 2.6: 分块的投入产出基本流量表



Figure 2.7: 合并的投入产出基本流量表

部门合并后的投入产出基本流量表如表2.7所示,剩余白色部分通过求和完成,标红的 总投入合计与总产出合计应该相等。

2.2 均衡产出模型操作

我们首先来算投入系数矩阵 A,即用各部门的投入系数除以总投入,得到 6×6 的方阵;在操作时横向拉表格计算没有问题,但在纵向拉表格时,除数的位置也会发生变化,想要保持每次除总投入不变。这里有一个小技巧,就是用美元符号 \$ 固定行或列;假设总投入所在行第一个数所在的单元格为 B55,\$B55 表示固定列只改变行的位置,B\$55 表示固定行只改变列的位置,用后者就能实现投入系数除以的都是第 55 行的总投入。最终投入系数矩阵 A 如下表2.8所示。

Α						
	0.162247152	0.003881695	0.162530375	0.007323146	0.042046887	0.017597264
	0.003430608	0.034143341	0.004504286	0.040335521	0.102040451	0.003772281
	0.06139378	0.014772406	0.278341649	0.030155376	0.026575988	0.082151428
	0.088447705	0.152449283	0.109681749	0.490678167	0.249625258	0.11177575
	0.044698215	0.12898535	0.048223198	0.085578048	0.14110394	0.070824718
	0.057865186	0.087451849	0.096162858	0.088916294	0.109355251	0.172991133

Figure 2.8: 投入系数矩阵 A

接着我们来构造单位阵,直接输入1和0在当前6×6的矩阵下不算太难,但如果阶数扩展到成百上千时就很麻烦了。有没有一种函数能够帮助我们快速构建单位阵?答案肯定是有的。

我们先来看单位阵的特点:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

单位阵 I_n (或 E_n) 是一个主对角线为一,其余位置都为 0 的方阵:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

利用这个思想我们先在单位阵外标上行和列数,如下表2.9:

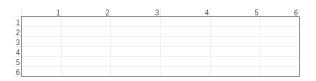


Figure 2.9: 构造单位阵

如果行标 1,2,3,4,5,6 和列标 1,2,3,4,5,6 对应相等,就填上 1,否则记为 0。不难想到这种条件语句会是用到 IF 语句,我们来看 Excel 里 IF 函数的语法:

IF(logical_test,value_if true,value_if false)

后两个判断值即真为 1、假为 0,第一个逻辑判断处我们选定两个单元格,假定行标 1 所在的单元格为 B66,列标 1 所在的单元格为 A67,用等号连接表判断。拉表格后得到如表2.10所示的矩阵,和我们想要的单位阵有出入,错误在哪里呢?

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	1	0	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	1	0	1	1	1

Figure 2.10: 错误的单位阵

查看 a_{24} 处的判断条件,发现为 $a_{23} = a_{14}$,也就是判断值都是由它上面的数和左边的数比较得出的,右下方的判断值依赖于新生成的判断值,看吧,这是我们忘记了上一步固定行或列的操作导致的!

修改判断条件为 \$A67=B\$66, 得到表2.11正确的单位阵。

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

Figure 2.11: 正确的单位阵

接下来就是求 I-A 及其逆矩阵 B,矩阵求逆用到的是 MINVERSE 函数,得到表2.12。观察列昂替夫逆矩阵,其对角线元素的值都大于 1.

I-A						
	0.837752848	-0.00388169	-0.162530375	-0.007323146	-0.042046887	-0.017597264
	-0.00343061	0.965856659	-0.004504286	-0.040335521	-0.102040451	-0.003772281
	-0.06139378	-0.01477241	0.721658351	-0.030155376	-0.026575988	-0.082151428
	-0.0884477	-0.15244928	-0.109681749	0.509321833	-0.249625258	-0.11177575
	-0.04469821	-0.12898535	-0.048223198	-0.085578048	0.85889606	-0.070824718
	-0.05786519	-0.08745185	-0.096162858	-0.088916294	-0.109355251	0.827008867
В						
	1.234420669	0.041467145	0.305918113	0.069877535	0.104713232	0.075255977
	0.033679571	1.083229753	0.050790898	0.125944667	0.173943125	0.042621662
	0.143398389	0.080144187	1.47380676	0.148835924	0.128437596	0.180933827
	0.352312325	0.512120008	0.536796369	2.252234799	0.804850988	0.436487169
	0.125738901	0.237946809	0.182872929	0.281276498	1.308011206	0.171960613
	0.161112464	0.213290808	0.280042095	0.314856953	0.300146826	1.309655579

Figure 2.12: 列昂替夫逆矩阵 B = (I - A)'

最后就可以求得X,



[1] 胡秋阳编著. 投入产出分析: 理论、应用和操作. 清华大学出版社.2019

[2] 沃西里·里昂惕夫著. 投入产出经济学. 商务印书馆.2009