第0卷第0期 数学学报中文版 Vol.0, No.0
202x年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 202x

文章编号: **文献标识码: A**

离散分红情形下的欧式期权定价新模型

余喜生 姚雨薇

西南财经大学数学学院 成都 611130
E-mail: yuxisheng@swufe.edu.cn

摘 要 标的资产支付离散红利情形下的期权定价, 一直是具挑战性的研究问题. 本文提出一种基于红利加权的新模型, 建立并证明了期权价格表示定理. 理论分析显示, 提出的新模型能完整地考虑红利支付时间、大小、次数等对期权价格的影响, 因此可以给出精确的定价结果. 我们还证明了新模型与其它经典模型及基准模型之间的关系, 从而解释了新模型具有更优的定价精确度. 数值结果也表明, 所提出的新模型可为期权给出高度精确的价格、具有很强的定价稳健性. 基于此, 新模型可望成为已有模型的新的补充与替代.

关键词 离散分红; 欧式期权; 定价模型
MR(2010)主题分类 91G20
中图分类 O29

A novel model for pricing European option with discrete dividends

Xi Sheng YU; Yu Wei YAO

School of Mathematics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130*, China*
E-mail: *yuxisheng@swufe.edu.cn*

Abstract Option pricing with discrete dividend payments is still a challenge. This paper proposes a novel model by taking the dividends into consideration, and establishes the option price theorem for obtaining the option price. Theoretical analysis shows that the proposed new model can fully take the impact of dividend payments on option price such as the dividend paying time, amount and number, and hence it can produce an accurate price for option. We also conduct a theoretical comparison of the pricing between the newly-proposed model and classic/ benchmark, with which the relation and pricing differences between the new model and these models are deeply detected. The numerical results also show that the proposed model can produce highly accurate prices for options has strong pricing robustness. Based on this, our model can be an excellent alternative of pricing European options written on the underlying asset paying discrete dividends.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71871187, 71301132).
通讯作者: 余喜生

Keywords discrete dividend; European option; pricing model
MR(2010) Subject Classification 91G20
Chinese Library Classification O29

1 引言

经典的Black-Scholes-Merton (B-S) 模型，在标的资产价格服从几何布朗运动(GBM) 的假设下, 基于市场完备和无套利条件, 给出了欧式期权定价公式. 但Black和Scholes并没有考虑标的资产/股票支付红利, Merton 也只是将其拓展至股票连续支付红利的情形. 随后有其它文献(如[2]), 研究连续支付红利或按股价比例支付红利的期权定价问题. 然而, 现实中标的资产多以离散形式支付固定红利, 上述研究便不太适用于实际情况.

在B-S框架下, 现考虑在期权生命期$[0,T]$ 内, 红利D_i 产生在某(些) 离散时点t_i. 则在风险中性市场有，

$$dS_t = \Big(rS_t - \sum_{0<t_i\le T} D_i\delta(t-t_i)\Big)dt + \sigma S_t d\omega_t, \tag{1.1}$$

其中r 为无风险利率, δ 和ω_t 分别表示$Dirac$-函数和$Wiener$ 过程. 期权价格$V(t,S)$ 满足B-S方程[1]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV. \tag{1.2}$$

如果股票在期权有效期不分派红利($D_i=0$), 过程(1.1) 退化为一种GBM过程, 使用边界条件求解方程(1.2) 即得经典的B-S定价公式. 然而, 当存在红利发放时, 由于标的价格S_t并不是在整个期限$[0,T]$ 内服从GBM, 便不能得到类似B-S公式的期权价格解析表达. 这就使得离散红利情形下的期权定价, 成为一种具挑战性的研究问题.

有关离散红利情形下的期权定价研究, 比较经典的可提供解析表达式的主要有三种模型(可参见[6]的研究综述), 以及后来其它相关模型(如[17]). 首先是由Roll[12] 提出的Spot-Model (下文简记为**Model-1**). 该模型下, 股票价格S 被分为两部分: $S=D_0+(S-D_0)$, 其中第一部分D_0为红利现值, 以无风险利率增长; 第二部分为股票净值(股票价格减去红利现值), 假定其服从GBM. 因此, 在Model-1下行权价为K 的看涨期权价格$V_1(S,K)$ 具有与经典B-S 公式(B-S函数记为$V_{bs}(s,k)$) 一样形式的解析表达, 即: $V_1(S,K)=V_{bs}(S-D_0,K)$. 第二种模型是由Musiela 和Rutkowski[11] 所提出的Forward-Model (简记为**Model-2**). 该模型假设股票累积价格$S+D_T$ (股票价格与红利远期值之和)服从GBM，因此该模型下的价格$V_2(S,K)$ 也能够使用B-S 公式表达, $V_2(S,K)=V_{bs}(S,K+D_T)$. 该两模型只需要对B-S 公式中的标的价格或执行价格进行适当调整, 便能给出类似于B-S公式的期权定价解析式, 由于这一突出优点, Model-1和Model-2两模型得到广泛关注(见[1, 5, 7, 8, 13, 14]). 但此两模型存在的主要问题是: 均未能考虑到红利支付的时间t_i 及多次分红D_i 之间的差异等所产生的定价影响, 以至会低估或高估期权的价格. Frishing[6] 的研究表明Model-1 由于假设股票净值服从GBM, 低估了股票价格真实波动, 导致低估期权价格; Model-2则因股价与红利将来值之和服从GBM的假设, 高估股票价格真实波动，进而高估了期权价格; 并且这两模型的定价误差均随着分红次数的

[1]在无需特别强调时, 我们将一些符号进行简记, 如S_t 记为S, $V(t,S_t)$ 记为V.

增多而变大. 因此, 有模型和研究专注于调整波动率[4, 8, 16]. 鉴于以上, Bos 和Vandermark[3] 则通过调整红利平衡上述模型中期权被高估和低估的部分, 构建模型(简记为**Model-3**) 以获得更精确的定价. 该模型将红利现值按照时间进行线性拆分为两部分(红利近期现值和红利远期未来值), 并将第一部分红利调整到标的价格, 第二部分调整到执行价格, 得到类似于B-S 的价格表达式. 尽管相比已有的方法模型, Model-3 能够给出准确的定价; 但该模型忽视了不同分红间对期权价格影响的微小差异. 然而, 在已有能给出解析表达解的模型中, 其精确度最高的[2]. 因此, 本文将该模型Model-3 视为重要的基准模型.

除此之外, 对于离散分红情形下的期权定价研究, 值得一提的还有: 更符合实际的"逐段对数正态模型" (Piecewise Lognormal Model, Wilmott[14]). 其假定股票价格在分红除息日t_i下跌, 在其它时间均服从GBM. Wilmott[14] 与Frishing[6] 的研究结果表明, 该模型更契合股票价格的实际变动, 能产生比Model-1 和Model-2 准确得多的定价结果, 也因此常被看成是"最准确的" 定价模型[1]. 但是这一模型不能给出期权价格的解析表达, 导致不少的计算困难. 注意到, Frishing[6] 的数值结果表明, Model-3 最为接近且不高于逐段对数正态模型给出的价格. 因此, 本文提出的模型如果能够给出"非常接近但不低于Model-3" 的价格, 则表明我们所提出的模型是更优的.

紧扣Model-1 与Model-2 的定价低估与高估, 特别地受Model-3 "调整红利" 之启发, 本文直觉地提出一种基于前两个模型使用红利加权的新模型(后记为**Model-new**). 本模型符合逻辑直觉, 且能够简洁地给出离散分红下期权价格的解析表达式. 与已有研究相比, 提出的模型具有如下重要优势: 首先, 直觉上与理论具有一致性, 可以解释红利是如何影响期权的价格, 由此构建出的Model-new能够给出准确的定价(即, 所得到的期权价格能准确反映红利因素). 其次, 能够给出简洁如B-S 公式一样的期权价格解析表达式, 保证了高效的计算,大大增加了实用性. 再者, 我们的Model-new 还适用于多次分红下的看涨与看跌期权定价, 且具比其它模型更好的稳健性, 不会随期权执行价格或到期日等的改变而出现定价结果的不稳定. 更为重要的是, Model-new如所期望的: 所计算得到的价格高于Model-1 产生的价格、低于Model-2的价格、极为接近但不低于Model-3的价格, 由此正表明Model-new相对其它模型是"最优" 的.

2 新模型(Model-new) 的提出

本节主要构建新的定价模型. 先给出上述用以比较的三种模型下对应的期权价格表达式, 再构建新模型下的期权价格表示定理, 并证明之.

§2.1 基准模型

前文所述, Model-1 和Model-2 分别假设股票净值或股票累积值服从GBM, 从而低估或高估了期权价格. 但由于其相当于直接将支付的所有红利"一次性" 地处理成在期初$t_0 = 0$ 或到期时刻T 支付, 因而能提供形如Black-Scholes (B-S) 公式一样简洁的期权定价解析式, 其效果等同于在t_0 或T 进行一次红利支付的结果. 我们将其以引理的形式表达如下. 注意到欧式期权的看涨看跌平价关系, 本研究只考虑欧式看涨期权.

[2]其定价结果与广受认可的"最准确的" 逐段对数正态分布模型之结果非常接近.

引理2.1[12] 记欧式看涨期权其标的资产初始价格与执行价格分别为S 和K, 到期日为T, 初始时刻记为t_0= 0; 假设在期权持有期内标的资产在t_i $(0 \le i \le n)$ 时刻产生现金分红, 大小记为$D_i > 0$. 则在初始时刻t_0, Model-1 产生的期权价格可表示为,

$$V_1(S,K) = V_{bs}(S - D_0, K). \tag{2.1}$$

其中, 红利现值$D_0 = \sum_i D_i e^{-rt_i}$, $V_{bs}(s,k)$ 表示通常意义下的Black-Scholes函数

$$V_{bs}(s,k) := sN(d_1) - se^{-rT}N(d_2),$$

d_1=$\frac{ln(s/k)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, d_2=$d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

引理2.2[11] 记Model-2产生的t_0 时刻期权价格为$V_2(S,K)$, 则Model-2 价格可表示为,

$$V_2(S,K) = V_{bs}(S, K + D_T). \tag{2.2}$$

其中, 红利未来值D_T=$\sum_i D_i e^{r(T-t_i)}$, $V_{bs}(s,k)$ 表示通常意义下的Black-Scholes函数.

Model-3将红利现值线性地拆成两部分: 近期红利D_{01} 和远期红利D_{02}, 分别调整至标的价格和执行价格, 给出形如B-S 公式一样的定价解析表达式.

引理2.3[3] 记Model-3 产生的t_0 时刻期权价格为$V_3(S,K)$, 则Model-3 价格可表示为,

$$V_3(S,K) = V_{bs}(S - D_{01}, K + D_{02}e^{rT}). \tag{2.3}$$

其中, 近期红利现值D_{01}=$\sum_i \frac{T-t_i}{T} D_0$, 远期红利现值$D_{02}$=$\sum_i \frac{t_i}{T} D_0$, 红利现值如前$D_0$=$\sum_i D_i e^{-rt_i}$, $V_{bs}(s,k)$ 表示通常意义下的Black-Scholes函数.

§2.2 新模型

前文所述, 本研究结合Model-1和Model-2, 特别是受Model-3 “调整红利” 之启发, 提出一种基于红利加权的定价思路: 初始时刻期权价值$V_{new}(S,K)$由两部分组成, 其结构如下,

$$\begin{aligned} V_{new}(S,K) &= \omega_1(t_0; t_1, ..., t_n, D_1, ..., D_n)V_1(S,K) \\ &\quad + \omega_2(t_0; t_1, ..., t_n, D_1, ..., D_n)V_2(S,K) \\ &:= \omega_1(t_0)V_1(S,K) + \omega_1(t_0)V_2(S,K) \end{aligned} \tag{2.4}$$

逻辑上, 权重$\omega_i(t_0; t_1, ..., t_n, D_1, ..., D_n)$ 由红利分发时刻$t_i(t_0 \le t_i \le T)$ 和红利大小D_i 共同决定, 这样才能完整地考虑红利分发时刻及大小的异质性, 但为符号之便将简记$\omega_i(t_0)$ 或ω_i. 于是, 要给出所提新模型(Model-new) 的期权价格, 只需确定权重. 幸运地我们求解寻找到了, 见以下定理.

定理2.4 (**Model-new 价格表示定理**) 记欧式期权的标的价格与执行价格分别为S 和K, 到期日为T, 初始时刻记为$t_0 = 0$; 假设在期权持有期内标的资产在$t_i(0 \le i \le n)$ 时刻产生现金红利, 大小记为$D_i > 0$. 无红利产生的时间区间内: S_t 服从GBM (参见式(1.1)), 标的价格分派红利D_i 后瞬时刻下跌D_i . 则在初始时刻t_0, Model-new 给出的期权价格$V_{new}(S,K)$ 可表示为

$$V_{new}(S,K) = \omega_1 V_1(S,K) + \omega_2 V_2(S,K), \tag{2.5}$$

其中的权重

$$\omega_1 = \sum_i \frac{T-t_i}{T} \frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}, \omega_2 = \sum_i \frac{t_i}{T} \frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}, \tag{2.6}$$

与之前一样，这里的D_0=$\sum_i D_i e^{-rt_i}$ 表示红利现值.

该定理给出了新模型下期权定价公式的解析表达, 其证明较为复杂, 留在下一小节2.3节专门给予证明. 以下先对定理2.4 做进一步的解释.

评论2.5 所构造的权重函数(2.6), 符合以下逻辑直觉:

- 每个权重函数$\omega_i(\cdot)$ 确由分派红利时间及红利大小两因素决定，比如$\omega_1 = \sum_i \frac{T-t_i}{T} \frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}$中, $\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}$ 为红利因素, $\frac{T-t_i}{T}$ 为时间因素；

- 从权重函数如$\omega_i(\cdot)$ 的结构来看, 红利因素$\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}$ 表明: n 次分红中, 红利D_i 越大者, 对权重的“贡献” 作用越大, 从而相对较小的红利对期权定价的整体影响也越大. 这恰好符合期权的性质与直觉逻辑;

- $\omega_2(\cdot)$ 中的时间因素t_i/T, 用以度量红利分发时刻距离初始时刻的远近. 表明: 当分红时刻距初始时刻越近时, ω_2 越小(或ω_1 越大), 期权价格则更“倾向” 于$V_1(S,K)$ 即$V_{bs}(S-D_0,K)$. 事实上, 越接近期初时刻分红, 红利越接近其现值, 标的价格S 自然越等同于当前t_0 时刻“下跳” 至$(S-D_0)$, 因此期权价格越“偏向” 于$V_{bs}(S-D_0,K)$，从而要求(2.5)式中$V_1(S,K)$的权重ω_1越大, 此时红利的影响更多地体现在S 上. 反之则反, 即: 红利的影响更多应体现在K 上, 期权价格更接近$V_{bs}(S,K+D_T)$ 即$V_2(S,K)$;

- 新模型下的价格$V_{new}(S,K)$ 如所期望, 介于Model-1 价格$V_1(S,K)$ 和Model-2 价格$V_2(S,K)$之间, 修正了两模型定价偏差;

- 满足边界条件: 当分红均发生在初始时刻($t_i=0$), 标的价格应立即降为$S-D_0$，期权价格应为$V_{bs}(S-D_0,K)$ 即$V_1(S,K)$. 事实上, 此时确实有$\omega_1=1$, $\omega_2=0$; 类似地, 当分红均发生在期末时刻($t_i=T$), 期权价格应为$V_{bs}(S,K+D_T)$ 即$V_2(S,K)$. 事实上, 此时确有$\omega_1=0$, $\omega_2=1$.

特别地, 当所有分红时刻发生在初始时刻t_0 或者期权到期时T，由定理2.4 及引理2.1-2.2立得以下有关Model-new价格的性质, 说明了两模型Model-1 和Model-2 成立于Model-new的特殊情形.

性质2.6 当所有分红时刻均发生在初始时刻($t_i=0$), Model-new价格为

$$V_{new}(S,K) = V_{bs}(S-D_0,K).$$

或等价地，Model-new模型此时退化为Model-1模型.

性质2.7 当所有分红时刻均发生在初始时刻($t_i=T$), Model-new价格为

$$V_{new}(S,K) = V_{bs}(S,K+D_T).$$

或等价地, Model-new模型此时退化为Model-2模型.

§2.3 “Model-new价格表示定理” 之证明

先证明一次红利情形(子定理A), 再过渡到多次分红情形(子定理B), 从而完成定理2.4的证明.

子定理2.4-A 假定标的资产只在t_1 ($t_1>t_0$) 时刻产生红利$D_1>0$, 记初始时刻$t_0=0$, 考虑定价时刻t ($t_0 \le t < t_1$); 对于给定的t_1 和D_1，权重$\omega_i(t;t1,D_1)$ 可视为t 的函数$w_i(t)$.

则Model-new给出的价格表达式

$$V_{new}(S,K) = \omega_1 V_1(S,K) + \omega_2 V_2(S,K)$$

中权重为:

$$\omega_1(t) = \frac{T-t_1}{T-t}, \omega_2(t) = \frac{t_1-t}{T-t}. \tag{2.7}$$

特别地, 定价时刻为初始时刻($t=0$) 时，其权重$\omega_i(0)$ 为

$$\omega_1(0) = \frac{T-t_1}{T}, \omega_2(0) = \frac{t_1}{T}, \tag{2.8}$$

即，一次红利支付情形下式(2.6) 式成立.

证明 简记$V_1 = V_{bs}(S^*,K), V_2 = V_{bs}(S,K^*), S^* = S - D_0, K^* = K + D_T$，因定价时刻为$t$，此处$D_0 = D_1 e^{-r(t_1-t)}$，$D_T = D_1 e^{r(T-t_1)}$. 分四步证明:

S-1 函数$V_{new}(S,K)$ 满足的方程:

因无红利产生的时间区间内, 标的价格S服从GBM, 当时间$t < t_1$ 时, 期权价格$V_{new}(S,K)$ 满足B-S方程(BS-PDE) (1.2)

$$\frac{\partial V_{new}}{\partial t} + rS\frac{\partial V_{new}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_{new}}{\partial S^2} = rV_{new}, \tag{2.9}$$

其中r 和σ 分别为通常(B-S) 意义下的无风险利率和波动率. 在简记符号后, (2.5) 式可记为$V_{new} = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2$, 求解偏导将其代入(2.9) 式得,

$$\begin{aligned}
&[(w_1\tfrac{\partial V_1}{\partial t} + w_2\tfrac{\partial V_2}{\partial t}) + (V_1\tfrac{dw_1}{dt} + V_2\tfrac{dw_2}{dt})] + [w_1 rS^*\tfrac{\partial V_1}{\partial S^*} + w_2 rS\tfrac{\partial V_2}{\partial S}] \\
&+\tfrac{1}{2}[w_1\sigma^2(S^* + D_1e^{-r(t_1-t)})^2\tfrac{\partial^2 V_1}{\partial S^{*2}} + w_2\sigma^2 S^2\tfrac{\partial^2 V_2}{\partial S^2}] \\
&= r[w_1V_1 + w_1V_2]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

S-2 $V_1 := V_{bs}(S^*,K)$和$V_2 := V_{bs}(S,K^*)$ 满足的BS-PDE:

同样在$t < t_1$时，V_1和V_2分别满足下列两个方程,

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + rS^*\frac{\partial V_1}{\partial S^*} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{*2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^{*2}} = rV_1, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + rS\frac{\partial V_2}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} = rV_2. \tag{2.12}$$

将(2.11)-(2.12) 代入(2.10) 并化简得到关于$\omega_1(t)$ 的微分方程(注意到$\omega_2 = 1-\omega_1$),

$$(V_2 - V_1)\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{2}\omega_1\sigma^2[2S^*D_1e^{-r(t_1-t)} + D_1^2e^{-2r(t_1-t)}]\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^{*2}}$$

即,

$$[V_{bs}(S,K^*) - V_{bs}(S^*,K)]\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{2}\omega_1\sigma^2[2S^*D_1e^{-r(t_1-t)} + D_1^2e^{-2r(t_1-t)}]\frac{\partial^2 V_{bs}(S^*,K)}{\partial S^{*2}} \tag{2.13}$$

S-3 求解微分方程(2.13):

将方程(2.13)左侧的$V_2 = V_{bs}(S,K*)$ 在点$(S*,K)$ 处进行Taylor展开，并应用一般结果(参见[9] 第十七章) $\frac{\partial V_{bs}(S,K)}{\partial S} + \frac{\partial V_{bs}(S,K)}{\partial K}e^{r(T-t)} \cong (T-t)\sigma^2 S\frac{\partial^2 V_{bs}(S,K)}{\partial S^2}$, 可得:

$$\begin{aligned}
V_2 - V_1 &:= V_{bs}(S,K^*) - V_{bs}(S^*,K) \\
&= D_1e^{r(T-t_1)}\tfrac{\partial V_{bs}(S,K^*)}{\partial K^*}|_{(S^*,K)} + D_1e^{-r(t_1-t)}\tfrac{\partial V_{bs}(S,K^*)}{\partial S}|_{(S^*,K)} \\
&= D_1e^{-r(t_1-t)}(T-t)\sigma^2 S^*\tfrac{\partial^2 V_{bs}(S,K^*)}{\partial S^2}|_{(S^*,K)}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

联立(2.13)-(2.14), 红利的二次项$w_1(\sigma D_1 e^{-r(t_1-t)})^2$影响忽略下, 立得

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt}=\frac{\omega_1(t)}{T-t}. \tag{2.15}$$

S-4 使用边界条件:

易知微分方程(2.15) 的边界条件[3]: $\omega(t=t_1)=1$. 从而, 使用该边界条件, 求解此方程得到一次分红时的权重(2.7)：

$$w_1(t)=\frac{T-t_1}{T-t}, w_2(t)=1-w_1(t)=\frac{t_1-t}{T-t}.$$

特别地, 在初始时刻定价($t=t_0=0$)时, 权重为:

$$w_1(0)=\frac{T-t_1}{T}, w_2(0)=1-w_1(0)=\frac{t_1}{T},$$

即(2.8)式得证.

证毕. □

接下来证明多次红利情形.

子定理2.4-B 假定标的资产在t_i分派红利$D_i>0(i=1,2,...,n;t_i<t_{i+1})$, 记初始时刻$t_0=0$, 考虑定价时刻$t(t_0\le t\le t_1)$. 则对于权重$\omega_i(t)$, 我们有,

$$\omega_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i e^{-r(t_i-t)}}{D_0}\frac{T-t_i}{T-t}, \omega_2(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i e^{-r(t_i-t)}}{D_0}\frac{t_i-t}{T-t} \tag{2.16}$$

这里$D_0=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i e^{-r(t_i-t)}$.

特别地, 定价时刻为初始时刻($t=t_0$) 时, 权重$\omega_i(0)$ 为,

$$\omega_1(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}\frac{T-t_i}{T}, \omega_2(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}\frac{t_i}{T} \tag{2.17}$$

即, (2.6)式成立.

证明 不失一般性, 只证明二次分红情形($n=2$). 已知$0=t_0<t_1<t_2$, 考虑在t_1 时刻的期权价格(即视此情形下的t_1为一次红利情形下的t_0).

S-1 t_1与t_2时的分红分别为D_1和D_2, 考虑$t=t_1$时刻的期权价格:

此时由价格表达式(2.5), 在t_1时刻期权的价格为,

$$\begin{aligned}&V_{new}(S_{t_1},K)=\omega_1(t_1)V_1(S_{t_1},K)+\omega_2(t_1)V_2(S_{t_1},K)\\&=\omega_1(t_1)V_{bs}(S_{t_1}-D_1-D_2e^{-r(t_2-t_1)},K)+(1-\omega_1(t_1))V_{bs}(S_{t_1},K+D_1e^{r(T-t_1)}+D_2e^{r(T-t_2)}).\end{aligned} \tag{2.18}$$

S-2 另一种角度——进行“一次分红”处理:

将t_1时刻看成一个新的“初始时刻”,则自t_1后至到期日T 期间, 只在t_2 一次产生分红. 于是可由子定理2.4-A 直接得到在t_1时刻的期权价格(注意到t_1 时刻分红后, 标的价格降为$S_{t_1}-D_1$):

$$V_{new}(S_{t_1},K)=\frac{T-t_2}{T-t_1}V_{bs}(S_{t_1}-D_1-D_2e^{-r(t_2-t_1)},K)+\frac{t_2-t_1}{T-t_1}V_{bs}(S_{t_1}-D_1,K+D_2e^{r(T-t_2)}). \tag{2.19}$$

[3]不难理解: 比如,当红利在定价时刻t_0分发时, 相当于标的价格S立即降为$(S-D_0)$, 期权价格为$V_{new}(S,K)=V_{bs}(S-D_0,K)$, 意味着$\omega_1=1$.

S-3 边界条件, 并求解权重:

以上两种角度下得到的, 都是t_1 时刻的期权价格, 因此(2.18) 和(2.19) 应相等. 将两式在点(S_{t_1}, K) 处一阶Taylor 展开分别得,

$$\omega_1(t_1)[-D_1 - D_2 e^{-r(t_2-t_1)}]\frac{\partial V_{bs}}{\partial S_t} + [1-\omega_1(t_1)][D_1 e^{r(T-t_1)} + D_2 e^{r(T-t_2)}]\frac{\partial V_{bs}}{\partial K},$$

$$[\frac{T-t_2}{T-t_1}(-D_1 - D_2 e^{-r(t_2-t_1)}) + \frac{t_2-t_1}{T-t_1}(-D_1)]\frac{\partial V_{bs}}{\partial S_t} + \frac{t_2-t_1}{T-t_1}D_2 e^{r(T-t_2)}\frac{\partial V_{bs}}{\partial K}.$$

对比上面两式的相应项$\frac{\partial V_{bs}}{\partial S}$ 和$\frac{\partial V_{bs}}{\partial K}$系数, 令之相等, 可求得二次分红下的权重($t_1$ 时刻):

$$\omega_1(t=t_1) = \sum_{i=1}^{2}\frac{D_i e^{-r(t_i-t)}}{D_0}\frac{T-t_i}{T-t_1}, \tag{2.20}$$

这里$D_0 = \sum\limits_{i=1}^{2} D_i e^{-r(t_i-t)}$.

同时, 按照子定理2.4-A 证明过程的前三步, 可得到二次分红情形下权重$\omega_1(t)$满足的方程:

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt} = \frac{\omega_1(t)}{T-t} \tag{2.21}$$

联立边界条件(2.20), 容易解出方程(2.21)得到二次分红下的权重解:

$$w_1(t) = \sum_{i=1}^{2}\frac{D_i e^{-r(t_i-t)}}{D_0}\frac{T-t_i}{T-t}, w_2(t) = \sum_{i=1}^{2}\frac{D_i e^{-r(t_i-t)}}{D_0}\frac{t_i-t}{T-t}$$

特别地, 在初始时刻$t = t_0 = 0$时, 权重为:

$$w_1(0) = \sum_{i=1}^{2}\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}\frac{T-t_i}{T}, w_2(0) = \sum_{i=1}^{2}\frac{D_i e^{-rt_i}}{D_0}\frac{t_i}{T}$$

即得定理中的(2.16)和(2.17)式子.

证毕. □

3 模型比较与分析

一个新提出的模型, 除了直觉与理论上的支撑外, 还应同当前最具可比性的其它模型进行比较. 对第2节提出的新模型Model-new, 本节将Model-new 同最具竞争力的基准模型进行比较, 从理论上比较所提出的新模型Model-new 与这些模型的定价差异, 分析其产生原因. 如上节所分析, 我们期望Model-new 的定价高于Model-1价格、低于Model-2 价格、且接近(但不低于) Model-3 价格. 若果如此, 我们提出的Model-new 模型则自然是一个更优的定价模型.

§3.1 同Model-1及Model-2模型的比较分析

Model-1 模型只有当分红发生在初始时刻t_0 时, 能够给出准确定价, 否则定价可能偏低. 根据性质2.6, 当所有分红均发生在初始时刻t_0时, 本研究提出的模型Model-new 退化成Model-1, 能够提供准确的定价. 但若红利支付发生在t_0之后, 因Model-1的定价偏低, 故希望模型Model-new的价格高于Model-1的价格.

Model-2 模型只有当分红发生在到期时刻T 时, 能够给出准确定价, 否则定价偏高. 根据性质2.7, 当所有分红均发生在到期时刻T 时, Model-new模型退化成Model-2, 能够提供准确的定价. 但若红利支付发生在T 之前, 因Model-2 的定价偏高, 故希望Model-new 的价格低于Model-2 的价格.

下面分单次和多次分红情形, 分别对Model-new 与Model-1 和Model-2 的定价差异进行理论上的比较与分析.

- 与Model-1模型进行比较

(1)单次分红情形

假设在$t_1 > t_0$处产生红利$D_1 > 0$, 记$S^* = S - D_1 e^{-rt_1}$, $K^* = K + D_1 e^{r(T-t_1)}$. 由价格表示定理2.4 及公式(2.1), 分别有Model-new和Model-1模型价格表达式:

$$V_{new}(S,K) = \frac{T-t_1}{T} Vbs(S^*,K) + \frac{t_1}{T} V_{bs}(S,K^*), V_1(S,K) = V_{bs}(S^*,K).$$

将上面两式相减并在点(S^*,K)处进行Taylor一阶展开(忽略二阶展开项) 得到

$$\begin{aligned} V_{new}(S,K) - V_1(S,K) &= \tfrac{t_1}{T}[D_1 e^{-rt_1} \tfrac{\partial V_{bs}}{\partial S} + D_1 e^{r(T-t_1)} \tfrac{\partial V_{bs}}{\partial K}] \big|_{(S*,K)} \\ &= \tfrac{t_1}{T} D_1 e^{-rt_1} [N(d_1) - N(d_2)] = \tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(\frac{d_2^2}{2} + rt_1)} t_1 D_1 > 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

式中, $d_2 = \frac{ln(S^*/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$.

式(3.1)为Model-new 与Model-1 模型的定价之差, 可以看出: 如所期望的, 模型Model-new 比Model-1 的定价结果要高($D_1 > 0$ 时, Model-1 是低估期权价格的), 并且这种误差随着分红时间t_1及红利D_1增大而变大. 其它因素不变, 当$d_2 = 0$或等价地$S^* = Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$ 时, 价格之差为最大, S^*与$Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$ 偏离越远则差异越小.

(2)多次分红情形

不失一般性, 以二次分红为例($0 = t_0 < t_1 < t_2 < T$). 记$D_0 = \sum\limits_{i=1}^{2} D_i e^{-rt_i}$, $D_T = \sum\limits_{i=1}^{2} D_i e^{r(T-t_i)}$, $S^* = S - D_0$, $K^* = K + D_T$, 根据定理2.4, 模型Model-new 的定价表达为:

$$V_{new}(S,K) = (\frac{D_1 e^{-rt_1}}{D_0} \frac{T-t_1}{T} + \frac{D_2 e^{-rt_2}}{D_0} \frac{T-t_2}{T}) C(S^*,K) + (\frac{D_1 e^{-rt_1}}{D_0} \frac{t_1}{T} + \frac{D_2 e^{-rt_2}}{D_0} \frac{t_2}{T}) C(S,K^*), \tag{3.2}$$

将其在点(S^*,K)处进行Taylor展开, 与一次红利情形类似, 可得到:

$$\begin{aligned} V_{new}(S,K) - V_1(S,K) &= (\tfrac{t_1}{T} \tfrac{D_1 e^{-rt_1}}{D_0} + \tfrac{t_2}{T} \tfrac{D_2 e^{-rt_2}}{D_0})(D_0 \tfrac{\partial V_{bs}}{\partial S} + D_T \tfrac{\partial V_{bs}}{\partial K}) \big|_{(S*,K)} \\ &= \tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_2^2}{2}} (t_1 D_1 e^{-rt_1} + t_2 D_2 e^{-rt_2}) > 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中$d_2 = \frac{ln(S^*/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

(3.3)式表明两次分红中, Model-new的价格也高于Model-1的定价, 该差异随分红时间及红利数量增加而增大. 而且可以看出, 不同的分红对定价差异的影响, 取决于各分红时间长度与红利现值之积$t_i D_i e^{-rt_i}$, 当两者相等$t_1 D_1 e^{-rt_1} = t_2 D_2 e^{-rt_2}$ 时, 两次红利

对两模型定价之差的影响相同. 比较(3.1)与(3.2) 式, 当分红次数增加时, 模型Model-new与模型Model-1 定价之差越来越大. 其它因素不变, 当$d_2 = 0$ 或等价地$S^* = Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$时, 价格之差最大, S^* 与$Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$偏离越远则差异越小. 这些理论上的发现, 为下一节中的数值算例，增加了一个分析思路: 考虑不同分红次数下我们的Model-new模型定价效果.

- 与Model-2 进行比较

(1)单次分红情形

类似地，由定理2.4 及公式(2.2), 使用Taylor展开式可得模型Model-new 与模型Model-2 价格之差:

$$\begin{aligned} V_{new}(S,K) - V_2(S,K) &= \tfrac{T-t_1}{T}[-D_1 e^{-rt_1}\tfrac{\partial V_{bs}}{\partial S} - D_1 e^{r(T-t_1)}\tfrac{\partial V_{bs}}{\partial K}]\big|_{(S,K^*)} \\ &= -\tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(\frac{\tilde{d}_2^2}{2}+rt_1)}(T-t_1)D_1 < 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中, $\tilde{d}_2 = \frac{ln(S/K^*)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

如所期望的,上式表明Model-new 比Model-2给出的价格要低(模型Model-2高估了期权价格), 并且两模型价格差随着分红时间离到期日长度$T-t_1$及红利D_1 增大而增加. 其它因素不变, 当$\bar{d}_2 = 0$或等价地$S = K^* e^{-(r-\sigma^2/2)T}$时,价格之差最大, S 与$K^* e^{-(r-\sigma^2/2)T}$偏离越远则差异越小.

(2)多次分红情形

仍以二次分红为例，将Model-new价格(3.4)在(S,K^*)进行Taylor展开，类似于(3.3)的过程得到,

$$\begin{aligned} V_{new}(S,K) - V_2(S,K) &= (\tfrac{T-t_1}{T}\tfrac{D_1 e^{-rt_1}}{D_0} + \tfrac{T-t_2}{T}\tfrac{D_2 e^{-rt_2}}{D_0})(-D_0\tfrac{\partial V_{bs}}{\partial S} - D_T\tfrac{\partial V_{bs}}{\partial K})\big|_{(S,K^*)} \\ &= -\tfrac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\tilde{d}_2^2}{2}}[(T-t_1)D_1 e^{-rt_1} + (T-t_2)D_2 e^{-rt_2}] < 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中, $\tilde{d}_2 = \frac{ln(S/K^*)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

上式表明, Model-new的价格低于Model-2的定价, 该差异随分红时间离到期日长度$T-t_i$ 及红利数量D_i增加而增大. 而且, 不同的分红对定价差异的影响, 取决于乘积$(T-t_i)D_i e^{-rt_i}$, 当两者相等$(T-t_1)D_1 e^{-rt_1} = (T-t_2)D_2 e^{-rt_2}$ 时,两次红利对两模型定价之差的影响一致. 比较(3.4) 与(3.5) 式: 当分红次数增加时, 定价之差越来越大. 其它因素不变, 当$\bar{d}_2 = 0$或等价地$S = K^* e^{-(r-\sigma^2/2)T}$时, 价格之差最大, S 与$K^* e^{-(r-\sigma^2/2)T}$偏离越远则差异越小.

以上, 我们对所提出的model-new与经典模型Model-1及Model-2进行了理论分析比较, 将其以定理形式分别陈述如下.

定理3.1 记初始时刻$t_0 = 0$, 标的资产初始价格为S, 期权的执行价为K; 假定在t_i时刻分派固定红利$D_i(i = 1, 2, ..., n; t_i < t_{i+1})$, 记$D_0 = \sum_{i=1}^{2} D_i e^{-rt_i}$, $D_T = \sum_{i=1}^{2} D_i e^{r(T-t_i)}$, $S^* = S - D_0$, $K^* = K + D_T$. 则对期权的定价有,

(1) Model-new模型下的价格与Model-1 价格之差为:

$$V_{new}(S,K)-V_1(S,K)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{d_2^2}{2}}\sum_{i=1}^{n}t_iD_ie^{-rt_i},$$

其中$d_2=\frac{ln(S^*/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

(2) 所有红利大小$D_i=0$或在期初时刻$t_i=t_0$ 发生时, Model-new模型下的期权价格与Model-1模型价格一致. 否则Model-new 价格大于Model-1 价格, 其价格之差随着分红次数的增加而变大; 且各次红利对该价格之差的影响能力, 取决于分红时间长度与红利现值之积$t_iD_ie^{-rt_i}$.

(3) 其它因素不变, 当$S^*=Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$时, 价格之差最大, S^*与$Ke^{-(r-\sigma^2/2)T}$偏离越远则差异越小.

定理3.2 沿用定理3.1的条件与记号, 则对期权有,

(1) 模型Model-new下的价格与Model-2价格之差为:

$$V_{new}(S,K)-V_2(S,K)=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{\tilde{d}_2^2}{2}}\sum_{i=1}^{n}(T-t_i)D_ie^{-rt_i}$$

其中, $\tilde{d}_2=\frac{ln(S/K^*)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

(2) 所有红利$D_i=0$或在到期时刻$t_i=T$发生时, 模型Model-new下的期权价格与模型Model-2价格一致. 否则Model-new期权价格小于Model-2价格, 其价格差随着分红次数的增加而变大; 且各次红利对该价格之差的影响能力, 取决于分红时间离到期日长度与红利现值之积$(T-t_i)D_ie^{-rt_i}$.

(3) 其它因素不变, 当$S=K^*e^{(r-\sigma^2/2)T}$时, 价格之差最大, S 与$K^*e^{(r-\sigma^2/2)T}$ 偏离越远则差异越小.

§3.2 同Model-3 模型的比较分析

如前面所述, Model-3 模型已能给出良好的定价结果, 如果我们的模型Model-new非常接近但不低于Model-3的定价, 则Model-new更优. Model-3的价格表达如(2.3) 式:

$$V_3(S,K)=V_{bs}(S-D_{01},K+D_{02}e^{rT}):=V_{bs}(\hat{S},\hat{K}),$$

其中$\hat{S}=S-D_{01}$, $\hat{K}=K+D_{02}e^{rT}$. 同样, 我们分单次与多次红利情形, 对Model-new 与Model-3模型进行比较分析.

(1)单次分红情形

此时Model-new的价格函数为$V_{new}(S,K)=\frac{T-t_1}{T}V_{bs}(S^*,K)+\frac{t_1}{T}V_{bs}(S,K^*)$, 将其在点$(\hat{S},\hat{K})$处进行Taylor 展开至二阶项, 注意到各部分:

$$\begin{aligned}V_{bs}(S^*,K)=V_{bs}(\hat{S},\hat{K})+[-\frac{t_1D_1e^{-rt_1}}{T}\frac{\partial V_{bs}}{\partial S}-\frac{t_1D_1e^{r(T-t_1)}}{T}\frac{\partial V_{bs}}{\partial K}+\frac{(-t_1D_1e^{-rt_1})^2}{2T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S^2}\\+\frac{(-t_1D_1e^{r(T-t_1)})^2}{2T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K^2}+\frac{t_1^2D_1^2e^{r(T-2t_1)}}{T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S\partial K}]\Big|_{(\hat{S},\hat{K})}\end{aligned}$$

且,

$$V_{bs}(S,K^*)=V_{bs}(\hat{S},\hat{K})+[(\frac{T-t_1}{T}D_1e^{-rt_1})\frac{\partial V_{bs}}{\partial S}+(\frac{T-t_1}{T}D_1e^{r(T-t_1)})\frac{\partial V_{bs}}{\partial K}+\frac{[(T-t_1)D_1e^{-rt_1}]^2}{2T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S^2}$$
$$+\frac{[(T-t_1)D_1e^{r(T-t_1)}]^2}{2T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K^2}+\frac{(T-t_1)^2D_1^2e^{r(T-2t_1)}}{T^2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S\partial K}]\Big|_{(\hat{S},\hat{K})}$$

从而,

$$\begin{aligned}V_{new}(S,K)-V_3(S,K)&=\frac{t_1(T-t_1)D_1^2e^{-2rt_1}}{T^2}[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S^2}+e^{rT}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K\partial S}+\frac{e^{2rT}}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K^2}]\Big|_{(\hat{S},\hat{K})}\\&=\frac{t_1(T-t_1)D_1^2e^{-2rt_1}}{T^2}[\frac{N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{S}\sqrt{T}}-\frac{e^{rT}N'(\hat{d}_1)}{\sigma\hat{K}\sqrt{T}}+\frac{e^{2rT}\hat{S}N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{K}^2\sqrt{T}}]\\&=\frac{t_1(T-t_1)D_1^2e^{-2rt_1}}{T^2}\frac{N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{S}\hat{K}^2\sqrt{T}}(\hat{K}-e^{rT}\hat{S})^2\geq 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中的$\hat{d}_1=\frac{ln(\hat{S}/\hat{K})+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $N'(\cdot)$ 为标准正态分布密度函数。

(2) 多次分红情形

仍然不失一般性, 考虑二次分红. 由定理2.4 或(3.2) 式, Model-new 的期权价格表达为$V_{new}(S,K)=(\frac{D_1e^{-rt_1}}{D_0}\frac{T-t_1}{T}+\frac{D_2e^{-rt_2}}{D_0}\frac{T-t_2}{T})V_{bs}(S^*,K)+(\frac{D_1e^{-rt_1}}{D_0}\frac{t_1}{T}+\frac{D_2e^{-rt_2}}{D_0}\frac{t_2}{T})V_{bs}(S,K^*)$, 以点$(\hat{S},\hat{K})$为参考点进行Taylor展开, 并化简可得:

$$\begin{aligned}&V_{new}(S,K)-V_3(S,K)\\&=(\frac{t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{t_2}{T}D_2e^{-rt_2})(\frac{T-t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{T-t_2}{T}D_1e^{-rt_2})[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S^2}+e^{rT}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K\partial S}+\frac{e^{2rT}}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K^2}]\Big|_{(\hat{S},\hat{K})}\\&=(\frac{t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{t_2}{T}D_2e^{-rt_2})(\frac{T-t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{T-t_2}{T}D_1e^{-rt_2})[\frac{N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{S}\sqrt{T}}-\frac{e^{rT}N'(\hat{d}_1)}{\sigma\hat{K}\sqrt{T}}+\frac{e^{2rT}\hat{S}N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{K}^2\sqrt{T}}]\\&=(\frac{t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{t_2}{T}D_2e^{-rt_2})(\frac{T-t_1}{T}D_1e^{-rt_1}+\frac{T-t_2}{T}D_1e^{-rt_2})\frac{N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{S}\hat{K}^2\sqrt{T}}(\hat{K}-e^{rT}\hat{S})^2\geq 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

从(3.6)-(3.7) 两式看来, 无论一次还是多次分红, 我们均得到极好的一般性结果: 首先, 模型Model-new 的价格与Model-3价格高度接近, 因为: 两者的价格函数在展开后, 它们的一阶项系数完全一致, 差异体现在可忽略的二阶项当中. 其次, 一个意外的发现是, 我们的模型Model-new给出的价格不仅极其接近Model-3模型价格, 且不低于Model-3价格, 正好如我们所期望的.

从以上, 我们证明了:

定理3.3 记初始时刻$t_0=0$, 标的资产初始价格为S, 期权的执行价为K; 假定在t_i 时刻分派固定红利$D_i(i=1,2,...,n;t_i<t_{i+1})$, 记$\hat{S}=S-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{T-t_i}{T}D_ie^{-rt_i}$, $\hat{K}=K+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{t_i}{T}D_ie^{r(T-t_i)}$. 则对看涨期权,

(1) 模型Model-new 价格与Model-3 价格之差为

$$\begin{aligned}&V_{new}(S,K)-V_3(S,K)\\&=(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{T}D_ie^{-rt_i})(\sum_{i=1}^{n}\frac{T-t_i}{T}D_ie^{-rt_i})(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial S^2}+e^{rT}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K\partial S}+\frac{e^{2rT}}{2}\frac{\partial^2 V_{bs}}{\partial K^2})\Big|_{(\hat{S},\hat{K})}\\&=(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{T}D_ie^{-rt_i})(\sum_{i=1}^{n}\frac{T-t_i}{T}D_ie^{-rt_i})\frac{N'(\hat{d}_1)}{2\sigma\hat{S}\hat{K}^2\sqrt{T}}(\hat{K}-e^{rT}\hat{S})^2\end{aligned}$$

其中, $\hat{d}_1=\frac{ln(\hat{S}/\hat{K})+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $N'(\cdot)$ 为标准正态分布密度函数.

(2) Model-new给出的期权价格高度接近Model-3给出的价格, 其价格之差仅体现为二阶差异.

(3) 当所有红利$D_i = 0$、或在期初时刻$t_i = t_0$ 发生、或在到期时刻$t_i = T$ 发生、或者$\hat{K} = e^{rT}\hat{S}$ 时, Model-new模型的定价结果与Model-3模型价格一致; 否则如所希望, Model-new 价格仅稍微高于Model-3价格.

§3.3 进一步比较

以上从理论上证明并分析了, 所提出的模型Model-new与经典基准模型之间的关系, 从而阐述了Model-new能够给出更准确与稳定的定价结果.

本小节, 以国内上证50ETF (标的证券代码: 510050) 相关数据(见下) 为基础, 考虑不同分红派息次数[4], 进行数值算例对提出的模型Model-new进行定价比较与分析, 以印证上述得到的理论结果, 从而进一步说明了Model-new的更优定价表现.

结合实际开源数据(来源: 万德Winds数据库), 本文采用以下参数, 其中分红次数考虑了四种情形$n = 1, 2, 3, 4$.

初始日期(2023年1月17日): $t_0 = 0$;
标的价格(收盘价): S=2.838;
波动率: σ=0.26;
无风险利率: r=2.5%;
执行价格: K=2.750;
到期日期(2023年3月1日): T=42/360 (年度化);
红利: D_i=0.01($i = 1, 2, \cdots, n$);
分红日期: $t_i = iT/(n + 1)$ (均匀分布).

按照价格表达式(2.1)-(2.3), (2.5)-(2.6) 计算各模型下的期权价格, 结果见下表[5].

表 1 不同分红次数下各模型定价结果

模型	分红次数n			
	1	2	3	4
Model-1	0.1475521	0.1411098	0.1348169	0.1286758
Model-2	0.1478851	0.1417846	0.1358408	0.1300547
Model-3	0.1477186	0.141447**1**	0.135328**6**	0.12936**49**
Model-new	0.1477186	0.141447**2**	0.135328**7**	0.12936**50**
Diff 1	0.0001665	0.0003374	0.0005118	0.0006892
Diff 2	-0.0001665	-0.0003374	-0.0005121	-0.0006897
Diff 3(%)	0	7.07×10^{-5}	7.39×10^{-5}	7.73×10^{-5}

注: "Diff 1" 行表示Model-new与Model-1价格差; "Diff 2" 行表示Model-new与Model-2价格差; "Diff 3 (%)" 行表示Model-new 相对基准模型Model-3 的百分比误差: $100 \times \frac{Model-new^{price} - Model-3^{price}}{Model-3^{price}}$. Model-3和Model-new两行数字中的黑体, 表示两模型给出的价格不同之处(保留六位小数下, 完全一致).

上表列出了不同分红次数下各模型的定价结果. 首先, 我们的Model-new 价格与基准模型Model-3 的定价差几乎忽略不计(需精确至七位小数), 最大的百分比误差低至$7.73 \times 10^{-5}\%$.

[4]我们还进行了其它多角度的分析, 比如: 不同到期期限/价值状态(S/K)/分红时间/分红大小等, 均与已作的理论分析高度吻合, 文中不一一赘述.

[5]对于无分红情形($n = 0$), 所有模型下的定价结果均相等(为0.1541411). 这是因为: 此时所有模型价格即为Black-Scholes 价格.

如此接近的原因是: 两模型下价格表达式的一阶项完全一致(差异体现在本已可忽略的二阶项); 另外重要的是, Model-new 的价格不低于Model-3 价格, 这些均与前述理论结果定理3.3相吻合; 而且, 从误差百分比看来, 基本上保持在10^{-5}, 体现出Model-new 定价的稳健性. 至于同Model-1 和Model-2 的比较, 对所有的分红次数n, 模型Model-new 价格均高于Model-1 价格而高于Model-2 价格; 并且随着分红次数n 的增加, 模型Model-new 与Model-1 及Model-2 模型的价格差逐渐扩大, 与定理3.1和定理3.2相符, 这是由于价格差随着分红的累积而变大(见(3.3) 和(3.5)), 也表明了Model-1 和Model-2 模型对期权定价误差随分红次数增加而变大, 以至于不可接受[6]. 以上充分表明了我们的模型Model-new 能显著地修正Model-1 和Model-2 模型带来的定价偏差; 相比基准模型Model-3, 表现出很好的精确性与稳定性, 这些均印证了上文的理论分析.

参 考 文 献

[1] Areal N. Rodrigues A., Fast trees for options with discrete dividends, *Journal of derivatives*, 2013, **21**: 49–63.

[2] Barone-Adesi G., Whaley R. E., Efficient analytic approximation of American options values, *Journal of Finance*, 1987, **42**: 301–20.

[3] Bos M., Vandermark S., Finessing fixed dividends, *Risk Magazine*, 2002, 157–158.

[4] Buryak A., Guo I., New analytic approach to address put-call parity violation due to discrete dividends, *Applied Mathematical Finance*, 2012, **19**(1): 37–58.

[5] Carr P., Randomization and the American put, *Review of Financial Studies*, 1998, **11**: 597–626.

[6] Frishling V., A discrete question, *Risk January*, 2002, **15**: 115–116.

[7] Geske R., A note on an analytical valuation formula for unprotected American call options on stocks with known dividends, *Journal of Financial Economics*, 1979, **7**: 375–80.

[8] Gibson D., Wingo A., Pricing barrier options with discrete dividends, *International Journal of Financial Engineering*, 2017, **4**(4): 1750044.

[9] Huang W., Tao X., Li S., Pricing formulae for European options under the fractional Vasicek interest rate model. *Acta Mathematica Sinica*, Chinese Series. 2012, **2**: 219-230

[10] Hull J, Options Futures and Other Derivatives (7th edition), New Jersey: Prentice Hall, 2009.

[11] Musiela M., Rutkowski M., Martingale methods in financial modeling, Berlin: Springer, 1997.

[12] Roll R., An analytical valuation formula for unprotected American call options on stocks with known dividends,*Journal of Financial Economics*, 1977, **5**: 251–58.

[13] Whaley R. E., On the valuation of American call options on stocks with known dividends, *Journal of Financial Economics*, 1981, **9**: 207–11.

[14] Wilmott P., Derivatives: The theory and practice of financial engineering, 1998.

[15] Veiga C., Wystup U., Closed formula for options with discrete dividends and its derivatives, *Applied Mathematical Finance*, 2009, **16**(6): 517–531.

[6]我们在3.1节理论上证明了“Model-1和Model-2 两模型相对模型Model-new的定价误差(以及由此相对其它基准模型) 随分红次数增加, 其定价误差变得‘不可接受’”. 据我们所知, 这一结果是现有文献没有发现或提及的.

[16] Yu X., On the convergence of two types of estimators of quadratic variation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, **45**(18): 12206–12221.

[17] Yu X., Xie X., Pricing American options: RNMs-constrained entropic least-squares approach. *North American Journal of Economics and Finance*, 2015, **31**: 155–173.