粒子系の古典論ノート

xiupos

2024 年 10 月 29 日

粒子系[*1]の古典論の基本事項を体系的にまとめる. 自分用のノートなので, 正確性は保証されない.

0.1 最小作用の原理

まず, 粒子系の古典論において, 以下を原理として認める.

> 時間 t に依存する**一般化座標**と呼ばれるパラメータ $q^1(t), \dots, q^D(t)$ に対して, **作用** action と呼ばれる汎関数 $S[q^i]$ が存在し[a], 物理現象において座標 q^i は作用 $S[q^i]$ が最小となるような経路が選ばれる.
> 言いかえると, 時間 t_1 から t_2 の運動において, $q^i(t) \mapsto q^i(t) + \delta q^i(t)$ (ただし両端固定 $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$) なる経路の微小変換に対し, 作用が停留値を取る:
>
> $$\delta S[q^i] \equiv S[q^i + \delta q^i] - S[q^i] = 0.$$
>
> この古典的原理を**最小作用の原理**という.
>
> [a] 正しくは $S[q^1(t), \dots, q^D(t)]$ と書かれるべきであるが, 配位空間に関する任意の列 $\{a^1, \dots, a^D\}$ は単に a^i と書かれることが多い. この添字 i は添字集合 $\{a^i\}_{i=1}^D$ 程度の意味であり, あまり気にしてはいけない.

系に対し適当な作用 $S[q^i]$, あるいは次節の Lagrangian を決定するのが, 粒子系の古典論の本質と言えるだろう.

0.1.1 例: 自由一次元一粒子系

質量 m の自由一次元一粒子系の作用は

$$S[q] = \frac{m}{2} \frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{t_2 - t_1}$$

である.

0.1.2 例: 調和振動子

質量 m, 角振動数 ω の調和振動子の作用は

$$S[q] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_2 - t_1)} \left[(q(t_1)^2 + q(t_2)^2) \cos \omega(t_2 - t_1) - 2q(t_1)q(t_2) \right]$$

[*1] ここでの「粒子系」は「(一般的な意味での) 場でない」程度の意味である. 厳密には粒子系も時間 $\mathbb{R}$ から配位空間 $\mathbb{R}^D$ への場 $q = (q^i) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ であるから, 場の理論の特別な場合とも言える.

である. 上の例とあわせて, これらが $\delta S[q^i]=0$ を満たすことは明らかである.

0.2 Euler – Lagrange の運動方程式

系の作用を直接求めることは難しく, これから定義する Lagrangian を用いるのが便利である.

作用は, 座標と時間に関する **Lagrangian** $L(q^i,\dot{q}^i,t)$ を用いて,

$$S[q^i]=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,L(q^i,\dot{q}^i,t).$$

と表される.

最小作用の原理に対し, この Lagrangian が満たすべき条件を求めよう. $q^i\mapsto q^i+\delta q^i$ の変換に対し, 作用の変化 $\delta S[q^i]=S[q^i+\delta q^i]-S[q^i]$ を計算すると,

$$\begin{aligned}\delta S[q^i]&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[L\left(q^i+\delta q^i,\dot{q}^i+\frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}t},t\right)-L(q^i,\dot{q}^i,t)\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial q^i}-\delta q^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q^i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\right]\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\delta q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\right]+\left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right]_{t=t_1}^{t=t_2}\end{aligned}$$

となる. ここで, 第 2 項は両端固定の境界条件 $\delta q^i(t_1)=\delta q^i(t_2)=0$ より消すことができて,

$$\delta S[q^i]=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\delta q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)\right]$$

となる. $\delta q^i(t)$ は $t_1<t<t_2$ で任意だから, 原理 $\delta S[q^i]=0$ より, 次の運動方程式が得られる.

最小作用の原理を満たすとき, Lagrangian $L(q^i,\dot{q}^i,t)$ は **Euler – Lagrange の運動方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0$$

を満たす.

これにより, 変分条件 $\delta S[q^i]=0$ を満たす $q^i(t)$ を求める問題は, Euler – Lagrange 方程式という微分方程式を解く問題と等価であることがわかった.

ところで, Lagrangian は一意ではない. Lagrangian $L(q,\dot{q},t)$ に対し, 位置と時間の関数 $f(q,t)$

の時間に関する完全微分 $\mathrm{d}f(q,t)\,/\,\mathrm{d}t$ を加えた量

$$\begin{aligned}\tilde{L}(q,\dot{q},t) &:= L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}f(q,t)}{\mathrm{d}t} \\ &= L(q,\dot{q},t) + \dot{q}^j\frac{\partial f(q,t)}{\partial q^j} + \frac{\partial f(q,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

は同じ形の Euler – Lagrange の運動方程式を与える. 実際,

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{q}^j\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial t}, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \dot{q}^j\frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i}\end{gathered}$$

であるから, 辺々引いて,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)$$

となり, L について Euler – Lagrange 方程式が成立するなら, $\tilde{L}$ についても成立する.

0.2.1 例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$$

で与えられる. ただし $V(q)$ は系のポテンシャルである. ここで,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = m\ddot{q}$$

であるから, Euler – Lagrange の運動方程式は,

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

と求まる. これは Newton の運動方程式として知られており, Lagrangian 決定の任意性を除けば, 最小作用の原理は物理原理として well-defined であることがわかる.

ポテンシャルが無い ($V = 0$) ときの作用の表式を求める. 運動方程式 $m\ddot{q} = 0$ を解いて,

$$\dot{q}(t) = \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

が得られる. したがって, 作用は

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{(t_1 - t_2)^2} = \frac{m}{2}\frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{t_2 - t_1}$$

と求まる.

0.2.2　例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

で与えられる. ここで,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = m\ddot{q}$$

であるから, Euler – Lagrange の運動方程式は

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0$$

と求まる.

作用の表式を求める. 運動方程式を解いて,

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{q_1 \sin\omega(t - t_2) - q_2 \sin\omega(t - t_1)}{\sin\omega(t_1 - t_2)}, \\ \dot{q}(t) &= \omega\frac{q_1 \cos\omega(t - t_2) - q_2 \cos\omega(t - t_1)}{\sin\omega(t_1 - t_2)} \end{aligned}$$

が得られる. ただし, $q_1 \equiv q(t_1), q_2 \equiv q(t_2)$ とした. したがって, 作用は,

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{m}{2}\left[\left\{\omega\frac{q_1 \cos\omega(t - t_2) - q_2 \cos\omega(t - t_1)}{\sin\omega(t_1 - t_2)}\right\}^2 - \omega^2\left\{\frac{q_1 \sin\omega(t - t_2) - q_2 \sin\omega(t - t_1)}{\sin\omega(t_1 - t_2)}\right\}^2\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{m\omega^2}{2}\frac{q_1^2 \cos 2\omega(t - t_2) + q_2^2 \cos 2\omega(t - t_1) - 2q_1 q_2 \cos(2t - t_1 - t_2)}{\sin^2\omega(t_2 - t_1)} \\ &= \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_2 - t_1)}\left[(q_1^2 + q_2^2)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2q_1 q_2\right] \end{aligned}$$

と求まる.

0.3　Noether の定理

Lagrangian は運動方程式を与えるだけでなく, 系の対称性に関する情報も持っている. 時間と座標の連続変換に対し作用が不変であるとき, 系には対応する不変量が存在することが知られている. この定理は Noether の定理と呼ばれている.

時間の微小変換 $t \mapsto t' = t + \delta t$ に対し, 座標が $q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t)$ と変換される

とする. このとき $t_1 < t < t_2$ の作用の変化 $\delta S[q^i(t)] = S[q'^i(t')] - S[q^i(t)]$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\delta S[q^i] &= \int_{t_1+\delta t(t_1)}^{t_2+\delta t(t_2)} \mathrm{d}t'\, L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \\
&\quad \left(\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = (1+\delta\dot{t})\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[(1+\delta\dot{t})L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\right] \\
&\quad \left(\partial'_t q'(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\partial_t(q^i(t) + \delta q^i(t)) = (1-\delta\dot{t})(\dot{q}^i + \delta\dot{q}^i) = \dot{q}^i + \delta\dot{q}^i - \dot{q}^i\delta\dot{t}\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t}L + L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta\dot{q}^i - \dot{q}^i\delta\dot{t}, t + \delta t) - L(q^i, \dot{q}^i, t)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t}L + \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\delta\dot{q}^i - \dot{q}^i\delta\dot{t})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t\frac{\partial L}{\partial t}\right] \\
&\quad \left(\text{Lie 微分 } \delta^L q^i(t) \equiv q'^i(t) - q^i(t) = \delta q^i - \dot{q}^i\delta t\right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t}L + (\delta^L q^i + \dot{q}^i\delta t)\frac{\partial L}{\partial q^i} + (\partial_t\delta^L q^i + \ddot{q}^i\delta t)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t\frac{\partial L}{\partial t}\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{\delta^L q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta^L q^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t L\right)\right\} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta^L q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] + \left[\delta^L q^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t L\right]_{t=t_1}^{t=t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta^L q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] + \left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta t\left(\dot{q}^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right)\right]_{t=t_1}^{t=t_2}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 最後の式の第一項は Euler – Lagrange の運動方程式より消え, 第二項の t_1, t_2 は任意である[*2]. したがって, この変換に対し作用が不変 $\delta S = 0$ であるとすると, 対応する保存量が得られる.

[*2] 最小作用の原理の場合と違い, このときの δq^i は両端固定でない. そのため, Euler-Lagrange の運動方程式の際に消えた発散項を, 今回の場合は消すことができない.

時間の微小変換 $t \mapsto t' = t + \delta t$ に対し, 座標が $q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t)$ と変換されるとき, 作用が不変であるならば, 量

$$\delta Q \equiv \delta q^i p_i - \delta t H \equiv \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right)$$

は保存する (**Noether の定理** Noether' s theorem):

$$\frac{\mathrm{d}\delta Q}{\mathrm{d}t} = 0, \quad (\Leftrightarrow \delta Q = \mathrm{const.})$$

ここで, 量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H \equiv \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \dot{q}^i p_i - L$$

はそれぞれ一般化運動量, Hamiltonian と呼ばれる (後述).

0.3.1 例: 空間並進に対する不変量

空間並進 $t \mapsto t' = t, q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \varepsilon^i$ に対し, 作用が不変であるとき, 一般化運動量は保存する:

$$\delta Q = \varepsilon^i p_i = \mathrm{const.} \quad \therefore p_i = \mathrm{const.}$$

0.3.2 例: 時間並進に対する不変量

時間並進 $t \mapsto t' = t + \varepsilon, q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t)$ に対し, 作用が不変であるとき, Hamiltonian は保存する:

$$\delta Q = -\varepsilon H = \mathrm{const.} \quad \therefore H = \mathrm{const.}$$

0.3.3 例: 空間回転に対する不変量

3 次元空間での一粒子を考える. 正規直交座標系 $q = \boldsymbol{x}$ を取り, 空間回転 $t \mapsto t' = t, \boldsymbol{x}(t) \mapsto \boldsymbol{x}'(t') = R(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{x}(t)$ に対し, 作用が不変であるとき, 対応する保存量 $\boldsymbol{L}$ は角運動量と呼ばれる:

$$\delta Q = (-\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}) = \mathrm{const.}$$

$$\therefore \boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p} = \mathrm{const.}$$

0.4 Hamilton – Jacobi 方程式

前節で導入された Hamiltonian は, Lagrangian を Legendre 変換したものであり, 系に関して Lagrangian と同程度の情報を持つ. 以降, Hamiltonian の性質について詳しくみていく[*3].

[*3] Lagrangian を用いた議論を「Lagrange 形式」, Hamiltonian を用いた議論を「Hamilton 形式」と呼ぶことがある.

Lagrangian L が与えられたとき, q^i に対して

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

を**一般化運動量**, または q^i に**共役な運動量**conjugate momentum といい, 一般化座標とそれに共役な運動量の組 (q^i, p_i) を**正準変数** canonical variables という.
Lagrangian L と正準変数 (q^i, p_i) が与えられたとき[a],

$$H(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - L$$

を **Hamiltonian** という.

[a] たとえば $p_i = \partial L(q^i, \dot{q}^i, t)/\partial \dot{q}^i$ を逆に解いて $p_i = \dot{q}_i = (q_i, p_i, t)$ が得られたとき.

一般化運動量と Hamiltonian は作用を端点で偏微分して

$$p_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q^i(t)}, \quad H(q^i, p_i, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

と得ることもできる. ただし作用は $S[q^i] = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, L(q^i, \dot{q}^i, t')$ で与えられている. 実際, Norther の定理と同じ状況での変分は

$$\delta S[q^i] = \left[\delta q^i p_i - \delta t H\right]_{t'=t_0}^{t'=t}$$

である. このときの始点での変位を $\delta t(t_0) = \delta q^i(t_0) = 0$ とすれば,

$$\delta S[q^i] = \delta q^i p_i - \delta t H$$

となる. この変分は経路の始点と途中 $t' \in [t_0, t)$ によらない形になっているから, 一点 t での変位から求めたい全微分

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}q^i \, p_i - \mathrm{d}t \, H$$

が得られる.

これらの性質を組み合わせることで以下の方程式が得られる.

最小作用の原理を満たす作用 $S[q^i] = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, L(q^i, \dot{q}^i, t')$ に対し, 作用の端点 $t, q(t)$ での偏微分は **Hamilton – Jacobi 方程式**Hamilton – Jacobi equation

$$H\!\left(q^i(t), \frac{\partial S}{\partial q^i(t)}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

を満たす.

0.5 Hamilton の運動方程式

Lagrangian の場合と同様に, 最小作用の原理に対し Hamiltonian が満たす条件を求めよう. Hamiltonian $H(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - L$ の全微分は,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i + p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \mathrm{d}L \\
&= \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i + p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i - p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad \left(\because \mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\mathrm{d}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i + \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

である. ここで, Euler-Lagrangian 方程式が成立するとき $\dot{p}_i = \partial L/\partial q^i$ であることを用いると, Hamiltonian に関する運動方程式が得られる.

> 最小作用の原理を満たすとき, Hamiltonian は以下の **Hamilton の運動方程式**あるいは**正準方程式** canonical equation
>
> $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
>
> を満たす.

Lagrangian が時間に陽に依存しないとき, Hamiltonian

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

は保存する. 時間並進に対して作用が不変であるから, 前述の Noether の定理の結果とも一致する.

$q^i(t)$ と $p_i(t)$ を独立にした作用

$$S[q^i, p_i] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\dot{q}^i(t) p_i(t) - H\big(q^i(t), p_i(t), t\big)\right]$$

も用いられる. このときの最小作用の原理は

$$\delta S[q^i, p_i] = S[q^i + \delta q^i, p_i + \delta p_i] - S[q^i, p_i] = 0$$

で表される.

0.5.1 例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

であった. 一般化運動量の定義より,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

である. したがって $\dot{q} = p/m$ であるから, Hamiltonian の定義より,

$$H(q, p, t) = \frac{p}{m}p - L\Big(q, \frac{p}{m}, t\Big) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

と求まる. ここで,

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

であるから, Hamilton の運動方程式は,

$$\dot{p} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

と得られる.

0.5.2 例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

であった. 一般化運動量の定義より,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

である. したがって $\dot{q} = p/m$ であるから, Hamiltonian の定義より,

$$H(q, p, t) = \frac{p}{m}p - L\Big(q, \frac{p}{m}, t\Big) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

と求まる. ここで,

$$\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2 q, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

であるから, Hamilton の運動方程式は,

$$\dot{p} = -m\omega^2 q, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

と得られる.

0.6 正準変換

正準変数の変換 $(q^i, p_i) \mapsto (q'^j, p'_j) = (q'^j(q^i, p_i), p'_j(q^i, p_i))$ に対して Hamiltonian が $H(q^i, p_i, t) \mapsto H'(q'^j, p'_j, t)$ と変換されるとき, この正準変数の変換を**正準変換** canonical transformation という. いずれの表示でも最小作用の原理を満たすとき, Hamiltonian の定義から,

$$\delta S[q^i, p_i] = \delta \int \mathrm{d}t\, (\dot{q}^i p_i - H) = 0,$$

$$\delta S'[q'^i, p'_i] = \delta \int \mathrm{d}t\, (\dot{q}'^i p'_i - H') = 0.$$

したがって, ある関数 W が存在して,

$$(\dot{q}^i p_i - H) - (\dot{q}'^i p'_i - H') = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$
$$\therefore \mathrm{d}W = p_i\,\mathrm{d}q^i - p'_i\,\mathrm{d}q'^i - (H - H')\,\mathrm{d}t\,.$$

または, 両辺に $\mathrm{d}(q'^i p'_i)\,/\,\mathrm{d}t$ を足して,

$$(\dot{q}^i p_i - H) - (-q'^i \dot{p}'_i - H') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(W + q'^i p'_i\big) =: \frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}t}.$$
$$\therefore \mathrm{d}W' = p_i\,\mathrm{d}q^i + q'^i\,\mathrm{d}p'_i - (H - H')\,\mathrm{d}t\,.$$

これら $W(q^i, q'^i, t), W'(q^i, p'_i, t)$ をどちらも**母関数**といい, 以下を満たす.

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad p'_i = -\frac{\partial W}{\partial q'^i}, \quad H' = H + \frac{\partial W}{\partial t},$$
$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial q^i}, \quad q'^i = \frac{\partial W'}{\partial p'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial W'}{\partial t}.$$

0.7 Poisson 括弧

正準変数 (q^i, p_i) に対し, **Poisson 括弧** Poisson braket は以下で定義される演算である:

$$\{A, B\}_{\mathrm{P}} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i}.$$

正準変数自身は以下を満たす:

$$\{q^i, p_j\}_{\mathrm{P}} = \delta^i_j, \quad \{q^i, q^j\}_{\mathrm{P}} = \{p_i, p_j\}_{\mathrm{P}} = 0.$$

また, Hamilton の運動方程式は以下のように書き換えられる:

$$\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = \{q^i, H\}_{\mathrm{P}}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \{p_i, H\}_{\mathrm{P}}.$$

より一般に, 正準変数と時間に関する物理量 $A(q^i, p_i, t)$ について, 時間微分に関して以下が成立する:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

実際, A の時間による完全微分は,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial A}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t}\\ &= \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial A}{\partial t}\\ &= \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t}.\end{aligned}$$

この式は, 物理量 A の全時間発展が Hamiltonian H によって記述されることを意味している.

また, Poisson 括弧は以下の性質を満たす:

1. **双線型性**: $\{aX + bY, Z\}_{\mathrm{P}} = a\{X, Z\}_{\mathrm{P}} + b\{Y, Z\}_{\mathrm{P}}, \{X, aY + bZ\}_{\mathrm{P}} = a\{X, Y\}_{\mathrm{P}} + b\{X, Z\}_{\mathrm{P}}$,

2. **交代性**: $\{X, Y\}_{\mathrm{P}} = -\{Y, X\}_{\mathrm{P}}$,
3. **Jacobi 律**: $\{X, \{Y, Z\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{Y, \{Z, X\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} + \{Z, \{X, Y\}_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}} = 0$.

したがって, Poisson 括弧は Lie 代数の括弧積である.

0.8 参考文献

- ランダウ, L., リフシッツ, E.『力学』(広重 徹, 水戸 巌訳, 東京図書, 2008)
- 井田大輔『現代解析力学入門』(朝倉書店, 2020)
- 高橋 康, 柏 太郎『量子場を学ぶための場の解析力学入門 増補第 2 版』(講談社サイエンティフィク, 2005)
- 柏 太郎『新版 演習 場の量子論』(サイエンス社, 2006)