

第一课中的 Splay 操作均摊分析

1 势能分析方法回顾

回顾下均摊分析的势能方法：

D_i : 执行第 i 步操作后的数据结构；

D_0 : 初始数据结构；

势能函数: $\Phi: D_i \rightarrow R$, 反映操作后数据结构的势能；

c_i : 将 D_{i-1} 变换到 D_i 的实际成本；

\hat{c}_i : 将 D_{i-1} 变换到 D_i 的均摊成本, 我们有: $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$; 所以, 总均摊成本为:

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i = \sum_{i=1}^n c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

上式中, 如果 $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0$, 总均摊成本 \hat{c}_i 将是总实际成本 c_i 的一个上限。同时, 如果 $\Phi(D_0)$ 是这个序列中的最小值, 而且 $\Phi(D_0) = 0$, 只要证明上式中 $\Phi(D_i) \geq 0$, 就可以证明均摊成本是实际成本的一个上限。势能方法的关键是找到合适的势能函数, 使得上述估算尽量精确。因此, 如果 $\sum_{i=1}^n c_i$ 是 $O(\log n)$, 合理的势能函数选择应该满足 $\Phi(D_n) - \Phi(D_0)$ 也是 $O(\log n)$, 否则会影响估算的精确度。

2 P25 Splay 势能分析

现在我们讨论使用势能方法分析 splay 伸展树的均摊成本。我先解释下 PPT 上的这段话:“(1) must increase by at most $O(\log N)$ over n steps, AND (2) will also cancel out the number of rotations (zig:1; zig-zag:2; zig-zig:2).”其中 (1) 上面已经解释过了。(2) 的意思是, 势能函数中, 要包含相应的部分, 以抵消操作中的常数。比如 zig-zag:2 的意思是 zig-zag 包含了两个旋转, 成本为 2, worst-case 的 zig-zag 操作数目是 $O(N)$, 如果势能函数的构造不能使 zig-zag 中的常数 2 被抵消掉, $\Phi(D_n) - \Phi(D_0)$ 会产生 $O(N)$ 代价, 影响精确估算。

分析的关键是要找到合适的势能函数。这也是很多势能分析问题的难点所在。我们注意到 Splay 操作中, 会将所访问的节点翻转到根节点; 同时, 翻转代价高的操作往往更大程度上的降低了树高 (比如前面例子中, 将节点 1 从叶节点位置翻转到根节点, 大致将树高缩减为原来的一半)。所以我们考虑一个跟节点高度相关的 (或类似的) 势能函数。

我们注意到在 Splay 操作中, 几乎每个节点的高度都会改变, 哪怕该节点为根节点的子树没有任何变化。如果我们直接使用节点高度作为势能函数, 后续的数学计算与推导会变得非常复杂。我们希望有一个可以简化后续数学推导的势能函数。

一个可用的势能函数是树中所有节点的 rank 之和:

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^n \log S(i)$$

其中 $S(i)$ 指的是子树 i 中的节点数 (包括节点 i)。我们用 $R(i)$ 表示节点 i 的 rank, $R(i) = \log S(i)$ 。选取 rank 之和作为势能函数的好处是除了 X, P, G 三个节点外, 其他节点在 splay 操作中 rank 保持不变, 因而可以简化计算。

3 P26 Splay 势能分析

势能函数 $\Phi(T) = \sum_{i \in T} R(i)$ 。对于我们刚才学过的 3 种 splay 操作：zig、zig-zig、zig-zag，我们使用 R_2 表示操作后的势能， R_1 表示操作前势能。首先是 zig 操作，做了个单旋，成本为 1；从 PPT 上的 zig 操作示意图中可以看出，在整个操作中只有 X 和 P 的 rank 值有变化。所以我们有：

$$\hat{c}_i = 1 + R_2(X) - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P)$$

由于节点 P 由根节点变为非根节点，我们有 $R_2(P) - R_1(P) \leq 0$ ，因此 $\hat{c}_i \leq 1 + R_2(X) - R_1(X)$ 。既然 $R_2(X) - R_1(X) \geq 0$ ，我们有 $\hat{c}_i \leq 1 + 3(R_2(X) - R_1(X))$ 。

对于 zig-zag 操作，实际成本是两次旋转，为 2。因此，

$$\hat{c}_i = 2 + R_2(X) - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P) + R_2(G) - R_1(G)$$

从左图中看到，操作前 G 是根节点，操作后 X 是根节点，他们的 rank 相同，因此， $\hat{c}_i = 2 - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P) + R_2(G)$ 。同时，操作后我们可以看到 $S_2(P) + S_2(G) \leq S_2(X)$ ，由书上的 lemma 11.4，我们可以得出： $R_2(P) + R_2(G) \leq 2R_2(x) - 2$ 。故我们有：

$$\hat{c}_i \leq 2(R_2(X) - R_1(X))$$

zig-zig 的推导就留给同学们自己完成。

最后，给定一个伸展树上访问节点 X 的一系列 M 个 splay 操作（zig、zigzig、zigzag），其中最多只会有 1 个 zig。把他们都给加起来后，可得：

$$\sum_{i=1}^M \hat{c}_i \leq 3(R_M(X) - R_1(X)) + 1$$

注意到结束操作后， X 是新的根节点，所以 $R_M(X) = R_1(T)$ ，所以我们有

$$\sum_{i=1}^n \hat{c}_i \leq 3(R_1(T) - R_1(X)) + 1$$

很明显，均摊成本是 $O(\log n)$ 级别的。