物理ノート

xiupos

2024 年 4 月 9 日

目次

1 はじめに 4

2 複素解析 4
- 2.1 虚数単位と複素数体 4
- 2.2 三角関数と指数関数 4
- 2.3 複素平面と極形式 5
- 2.4 複素微分 5
- 2.5 正則関数と特異点 6
- 2.6 リーマン面 6
- 2.7 複素積分 6
- 2.8 冪級数 8
- 2.9 留数定理 9
  - 2.9.1 留数の求め方の例 9
  - 2.9.2 定積分への応用 10
- 2.10 一致の定理と解析接続 10
  - 2.10.1 解析接続の例 10

3 Fourier 変換と Laplace 変換 11
- 3.1 Fourier 級数 11

4 汎関数 11
- 4.1 汎関数の考え方 11
  - 4.1.1 汎関数の例 12
- 4.2 汎関数微分 12
  - 4.2.1 汎関数微分の計算例 12
- 4.3 汎関数冪級数 13
  - 4.3.1 冪級数を用いた計算例 14
- 4.4 汎関数積分 15
  - 4.4.1 汎関数積分の計算例 15
- 4.5 参考文献 16

5 解析力学 16
5.1 最小作用の原理 17
5.2 Euler – Lagrange の運動方程式 17
5.2.1 例: 一次元一粒子系 18
5.2.2 例: 調和振動子 18
5.3 Noether の定理 19
5.3.1 例: 空間並進に対する不変量 19
5.3.2 例: 時間並進に対する不変量 20
5.3.3 例: 空間回転に対する不変量 20
5.4 Hamilton の運動方程式 20
5.4.1 例: 一次元一粒子系 21
5.4.2 例: 調和振動子 21
5.5 正準変換 21
5.6 Poisson 括弧 22

6 代数学 22
6.1 群 22
6.2 部分群と剰余類 23
6.3 準同型写像 23
6.4 群の作用 23
6.5 環・体 24
6.6 部分環 24
6.7 環準同型 24
6.8 代数 24
6.9 環上の加群 24
6.10 参考文献 25

7 線形代数学 25
7.1 ベクトル空間 25
7.2 線形写像 25
7.3 双対空間 26
7.4 テンソル代数 26
7.5 外積代数 27
7.6 内積空間 27
7.7 ブラ-ケット記法 28
7.8 参考文献 28

8 量子力学 28
8.1 状態ベクトルと観測量 28
8.2 波動関数 29
8.3 時間発展と描像 30
8.4 正準量子化 31

8.5 時間発展演算子と運動方程式 31
8.6 位置演算子と運動量演算子 33
8.7 Schrödinger 方程式 34
8.7.1 例: 一次元一粒子系 34
8.8 生成・消滅演算子 35
8.9 相互作用描像 36
8.10 経路積分量子化 36
8.11 参考文献 37

9 位相空間 37
9.1 位相空間 37
9.2 連続写像と同相 37

10 微分幾何学 37
10.1 束と切断 38
10.2 ファイバー束と構造群 38
10.3 主 G-束と同伴ファイバー束 39
10.4 ベクトル束 39
10.5 接束と余接束 39
10.6 微分形式とベクトル束上の接続 40
10.6.1 全微分 : $\Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ 40
10.6.2 外微分 : $\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 40
10.6.3 共変微分 : $\Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$ 41
10.6.4 共変外微分 : $\Omega^k(M,E) \to \Omega^{k+1}(M,E)$ 42
10.6.5 曲率 43
10.7 主 G-束の接続 44
10.8 参考文献 44

11 場の解析力学 44
11.1 最小作用の原理 44
11.2 Euler – Lagrange の運動方程式 44
11.2.1 例: 実 Klein-Gordon 場 46
11.2.2 例: de Broglie 場 46
11.2.3 例: 電磁場 46
11.3 Noether の定理 47
11.4 Hamilton の運動方程式 48
11.4.1 例: 実 Klein-Gordon 場 49
11.5 Poisson 括弧 50
11.6 平面波展開 50
11.6.1 例: 実 Klein-Gordon 場 50
11.7 参考文献 54

12 場の量子論 54
12.1 正準量子化 54
12.2 生成・消滅演算子 55
12.2.1 例: 実 Klein-Gordon 場 56
12.3 正規積 58
12.3.1 例: 実 Klein-Gordon 場 59
12.4 伝播関数 60
12.4.1 例: 実 Klein-Gordon 場 61
12.5 Feynman 図形 61
12.6 参考文献 61

13 一般相対論 62
13.1 平行移動 62
13.2 Christoffel 記号 63

1 はじめに

適当なことを書いているノート. 公開を前提としていない. 疑って読むこと.

2 複素解析

import Ca from‘./ca.md’;

2.1 虚数単位と複素数体

$i^2 = -1$ を満たす数 i を虚数単位と言い, 形式的に $i = \sqrt{-1}$ とも書く.

2 実数 $x, y \in \mathbb{R}$ を係数とした $1, i$ の線形結合 $x + yi$ を**複素数**といい, 複素数の全体を $\mathbb{C}$ と書く. 複素数 $z = x + yi$ の $x =: \mathrm{Re}\{z\}, y = \mathrm{Im}\{z\}$ をそれぞれ z の**実部** real part, **虚部** imaginary part という.

複素数 $z = x + yi$ に対して, $z^* := x - yi$ を z 複素共役といい, 複素数 z の絶対値 $|z|$ を $|z|^2 := z^* z = x^2 + y^2 \geq 0$ で定義する.

2.2 三角関数と指数関数

複素数 z に対する三角関数 $\cos z, \sin z$ を以下で定義する:

$$
\begin{aligned}
\cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} &&= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \cdots, \\
\sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} &&= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \cdots.
\end{aligned}
$$

また, 指数関数 e^z (または $\exp z$) を以下で定義する:

$$
e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.
$$

これらは実数における三角関数と指数関数の自然な拡張である.

指数関数と三角関数について以下が成立する:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

2.3 複素平面と極形式

複素数 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ に対し, (x, y) を点とする $\mathbb{R}^2$ 平面を**複素平面**といい, この $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視する. たとえば, 原点 $O = (0, 0)$ から点 (x, y) までの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ で複素数 z の絶対値 $|z|$ と同じである.

$z = |z|e^{i\theta} = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta$ のような形で与えられる複素数を**極形式**といい, θ を**偏角**という: 実際, 複素平面上では点 $(|z| \cos \theta, |z| \sin \theta)$ に対応し, 極座標では $(|z|, \theta)$ である. したがって,

$$x + yi = |z|e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2,\ \cos \theta = \frac{x}{|z|},\ \sin \theta = \frac{y}{|z|}$$

都合の良い偏角の範囲を偏角の**主値**といい, $\arg z$ と書く: たとえば $0 \leq \arg z < 2\pi$ や $-\pi < \arg z \leq \pi$ など.

2.4 複素微分

複素関数 $f(z)$ の点 z における微分は

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

定義式の極限値が存在するとき, $f(z)$ は z で微分可能であるという.

$f(z) = u(z) + iv(z)$ が $z = x + iy$ で微分可能である条件は, $u(x, y) := u(x + iy), v(x, y) := v(x + iy)$ として, 以下の方程式が成立することである. これを **Cauchy-Riemann 方程式** Cauchy-Riemann equation という:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

実際, 微分の定義式において $\Delta z = |\Delta z|e^{i\theta}$ とすると, $f(z)$ が z で微分可能であるための条件は, こ

の値が θ によらないことである. したがって,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{e^{-i\theta}}{|\Delta z|}\Big[f(z+|\Delta z|e^{i\theta}) - f(z)\Big] \\
&= \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{e^{-i\theta}}{|\Delta z|}\Big[u(x+|\Delta z|\cos\theta, y+|\Delta z|\sin\theta) + iv(x+|\Delta z|\cos\theta, y+|\Delta z|\sin\theta) - u(x,y) - iv(x,y)\Big] \\
&= \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{e^{-i\theta}}{|\Delta z|}\left[\frac{\partial u}{\partial x}|\Delta z|\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}|\Delta z|\sin\theta + i\frac{\partial v}{\partial x}|\Delta z|\cos\theta + i\frac{\partial v}{\partial y}|\Delta z|\sin\theta + O(|\Delta z|^2)\right] \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-i\theta}\cos\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-i\theta}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-i\theta}(e^{i\theta} - i\sin\theta) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-i\theta}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-i\theta}\sin\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-i\theta}\sin\theta \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]e^{-i\theta}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

2.5 正則関数と特異点

関数 $f(z)$ が z とその近傍で 1 価関数かつ微分可能であるとき, $f(z)$ は z において**正則**という. $f(z)$ が領域 D 内の全ての点で正則であるとき, $f(z)$ は D において正則という.

$f(z)$ が正則でない点を $f(z)$ の**特異点** singularity という. また近くに特異点が存在しない特異点を特に**孤立特異点**といい, 以下の二つに分類される: - N **位の極**: 自然数 N に対し, その点のまわりで関数 $f(z)$ が $\dfrac{1}{(z-a)^N}$ のように振る舞う特異点. - **真性特異点**: 形式的には ∞ 位の極. - **分岐点**: その点を中心とする閉曲線に沿って一周するとき, 周回の度に値が変わるような特異点.

2.6 リーマン面

ある関数に関し, その点を中心とする閉曲線に沿って一周するとき, 周回の度に値が変わるような孤立特異点を**分岐点**といい, このような関数を**多価関数**という. たとえば, $f(z) = z^{1/2}$ は 2 価関数である: $z = e^{i\theta}$ とすれば $e^{0i} = e^{2\pi i} = 1$ であるが, $f(z) = e^{i\theta/2}$ より $f(e^{0i}) = e^{0i} = 0$, $f(e^{2\pi i}) = e^{i\pi} = 1$ で $f(1) = 0, 1$ である.

2.7 複素積分

関数 $f(z)$ の経路 C に沿った積分は

$$
I = \int_C \mathrm{d}z\, f(z).
$$

または, 関数を $f(z) = u(z) + iv(z)$, 経路を $C(t) \in \mathbb{C}$ として,

$$
I = \int \mathrm{d}t\, f(C(t)) = \int \mathrm{d}t\, u(C(t)) + i\int \mathrm{d}t\, v(C(t)).
$$

領域 D で正則な $f(z)$ を, その境界である閉曲線 ∂D で積分するとその値は 0 になる. これを

Cauchy の積分定理という:

$$\oint_{\partial D} \mathrm{d}z\, f(z) = 0.$$

実際, $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial D} \mathrm{d}z\, f(z) &= \oint_{\partial D} (\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y)\Big[u(x, y) + iv(x, y)\Big] \\
&= \oint_{\partial D} \Big\{ \mathrm{d}x \Big[u(x, y) + iv(x, y)\Big] + \mathrm{d}y \Big[iu(x, y) - v(x, y)\Big]\Big\} \\
&= \oint_{\partial D} \Big[\, \mathrm{d}x\, u(x, y) - \mathrm{d}y\, v(x, y)\Big] + i \oint_{\partial D} \Big[\, \mathrm{d}y\, u(x, y) + \mathrm{d}x\, v(x, y)\Big] \\
&= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] + i \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] \qquad (\because \text{Green の定理}) \\
&= 0. \qquad (\because \text{Cauchy-Riemann 方程式})
\end{aligned}$$

Cauchy の積分定理より, 積分は経路を特異点を越えない連続的な経路の変更に対して不変である: $C \mapsto C'$ の経路変更に対して, 内部領域 D で関数 $f(z)$ 正則であるから,

$$\int_C \mathrm{d}z\, f(z) \quad \mapsto \quad \int_{C'} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_{C' + \overline{C}} \mathrm{d}z\, f(z) - \int_{\overline{C}} \mathrm{d}z\, f(z) = \int_C \mathrm{d}z\, f(z).$$

領域 D で正則な関数 $f(z)$ について, $z = a \in D$ を囲む D 内の閉曲線 C に対し以下が成立する. これを **Cauchy の積分公式**という:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a}.$$

実際, $z = a$ を中心とし D 内に含まれる半径 ε の円 S に対し, C と S を巡り内部が正則であるような閉曲線 C' について Cauchy の積分定理より,

$$\oint_{C'} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a} = \oint_C \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a} + \oint_{\overline{S}} \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\therefore \oint_C \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a} &= \oint_S \mathrm{d}z\, \frac{f(z)}{z - a} \\
&\qquad (z = a + \varepsilon e^{i\theta},\ \mathrm{d}z = i\varepsilon e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, i\varepsilon e^{i\theta} \frac{f(a + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \\
&= i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, f(a + \varepsilon e^{i\theta}) \\
&= i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \Big[f(a) + O(\varepsilon)\Big] \\
&= 2\pi i f(a) + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

ここで ε は任意だから, $\varepsilon \to 0$ の極限で Cauchy の積分公式が得られる.

Cauchy の積分公式の条件下で, 以下が同様に成立する. これを **Goursat の定理**という.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}z \, \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

これは Cauchy の積分公式を a で n 回微分することで得られる.

2.8 冪級数

複素数の冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

について, これが収束する条件は $n \to \infty$ の極限で $|c_n z^n| > |c_{n+1} z^{n+1}|$ であるから, **収束半径**と呼ばれる実数

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

に対し, $|z| < R$ で $f(z)$ は収束する: 実際,

$$R - |z| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} - \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n z^n| - |c_{n+1} z^{n+1}|}{|c_{n+1} z^n|} > 0.$$

$z = a$ において正則な関数 $f(z)$ を以下の冪級数に展開することができる. これを $z = a$ まわりの **Tayler 級数展開**という:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (\because \text{Goursat の定理})$$

ただし $z = a$ を中心として $f(z)$ が正則である最大の半径 R の円領域 D に対し, C は $z = a$ を囲む D 内の閉曲線. また収束半径は R. 実際, Cauchy の積分定理より $C = \partial D$ として十分, Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

ただし, $|z| < 1$ に対し以下が成立することを用いた:

$$\sum_{n=0}^{N-1} z^n - z \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 - z^N.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z} \quad \xrightarrow{N\to\infty} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

$z=a$ を極あるいは真性特異点として持つ関数 $f(z)$ を以下の冪級数に展開することができる. これを $z=a$ まわりの **Laurent 級数展開**という:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n=\cdots+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+\cdots,$$
$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\zeta\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

ただし $z=a$ を中心として $f(z)$ が正則である円環領域 D に対し, C は $z=a$ を囲む D 内の閉曲線. $n<0$ 項を $f(z)$ **主要部**という.

2.9 留数定理

$z=a$ まわりの Laurent 級数展開 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-a)^n$ において, $n=-1$ の項の係数

$$\mathrm{Res}(a)\;:=A_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}z\,f(z)$$

を**留数** residual といい, 次の**留数定理**が成立: $f(z)$ が閉曲線 C 内で有限個の特異点 $a_1,\dots,a_N$ を除いて正則であるとき,

$$\oint_C \mathrm{d}z\,f(z)=2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(a_n).$$

実際, 特異点を $z=a_n$ のみ含む閉曲線 C_n に対し, 留数の定義から

$$\oint_{C_n}\mathrm{d}z\,f(z)=2\pi i\,\mathrm{Res}(a_n).$$

C および $\overline{C_1},\dots,\overline{C_N}$ を巡り, 内部が正則であるような閉曲線 C' を考えると, Cauchy の積分定理より

$$\oint_{C'}\mathrm{d}z\,f(z)=\oint_C\mathrm{d}z\,f(z)+\sum_{n=1}^{N}\oint_{\overline{C_n}}\mathrm{d}z\,f(z)=0.$$
$$\therefore\oint_C\mathrm{d}z\,f(z)=\sum_{n=1}^{N}\oint_{C_n}\mathrm{d}z\,f(z)=2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(a_n).$$

2.9.1 留数の求め方の例

$z=a$ で正則な関数 $\mathrm{g}(z)$ に対し, 以下の $f(z)$ は $z=a$ で特異点を持つ. このとき, $f(z)$ の留数 $\mathrm{Res}(a)$ の求め方は以下:

- $f(z)=\dfrac{\mathrm{g}(z)}{(z-a)^n}$ (n は自然数):

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\sum_{m=0}^{N}\frac{\mathrm{g}^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m$$
$$=\frac{1}{z-a}\sum_{m=0}^{N}\frac{\mathrm{g}^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^{m-(n-1)}$$

より, $m = n - 1$ の項は留数:

$$\mathrm{Res}(a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

特に $n = 1, 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{z-a} &\Rightarrow\quad \mathrm{Res}(a) &= g(a), \\ f(z) &= \frac{g(z)}{(z-a)^2} &\Rightarrow\quad \mathrm{Res}(a) &= g'(a). \end{aligned}$$

- $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ $(h(z) = 0, h'(z) \neq 0)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{\sum_{n=1}^{N} h^{(n)}(a)\,(z-a)^n/n!} \\ &= \frac{1}{z-a}\frac{g(z)}{\sum_{n=1}^{N} h^{(n)}(a)\,(z-a)^{n-1}/n!}. \end{aligned}$$

したがって分母の総和の $n = 1$ 項は留数:

$$\mathrm{Res}(a) = \frac{g(z)}{h'(a)}.$$

2.9.2　定積分への応用

2.10　一致の定理と解析接続

2 関数 $f(z), g(z)$ がどちらも領域 D で正則で, D の部分領域 D_0 において $f(z) = g(z)$ であるとき, D においても $f(z) = g(z)$ である. これを**一致の定理**という. 実際, $h(z) := f(z) - g(z)$ の Tayler 展開の係数 $\{A_n\}$ を考えると, D_0 内の点まわりでの Tayler 展開では $h(z) = 0$ より $\{A_n = 0\}$. したがって D_0 外の点でも $f(z) = g(z)$ である.

領域 D_0 で定義された関数 $f_0(z)$ に対し, D_0 を含む領域 D で $f_0(z)$ が正則かつ, 同様に正則な $f(z)$ が D_0 で $f_0(z) = f(z)$ であるとき, $f(z)$ を D への $f_0(z)$ の**解析接続** analytic continuation という. $f(z)$ が存在すればただ一つである. 実際, $f_0(z)$ に対し D_0 で一致する関数が複数存在する場合も, 一致の定理よりそれらは D において同一の関数である.

2.10.1　解析接続の例

- $\dfrac{1}{1-z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ への $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の解析接続 ($|z| < 0$ において一致).
- $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ で定義されるガンマ関数 $\Gamma(z) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{z-1}e^{-x}$ に対し, $\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ は $\mathrm{Re}\{z\} > -1$ への $\Gamma(z)$ の解析接続である. 帰納的に解析接続を繰り返すことでガンマ関数の $\mathrm{Re}\{z\} < 0$ への解析接続が得られる. 実際, $\mathrm{Re}\{z\} > 0$ で

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^z e^{-x} \\ &= [-x^z e^{-x}]_0^\infty + z\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{z-1}e^{-x} \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

3　Fourier 変換と Laplace 変換

import Foulap from‘./foulap.md’;

3.1　Fourier 級数

区間 $(-L, L)$ で区分的に連続な周期 $2L$ の関数 $f(x)$ は以下の冪級数に展開することができる. これを **Fourier 級数** Fourier series という:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}.
\end{aligned}
$$

4　汎関数

import Functional from‘./functional.md’;

ここでは定義域が関数であるような関数を**汎関数** functional とする. 例えば, $F : (A \to B) \to C$ など. このとき, $\varphi : A \to B$ を用いて $F[\varphi(x)] \in C$ と書く. ただし表記中 $x \in A$ は「ダミー」であって, 汎関数の定義中で用いられる文字である. 単に $F[\varphi]$ とも略記される. $F[\varphi(x)]$ が汎関数であるとき, 通常の関数 $g : C \to D$ を用いた $g(F[\varphi(x)])$ もまた汎関数である.

以下では物理において頻出する汎関数の基本的な計算方法についてまとめる. ここでは数学的な厳密性は一切考慮しない. 高校微積分程度の理解を目指している[*1].

4.1　汎関数の考え方

区間 $I \in [a, b]$ で実数に値を取る関数 $\varphi(x)$ に対し, 汎関数 $F[\varphi(x)]$ を考える. I の分割 $a = x_0 < \cdots < x_N = b$ に対し, $\varphi_n := \varphi(x_n)$ として, ある関数 $f_N(\varphi_0, \dots, \varphi_N)$ の分割数を極限まで増やしたものと見做すことができる. たとえば $F[\varphi(x)] = \displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \varphi(x)$ では, Riemann 積分の考え方を用いて,

$$
f_N(\varphi_0, \dots, \varphi_N) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \xrightarrow{N \to \infty} \int_a^b \mathrm{d}x\, \varphi(x) = F[\varphi(x)].
$$

または, 等間隔な分割 $x_n := a + \dfrac{n(b-a)}{N}, \Delta x := \dfrac{b-a}{N}$ に対し, 例えば $\varphi(x) := x^2$ とすると,

$$
f_N(x_1^2, \dots, x_N^2) = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \Delta x \xrightarrow{N \to \infty} \int_a^b \mathrm{d}x\, x^2 = F[x^2].
$$

[*1] それすら怪しいかもしれない. 気付いたことがあれば随時更新する.

4.1.1 汎関数の例

以下は汎関数である:

1. 積分 $I[\varphi(x)] = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, \varphi(x)$.
2. 代入 $S[\varphi(x)](x') = \varphi(x') = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, \varphi(x)\delta(x - x')$.
3. Fourier 変換 $\mathcal{F}[\varphi(x)](k) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} \varphi(x) e^{-(i/\hbar)kx}$.
4. Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\varphi}(k)](x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\varphi}(k) e^{(i/\hbar)kx}$; 実際 $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi(\tilde{x})](k)](x) = \varphi(x)$.

4.2 汎関数微分

汎関数 $F[\varphi(x)]$ の点 y における汎関数微分は

$$\frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)} := \lim_{h\to 0} \frac{F[\varphi(x) + h\delta(x-y)] - F[\varphi(x)]}{h}.$$

物理では汎関数微分を変分とも呼び, 単に $\dfrac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}$ とも略記される.

4.2.1 汎関数微分の計算例

以下の汎関数 $F[\varphi(x)]$ について汎関数微分 $\dfrac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)}$ を計算する:

1. $F[\varphi(x)] = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, g(x)\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int \mathrm{d}x\, g(x)\varphi(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int \mathrm{d}x\, g(x)(\varphi(x) + h\delta(x-y)) - \int \mathrm{d}x\, g(x)\varphi(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int \mathrm{d}x\, g(x) h\delta(x-y) \\
&= \int \mathrm{d}x\, g(x)\delta(x-y) = g(y).
\end{aligned}$$

2. $F[\varphi(x)] = \varphi(x')$:

$$\frac{\delta\varphi(x')}{\delta\varphi(y)} = \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int \mathrm{d}z\, \delta(x'-z)\varphi(z) = \delta(x'-y).$$

3. $F[\varphi(x)] = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, g(\varphi(x))$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int \mathrm{d}x\, g(\varphi(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int \mathrm{d}x\, g(\varphi(x) + h\delta(x-y)) - \int \mathrm{d}x\, g(\varphi(x))\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\int \mathrm{d}x \left[h\frac{\mathrm{d}g(\varphi(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)}\delta(x-y) + O(h^2)\right]\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\frac{\mathrm{d}g(\varphi(y))}{\mathrm{d}\varphi(y)} + O(h^2)\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}g(\varphi(y))}{\mathrm{d}\varphi(y)}.
\end{aligned}
$$

4. $F[\varphi(x)] = \displaystyle\int \mathrm{d}x\, g(\varphi'(x))$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int \mathrm{d}x\, g(\varphi'(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int \mathrm{d}x\, g\left(\frac{\mathrm{d}\{\varphi(x) + h\delta(x-y)\}}{\mathrm{d}x}\right) - \int \mathrm{d}x\, g\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int \mathrm{d}x\, g\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} + h\frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}x}\right) - \int \mathrm{d}x\, g\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\int \mathrm{d}x \left[h\frac{\mathrm{d}g(\mathrm{d}\varphi(x)\,/\,\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi(x)\,/\,\mathrm{d}x)}\frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}x} + O(h^2)\right]\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\int \mathrm{d}x \left[-h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}g(\mathrm{d}\varphi(x)\,/\,\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi(x)\,/\,\mathrm{d}x)}\delta(x-y) + O(h^2)\right]\right\} \quad (\because \text{部分積分}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[-h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g(\mathrm{d}\varphi(y)\,/\,\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi(y)\,/\,\mathrm{d}y)} + O(h^2)\right] \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g(\mathrm{d}\varphi(y)\,/\,\mathrm{d}y)}{\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi(y)\,/\,\mathrm{d}y)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}g(\varphi'(y))}{\mathrm{d}\varphi'(y)}.
\end{aligned}
$$

4.3 汎関数冪級数

連続な汎関数は Tayler 級数に相当する以下の冪級数に展開することができる. これを **Volterra 級数** Volterra series という:

$$
\begin{aligned}
F[\varphi(x)] &= F[0] + \int \mathrm{d}y\, \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)}\varphi(y) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}y_1 \int \mathrm{d}y_2\, \frac{\delta^2 F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)}\varphi(y_1)\varphi(y_2) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n\, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)}\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n),
\end{aligned}
$$

または微小な関数 $\eta(x)$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
F[\varphi(x) + \eta(x)] &= F[\varphi(x)] + \int \mathrm{d}y\, \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)}\eta(y) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}y_1 \int \mathrm{d}y_2\, \frac{\delta^2 F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\delta\varphi(y_2)}\eta(y_1)\eta(y_2) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n\, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)}\eta(y_1)\cdots\eta(y_n).
\end{aligned}
$$

n 階汎関数微分 $\dfrac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)}$ が $y_1, \ldots, y_n$ について対称であると仮定して, $\dfrac{\delta^n F}{\delta\varphi^n}$ と略記する. また,

$$
\frac{\delta^n F}{\delta\varphi^n} * \varphi^n \;:= \int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n\, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)}\varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)
$$

とすると, Volterra 級数は以下のように書き直せる:

$$F[\varphi(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n F}{\delta\varphi^n} * \varphi^n.$$

4.3.1 冪級数を用いた計算例

1. $\dfrac{\delta^n F}{\delta\varphi^n} * \varphi^n$ の汎関数 b 微分:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\left(\frac{\delta^n F}{\delta\varphi^n} * \varphi^n\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n \, \frac{\delta^n F[\varphi(x) + h\delta(x-y)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)} \varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n \, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)} \varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int \mathrm{d}z \, \frac{\delta}{\delta z}\left(\int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n \, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)} \varphi(y_1)\cdots\varphi(y_n)\right) h\delta(z-y) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_n \, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_n)} \varphi(y_1)\cdots\widehat{\varphi(y_i)}\cdots\varphi(y_n) h\delta(y_i - y) \\
&= n \int \mathrm{d}y_1 \cdots \int \mathrm{d}y_{n-1} \, \frac{\delta^n F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_{n-1})} \varphi(y_1)\cdots\varphi(y_{n-1}) \\
&= n \frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\left(\frac{\delta^{n-1} F}{\delta\varphi^{n-1}}\right) * \varphi^{n-1}.
\end{aligned}$$

2. $\mathrm{g}(F[\varphi(x)])$ の汎関数 b 微分:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathrm{g}(F[\varphi(x)])}{\delta\varphi(y)} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{g}(F[\varphi(x) + h\delta(x-y)]) - \mathrm{g}(F[\varphi(x)])] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\mathrm{g}\left(F[\varphi(x)] + \int \mathrm{d}z \, \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(z)} h\delta(z-y) + O(h^2)\right) - \mathrm{g}(F[\varphi(x)])\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\mathrm{g}\left(F[\varphi(x)] + h\frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)} + O(h^2)\right) - \mathrm{g}(F[\varphi(x)])\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\frac{\mathrm{dg}(\varphi(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)} \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)} + O(h^2)\right] \\
&= \frac{\mathrm{dg}(\varphi(x))}{\mathrm{d}\varphi(x)} \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)}.
\end{aligned}$$

3. x の積分で定義される汎関数 $F[\varphi(x,t)]$ に対し, 微分 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(x,t)]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(x,t)] &= \lim_{h\to 0} \frac{F[\varphi(x,t+h)] - F[\varphi(x,t)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{F\left[\varphi(x,t) + h\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right] - F[\varphi(x,t)]\right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{F[\varphi(x,t)] + h\int \mathrm{d}y \, \frac{\delta F[\varphi(x)]}{\delta\varphi(y)} \frac{\partial\varphi(y,t)}{\partial t} + O(h^2) - F[\varphi(x,t)]\right\} \\
&= \int \mathrm{d}y \, \frac{\delta F[\varphi(x,t)]}{\delta\varphi(y,t)} \frac{\partial\varphi(y,t)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

4.4 汎関数積分

I 上の関数 $\varphi(x)$ 上の汎関数 $F[\varphi(x)]$ の汎関数積分は,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}[\varphi(x)]F[\varphi(x)] &:= \frac{1}{\theta}\left(\prod_{x\in I}\int \mathrm{d}\varphi(x)\right)F[\varphi(x)] \\ &:= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\int \mathrm{d}\varphi_0\cdots\int \mathrm{d}\varphi_N\, f_N(\varphi_0,\dots,\varphi_N).\end{aligned}$$

ただし, θ は有限値に収束させるための正規化因子である. また, $f_N(\varphi_0,\dots,\varphi_N)$ は汎関数の考え方のものと同じで, 例えば $F[\varphi(x)] = \int_I \mathrm{d}x\, g(\varphi(x))$ であるとき, 積分範囲 $I = [x_0, x_N]$ の N 等分割 $x_0,\dots,x_N$, $\Delta x = (x_N - x_0)/N$, $x_n = x_0 + n\Delta x$, $\varphi_n := \varphi(x_n)$ を用いて, $f_N(\varphi_0,\dots,\varphi_N) = \sum_{n=1}^N g(\varphi_m)\Delta x \xrightarrow{N\to\infty} F[\varphi(x)]$ である. 単に $\int \mathcal{D}\varphi F[\varphi]$ とも略記される.

$\varphi(x)$ の端を固定した汎関数積分も重要である:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{D}[\varphi(x)]F[\varphi(x)] &:= \frac{1}{\theta}\left(\prod_{x\in I}\int \mathrm{d}\varphi(x)\right)F[\varphi(x)]\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi} \\ &:= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\int \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int \mathrm{d}\varphi_{N-1}\, f_N(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{N-1},\varphi).\end{aligned}$$

これは, 端点を固定した経路について経路上各点について積分した積になっていることから, **経路積分**とも呼ばれる.

4.4.1 汎関数積分の計算例

以下の汎関数 $F[\varphi(x)]$ について汎関数積分 $I(\varphi) = \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathcal{D}[\varphi(x)]F[\varphi(x)]$ を計算する. ただし, $\displaystyle\int \mathrm{d}\varphi\, I(\varphi) = 1$ として正規化する:

1. $F[\varphi(x)] = \exp\left[i\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]$:

$$\begin{aligned}I(\varphi) &= \int_{\varphi(a)=\varphi_0}^{\varphi(b)=\varphi} \mathcal{D}[\varphi(x)]\exp\left[i\int_a^b \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\int \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int \mathrm{d}\varphi_{N-1}\exp\left[i\sum_{n=1}^N\left(\frac{\varphi_n-\varphi_{n-1}}{\Delta x}\right)^2\Delta x\right]_{\varphi_0=\varphi_0}^{\varphi_N=\varphi} \qquad \left(\Delta x := \frac{b-a}{N}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\int \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int \mathrm{d}\varphi_{N-1}\exp\left[\frac{i}{\Delta x}\sum_{n=1}^N(\varphi_n-\varphi_{n-1})^2\right]_{\varphi_0=\varphi_0}^{\varphi_N=\varphi} \\ &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\int \mathrm{d}\varphi_1\cdots\int \mathrm{d}\varphi_{N-1}\exp\left\{\frac{i}{\Delta x}\left[(\varphi-\varphi_{N-1})^2+\sum_{k=1}^{N-1}(\varphi_{N-k}-\varphi_{N-(k+1)})^2\right]\right\}_{\varphi_0=\varphi_0}.\end{aligned}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\varphi_{N-k} \exp\left\{\frac{i}{\Delta x}\left[\frac{1}{k}(\varphi-\varphi_{N-k})^2+(\varphi_{N-k}-\varphi_{N-(k+1)})^2\right]\right\}\\
=&\int \mathrm{d}\varphi_{N-k} \exp\left\{\frac{i}{\Delta x}\left[\frac{k+1}{k}\varphi_{N-k}^2-2\left(\frac{1}{k}\varphi+\varphi_{N-(k+1)}\right)\varphi_{N-k}+\left(\frac{1}{k}\varphi^2+\varphi_{N-(k+1)}^2\right)\right]\right\}\\
=&\int \mathrm{d}\varphi_{N-k} \exp\left[\frac{i}{\Delta x}\frac{k+1}{k}\varphi_{N-k}^2-\frac{i}{\Delta x}2\left(\frac{1}{k}\varphi+\varphi_{N-(k+1)}\right)\varphi_{N-k}+\frac{i}{\Delta x}\left(\frac{1}{k}\varphi^2+\varphi_{N-(k+1)}^2\right)\right]\\
=&\sqrt{\frac{k}{k+1}}\sqrt{i\pi\Delta x}\exp\left[-\frac{i}{\Delta x}\frac{k}{k+1}(\varphi+\varphi_{N-(k+1)})^2+\frac{i}{\Delta x}\left(\frac{1}{k}\varphi^2+\varphi_{N-(k+1)}^2\right)\right]\\
&\left(\because \int \mathrm{d}x \exp\left(-iax^2+ibx\right)=\sqrt{\frac{\pi}{ia}}\exp\left(\frac{ib^2}{4a}\right)\right)\\
=&\sqrt{\frac{k}{k+1}}\sqrt{i\pi\Delta x}\exp\left[\frac{i}{\Delta x}\frac{1}{k+1}\left(\varphi-\varphi_{N-(k+1)}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

より, $k=1,\dots,N-1$ で順に積分することで,

$$
\begin{aligned}
I(\varphi)&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdots\sqrt{\frac{N-1}{N}}\left(\sqrt{i\pi\Delta x}\right)^{N-1}\exp\left[\frac{i}{N\Delta x}(\varphi-\varphi_0)^2\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\theta(N)}\frac{1}{\sqrt{N}}(i\pi\Delta x)^{(N-1)/2}\exp\left[\frac{i}{N\Delta x}(\varphi-\varphi_0)^2\right].
\end{aligned}
$$

ここで, 定数 C を用いて $\theta(N)=(i\pi\Delta x)^{N/2}/C$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
I(\varphi)&=\lim_{N\to\infty}\frac{C}{(i\pi\Delta x)^{N/2}}\frac{1}{\sqrt{N}}(i\pi\Delta x)^{(N-1)/2}\exp\left[\frac{i}{N\Delta x}(\varphi-\varphi_0)^2\right]\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{C}{\sqrt{i\pi N\Delta x}}\exp\left[\frac{i}{N\Delta x}(\varphi-\varphi_0)^2\right]\\
&=\frac{C}{\sqrt{i\pi(b-a)}}\exp\left[i\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{b-a}\right].
\end{aligned}
$$

また, 正規化条件より定数 C を決定する:

$$
\int \mathrm{d}\varphi\, I(\varphi)=\int \mathrm{d}\varphi\,\frac{C}{\sqrt{i\pi(b-a)}}\exp\left[i\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{b-a}\right]=C=1.
$$

したがって,

$$
I(\varphi)=\int_{\varphi(a)=\varphi_0}^{\varphi(b)=\varphi}\mathcal{D}[\varphi(x)]\exp\left[i\int_a^b \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{i\pi(b-a)}}\exp\left[i\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{b-a}\right].
$$

4.5 参考文献

- Stevens, C. F. The Six Core Theories of Modern Physics (United Kingdom, MIT Press, 1995)

5 解析力学

import Am from‘./am.md’;

5.1 最小作用の原理

時間に依存する**一般化座標**と呼ばれるパラメータ q^i に対して, **作用** action と呼ばれる汎関数 $S[q^i]$ が存在し, q^i は物理現象において $S[q^i]$ が最小となるよう変化する. つまり, 停留条件 $\delta S[q^i]=0$ を満たす.

5.2 Euler – Lagrange の運動方程式

作用は, 座標と時間に関する **Lagrangian** $L(q^i,\dot{q}^i,t)$ を用いて以下のように表される:

$$S[q^i]=\int \mathrm{d}t\, L(q^i,\dot{q}^i,t).$$

$q^i+\delta q^i$ の変分をとって,

$$\begin{aligned}
\delta S[q^i]&=\int \mathrm{d}t\left[L\left(q^i+\delta q^i,\dot{q}^i+\frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}t},t\right)-L(q^i,\dot{q}^i,t)\right]\\
&=\int \mathrm{d}t\left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\mathrm{d}\delta q^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right]\\
&=\int \mathrm{d}t\left[\delta q^i\frac{\partial L}{\partial q^i}-\delta q^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q^i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right].
\end{aligned}$$

ここで, 発散項は境界条件より消える:

$$\delta S[q^i]=\int \mathrm{d}t\,\delta q^i\left[\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right].$$

したがって, 停留条件 $\delta S[q^i]=0$ より, **Euler – Lagrange の運動方程式**が得られる:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0.$$

または, 作用の汎関数微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S[q^i(t')]}{\delta q^i(t)}&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S[q^i(t')+\varepsilon\delta(t'-t)]-S[q^i(t')]}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{d}t'\left[L(q^i(t')+\varepsilon\delta(t'-t),\dot{q}^i(t')+\varepsilon\dot{\delta}(t'-t),t')-L(q^i(t'),\dot{q}^i(t'),t')\right]\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int \mathrm{d}t'\left[\frac{\partial L}{\partial q^i(t')}\varepsilon\delta(t'-t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i(t')}\varepsilon\dot{\delta}(t'-t)+o(\varepsilon^2)\right]\\
&=\int \mathrm{d}t\left[\frac{\partial L}{\partial q^i(t')}\delta(t'-t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i(t')}\dot{\delta}(t'-t)\right]\\
&=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right).\qquad\left(\because\int \mathrm{d}t'\, f(t')\dot{\delta}(t'-t)=-\dot{f}(t)\right)
\end{aligned}$$

これを用いると Euler – Lagrange の運動方程式は

$$\frac{\delta S[q^i(t')]}{\delta q^i(t)}=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0.$$

5.2.1　例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q).$$

ここで,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = m\ddot{q}.$$

したがって, Euler – Lagrange の運動方程式より,

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

5.2.2　例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

ここで,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = m\ddot{q}.$$

したがって, Euler – Lagrange の運動方程式より,

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0.$$

5.3 Noether の定理

時間の微小変換 $t \mapsto t' = t + \delta t$ に対し, 座標が $q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t)$ と変換されるとする. このとき作用は

$$
\begin{aligned}
\delta S[q^i] &= \int \mathrm{d}t'\, L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - \int \mathrm{d}t\, L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \\
&\quad \left(\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}t\,(1 + \delta\dot{t})\right) \\
&= \int \mathrm{d}t \left[(1 + \delta\dot{t}) L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\right] \\
&\quad \left(\partial'_t q'(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \partial_t (q^i(t) + \delta q^i(t)) = (1 - \delta\dot{t})(\dot{q}^i + \delta\dot{q}^i) = \dot{q}^i + \delta\dot{q}^i - \dot{q}^i \delta\dot{t}\right) \\
&= \int \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t} L + L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta\dot{q}^i - \dot{q}^i\delta\dot{t}, t + \delta t) - L(q^i, \dot{q}^i, t)\right] \\
&= \int \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t} L + \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\delta\dot{q}^i - \dot{q}^i\delta\dot{t}) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t}\right] \\
&\quad \left(\text{Lie 微分 } \delta^L q^i(t) := q'^i(t) - q^i(t) = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t\right) \\
&= \int \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t} L + (\delta^L q^i + \dot{q}^i\delta t) \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\partial_t \delta^L q^i + \ddot{q}^i \delta t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t}\right] \\
&= \int \mathrm{d}t \left[\delta\dot{t} L + \delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \delta t \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \partial_t \delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \ddot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t}\right] \\
&= \int \mathrm{d}t \left[\partial_t(\delta t L) + \delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \partial_t\left(\delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \delta^L q^i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] \\
&= \int \mathrm{d}t \left\{\delta^L q^i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t L\right)\right\} \\
&= \int \mathrm{d}t\, \delta^L q^i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] + \int \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta t \left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right)\right].
\end{aligned}
$$

ここで, 第一項は Euler – Lagrange の運動方程式より無視でき, 第二項の積分範囲は任意である. したがって, この変換に対し作用が不変 $\delta S = 0$ であるとすると, 対応する保存量が得られる:

$$
\delta Q := \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L\right) = \text{const.}
$$

に対し,

$$
\frac{\mathrm{d}\delta Q}{\mathrm{d}t} = 0.
$$

TODO: 汎関数微分を用いた導出

5.3.1 例: 空間並進に対する不変量

時間並進 $t \mapsto t' = t, q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \varepsilon^i$ に対し, 作用が不変であるとき, 対応する保存量は

$$
\delta Q = \varepsilon^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{const.}
$$

$$
\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \text{const.}
$$

この不変量 $p_i := \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ を**一般化運動量**という.

5.3.2 例: 時間並進に対する不変量

時間並進 $t \mapsto t' = t + \varepsilon, q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t)$ に対し, 作用が不変であるとき, 対応する保存量は

$$\delta Q = \varepsilon\left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L\right) = \text{const.}$$

$$\therefore \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \text{const.}$$

この不変量 $H := \dot{q}^i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \dot{q}^i p_i - L$ を **Hamiltonian** という.

5.3.3 例: 空間回転に対する不変量

$D = 3$ とする. 空間回転 $t \mapsto t' = t, \boldsymbol{x}(t) \mapsto \boldsymbol{x}'(t') = R(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{x}(t)$ に対し, 作用が不変であるとき, 対応する保存量は

$$\delta Q = (-\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\boldsymbol{x} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \text{const.}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \text{const.}$$

この不変量 $\boldsymbol{l} := \boldsymbol{x} \times \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ を角運動量という.

TODO: 一般の回転変換に対する不変量

5.4 Hamilton の運動方程式

一般化運動量 $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}^i$ を用いて, **Hamiltonian** $H(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - L$ を定義する. Hamiltonian の全微分は,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i + p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \mathrm{d}L \\
&= \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i + p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \,\mathrm{d}q^i - p_i \,\mathrm{d}\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t \\
&\quad \left(\because \mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \,\mathrm{d}q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \,\mathrm{d}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial q^i} \,\mathrm{d}q^i + \dot{q}^i \,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t \,.
\end{aligned}$$

ここで, Euler-Lagrangian 方程式が成立するとき $\dot{p}_i = \partial L / \partial q^i$ であることを用いると, **Hamilton の運動方程式**あるいは**正準方程式** canonical equation が得られる:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

p_i を q^i に**共役な運動量** conjugate momentum といい, また (q^i, p_i) の組を**正準変数** canonical variables という.

Lagrangian が時間に陽に依存しないとき, Hamiltonian は保存する:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

5.4.1　例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は,

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q).$$

ここで, 一般化運動量の定義より,

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}.$$

したがって $\dot{q}=p/m$ であるから, Hamiltonian の定義より,

$$H(q,p,t)=\frac{p}{m}p-L\Big(q,\frac{p}{m},t\Big)=\frac{p^2}{2m}+V(q).$$

ここで,

$$\frac{\partial H}{\partial q}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q},\quad \frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}.$$

したがって, Hamilton の運動方程式は,

$$\dot{p}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q},\quad \dot{q}=\frac{p}{m}.$$

5.4.2　例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は,

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

ここで, 一般化運動量の定義より,

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}.$$

したがって $\dot{q}=p/m$ であるから, Hamiltonian の定義より,

$$H(q,p,t)=\frac{p}{m}p-L\Big(q,\frac{p}{m},t\Big)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

ここで,

$$\frac{\partial H}{\partial q}=m\omega^2q,\quad \frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}.$$

したがって, Hamilton の運動方程式は,

$$\dot{p}=-m\omega^2q,\quad \dot{q}=\frac{p}{m}.$$

5.5　正準変換

正準変数の変換 $(q^i,p_i)\mapsto(Q^j,P_j)=(Q^j(q^i,p_i),P_j(q^i,p_i))$ に対して Hamiltonian が $H(q^i,p_i)\mapsto K(Q^j,P_j)$ と変換されるとき, この正準変数の変換を**正準変換**という. Hamiltonian の定義から, $\delta\int\mathrm{d}t\,(\dot{q}^ip_i-H)=0$ かつ $\delta\int\mathrm{d}t\,(\dot{Q}^iP_i-K)=0$. したがって, ある関数 W が存在して,

$$(\dot{q}^ip_i-H)-(\dot{Q}^iP_i-K)=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.$$
$$\therefore\mathrm{d}W=p_i\,\mathrm{d}q^i-P_i\,\mathrm{d}Q^i-(H-K)\,\mathrm{d}t\,.$$

または, 両辺に $\mathrm{d}Q^iP_i\,/\,\mathrm{d}t$ を足して,

$$(\dot{q}^i p_i - H) - (-Q^i\dot{P}_i - K) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(W + Q^iP_i\big) =: \frac{\mathrm{d}W'}{\mathrm{d}t}.$$
$$\therefore \mathrm{d}W' = p_i\,\mathrm{d}q^i + Q^i\,\mathrm{d}P_i - (H-K)\,\mathrm{d}t\,.$$

これら $W(q^i, Q^i, t)$, $W'(q^i, P_i, t)$ をどちらも**母関数**といい, 以下を満たす.

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q^i}, \quad K = H + \frac{\partial W}{\partial t},$$
$$p_i = \frac{\partial W'}{\partial q^i}, \quad Q^i = \frac{\partial W'}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial W'}{\partial t}.$$

5.6 Poisson 括弧

正準変数 (q^i, p_i) に対し, **Poisson 括弧** Poisson braket は以下で定義される演算である:

$$\{A, B\}_{\mathrm{P}} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i}.$$

例えば,

$$\{q^i, H\}_{\mathrm{P}} = \dot{q}^i, \quad \{p_i, H\}_{\mathrm{P}} = \dot{p}_i.$$

$$\{q^i, q^j\}_{\mathrm{P}} = \{p_i, p_j\}_{\mathrm{P}} = 0, \quad \{q^i, p_j\}_{\mathrm{P}} = \delta^i_j.$$

ある物理量 $A(q^i, p_i, t)$ について, 時間発展に関する式は:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

実際, A の時間による完全微分は,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial A}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t}.\end{aligned}$$

6 代数学

import Algebra from ‘./algebra.md’ ;

6.1 群

集合 G と写像 $\mu : G \times G \to G$ に対して, 以下の 3 条件を考える.

1. **結合律**: $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$,
2. **単位元の存在**: $\exists e \in G, \mu(x, e) = \mu(e, x) = x$,
3. **逆元の存在**: $\exists x' \in G, \mu(x, x') = \mu(x', x) = e$,
4. **可換律**: $\mu(x, y) = \mu(y, x)$.

組 (G,μ) あるいは単に G について, 条件 1 を満たすものを**半群** semi-group, 条件 1,2 を満たすものを**モノイド** monoid, 条件 1,2,3 を満たすものを**群** group, 条件 1,2,3,4 を満たすものを**可換群** commutative group あるいは **Abel 群** abelian group という. $\mu(x,y) =: x \cdot y =: xy$, $e =: 1$, $x' =: x^{-1}$ などと表記される. また, 可換群において, $\mu(x,y) =: x+y$, $e =: 0$, $x' =: -x$ などと表記される.

群 G が有限集合であるとき, G を**有限群** finite group という. このとき, G の濃度を G の**位数** order といい, $|G|$ と書く. 群 G が有限群でないとき, G を**無限群** infinite group という.

群 G の元 g に対して, $g^n = e$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在するとき, g は有限位数であるといい, またこれを満たす最小の n を g の位数といい, $\mathrm{ord}(g)$ と書く. 位数 n の g の冪乗で作られる群を**巡回群**という.

集合 X から X への全単射の全体は, 写像の合成に関して群をなし, これを X の**自己同型群**といい, $\mathrm{Aut}(X)$ と書く.

6.2 部分群と剰余類

群 G について, 部分集合 $H \subset G$ が群の元 $x,y \in H$ に対して $xy^{-1} \in H$ を満たすとき, H を G の**部分群**という. また, 部分集合 $S \subset G$ に対して, S を含む最小の部分群を **S が生成する部分群** subgroup generated by S といい, $\langle S \rangle$ と書く. 特に $G = \langle S \rangle$ であるとき, S を G の**生成系** system of generators という.

群 G の部分群 H について, $gH := \{gh \mid h \in H\} \subset G$ を**左剰余類** left conset という. 左剰余類の全体を G/H と書く. 同様に右剰余類 Hg とその全体 $H\backslash G$ が定まる.

群 G の部分群 H について, 群の元 $g \in G$ に対し $gHg^{-1} = H$ を満たす H を G の**正規部分群** normal subgroup といい, $H \lhd G$ と書く. 群の元 $g,g' \in G$ に対して, G/H 上の演算 $(gH)(g'H) := (gg')H$ によって G/H は群となる. この群を**商群** quotient group という.

6.3 準同型写像

群 G, G' について, 写像 $f : G \to G'$ が群の元 $x,y \in G$ に対し $f(xy) = f(x)f(y)$ を満たすとき, f を G から G' への**準同型写像** homomorphism, あるいは単に**準同型** hommomorohic という. また, 準同型 f が全単射であるとき, f を**同型写像** isomorphism, あるいは単に**同型** isomorphic といい, $G \simeq G'$ と書く.

準同型写像 $f : G \to G'$ に対して, 部分群 $\mathrm{Im}\, f := \{f(x) \in G' \mid x \in G\}$ を f の**像**, 部分群 $\mathrm{Ker} f := \{x \in G \mid f(x) = e' \in G'\}$ を f の**核**という. また, $\mathrm{Ker} f$ は G の正規部分群である: $\mathrm{Ker} f \lhd G$. また, $\mathrm{Coker} f := G'/\mathrm{Im}\, f$ を**余核** cokernel, $\mathrm{Coim} f := G'/\mathrm{Ker} f$ を**余像** coimage という.

6.4 群の作用

群 G と集合 X について, 準同型 $\rho : G \to \mathrm{Aut}(X)$ が与えられたとき, **群 G が集合 X に左作用する** G acts on X あるいは単に**作用する**といい, $g \cdot x = gx := \rho(g)(x)$ と書く. このとき, $g,h \in G$, $x \in X$ に対し, $g(hx) = (gh)x$, $ex = x$ を満たす. また, この X を**左 G-集合** left G-set あるいは単に **G-集合** G-set という. 同様に右作用と右 G-集合も $x \cdot g = xg := \rho(g)(x)$ によって定義される.

群 G の X への作用 $G \times X \to X$ に対して, $Gx := \{gx \mid g \in G\}$ を x の**軌道** orbit という. また, $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ を**固定化部分群** stabilizer という. このとき, G の G_x による商群と軌道 Gx は同型である: $G/G_x \simeq Gx$.

左 G-集合 X について, $x \in X$ に対して $Gx = X$ となる作用は**推移的** transitive であるという. また, $G_x = \{e\}$ であるとき, この作用は**単一推移的** simply transitive という.

6.5 環・体

集合 R に対して, 加法 $+$ について Abel 群, 乗法 $\cdot$ について半群で, $x, y, z \in R$ に対して**分配法則** $x(y+z) = xy + xz, (x+y)z = xz + yz$ を満たすとき, 組 $(R, +, \cdot)$ あるいは単に R を**環** ring という.

乗法について可換である環を**可換環** commutative ring という. 乗法について群である環を**斜体** skew field または**可除環** division ring という. 乗法について可換群である環, つまり可換環かつ斜体である環を**可換体** commutative ring または単に**体** field という.

環 R が任意の元 $x, y \in R$ について $x, y \neq 0$ ならば $xy \neq 0$ であるとき, R を整環 domain という. **聖域**である可換環を特に**整域** integral domain という.

6.6 部分環

環 R の加法に関する部分群 S について, S が R の乗法で閉じている, つまり任意の S の元 $x, y \in S$ について $xy \in S$ であるとき, S を R の**部分環** subring という.

環 R 部分環 $\{x \in R \mid \forall y \in R, xy = yx\}$ を R の中心といい, $Z(R)$ と書く.

6.7 環準同型

環 G, G' について, 写像 $\varphi : R \to R'$ が環の元 $x, y \in R$ に対し $f\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ を満たすとき, φ を R から R' への**環準同型写像** ring homomorphism, あるいは単に**環準同型** ring hommomorohic という.

6.8 代数

環 R に対し, 環 S および環準同型 $\rho : R \to Z(S)$ の組 (R, ρ) または単に S を R 上の**代数** algebra または R **代数**という.

体 K 上の代数 S について, S の K 上の基底 $\{e_\mu\}$ に対し

$$e_\mu e_\nu = a^\lambda{}_{\mu\nu} e_\lambda$$

を満たす $a^\lambda{}_{\mu\nu} \in K$ を S の**構造定数** structure constant という.

6.9 環上の加群

環 R に対し, Abel 群 M の加法 $+$ と写像 $\lambda : R \times M \to M$ が $a, b \in R, m, m' \in R$ に対し以下の条件を満たすとき, 組 $(M, +, \lambda)$ または単に M を R 上の**左加群** left module over R または単に**左 R 加群** left R-module, R **加群** R-module という:

1. **Abel 群の加法に対するスカラー作用の分配律**: $\lambda(a, m + m') = \lambda(a, m) + \lambda(a, m')$,
2. **環の加法に対するスカラー作用の分配則**: $\lambda(a + b, m) = \lambda(a, m) + \lambda(a, m')$,
3. **環の乗法とスカラー作用の両立条件**: $\lambda(ab, m) = \lambda(a, \lambda(b, m))$,
4. **スカラー作用の単位元の存在**: $\lambda(1, m) = m$.

R 上の右加群または右 R-加群も同様に定義される.

6.10 参考文献

- 清水 勇二『圏と加群』(現代基礎数学 16, 朝倉書店, 2018)

7 線形代数学

import La from‘./la.md’;

7.1 ベクトル空間

体 K 上の加群を K 上の**ベクトル空間**という. または, 集合 V が, **加法**と呼ばれるその上の二項演算子 $+$ と, **スカラー乗法**と呼ばれる体 K の V への作用 $\circ$ を持ち, $u, v, w \in V$, $a, b \in K$ に関して以下の公理系を満たすとき, $(V, +, \circ)$ を K 上の**ベクトル空間**という. V をベクトル空間と呼ぶこともある. ベクトル空間 V の元を**ベクトル**と呼ぶ.

1. **加法の可換律**: $u + v = v + u$,
2. **加法の結合律**: $u + (v + w) = (u + v) + w$,
3. **加法単位元の存在**: $\exists 0 \in V, u + 0 = 0 + u = u$,
4. **体の乗法とスカラーの乗法の両立条件**: $a(bu) = (ab)u$,
5. **体の加法に対するスカラー乗法の分配律**: $(a + b)u = au + bu$,
6. **加法に対するスカラー乗法の分配律**: $a(u + v) = au + av$,
7. **スカラーの乗法の単位元の存在**: $1u = u$,
8. **加法逆元の存在**: $\exists(-u) \in V, u + (-u) \in 0$.

ベクトル空間 V のベクトル列 $\{u_i\}$ の**線形結合**と呼ばれる $c^i u_i$ ($c^i \in K$) について, $c^i u_i = 0$ を満たす c^i が $c^i = 0$ に限るとき, この $\{u_i\}$ は**線形独立**であるという. また, V の全てのベクトルが $\{u_i\}$ の線形結合で表されるとき, この $\{u_i\}$ が V を**生成する**という. V のベクトル列 $\{e_i\}$ が線形独立かつ V を生成するとき, この $\{e_i\}$ を V の**基底**という. V の基底を構成するベクトルの個数を V の**次元**といい $\dim(V)$ と書く.

7.2 線形写像

K 上のベクトル空間 U, V に対し, 写像 $T : U \to V$ が**線形性** $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$ ($a, b \in K, u, v \in U$) を満たすとき, T を K 上の**線形写像**といい, その全体を $\mathrm{Hom}_K(U, V)$ と書く. U から U 自身への線形写像の全体 $\mathrm{End}_K(U) := \mathrm{Hom}_K(U, U)$ の元を**線形変換**といい, 恒等写像 $1_U \in \mathrm{End}_K(U)$ を**単位変換**という. 線形写像の部分写像を**線形作用素**あるいは**線形演算子**という.

線形写像 $T := \mathrm{Hom}_K(U,V)$ に対して, $T^{-1}T = 1_U$, $TT^{-1} = 1_V$ を満たす $T^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(V,U)$ が存在するとき, T を K 上の**線形同型写像**といい, U と V は K 上の**線形同型**という. 線形同型写像 $T \in \mathrm{End}_K(U)$ を**同型変換**, T^{-1} を**逆変換**という.

線形写像 $T := \mathrm{Hom}_K(U,V)$ に対して, $\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \in V \mid u \in U\}$ を T の**像**, $\mathrm{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0 \in V\}$ を T の**核**という.

線形写像 $T := \mathrm{Hom}_K(U,V)$ に対して, U の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$, V の基底 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ について $(T(u_1), \cdots, T(u_n)) = (v_1, \cdots, v_m)A$ と表されるとき, 行列 A を**表現行列**という.

線形変換 $T \in \mathrm{End}_K(U)$ に対して, あるベクトル $u \in U$ が $T(u) = \lambda u$ を満たすとき, $\lambda \in K$ を T の**固有値**, u を λ に属する T の**固有ベクトル**という. 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

7.3 双対空間

K 上のベクトル空間 V に対し, 線形写像 $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$ を**双対空間**といい, V^* の元を**線形汎関数**, あるいは代数的 1-形式という. 双対空間はベクトル空間であり, その次元は元のベクトル空間と等しい: $\dim(V^*) = \dim(V)$.

V の基底 $\{e_i\}$ に対して, $e^i(e_j) = \delta_{ij}$ を満たす V^* の基底 $\{e^i\}$ を $\{e_i\}$ の**双対基底**という. 線形写像 $T \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ に対して, $(T^\dagger(\omega))(u) = \omega(T(u))$ を満たす $T^\dagger \in \mathrm{Hom}_K(V^*, U^*)$ を T の**双対写像**という. 表現行列 A を持つ線形写像 T の双対写像 $T^\dagger$ の表現行列は $A^\dagger$ である. $A = A^\dagger$ であるとき A を **Hermite 行列**あるいは**自己共役行列**といい, このとき $T = T^\dagger$ であるから T を **Hermite 変換**あるいは**自己共役変換**という.

7.4 テンソル代数

体 K 上のベクトル空間 V, W の基底 $\{v_i\}, \{w_j\}$ について, $v, v' \in V, w, w' \in W, c \in K$ に関して以下の**双線形性**を満たす**テンソル積** tensor product で作られる組 $\{v_i \otimes w_j\}$ を基底とするベクトル空間を $V \otimes W$ と書き, V と W との**テンソル積空間** tensor product space という. このとき, $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.

1. 第一引数に対する**線形性**: $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$,
2. 第二引数に対する**線形性**: $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$,
3. **スカラー倍に対する結合性**: $(cv) \otimes w = v \otimes (cw) = c(v \otimes w)$.

ベクトル空間列 $\{V_i\}$ に対し, 多重線形なテンソル積空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ が自然に構成される. 一つのベクトル空間 V によるテンソル積空間 $V^{\otimes p} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p}$ と $V^{*\otimes q}$ について, $V^{\otimes p}$ あるいは $V^{\otimes p} \otimes V^{*\otimes q}$ を**テンソル空間** tensor product という.

体 K 上のベクトル空間 V に対し, $T^0(V) := K, T^p(V) := V^{\otimes p}$ の直和 $T(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V)$ を**テンソル代数** tensor algebra という.

7.5 外積代数

テンソル積空間 $V^{\otimes p}$ に対し, ベクトル $v_1, \ldots, v_p \in V$ と置換群 S_p を用いて,

$$v_1 \odot \cdots \odot v_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)},$$
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)},$$

と定義される積 $\odot$ をそれぞれ**対称積**, $\wedge$ を**交代積**あるいは**外積**という. 対称積は $v_1 \cdots v_p := v_1 \odot \cdots \odot v_p$ とも書く. $u, v \in V$ について, $u \odot v = v \odot u, u \wedge v = -v \wedge u$ を満たす. また, 交代 V の基底 $\{e_i\}$ に対し, $\{e_1 \odot \cdots \odot e_p\}$ を基底とするベクトル空間 $S^p(V)$ を V の p **次対称テンソル空間** space of symmetric tensors, $\{e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\}$ を基底とするベクトル空間 $\Lambda^p(V)$ を V の p **次交代テンソル空間** space of alternating tensors という.

交代テンソル空間 $\Lambda^p(V), \Lambda^q(V)$ について, 2 つの交代テンソル空間を交代テンソル空間に移す双線形写像 $\Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V)$ を以下で定義する: $\Lambda^p(V)$ の基底 $\{e_1 \wedge \cdots \wedge e_p\}$ と $\Lambda^q(V)$ の基底 $\{e_1 \wedge \cdots \wedge e_q\}$ に対し, $t = \dfrac{1}{p!} t^{\mu_1 \cdots \mu_p} e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p} \in \Lambda^p(V), s = \dfrac{1}{q!} s^{\mu_1 \cdots \mu_q} e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_q} \in \Lambda^q(V)$ の外積は,

$$\begin{aligned} t \wedge s &= \left(\frac{1}{p!} t^{\mu_1 \cdots \mu_p} e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p} \right) \wedge \left(\frac{1}{q!} s^{\mu_1 \cdots \mu_q} e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_q} \right) \\ &:= \frac{1}{p!q!} t^{\mu_1 \cdots \mu_p} s^{\mu_{p+1} \cdots \mu_{p+q}} (e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p}) \wedge (e_{\mu_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_{p+q}}). \end{aligned}$$

また, $t \wedge s = (-1)^{pq} s \wedge t$ を満たす.

体 K 上のベクトル空間 V に対して, $\Lambda^0(V) := K$ と $\Lambda^p(V)$ の直和 $\Lambda(V) := \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(V)$ を **Grassmann 代数** Grassmann algebra あるいは**外積代数** exterior algebra という.

7.6 内積空間

複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V について, 写像 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ が $u, v, w \in V, a, b \in \mathbb{C}$ に関して以下の条件を満たすとき, この写像を**内積**と呼び, このとき V を**内積空間**と呼ぶ. 第一引数を制限した内積は V に双対である: $u \in V$ に対して $\langle u,\ \rangle \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) = V^*$.

1. 第二引数に対する**線形性**: $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$,
2. **共役対称性**: $\langle u, v \rangle = (\langle v, u \rangle)^*$,
3. **正定値性**: $\langle u, u \rangle \geq 0$,
4. **非退化性**: $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$.

V の基底 $\{u_i\}$ が $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j}$ を満たすとき, この $\{u_i\}$ を V の**正規直交基底**という. このとき, $\{\langle u_i,\ \rangle\}$ は $\{u_i\}$ の双対基底である.

線形変換 $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が Hermite 変換であるとき, $u, v \in V$ に対して $\langle u, T(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle$ を満たす.

線形変換 $U \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が内積を不変に保つ, つまり $u, v \in V$ に対して $\langle U(u), U(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

を満たすとき, U を **unitary 変換**という. 言い換えると, unitary 変換は $U^\dagger U = UU^\dagger = 1_V$ あるいは $U^\dagger = U^{-1}$ を満たす線形変換 U である.

7.7 ブラ-ケット記法

複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 H のベクトルを $|\varphi\rangle$ と書き, **ケットベクトル**と呼ぶ. また, 双対空間 H^* のベクトルを $\langle\varphi| := \langle(|\varphi\rangle), \ \rangle$ と書き, **ブラベクトル**と呼ぶ. これらの記法を用いて, ベクトル $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in H$ の内積は $\langle\varphi \mid \psi\rangle$ $\langle\varphi \mid \psi\rangle$ と書く. 例えば, H の基底 $\{|m\rangle\}$ とその双対基底 $\{\langle n|\}$ は $\langle n \mid m\rangle = \delta_{nm}$ を満たす. また, 双対写像はブラベクトルに右から作用する: $A^\dagger \in \mathrm{End}_K(H^*)$ で $\langle(A|\varphi\rangle), \ \rangle = \langle\varphi|A^\dagger$. 線形変換 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$ が Hermite 変換, つまり $\langle\varphi|(A|\psi\rangle) = (\langle\varphi|A)|\psi\rangle$ であるとき, これを単に $\langle A\rangle\psi$ と書く. また, $|\varphi\rangle^\dagger := \langle\varphi|, \langle\varphi|^\dagger := |\varphi\rangle$ と定義すれば $(A|\varphi\rangle)^\dagger = \langle\varphi|A^\dagger$ が得られる.

複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 H の基底 $\{|n\rangle\}$ に対し, 線形写像 $|n\rangle\langle n|$ を**射影写像**という: ケットベクトル $|\varphi\rangle = \sum_m \varphi_m |m\rangle$ に対し, $|n\rangle\langle n|\varphi\rangle = \varphi_n |n\rangle$. また, $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1_H$ である. 線形変換 $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$ の固有値 $\{a_n\}$ にそれぞれ属する固有ベクトル $\{|a_n\rangle\}$ はベクトル空間 H の基底であり, A は射影写像 $|a_n\rangle\langle a_n|$ の線形結合で表される: $A = \sum_n a_n |a_n\rangle\langle a_n|$.

7.8 参考文献

- 三宅 敏恒『線形代数学—初歩からジョルダン標準形へ』(培風館, 2008)
- 池田 岳『テンソル代数と表現論』(東京大学出版会, 2022)

8 量子力学

import Qm from‘./qm.md’;

8.1 状態ベクトルと観測量

ある物理状態は**状態ベクトル**と呼ばれる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のベクトル $|\psi\rangle$ で表される. 状態ベクトル $|\psi\rangle$ に定数 $c \in \mathbb{C}$ をかけた $c|\psi\rangle$ は同じ状態を表し, 断わり無いとき状態ベクトル $|\psi\rangle$ は正規化されているとする: $\langle\psi \mid \psi\rangle = 1$. または, 正規化されていない状態ベクトル $|\psi'\rangle$ に対し, $|\psi\rangle = |\psi'\rangle/\sqrt{\langle\psi' \mid \psi'\rangle}$ は正規化された状態ベクトルである. $\{e^{i\theta}|\psi\rangle\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ を**射線** ray といい, 同じ状態を表す状態ベクトルである.

観測により物理状態が $|\psi\rangle$ から $|\varphi\rangle$ に遷移する確率は $|\langle\varphi \mid \psi\rangle|^2$ で与えられ, $\langle\varphi \mid \psi\rangle$ を**遷移振幅**という. また, 演算子 $\hat{V} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の作用によって状態 $|\psi\rangle$ が $|\psi'\rangle = \hat{V}|\psi\rangle$ になるとき, $\hat{V}$ の作用によって状態が $|\psi\rangle$ から $|\varphi\rangle$ に遷移する遷移振幅は $\langle\varphi \mid \psi'\rangle = \langle\varphi|\hat{V}|\psi\rangle$ である.

ある物理量 A を観測するとき, A に対応する Hermite 演算子 $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の固有値 a が観測される物理量で, この性質を**観測量** observable という. このとき, 物理状態は物理量 $A = a$ を観測後に固有値 a に属する固有状態 $|a\rangle$ に遷移する. その確率は

$$|\langle a \mid \psi\rangle|^2 = \langle\psi \mid a\rangle\langle a \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid a\rangle\langle a \mid a\rangle\langle a \mid \psi\rangle = ||a\rangle\langle a \mid \psi\rangle|^2.$$

また, 物理量 A の期待値は

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &:= \int \mathrm{d}a\, a|\langle a \mid \psi\rangle|^2 = \int \mathrm{d}a\, a\langle \psi \mid a\rangle\langle a \mid \psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}a\,\langle\psi|\hat{A}|a\rangle\langle a \mid \psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\Big(\int \mathrm{d}a\,|a\rangle\langle a|\Big)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.\end{aligned}$$

誤解が無いとき, 物理量 A と対応する演算子 $\hat{A}$ を区別せずどちらも A と書く.

8.2 波動関数

ある観測量 A について, 固有値 a が観測される確率振幅を $\psi(a) := \langle a \mid \psi\rangle$ と書き, A **表示した波動関数**という. このとき, 物理量 a が観測される確率は $|\langle a \mid \psi\rangle|^2 = |\psi(a)|^2$ であり, 正規化条件は

$$\begin{aligned}1 = \langle\psi \mid \psi\rangle &= \langle\psi|\Big(\int \mathrm{d}a\,|a\rangle\langle a|\Big)|\psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}a\,\langle\psi \mid a\rangle\langle a \mid \psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}a\,\psi^*(a)\psi(a) = \int \mathrm{d}a\,|\psi(a)|^2.\end{aligned}$$

また, 波動関数は状態ベクトルを固有状態によって展開したときの係数である:

$$|\psi\rangle = \Big(\int \mathrm{d}a\,|a\rangle\langle a|\Big)|\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\,|a\rangle\langle a \mid \psi\rangle = \int \mathrm{d}a\,\psi(a)|a\rangle.$$

観測量 B について, 任意の状態ベクトル $|\psi\rangle$ に対し $\langle a|\hat{B}|\psi\rangle = \hat{B}_A\langle a \mid \psi\rangle = \hat{B}_A\psi(a)$ を満たす $\hat{B}_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在するとき, 観測量 A に対して $\hat{B}|\psi\rangle \leftrightarrow \hat{B}_A\psi(a)$ の対応がある. 誤解が無いとき, 区別せず $\hat{B}_A$ を同じ $\hat{B}$ と書く. $B = b$ に属する固有状態 $|b\rangle$ に対して $\psi_b(a) := \langle a \mid b\rangle$ とすれば, b は $\hat{B}_A$ の固有値, $\psi_b(a)$ はそれに属する固有波動関数である:

$$\hat{B}_A\psi_b(a) = \langle a|\hat{B}|b\rangle = b\langle a \mid b\rangle = b\psi_b(a).$$

また, 物理量 B の期待値は,

$$\begin{aligned}\langle B\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle &= \langle\psi|\Big(\int \mathrm{d}a\,|a\rangle\langle a|\Big)\hat{B}|\psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}a\,\langle\psi \mid a\rangle\langle a|\hat{B}|\psi\rangle \\ &= \int \mathrm{d}a\,\psi^*(a)\hat{B}_A\psi(a).\end{aligned}$$

また, 途中式より $\hat{B}$ を $\hat{B}_A$ を用いて表示することができる. これを **$\hat{B}$ の A-表示**という:

$$\hat{B} = \int \mathrm{d}a\,|a\rangle\hat{B}_A\langle a|$$

実際, 期待値が等しいことから,

$$\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle = \int \mathrm{d}a\,\psi^*(a)\hat{B}_A\psi(a) = \langle\psi|\Big(\int \mathrm{d}a\,|a\rangle\hat{B}_A\langle a|\Big)|\psi\rangle$$

8.3　時間発展と描像

系が時間 t によって発展していく場合を考える. 状態ベクトルが時間に依存するとき, その時間発展は**時間発展演算子**と呼ばれる unitary 演算子を用いて変換される:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle.$$

ただし, 時間発展演算子は $\hat{U}(t_2,t_1) = \hat{U}^\dagger(t_1,t_2) = \hat{U}^{-1}(t_1,t_2)$ を満たす. 時間発展演算子が時間に依存しないとき, 時刻の基準を $t=0$ として $\hat{U}(t) := \hat{U}(t,0)$ と略記する. 例えば $\hat{U}(t_2-t_1) = \hat{U}(t_2,t_1) = \hat{U}(t_2,0)\hat{U}^{-1}(t_1,0)$. また, 時間発展演算子が時間に依存しない場合でも誤解が無いとき $\hat{U}(t) := \hat{U}(t,0)$ と略記する.

状態ベクトルのみが時間発展し, 演算子は時間に依存しないとする方法を **Schrödinger 描像** Schrödinger picture という. 誤解が無いとき Schrödinger 描像の状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle, |\psi(t)\rangle_\mathrm{S}$, 演算子を $\hat{A}, \hat{A}_\mathrm{S}$, 固有状態を $|a\rangle, |a\rangle_\mathrm{S}$ などと書く.

反対に, 演算子のみが時間発展し, 状態ベクトルは時間に依存しないとする方法を **Heisenberg 描像** Heisenberg picture という. 誤解が無いとき Heisenberg 描像の状態ベクトルを $|q\rangle, |\psi\rangle, |\psi\rangle_\mathrm{H}$, 演算子を $\hat{A}(t), \hat{A}_\mathrm{H}(t), \hat{A}_\mathrm{H}$, 固有状態を $|a,t\rangle, |a,t\rangle_\mathrm{H}$ などと書く.

どちらの描像でも初期状態 $t=0$ で一致 $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle, \hat{A}(0) = \hat{A}$ するとき, 確率振幅および任意の観測量 A の期待値が常に等しいとすると,

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)|\psi\rangle,\\
\hat{A}(t) &= \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t),\\
|a,t\rangle &= \hat{U}^{-1}(t)|a\rangle.
\end{aligned}$$

実際,

$$\begin{gathered}
\langle\psi \mid \psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^{-1}(t)\hat{U}(t)|\psi\rangle = \langle\psi(t) \mid \psi(t)\rangle,\\
\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}(t)|\psi\rangle.\\
\psi(a,t) = \langle a,t \mid \psi\rangle = \langle a|\hat{U}(t)|\psi\rangle = \langle a \mid \psi(t)\rangle.
\end{gathered}$$

観測量の固有値は描像に依らない. 実際, 観測量 A に対し,

$$\begin{aligned}
\hat{A}(t)|a,t\rangle &= a|a,t\rangle\\
\Leftrightarrow \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(t)|a\rangle &= a\hat{U}^{-1}(t)|a\rangle\\
\Leftrightarrow \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}|a\rangle &= \hat{U}^{-1}(t)a|a\rangle\\
\Leftrightarrow \hat{A}|a\rangle &= a|a\rangle
\end{aligned}$$

また交換子 $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ の時間変化は

$$\begin{aligned}
[\hat{A}(t),\hat{B}(t)] &= [\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t), \hat{U}^{-1}(t)\hat{B}\hat{U}(t)]\\
&= \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(t)\hat{B}\hat{U}(t) - \hat{U}^{-1}(t)\hat{B}\hat{U}(t)\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\\
&= \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{B}\hat{U}(t) - \hat{U}^{-1}(t)\hat{B}\hat{A}\hat{U}(t)\\
&= \hat{U}^{-1}(t)(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{U}(t)\\
&= \hat{U}^{-1}(t)[\hat{A},\hat{B}]\hat{U}(t) = [\hat{A},\hat{B}]_\mathrm{H}.
\end{aligned}$$

ただし, 演算子 $\hat{A}_1, \ldots$ の関数 $f(\hat{A}_1,\ldots)$ について, $f(\hat{A}_1,\ldots)_\mathrm{H} := \hat{U}^{-1}(t)f(\hat{A}_1,\ldots)\hat{U}(t)$ とした.

8.4 正準量子化

古典力学における Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{P}}$ に対し, 量子力学における交換関係 $-\dfrac{i}{\hbar}[\hat{\cdot},\hat{\cdot}]_{\mathrm{H}}$ が対応するという要請を**正準量子化**という:

$$\{A,B\}_{\mathrm{P}} \overset{\text{要請}}{\mapsto} -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\mathrm{H}},\hat{B}_{\mathrm{H}}].$$

正準変数 (q^i,p_i) に対して正準量子化すると, 演算子 $(\hat{q}^i,\hat{p}_i)$ が**正準交換関係**と呼ばれる以下の対応が得られる:

$$\begin{aligned}
&\{q^i,p_j\}_{\mathrm{P}} = \delta_i^j,\\
\xrightarrow{\text{正準量子化}}\quad & -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}^i{}_{\mathrm{H}},\hat{p}_{j\mathrm{H}}] = \delta_i^j,\\
\Leftrightarrow\quad & [\hat{q}^i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_i^j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{q^i,q^j\}_{\mathrm{P}} = \{p_i,p_j\}_{\mathrm{P}} = 0,\\
\xrightarrow{\text{正準量子化}}\quad & -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}^i{}_{\mathrm{H}},\hat{q}^j{}_{\mathrm{H}}] = -\frac{i}{\hbar}[\hat{p}_{i\mathrm{H}},\hat{p}_{j\mathrm{H}}] = 0.\\
\Leftrightarrow\quad & [\hat{q}^i,\hat{q}^j] = [\hat{p}_i,\hat{p}_j] = 0.
\end{aligned}$$

正準変数を変数として持つ物理量 $A = A(q^i,p_i)$ の演算子は, 正準変数の演算子を形式的に代入したもの $\hat{A}|\psi(t)\rangle = A(\hat{q}^i,\hat{p}_i)|\psi(t)\rangle$ である. TODO: ただし, $\hat{A}$ が Hermite になるよう適当に正準変数の順序を調整する. また, B 表示した波動関数に対する演算子 $\hat{A}_B$ について, 同様に正準変数の演算子を代入したもの $\hat{A}_B\psi(b,t) = A(\hat{q}^i{}_B,\hat{p}_{iB})\psi(b,t)$ となるが, 正準変数の演算子が b とそれの微分の関数 $(\hat{q}^i{}_B,\hat{p}_{iB}) = (q^i{}_B(b,\frac{\partial}{\partial b}), p_{iB}(b,\frac{\partial}{\partial b}))$ であるとき, これを Schrödinger 表現という.

8.5 時間発展演算子と運動方程式

時間に依存しない物理量 $A(q^i,p_i)$ の時間発展を正準量子化して,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A,H\}_{\mathrm{P}} \quad \xrightarrow{\text{正準量子化}} \quad \frac{\mathrm{d}\hat{A}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\mathrm{H}},\hat{H}].$$

$$\therefore i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{A}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} = [\hat{A}_{\mathrm{H}},\hat{H}].$$

ここで, 両辺それぞれ計算して,

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{A}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} &= i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)\right]\\
&= i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{U}^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}\hat{A}\hat{U}(t) + i\hbar\hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)}{\mathrm{d}t},\\
[\hat{A}_{\mathrm{H}},\hat{H}_{\mathrm{H}}] &= \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{H}\hat{U}(t) + \hat{U}^{-1}(t)\hat{H}\hat{A}\hat{U}(t).
\end{aligned}$$

辺々比較して,

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{H}\hat{U}(t).$$

これは時間発展演算子 $\hat{U}(t)$ に関する微分方程式であり, これを解くことで $\hat{U}(t)$ の表示が得られる: Hamiltonian が時間に陽に依存しないとき, 時間発展演算子は時間に依存せず,

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}},$$

または Hamiltonian が時間に陽に依存するとき, 時間発展演算子は時間に依存し,

$$\hat{U}(t,t_0) = T\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, \hat{H}(t')\right].$$

ただし, T は**時間順序積** time ordered product で, 演算子の積を時間の順序関係に応じて並び替える: Heaviside の階段関数 $\theta(t)$ を用いて,

$$\begin{aligned}
T\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) &= \theta(t_1-t_2)\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) + \theta(t_2-t_1)\hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) \\
&= \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2), & (t_1 > t_2) \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1). & (t_2 > t_1) \end{cases}
\end{aligned}$$

実際, $\hat{U}(t)$ に関する微分方程式を両辺積分して,

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t,t_0) &= 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}(t_1)\hat{U}(t_1,t_0) \\
&\quad (\hat{U}(t_1,t_0) \text{ を代入}) \\
&= 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}(t_1) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\hat{U}(t_2,t_0) \\
&\quad (\text{繰り返し } \hat{U}(t_j,t_0) \text{ を代入}) \\
&= 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \hat{H}(t_1) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2) \\
&\qquad + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1\, \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2\, \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_2} \mathrm{d}t_3\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\hat{H}(t_3) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\cdots\hat{H}(t_n) \\
&\quad (t > t_1 > \ldots > t_{n-1} \text{ であることに注意して, 時間順序積を作用させる}) \\
&= T\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_n\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\cdots\hat{H}(t_n) \\
&= T\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\, \hat{H}(t)\right]^n \\
&= T\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t\, \hat{H}(t)\right].
\end{aligned}$$

一般に, 時間変化する $A(q^i, p_i, t)$ に関する時間発展の正準量子化は

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\}_{\mathrm{P}} + \frac{\partial A}{\partial t} \\
\xrightarrow{\text{正準量子化}} \quad & \frac{\mathrm{d}\hat{A}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\mathrm{H}}, \hat{H}] + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{H}} \\
\Leftrightarrow \quad & i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{A}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t} = [\hat{A}_{\mathrm{H}}, \hat{H}] + i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{H}}
\end{aligned}$$

これは観測量 A の時間発展を表した方程式であり, **Heisenberg の運動方程式**という. また, $\hat{U}(t)$ に関する微分方程式 $i\hbar\,\mathrm{d}\hat{U}(t)\,/\,\mathrm{d}t = \hat{H}\hat{U}(t)$ を $|\psi\rangle$ に作用させると,

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{U}(t)}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle &= \hat{H}\hat{U}(t)|\psi\rangle. \\
\therefore\quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle &= \hat{H}|\psi(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

これは状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展を表した方程式であり, **Schrödinger 方程式**という. または左から $\langle q|$ を内積させて, Hamiltonian の Schrödinger 表現が得られる:

$$
\hat{H}\psi(q,t) = \langle q|\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t).
$$

8.6 位置演算子と運動量演算子

正準変数の演算子 $(\hat{q}^i, \hat{p}_i)$ について, 位置表示の波動関数に対して位置演算子の Schrödinger 表現は $\hat{q}^i = q^i$ である:

$$
\hat{q}^i\psi(q,t) = \langle q|\hat{q}^i|\psi(t)\rangle = q^i\langle q \mid \psi(t)\rangle = q^i\psi(q,t).
$$

これに対応する $\hat{p}_i$ の表現を求める. ある定数 a^i に対し, $e^{\frac{i}{\hbar}a^j\hat{p}_j}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^j\hat{p}_j} = \hat{q}^i + a^i$ である. 実際,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k})}{\mathrm{d}a^j} &= \frac{\mathrm{d}e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}}{\mathrm{d}a^j}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} + e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i\frac{\mathrm{d}e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}}{\mathrm{d}a^j} \\
&= \frac{i}{\hbar}\hat{p}_j e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} - \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i\hat{p}_j e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} \\
&= \frac{i}{\hbar}\hat{p}_j e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} - \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}(i\hbar\delta_i^j + \hat{p}_j\hat{q}^i)e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} \\
&\quad (\because[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = \hat{q}^i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{q}^i = i\hbar\delta_i^j) \\
&= \frac{i}{\hbar}\hat{p}_j e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} + \delta_i^j - \frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{p}_j\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} \\
&\quad (\because[e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}, \hat{p}_j] = e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k}\hat{p}_j - \hat{p}_j e^{\frac{i}{\hbar}a^k\hat{p}_k} = 0) \\
&= \delta_i^j.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\hat{q}^i e^{-\frac{i}{\hbar}a^j\hat{p}_j}|q\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}a^j\hat{p}_j}(\hat{q}^i + a^i)|q\rangle = (q^i + a^i)e^{-\frac{i}{\hbar}a^j\hat{p}_j}|q\rangle.
$$

$$
\therefore e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}|q\rangle = |q + a\rangle.
$$

一般の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ に $e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}$ を作用させることを考える:

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}\left(\int \mathrm{d}^D q'\,|q'\rangle\langle q'|\right)|\psi(t)\rangle &= \int \mathrm{d}^D q'\,e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}|q'\rangle\langle q' \mid \psi(t)\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^D q'\,\psi(q',t)|q' + a\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^D q'\,\psi(q' - a,t)|q'\rangle.
\end{aligned}
$$

左から $\langle q|$ をかけると,

$$\begin{aligned}\langle q|e^{-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i}|\psi(t)\rangle &= \langle q|\int \mathrm{d}^D q'\,\psi(q'-a,t)|q'\rangle = \int \mathrm{d}^D q'\,\psi(q'-a,t)\langle q\mid q'\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^D q'\,\psi(q'-a,t)\delta^D(q'^i-q^i) \\ &= \psi(q-a,t).\end{aligned}$$

ただし固有状態の直交性 $\langle q\mid q'\rangle = \delta^D(q'^i-q^i)$ を用いた. a について 1 次まで冪展開して,

$$\langle q|\left(1_{\mathcal{H}}-\frac{i}{\hbar}a^i\hat{p}_i\right)|\psi(t)\rangle = \left(1_{\mathcal{H}}-a^i\frac{\partial}{\partial q^i}\right)\psi(q,t). \quad \therefore -\frac{i}{\hbar}\langle q|\hat{p}_i|\psi(t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial q^i}\psi(q,t).$$

$$\therefore \hat{p}_i\psi(q,t) = \langle q|\hat{p}_i|\psi(t)\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^i}\psi(q,t).$$

したがって, 位置表示の波動関数に対する運動量演算子の Schrödinger 表現は $\hat{p}_i = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial q^i}$ である.

固有波動関数 $\psi_p(q,t)$ に対し,

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q^i}\psi_p(q,t) = \hat{p}_i\psi_p(q,t) = p_i\psi_p(q,t).$$

$$\therefore \psi_p(q,t) = \langle q\mid p\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^D}e^{\frac{i}{\hbar}q^ip_i}.$$

ただし, D は一般化座標の次元とし, 固有状態の直交性を満たすよう定数を取った:

$$\begin{aligned}\langle p',t\mid p,t\rangle &= \langle p',t|\left(\int \mathrm{d}^D q\,|q,t\rangle\langle q,t|\right)|p,t\rangle = \int \mathrm{d}^D q\,\langle p',t\mid q,t\rangle\langle q,t\mid p,t\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^D q\,\psi^*_{p'}(q,t)\psi_p(q,t) = \int \frac{\mathrm{d}^D q}{(2\pi\hbar)^D}e^{\frac{i}{\hbar}q^i(p_i-p'_i)} \\ &= \delta^D(p_i-p'_i).\end{aligned}$$

8.7 Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式に $\hat{H} = H(\hat{q}^i, \hat{p}_i)$ やその表現を代入したものもまた **Schrödinger 方程式**という:

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle &= H(\hat{q}^i,\hat{p}_i)|\psi(t)\rangle, \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) &= H\left(q^i, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q^i}\right)\psi(q,t).\end{aligned}$$

8.7.1 例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Hamiltonian は

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

正準量子化して, Hamiltonian の演算子は

$$H(\hat{q}^i, \hat{p}_i) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q).$$

したがって Schrödinger 方程式は,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\right]\psi(q,t).$$

8.8 生成・消滅演算子

演算子 $\hat{a}$ とその Hermite 共役 $\hat{a}^\dagger$ が次の交換関係を満たすとき, $\hat{a}$ を**消滅演算子** annihilation operator, $\hat{a}^\dagger$ を**生成演算子** creation operator という:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$
$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0.$$

また, Hermite 演算子 $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を**数演算子** the number operation という. $\hat{N}$ の固有値 n に属する固有状態を $|n\rangle$ とする:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle.$$

このとき, $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ は固有値 $n+1$ に属する固有状態である:

$$\begin{aligned}\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle\\ &= \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)|n\rangle\\ &= \hat{a}^\dagger(\hat{N}+1)|n\rangle\\ &= (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle.\end{aligned}$$

したがって $|n+1\rangle$ は $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ を正規化して,

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger|n\rangle}{\sqrt{\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle}} = \frac{\hat{a}^\dagger|n\rangle}{\sqrt{\langle n|(\hat{N}+1)|n\rangle}} = \frac{\hat{a}^\dagger|n\rangle}{\sqrt{n+1}}.$$
$$\therefore \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

また, 同様に $\hat{a}|n\rangle$ は固有値 $n-1$ に属する固有状態である:

$$\begin{aligned}\hat{N}\hat{a}|n\rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle\\ &= (\hat{a}\hat{a}^\dagger-1)\hat{a}|n\rangle\\ &= \hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a}-1)|n\rangle\\ &= \hat{a}(\hat{N}-1)|n\rangle\\ &= (n-1)\hat{a}|n\rangle.\end{aligned}$$

したがって $|n-1\rangle$ は $\hat{a}|n\rangle$ を正規化して,

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}|n\rangle}{\sqrt{\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle}} = \frac{\hat{a}|n\rangle}{\sqrt{\langle n|\hat{N}|n\rangle}} = \frac{\hat{a}|n\rangle}{\sqrt{n}}.$$
$$\therefore \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

特に $n=0$ のときの状態 $|0\rangle$ を真空状態といい, $\hat{a}|0\rangle=0$ を満たす. $n<0$ は許されない: ある固有値 $n<0$ に属する固有状態 $|n\rangle$ に対し,

$$n=\langle n|\hat{N}|n\rangle=\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle=\langle\hat{a}n\mid\hat{a}n\rangle\geq 0.$$

ただし $|\hat{a}n\rangle\equiv\hat{a}|n\rangle$. これは $n<0$ に矛盾する. したがって, $n\geq 0$ である. また, n が正の非整数とすると, 繰り返し $\hat{a}$ を左右することで n を負にすることができてしまうから, n は非整数ではない. したがって, $n=0,1,2,\ldots$.

8.9 相互作用描像

Hamiltonian $\hat{H}$ を, 相互作用を含まない自由項 H_0 と相互作用項 H_I に分ける:

$$H(t)=H_0+H_\mathrm{I}(t).$$

このとき, 以下を満たす演算子 $\hat{A}_\mathrm{T}(t)$ と状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ は**相互作用描像** Interaction picture と呼ばれる:

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\hat{A}_\mathrm{T}}{\mathrm{d}t}=[\hat{A}_\mathrm{T},\hat{H}_0],$$
$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}=\hat{H}_\mathrm{I}|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}.$$

第 1 式より, Schrödinger 描像と相互作用描像の演算子の対応が得られる:

$$\hat{A}_\mathrm{T}(t)=e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}.$$

また, 期待値がどの描像でも等しいという条件

$${}_\mathrm{T}\langle\psi(t)|\hat{A}_\mathrm{T}(t)|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}={}_\mathrm{T}\langle\psi(t)|e^{i\hat{H}_0(t-t_0)}\hat{A}e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}=\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$

より, Schrödinger 描像と相互作用描像の状態ベクトルの対応が得られる:

$$|\psi(t)\rangle=e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}.$$

また, 時間発展演算子と同様の議論から,

$$|\psi(t)\rangle_\mathrm{T}=T\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\,\hat{H}_\mathrm{I}(t')\right]|\psi(t_0)\rangle_\mathrm{T}$$

8.10 経路積分量子化

時刻 $t_i\to t_f$ の運動で粒子が $q_i:=q(t_i)\to q_f:=q(t_f)$ へ移動するときの作用は

$$S[q(t)]=\int_{t_A}^{t_B}\mathrm{d}t\,L(q,\dot{q},t)$$

で与えられる. このとき, 状態 $|q_i,t_i\rangle$ から状態 $|q_f,t_f\rangle$ への確率振幅は以下であるという要請を**経路積分量子化**という:

$$K(q_f,t_f;q_i,t_i):=\langle q_f,t_f\mid q_i,t_i\rangle\overset{\text{要請}}{=}\int_{q_i}^{q_f}\mathcal{D}[q(t)]e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]}.$$

位置表示の波動関数に対して以下が成立する:

$$\psi(q_f, t_f) = \int \mathrm{d}^D q_i \, K(q_f, t_f; q_i, t_i)\psi(q_i, t_i).$$

実際,

$$\begin{aligned}
\psi(q_f, t_f) &= \langle q_f, t_f \mid \psi \rangle \\
&= \langle q_f, t_f | \left(\int \mathrm{d}^D q_i \, |q_i, t_i\rangle\langle q_i, t_i| \right) |\psi\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^D q_i \, \langle q_f, t_f \mid q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i \mid \psi \rangle \\
&= \int \mathrm{d}^D q_i \, K(q_f, t_f; q_i, t_i)\psi(q_i, t_i).
\end{aligned}$$

8.11 参考文献

- 砂川 重信『量子力学』(岩波書店, 1991)
- 清水 明『新版 量子論の基礎 その本質のやさしい理解のために』(サイエンス社, 2004)

9 位相空間

import Topo from‘./topo.md’;

9.1 位相空間

台集合と呼ばれる集合 X と**開集合系**と呼ばれる X の部分集合の族 $\mathcal{U}$ に対して, 以下の条件を満たす組 $(X, \mathcal{U})$ または単に X を**位相空間** topological space という. 開集合系の元を**開集合**という.

1. 空集合および台集合は開集合: $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.
2. 開集合の和もまた開集合: $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{U \in \tilde{\mathcal{U}}} U \in \mathcal{U}$.
3. 有限個の開集合の積もまた開集合: $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}$.

位相空間 X の点 $x \in X$ について, x を含む開集合を x の**開近傍**といい, x の開近傍を含む任意の集合を x の**近傍**という.

9.2 連続写像と同相

位相空間 X, Y と 写像 $f : X \to Y$ について, $x \in X$ に対し $f(x) \in Y$ の近傍の f による逆像が x の近傍になるとき, f は x で連続であるという. また, Y の開集合の f による逆像が X の開集合となるとき, f を連続という. 全単射 $f : X \to Y$ が連続で f^{-1} も連続であるとき, f を**同相写像**といい, X と Y は**位相同型**あるいは**同相**という.

10 微分幾何学

import Dg from‘./dg.md’;

10.1　束と切断

底空間 base space と呼ばれる空間 B と**全空間** total space と呼ばれる空間 E に対して, **射影** projection と呼ばれる写像 $\pi : E \to B$ があるとき, 三対 (E, π, B) を**束** bundle という. $E \xrightarrow{\pi} B$, または単に E を束と呼ぶこともある.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\pi"] \\
B
\end{tikzcd}
$$

任意の $b \in B$ について, 射影による逆像 $\pi^{-1}(b) \in E$ を束の b 上の**ファイバー** fibre という. 位相空間 B, E を底空間, 全空間に持つ束 $E \xrightarrow{\pi} B$ に対し, 位相空間 F が任意の $b \in B$ 上のファイバーと同相であるとき, F を束のファイバーという. 特に $E = B \times F$ であるとき, この束 E は**自明な束** trivial bundle という. このときの射影は $\pi = \mathrm{prod}_1$.

$$
\begin{tikzcd}
B \times F \arrow[d, "\mathrm{prod}_1"] \\
B
\end{tikzcd}
$$

また, 写像 $\sigma : B \to E$ が $\pi \circ \sigma = 1_B$ を満たすとき, σ を**切断** cross section という. 言い換えると, 切断とは, 任意の底空間上の点 $b \in B$ に対して各ファイバー上の 1 点 $\sigma(b) \in \pi^{-1}(b)$ を決める写像 σ である. 束 E の切断の全体を $\Gamma(E)$ と表す.

$$
\begin{tikzcd}
E \\
B \arrow[u, "\sigma \in \Gamma(E)"']
\end{tikzcd}
$$

10.2　ファイバー束と構造群

全空間 E, 底空間 M, ファイバー F が可微分多様体で, 射影 π が全射である束 $E \xrightarrow{\pi} M$ について考える. M の開被覆 $\{U_i\}$ に対して, **局所自明化** local trivialization と呼ばれる微分同相写像 $\varphi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ が存在するとき, この束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を**ファイバー束** fibre bundle という.

$$
\begin{tikzcd}
U_i \times F \arrow[r, "\simeq", "\varphi_i"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & E \arrow[d, "\pi"] \\
U_i \arrow[r, equal] & U_i \arrow[r, "\iota"] & M
\end{tikzcd}
$$

点 $p^i \in U_i \subset M$ における局所自明化 φ_i を $\varphi_{i,p} := \varphi_i(p, \ ) : F \to \pi^{-1}(p)$ とする. 底空間上の点 $p \in U_i \cap U_j \neq \varnothing$ について, $g_{ij}(p) := \varphi_{i,p}^{-1} \circ \varphi_{j,p} : F \to F$ あるいは $g_{ij}(p)$ を**変換関数** transition function といい, $p \in U_i \cup U_j \cup U_k$ に対してコサイクル条件 $g_{ij}(p) g_{jk}(p) = g_{ik}(p)$ を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi_{i,p}"'] & \pi^{-1}(p) \arrow[d, "\pi"] & F \arrow[l, "\varphi_{j,p}"] \arrow[ll, bend right, "g_{ij}(p)"'] \\
\{p\} \arrow[r, equal] & \{p\} \arrow[r, equal] & \{p\}
\end{tikzcd}
$$

F に左作用する位相群 G を用いて $g_{ij}(p) : U_i \cap U_j \to G$ であるとき, G を**構造群** structure group といい, このときのファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を G-**束** G-bundle ともいう.

底空間 M とその開被覆 $\{U_i\}$, ファイバー F, 構造群 G, 変換関数 $g_{ij}(p)$ が与えられたとき, ファイバー束を構成可能である.

10.3 主 G-束と同伴ファイバー束

射影 π が微分可能な G-束 $P \xrightarrow{\pi} M$ を考える. G が P に右から作用し, $p \in M$ 上のファイバー上の点が G の作用で同一ファイバー上に移る (**単純推移的** simply transitive) とき, このファイバー束 $P \xrightarrow{\pi} M$ を**主** G-**束** principal G-bundle, あるいは単に**主束** principal bundle という. 言い換えると, 主 G-束とは, 射影が微分可能, ファイバーが位相群 G である G-束である.

主 G-束 $P \xrightarrow{\pi} M$, G が左作用する可微分多様体 F が与えられたとき, 商空間

$$P \times_G F := (P \times F)/G$$

と写像 $\pi_1 : P \times_G F \to M, (u, f) \mapsto \pi(u)$ はファイバー F のファイバー束 $P \times_G F \xrightarrow{\pi_1} M$ を与える. これを**同伴ファイバー束** associated fibre bundle という. 反対に, 上の定義のように G-束から同伴する主 G-束を構成可能である.

10.4 ベクトル束

体 K 上のベクトル空間 V をファイバーとするファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ について考える. M の開被覆 $\{U_i\}$ に対して, $p \in U_i \subset M$ における局所自明化 $\phi_i(p, \ ) : V \to \pi^{-1}$ が線形同型を与えるとき, このファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ を**ベクトル束** vector bundle という. 言い換えると, ベクトル束とは, 次元 n のベクトル空間をファイバーとして持つ $GL(n)$-束である. 自明かつファイバーが $V = K$ であるベクトル束を**自明な直線束**という. また, 主 $GL(n)$-束の同伴ファイバー束は**同伴ベクトル束**と呼ばれる.

10.5 接束と余接束

可微分多様体 M 上の点 $p \in M$ に対し, p の座標近傍における局所座標 $\{x_\mu\}$ 上で定義された微分作用素 $\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ を用いた $\{\partial_\mu\}$ を基底とするベクトル空間 T_pM を**接空間** tangent space といい, 接空間のベクトルを**接ベクトル** tangent vector という. 全空間 $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$ に対して射影 $\pi : M \to TM$ が $\pi^{-1}(p) \in T_pM$ を満たすようなベクトル束 $TM \xrightarrow{\pi} M$ を**接束** tangent bundle という. 接束の切断を**ベクトル場** vector field という.

接空間 T_pM の双対空間 T_p^*M を**余接空間** cotangent space といい, T_pM の基底 $\{\partial_\mu\}$ の双対基底は $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ である: $\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. また余接空間のベクトルを**余接ベクトル** cotangent vector という. 全空間 $T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ に対して射影 $\pi : M \to T^*M$ が $\pi^{-1}(p) \in T_p^*M$ を満たすようなベクトル束 $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ を**余接束** cotangent bundle という.

10.6　微分形式とベクトル束上の接続

ベクトル束 $E \overset{x}{\to} M$ に対し, M の余接空間の k 次交代テンソル空間 $\Lambda^k(T^*M) := \bigcup_{p\in M} \Lambda^k(T_p^*M)$ を付け加えた $\Lambda^k(T^*M) \otimes E \overset{\pi_1}{\longrightarrow} M$ の切断 $\Omega^k(M,E) := \Gamma(\Lambda^k(T^*M) \otimes E)$ を E に値を取る ***k*-形式** k-form の空間という.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^k(T^*M) \otimes E \\
M \arrow[u, "\phi\in\Omega^k(M,E)"']
\end{tikzcd}
$$

ベクトル束 E が自明な直線束であるとき単に $\Omega^k(M) := \Omega^k(M,E) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$ と書き, 単に k-形式の空間という.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^k(T^*M) \\
M \arrow[u, "\phi\in\Omega^k(M)"']
\end{tikzcd}
$$

10.6.1　全微分：$\Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$

自明な直線束に値を取る 0-形式を 1-形式に移す微分 $\mathrm{d} : \Omega^0(M) \to \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ は全微分である: $f, g \in \Omega^0(M), fg \in \Omega^0(M)$ に対して, Leibniz 則を満たす:

$$
\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + f(\mathrm{d}g).
$$

$$
\begin{tikzcd}
K & T^*M \\
M \arrow[u, "\Omega^0(M)\ni f"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow}", yshift=6ex] & M \arrow[u, "\mathrm{d}f\in\Omega^1(M)"']
\end{tikzcd}
$$

T_p^*M の基底 $\{dx^\mu\}$ に対し, $f \in \Omega^0(M)$ は局所的に

$$
\mathrm{d}f := (\partial_\mu f)\ \mathrm{d}x^\mu .
$$

10.6.2　外微分：$\Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

自明な直線束に値を取る k-形式を $(k+1)$-形式に移す微分 $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を**外微分** exterior derivative という: $\omega \in \Omega^k(M), \xi \in \Omega^l(M), \omega \wedge \xi \in \Omega^{k+l}(M)$ に対して, Leibniz 則を満たす:

$$
\mathrm{d}(\omega \wedge \xi) = \mathrm{d}\omega \wedge \xi + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\xi .
$$

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^k(T^*M) & \Lambda^{k+1}(T^*M) \\
M \arrow[u, "\Omega^k(M)\ni\omega"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{d}}{\Longrightarrow}", yshift=6ex] & M \arrow[u, "\mathrm{d}\omega\in\Omega^{k+1}(M)"']
\end{tikzcd}
$$

T_p^*M の基底 $\{dx^\mu\}$ に対し, $\omega = \frac{1}{k!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_k}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_k} \in \Omega^k(M)$ は局所的に

$$\mathrm{d}\omega := \frac{1}{k!}(\partial_\nu\omega_{\mu_1\cdots\mu_k})\,\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_k}.$$

このとき, 外積代数の交代性より外微分を 2 回作用させると 0 になる: $\mathrm{d}^2 = 0$. また, $X, Y \in T_pM$ に対し, $\omega \in \Omega^1(M)$ の外微分は次の等式を満たす:

$$\mathrm{d}\omega\,(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

10.6.3 共変微分 : $\Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$

ベクトル束 E に値を取る 0-形式を 1-形式に移す微分 $D : \Omega^0(M,E) \to \Omega^1(M,E)$ を**接続** connection という: $f \in \Omega^0(M)$, $\xi' \in \Omega^0(M,E) = \Gamma(E)$, $f\xi' \in \Omega^0(M,E)$ に対して, Leibniz 則を満たす:

$$D(f\xi') = \mathrm{d}f\otimes\xi' + fD\xi'.$$

$$\begin{tikzcd} E & T^*M\otimes E \\ M \arrow[u, "\Omega^0(M,E)\ni\phi"] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\ D\ }"] & M \arrow[u, "D\phi\in\Omega^1(M,E)"'] \end{tikzcd}$$

$p \in M$ の座標近傍 $U_i \subset M$ とその局所自明化 $\varphi_{i,p} := \varphi_i(p, \ )$ に対し, 切断 $\phi \in \Gamma(E)$ の接続は

$$D\phi := \varphi_{i,p}(\mathrm{d} + A_i)\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi.$$

ここで, Lie 代数に値を取る 1-形式 $A_i \in \Omega^1(U_i, \mathrm{End}(E)) = \Gamma(T^*U_i\otimes\mathfrak{g})$ は**接続 1-形式**または**ゲージ場** gauge field といい, **局所標構場** local frame field と呼ばれる $\Omega(U_i, E) = \Gamma(\pi^{-1}(U_i))$ の局所的な基底 $\{e_a\}$ を用いて, $\nabla e_a = \varphi_{i,p}(A_i)^b{}_a\otimes\varphi_{i,p}^{-1}\circ e_b$ と展開できる. また, ゲージ場は別の座標近傍と「接続」する役割を持つ: $p \in M$ の座標近傍 $U_i, U_j \subset M$ とその局所自明化 $\varphi_{i,p} := \varphi_i(p, \ )$, $\varphi_{j,p} := \varphi_j(p, \ )$ に対し, 切断 $\phi \in \Gamma(E)$ は

$$D\phi = \varphi_{i,p}(\mathrm{d} + A_i)\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi = \varphi_{j,p}(\mathrm{d} + A_j)\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi,$$

あるいは 局所切断 $\phi_i := \varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi$, $\phi_j := \varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi$ と, それらに対する局所的な接続 $D_i := \mathrm{d} + A_i$, $D_j := \mathrm{d} + A_j$ を用いて, 変換関数による局所的な接続の変換式が得られる:

$$D_i\phi_i = g_{ij}(p)D_j\phi_j.$$

また, ベクトル束の構造群が $GL(n)$ であることを用いて,

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,p}(\mathrm{d} + A_j)\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi &= \varphi_{j,p}\,\mathrm{d}(\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi) + \varphi_{j,p}A_j\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi \\
&= \varphi_{j,p}\,\mathrm{d}(\varphi_{j,p}^{-1}\circ\varphi_{i,p}\circ\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi) + \varphi_{j,p}A_j\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi \\
&= \varphi_{j,p}\,\mathrm{d}(g_{ji}(p)\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi) + \varphi_{j,p}A_j\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi \\
&= \varphi_{j,p}\,\mathrm{d}(g_{ji}(p))\,\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi + \varphi_{j,p}g_{ji}(p)\,\mathrm{d}(\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi) + \varphi_{j,p}A_j\varphi_{j,p}^{-1}\circ\phi \\
&= \varphi_{i,p}\,\mathrm{d}(\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi) + \varphi_{i,p}g_{ij}(p)\,\mathrm{d}(g_{ji}(p))\,\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi + \varphi_{i,p}g_{ij}(p)A_jg_{ji}(p)\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi \\
&= \varphi_{i,p}(d + g_{ij}(p)\,\mathrm{d}g_{ji}(p) + g_{ij}(p)A_jg_{ji}(p))\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi.
\end{aligned}$$

これが $\varphi_{i,p}(\mathrm{d}+A_i)\varphi_{i,p}^{-1}\circ\phi$ と等しい条件は,

$$A_i = \mathrm{g}_{ij}(p)\,\mathrm{d}\mathrm{g}_{ji}(p) + \mathrm{g}_{ij}(p)A_j\mathrm{g}_{ji}(p),$$

あるいは $A := A_j, A' := A_i, g := \mathrm{g}_{ij}(p)$ として,

$$A' = \mathrm{g}\,\mathrm{d}\mathrm{g}^{-1} + \mathrm{g}A\mathrm{g}^{-1}.$$

変換関数による変換に相当する $A \mapsto A' = \mathrm{g}\,\mathrm{d}\mathrm{g}^{-1} + \mathrm{g}A\mathrm{g}^{-1}$ を**ゲージ変換** gauge transformation という. また, ゲージ場をスカラー倍 $A \mapsto \lambda A$ しても接続の性質は変わらない.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi_{i,p}"'] & \pi^{-1}(p) & F \arrow[l, "\varphi_{j,p}"] \arrow[ll, bend right, "\mathrm{g}_{ij}(p)"'] & T_p^*M\otimes F \arrow[r, "\varphi_{i,p}"'] & T_p^*M\otimes\pi^{-1}(p) & T_p^*M\otimes F \arrow[l, "\varphi_{j,p}"] \arrow[ll, bend right, "\mathrm{g}_{ij}(p)"'] \\
\{p\} \arrow[u, "\phi_i"] \arrow[r, equal] & \{p\} \arrow[u, "\phi", ""{name=A}] \arrow[r, equal] & \{p\} \arrow[u, "\phi_j"'] & \{p\} \arrow[u, "(d+A_i)\phi_i"'] \arrow[r, equal] & \{p\} \arrow[u, "D\phi"', ""{name=B}] \arrow[r, equal] & \{p\} \arrow[u, "(d+A_j)\phi_j"']
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "D"]
\end{tikzcd}$$

実用上, 接続はしばしば局所的な接続と同一視される:

$$D\phi := (\mathrm{d}+A)\phi.$$

例えば, $De_a = A^b{}_a\otimes e_b, D'\phi' = \mathrm{g}D\phi$ など. T_p^*M の基底 $\{dx^\mu\}$ に対して, 接続 1-形式 $A = A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ を用いて, 局所的に $D\phi = D_\mu\phi\ \mathrm{d}x^\mu = (\partial_\mu + A_\mu)\phi\ \mathrm{d}x^\mu$ と展開される. このとき, 接続の成分表示を**共変微分** convariant derivative という:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + A_\mu)\phi.$$

また, $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ を双対基底に持つ T_pM の基底 $\{\partial_\mu\}$ に対して, $X = X^\mu\partial_\mu \in T_pM$ を用いた $D_X\phi := D\phi(X) = X^\mu D_\mu\phi : \Gamma(E)\to\Gamma(E)$ を共変微分と呼ぶこともある. また, 単に接続 $D\phi = (\mathrm{d}+A)\phi$ を共変微分と呼ぶこともある.

10.6.4 共変外微分 : $\Omega^k(M,E)\to\Omega^{k+1}(M,E)$

ベクトル束 E に値を取る k-形式を $(k+1)$-形式に移す微分 $D : \Omega^k(M,E)\to\Omega^{k+1}(M,E)$ を**共変外微分** covariant exterior derivative という: $\omega\in\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$, $\xi\in\Omega^l(M,E) = \Gamma(\Lambda^l(T^*M)\otimes E)$, $\omega\wedge\xi\in\Omega^{k+l}(M,E) = \Gamma(\Lambda^{k+l}(T^*M)\otimes E)$ に対して, Leibniz 則を満たす:

$$D(\omega\wedge\xi) = \mathrm{d}\omega\wedge\xi + (-1)^k\omega\wedge D\xi,$$

あるいは, $l = 0$ のとき,

$$D(\omega\otimes\xi) = \mathrm{d}\omega\otimes\xi + (-1)^k\omega\wedge D\xi.$$

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^k(T^*M)\otimes E & \Lambda^{k+1}(T^*M)\otimes E \\
M \arrow[u, "\Omega^k(M,E)\ni\phi", ""'{name=A}] & M \arrow[u, "D\phi\in\Omega^{k+1}(M,E)"', ""{name=B}]
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "D"]
\end{tikzcd}$$

接ベクトル $X, Y \in T_pM$ に対し, $\phi \in \Omega^1(M, E)$ の共変外微分は次の等式を満たす:

$$D\phi(X, Y) = D_X(\phi(Y)) - D_Y(\phi(X)) - \phi([X, Y]).$$

10.6.5 曲率

$p \in M$ において E の切断を 2 回共変外微分する操作 $R := D^2 : \pi^{-1}(p) \to \Lambda^2(T_p^*M) \otimes \pi^{-1}(p)$ を p における接続 D の**曲率** curvature という. このとき, **Bianchi 恒等式** Bianchi identity を満たす:

$$DR = 0.$$

$\xi \in \Gamma(E) = \Omega^0(M, E)$ に対し, $p \in M$ の接ベクトル $X, Y \in T_pM$ を用いた等式

$$\begin{aligned} D(D\xi)(X, Y) &= D_X(D\xi(Y)) - D_Y(D\xi(X)) - D\xi([X, Y]) \\ &= D_X D_Y \xi - D_Y D_X \xi - D_{[X,Y]}\xi \end{aligned}$$

より, **Ricchi 恒等式** Ricci identity が得られる:

$$R(X, Y)\xi = (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})\xi.$$

局所標構場 $\{e_a\}$ の曲率は, 接続 1-形式 $A = (A^b{}_a)$ を用いて,

$$\begin{aligned} D^2 e_a &= D(A^b{}_a \otimes e_b) \\ &= dA^b{}_a \otimes e_b - A^b{}_a \wedge De_b \\ &= dA^b{}_a \otimes e_b - A^b{}_a \wedge A^c{}_b \otimes e_c \\ &= (dA^c{}_a + A^c{}_b \wedge A^b{}_a) \otimes e_c \end{aligned}$$

であるから, **構造方程式** structure equation が得られる:

$$Re_a = (dA^b{}_a + A^b{}_c \wedge A^c{}_a) \otimes e_b.$$

このとき, $Re_a = F^b{}_a \otimes e_b$ となる Lie 代数に値を取る 2-形式

$$\begin{aligned} F &= (F^b{}_a) \\ &= (\mathrm{d}A^b{}_a + A^b{}_c \wedge A^c{}_a) \\ &= \mathrm{d}A + A \wedge A \\ &\in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E)) = \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

を**曲率 2-形式** curvature 2-form あるいは**場の強さ** field strength という. ゲージ変換 $A \mapsto A' = g\,\mathrm{d}g^{-1} + gAg^{-1}$ に対して, 場の強さ F の変換規則は $F \mapsto F' = gFg^{-1}$ である. また, 場の強さの外微分より, Bianchi 恒等式の別の表示が得られる:

$$\begin{aligned} dF &= \mathrm{d}(\mathrm{d}A + A \wedge A) \\ &= \mathrm{d}^2 A + \mathrm{d}(A \wedge A) \\ &= \mathrm{d}A \wedge A - A \wedge \mathrm{d}A \\ &= (F - A \wedge A) \wedge A - A \wedge (F - A \wedge A) \\ &= F \wedge A - A \wedge F \\ &=: -[A, F]. \end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{d}_A F := \mathrm{d}F + [A, F] = 0.$$

また, ゲージ場 $A = A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$, 場の強さ $F = \dfrac{1}{2} F_{\mu\nu} \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ について,

$$\begin{aligned}
F &= \mathrm{d}A + A \wedge A \\
&= \mathrm{d}(A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu) + (A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu) \wedge (A_\nu \,\mathrm{d}x^\nu) \\
&= \partial_\nu A_\mu \,\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu + A_\mu A_\nu \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + \frac{1}{2}(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu .
\end{aligned}$$

したがって, 場の強さの成分表示は,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

10.7　主 G-束の接続

10.8　参考文献

- 坪井 俊『幾何学 III 微分形式』(東京大学出版会, 2008)
- 佐古彰史『ゲージ理論・一般相対性理論のための 微分幾何入門』(森北出版, 2021)
- D.Husemoller, Fibre Bundles, Third Edition (Graduate Texts in Mathematics 20, Spinger-Verlag, New York, 1994)
- 小林昭七『接続の微分幾何とゲージ理論』(裳華房, 2004)
- Adam Marsh, Gauge Theories and Fiber Bundles: Definitions, Pictures, and Results, 2022, arXiv:1607.03089v3.

11　場の解析力学

import Amfields from './am-fields.md' ;

11.1　最小作用の原理

4 元座標に依存するパラメータ $\phi^\alpha(x)$ について, **作用** action と呼ばれる汎関数 $S[\phi^\alpha]$ が存在し, ϕ^α は物理現象において $S[\phi^\alpha]$ が最小となるよう変化する. つまり, 停留条件 $\delta S[\phi^\alpha] = 0$ を満たす.

11.2　Euler – Lagrange の運動方程式

作用は, スカラー場 ϕ^α に関する **Lagrangian 密度** Lagrangian density $\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha)$ を用いて以下のように表される:

$$S[\phi^\alpha] = \int \mathrm{d}^4 x \, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha).$$

$\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha$ の変分をとって,

$$\begin{aligned}
\delta S[\phi^\alpha] &= \int \mathrm{d}^4 x \left[\mathcal{L}(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha + \partial_\mu\delta\phi^\alpha) - \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + \delta\partial_\mu\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} + o\left(\sqrt{\delta\phi^{\alpha*}\delta\phi^\alpha + \delta\partial_\mu\phi^{\alpha*}\delta\partial^\mu\phi^\alpha}\right)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + \partial_\mu\delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] \quad (\because \delta\partial_\mu\phi^\alpha = \partial_\mu\delta\phi^\alpha) \\
&= \int \mathrm{d}^4 x \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \delta\phi^\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right) + \partial_\mu\left(\delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right)\right].
\end{aligned}$$

ここで, 発散項は境界条件より消える:

$$\delta S[\phi^\alpha] = \int \mathrm{d}^4 x\, \delta\phi^\alpha \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right)\right].$$

したがって, 停留条件 $\delta S[\phi^\alpha] = 0$ より, **Euler – Lagrange の運動方程式**が得られる:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right) = 0.$$

または, Lagrangian 密度を空間全体にわたって積分した

$$L[\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \nabla\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha)$$

を Lagrangian $L[\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha]$ と定義すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L[\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha]}{\delta\phi^\alpha} &= \frac{\delta}{\delta\phi^\alpha} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \nabla\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}, \\
&\left(\because \text{変分公式 } \frac{\delta}{\delta\varphi(y)} \int \mathrm{d}x\, \mathrm{g}(\varphi'(x)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{dg}(\varphi'(y))}{\mathrm{d}(\varphi'(y))}\right) \\
\frac{\delta L[\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha]}{\delta\dot{\phi}^\alpha} &= \frac{\delta}{\delta\dot{\phi}^\alpha} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\phi^\alpha, \nabla\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha}.
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S[\phi^\alpha]}{\delta\phi^\alpha} &= \frac{\delta L}{\delta\phi^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^\alpha} \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha} \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

これを用いると Euler – Lagrange の運動方程式は

$$\frac{\delta S[\phi^\alpha]}{\delta\phi^\alpha} = \frac{\delta L}{\delta\phi^\alpha} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^\alpha} = 0.$$

11.2.1 例: 実 Klein-Gordon 場

実 Klein-Gordon 場 ϕ^α の Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_\alpha \partial^\mu \phi^\alpha - \frac{1}{2}m^2 \phi_\alpha \phi^\alpha.$$

ここで,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = -m^2 \phi^\alpha, \quad \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\right) = \partial_\mu \partial^\mu \phi^\alpha = \Box \phi^\alpha.$$

したがって, Euler – Lagrange の運動方程式より,

$$(\Box + m^2)\phi^\alpha = 0.$$

11.2.2 例: de Broglie 場

de Broglie 場 ψ の Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = i\hbar \psi^\dagger \partial_\mu \psi - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_i \psi^\dagger \partial^i \psi.$$

ここで, ψ と $\psi^\dagger$ を独立に扱って,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} &= i\hbar \partial_\mu \psi, \\
\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}\right) &= \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)}\right) + \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^\dagger)}\right) \\
&= 0 - \frac{\hbar}{2m}\partial_i \partial^i \psi \\
&= -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 \psi, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0, \\
\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) &= \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right) + \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)}\right) \\
&= i\hbar \partial_i \psi^\dagger - \frac{\hbar}{2m}\partial_i \partial^i \psi^\dagger \\
&= i\hbar \partial_i \psi^\dagger - \frac{\hbar}{2m}\nabla^2 \psi^\dagger.
\end{aligned}$$

したがって, Euler – Lagrange の運動方程式より,

$$i\hbar \partial_\mu \psi = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 \psi, \quad -i\hbar \partial_\mu \psi^\dagger = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 \psi^\dagger.$$

11.2.3 例: 電磁場

電磁場 A_μ の Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu, \quad F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= j^\mu, \\
\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) &= \partial_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(-\frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\right\} \\
&= \partial_\mu\left\{\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left[-\frac{1}{2}(\partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma - \partial_\rho A_\sigma \partial^\sigma A^\rho)\right]\right\} \\
&= \partial_\mu[-(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] \\
&= -\partial_\mu F^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

したがって，Euler – Lagrange の運動方程式より，

$$
\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu.
$$

11.3 Noether の定理

座標の微小変換 $x \mapsto x' = x + \delta x$ に対し，座標が $\phi^\alpha(x) \mapsto \phi'^\alpha(x) = \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x)$ と変換されるとする．このとき作用は

$$
\begin{aligned}
\delta S[\phi^\alpha] &= \int \mathrm{d}^4x'\, \mathcal{L}(\phi'^\alpha(x'), \partial'_\mu \phi'^\alpha(x')) - \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu\phi^\alpha(x)) \\
&\quad \left(\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}^4x \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| = \mathrm{d}^4x \det\left(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu\right) = \mathrm{d}^4x\,(1 + \partial_\mu \delta x^\mu)\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[(1 + \partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}(\phi'^\alpha(x'), \partial'_\mu\phi'^\alpha(x')) - \mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu\phi^\alpha(x))\right] \\
&\quad \left(\begin{aligned} \partial'_\mu\phi'^\alpha(x') &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu(\phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x)) \\ &= (\delta^\nu_\mu - \partial_\mu\delta x^\nu)(\partial_\nu\phi^\alpha + \partial_\nu\delta\phi^\alpha) \\ &= \partial_\mu\phi^\alpha + \partial_\mu\delta\phi^\alpha - \partial_\mu\delta x^\nu\partial_\nu\phi^\alpha \end{aligned}\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L} + \mathcal{L}(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha + \partial_\mu\delta\phi^\alpha - \partial_\mu\delta x^\nu\partial_\nu\phi^\alpha) - \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L} + \delta\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + (\partial_\mu\delta\phi^\alpha - \partial_\mu\delta x^\nu\partial_\nu\phi^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] \\
&\quad \left(\text{Lie 微分 } \delta^L\phi^\alpha(t) := \phi'^\alpha(t) - \phi^\alpha(t) = \delta\phi^\alpha - \delta x^\mu\partial_\mu\phi^\alpha\right) \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L} + (\delta^L\phi^\alpha + \delta x^\mu\partial_\mu\phi^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + (\partial_\mu\delta^L\phi^\alpha + \delta x^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L} + \delta^L\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + \delta x^\mu\partial_\mu\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + \partial_\mu\delta^L\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} + \delta x^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left\{\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L}) + \delta^L\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + \partial_\mu\left[\delta^L\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] - \delta^L\phi^\alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right)\right\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left\{\delta^L\phi^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right)\right] + \partial_\mu\left[\delta^L\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} + \delta x^\mu\mathcal{L}\right]\right\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x\, \delta^L\phi^\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right)\right] + \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\delta\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \delta x_\nu\left(\partial^\nu\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)\right].
\end{aligned}
$$

ここで, 第一項は Euler – Lagrange の運動方程式より無視でき, 第二項の積分範囲は任意である. したがって, この変換に対し作用が不変 $\delta S = 0$ であるとすると, 対応する保存則が得られる:

$$\partial_\mu \delta J^\mu = 0,$$

ただし,

$$\delta J^\mu := \delta\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \delta x_\nu T^{\mu\nu}$$

は**保存流**と呼ばれ,

$$T^{\mu\nu} := \partial^\nu\phi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

は**正準エネルギー運動量テンソル**と呼ばれる. 実際, 変換の**生成子**と呼ばれる

$$\delta Q(t) := \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \delta J^0(x)$$

を時間微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\delta Q}{\mathrm{d}t} &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \partial_0\delta J^0 = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, (\partial_\mu\delta J^\mu - \partial_i\delta J^i) \\
&= -\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \partial_i\delta J^i = -\int \mathrm{d}V\, \nabla\cdot(\delta\boldsymbol{J}) \\
&= -\int \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\delta\boldsymbol{J}) \quad \xrightarrow{\text{境界条件}} \quad 0.
\end{aligned}$$

TODO: 汎関数微分を用いた導出

TODO: 例

11.4 Hamilton の運動方程式

一般化運動量 $\pi_\alpha \equiv \delta L/\delta\dot{\phi}^\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}^\alpha$ を用いて, **Hamiltonian 密度** $\mathcal{H}(\phi^\alpha, \nabla\phi^\alpha, \pi_\alpha, \nabla\pi_\alpha) \equiv \pi_\alpha\dot{\phi}^\alpha - \mathcal{L}$ を定義する. Hamiltonian 密度の定義の変分は,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H} &= \dot{\phi}^\alpha\delta\pi_\alpha + \pi_\alpha\delta\dot{\phi}^\alpha - \delta\mathcal{L} \\
&= \dot{\phi}^\alpha\delta\pi_\alpha + \pi_\alpha\delta\dot{\phi}^\alpha - \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\right]\delta\phi^\alpha + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha\right] + \pi_\alpha\delta\dot{\phi}^\alpha \\
&= -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\right]\delta\phi^\alpha + \dot{\phi}^\alpha\delta\pi_\alpha + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha\right].
\end{aligned}$$

また, Hamiltonian 密度の変分は,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\cdot\delta(\nabla\phi^\alpha) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha}\delta\pi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\cdot\delta(\nabla\pi_\alpha) \\
&= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha\right] - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha}\delta\pi_\alpha + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\delta\pi_\alpha\right] - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\delta\pi_\alpha \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\right]\delta\phi^\alpha + \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\right]\delta\pi_\alpha + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\delta\phi^\alpha\right] + \nabla\cdot\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\delta\pi_\alpha\right]
\end{aligned}$$

ここで, Euler-Lagrangian 方程式が成立するとき $\dot{\pi}_\alpha = -\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\right]$ であることを用いると, **Hamilton の運動方程式**あるいは**正準方程式** canonical equation が得られる:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^\alpha &= \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\right],\\ \dot{\pi}_\alpha &= -\left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)}\right].\end{aligned}$$

TODO: ただし発散項は作用で消えることを用いた.

または, Hamiltonian 密度を空間全体にわたって積分した

$$\begin{aligned}H[\phi^\alpha, \pi_\alpha] &\equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{H}(\phi^\alpha, \nabla\phi^\alpha, \pi_\alpha, \nabla\pi_\alpha)\\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\pi_\alpha\dot{\phi}^\alpha - L[\phi^\alpha, \dot{\phi}^\alpha]\end{aligned}$$

を Hamiltonian $H[\phi^\alpha, \pi_\alpha]$ と定義すると,

$$\begin{aligned}\frac{\delta H[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\phi^\alpha} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)},\\ \frac{\delta H[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\pi_\alpha} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)}\end{aligned}$$

であるから, これを用いると Hamilton の運動方程式は,

$$\dot{\phi}^\alpha = \frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha}, \quad \dot{\pi}_\alpha = -\frac{\delta H}{\delta\phi^\alpha}.$$

π_α を ϕ^α に**共役な運動量** conjugate momentum といい, また $(\phi^\alpha, \pi_\alpha)$ の組を**正準変数** canonical variables という.

11.4.1 例: 実 Klein-Gordon 場

実 Klein-Gordon 場 ϕ^α の Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_\alpha\partial^\mu\phi^\alpha - \frac{1}{2}m^2\phi_\alpha\phi^\alpha.$$

ここで, 一般化運動量の定義より,

$$\pi_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\alpha} = \dot{\phi}_\alpha.$$

したがって $\dot{\phi}_\alpha = \pi_\alpha$ であるから, Hamiltonian 密度より,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_\alpha\dot{\phi}^\alpha - \mathcal{L}\\ &= \pi_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\pi_\alpha\pi^\alpha + \frac{1}{2}(\nabla\phi_\alpha)\cdot(\nabla\phi^\alpha) + \frac{1}{2}m^2\phi_\alpha\phi^\alpha\\ &= \frac{1}{2}\pi_\alpha\pi^\alpha + \frac{1}{2}(\nabla\phi_\alpha)\cdot(\nabla\phi^\alpha) + \frac{1}{2}m^2\phi_\alpha\phi^\alpha.\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi_\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi_\alpha)} &= \pi^\alpha,\\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi^\alpha} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi^\alpha)} &= m^2\phi_\alpha - \nabla^2\phi_\alpha.\end{aligned}$$

したがって, Hamilton の運動方程式は

$$\dot{\phi}^\alpha = \pi^\alpha, \quad \dot{\pi}_\alpha = -m^2\phi_\alpha + \nabla^2\phi_\alpha.$$

TODO: 他の例

11.5 Poisson 括弧

正準変数 $(\phi^\alpha, \pi_\alpha)$ に対し, **Poisson 括弧** Poisson braket は以下で定義される演算である:

$$\begin{aligned}\{A[\phi^\alpha, \pi_\alpha], B[\phi^\alpha, \pi_\alpha]\}_\mathrm{P} &\equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\frac{\delta A}{\delta\phi^\alpha}\frac{\delta B}{\delta\pi_\alpha} - \frac{\delta B}{\delta\phi^\alpha}\frac{\delta A}{\delta\pi_\alpha} \right) \\ &\equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\frac{\delta A[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x})}\frac{\delta B[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x})} - \frac{\delta B[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x})}\frac{\delta A[\phi^\alpha, \pi_\alpha]}{\delta\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x})} \right).\end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{gathered}\{\phi^\alpha, H\}_\mathrm{P} = \dot{\phi}^\alpha, \quad \{\pi_\alpha, H\}_\mathrm{P} = \dot{\pi}_\alpha, \\ \{\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \phi^\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_\mathrm{P} = \{\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_\mathrm{P} = 0, \\ \{\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_\mathrm{P} = \delta^\alpha_\beta\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').\end{gathered}$$

ある物理量 $A[\phi^\alpha, \pi_\alpha]$ について, 時間発展に関する式は:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \{A, H\}_\mathrm{P}.$$

実際, A の時間による完全微分は,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\delta A}{\delta\phi^\alpha}\dot{\phi}^\alpha + \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\, \frac{\delta A}{\delta\pi_\alpha}\dot{\pi}_\alpha \\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left(\frac{\delta A}{\delta\phi^\alpha}\frac{\delta H}{\delta\pi_\alpha} - \frac{\delta H}{\delta\phi^\alpha}\frac{\delta A}{\delta\pi_\alpha} \right) \\ &= \{A, H\}_\mathrm{P}.\end{aligned}$$

11.6 平面波展開

11.6.1 例: 実 Klein-Gordon 場

実 Klein-Gordon 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

運動方程式は

$$(\Box + m^2)\phi = 0,$$

一般化運動量 $\pi \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\phi$ は

$$\pi = \dot{\phi},$$

Hamiltonian は

$$H[\phi, \pi] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right].$$

さて, 実 Klein-Gordon 場 $\phi(t,\boldsymbol{x})$ を 3 次元 Fourier 級数展開して,

$$\phi(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

ただし, $q(t,\boldsymbol{p})$ は展開係数. これを運動方程式 $(\Box + m^2)\phi = 0$ に代入すると,

$$\begin{aligned}
&(\Box + m^2) \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - \nabla^2 \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + m^2 \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \ddot{q}(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} |\boldsymbol{p}|^2 q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} m^2 q(t,\boldsymbol{p}) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\ddot{q} + (\boldsymbol{p}^2 + m^2) q\right] e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} = 0.
\end{aligned}$$

したがって, $p_0 \equiv \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} > 0$ として $\ddot{q}(t,\boldsymbol{p}) + (p_0)^2 q(t,\boldsymbol{p}) = 0$ だから, $q(t,\boldsymbol{p})$ の一般解は

$$q(t,\boldsymbol{p}) = q_1(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} + q_2(\boldsymbol{p}) e^{ip_0 t}.$$

$\phi(t,\boldsymbol{x})$ の展開を $q_1(\boldsymbol{p}), q_2(\boldsymbol{p})$ で書き直して,

$$\begin{aligned}
\phi(t,\boldsymbol{x}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[q_1(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} + q_2(\boldsymbol{p}) e^{ip_0 t}\right] e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[q_1(\boldsymbol{p}) e^{-i(p_0 t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + q_2(\boldsymbol{p}) e^{i(p_0 t + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[q_1(\boldsymbol{p}) e^{-i(p_0 t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + q_2(-\boldsymbol{p}) e^{i(p_0 t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[q_1(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + q_2(-\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right]. \quad (px \equiv p_\mu x^\mu = p_0 t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

ここで, $\phi(x)$ が実スカラー場であることから $\phi(x) = \phi^*(x)$.

$$\phi^*(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[q_1^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx} + q_2^*(-\boldsymbol{p}) e^{-ipx}\right]$$

であるから,

$$\frac{a(\boldsymbol{p})}{\sqrt{2p_0}} \equiv \frac{q_1(\boldsymbol{p}) + q_2^*(-\boldsymbol{p})}{2}, \quad \frac{a^*(\boldsymbol{p})}{\sqrt{2p_0}} \equiv \frac{q_1^*(\boldsymbol{p}) + q_2(-\boldsymbol{p})}{2}$$

とすれば, 実スカラー場 $\phi(x)$ は $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ によって以下のように展開できる:

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right].$$

また, 一般化運動量 $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ は,

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right] \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[-ip_0 a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + ip_0 a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right].
\end{aligned}$$

$\phi(x)$ の展開と比較して,

$$\begin{aligned} p_0\phi(x) + i\pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} 2p_0 a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{2p_0}\, a(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{2p_0}\, a(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 t} = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3}} [p_0\phi(x) + i\pi(x)] e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

したがって $a(\boldsymbol{p})$ の表式が得られる:

$$a(\boldsymbol{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} [p_0\phi(x) + i\pi(x)] e^{ipx}.$$

Hamiltonian を $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ で表記することを考える. $\nabla\phi(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x) &= \nabla \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right] \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} i\boldsymbol{p} \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} - a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right] \end{aligned}$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0'}} \\
&\qquad \times\Big[\ (-p_0p_0' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}')e^{-i(p+p')x} \\
&\qquad\quad + (+p_0p_0' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}')e^{-i(p-p')x} \\
&\qquad\quad + (+p_0p_0' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}')e^{i(p-p')x} \\
&\qquad\quad + (-p_0p_0' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}')e^{i(p+p')x}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0'}} \\
&\qquad \times\Big[\ (-p_0p_0' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}')\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')e^{-i(p_0+p_0')t} \\
&\qquad\quad + (+p_0p_0' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}')\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')e^{-i(p_0-p_0')t} \\
&\qquad\quad + (+p_0p_0' + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}')\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')e^{i(p_0-p_0')t} \\
&\qquad\quad + (-p_0p_0' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}' + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}')\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')e^{i(p_0+p_0')t}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p_0} \\
&\qquad \times\Big[\ (-p_0^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + m^2)a(\boldsymbol{p})a(-\boldsymbol{p})e^{-2ip_0t} \\
&\qquad\quad + (+p_0^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + m^2)a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}) \\
&\qquad\quad + (+p_0^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) \\
&\qquad\quad + (-p_0^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + m^2)a^*(\boldsymbol{p})a^*(-\boldsymbol{p})e^{2ip_0t}\Big] \\
&\quad \big(p_0^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + m^2 \text{ に注意する}\big) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2p_0}\big[2p_0^2 a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}) + 2p_0^2 a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\big] \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ p_0\{a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}) + a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\} \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\ p_0\Big\{a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}[a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})]\Big\}.
\end{aligned}
$$

ただし $[a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})] \equiv a(\boldsymbol{p})a^*(\boldsymbol{p}) - a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ とした. 式変形で $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ の順序を並び換

えしていないことに注意. まとめると,

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\big[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p})e^{ipx}\big],\\
\pi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}(-i)p_0\big[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} - a^*(\boldsymbol{p})e^{ipx}\big],\\
a(\boldsymbol{p}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}[p_0\phi(x) + i\pi(x)]e^{ipx},\\
a^*(\boldsymbol{p}) &= \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}[p_0\phi(x) - i\pi(x)]e^{-ipx},\\
H[\phi,\pi] &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0\Big\{a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}[a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})]\Big\}.
\end{aligned}
$$

11.7 参考文献

- 高橋 康, 柏 太郎『量子場を学ぶための場の解析力学入門 増補第 2 版』(講談社サイエンティフィク, 2005)
- 日置 善郎『場の量子論 -摂動計算の基礎- (第 3 版)』(吉岡書店, 2022)

12 場の量子論

import Qft from‘./qft.md’;

12.1 正準量子化

場の解析力学における Poisson 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{P}}$ に対し, 場の量子論における交換関係 $-i[\cdot,\cdot]_{\mathrm{H}}$ が対応するという要請を**正準量子化**という:

$$
\{A,B\}_{\mathrm{P}} \overset{\text{要請}}{\mapsto} -i[A_{\mathrm{H}}, B_{\mathrm{H}}].
$$

正準変数 (q^i, p_i) に対して正準量子化すると, 演算子 (q^i, p_i) が**正準交換関係**と呼ばれる以下の対応が得られる:

$$
\begin{aligned}
&\{\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{P}} = \delta^\alpha_\beta\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\
\xrightarrow{\text{正準量子化}}\ &-i[\phi^\alpha{}_{\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}')] = \delta^\alpha_\beta\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
\Leftrightarrow\quad &[\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')] = i\delta^\alpha_\beta\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \phi^\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{P}} = \{\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')\}_{\mathrm{P}} = 0,\\
\xrightarrow{\text{正準量子化}}\ &-i[\phi^\alpha{}_{\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}), \phi^\beta{}_{\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}')] = -i[\pi_{\alpha\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}), \pi_{\beta\mathrm{H}}(t,\boldsymbol{x}')] = 0.\\
\Leftrightarrow\quad &[\phi^\alpha(t,\boldsymbol{x}), \phi^\beta(t,\boldsymbol{x}')] = [\pi_\alpha(t,\boldsymbol{x}), \pi_\beta(t,\boldsymbol{x}')] = 0.
\end{aligned}
$$

12.2　生成・消滅演算子

演算子 $a(\boldsymbol{p})$ とその Hermite 共役 $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ が次の交換関係を満たすとき, $a(\boldsymbol{p})$ を**消滅演算子** annihilation operator, $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を**生成演算子** creation operator という:

$$
\begin{gathered}
[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'), \\
[a(\boldsymbol{p}), a(\boldsymbol{p}')] = [a^\dagger(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = 0.
\end{gathered}
$$

また, Hermite 演算子 $n(\boldsymbol{p}) \equiv a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ を**数密度演算子**, $N \equiv \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\, n(\boldsymbol{p}) = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\, a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ を**数演算子** the number operation という. N の固有値 c に属する固有状態を $|\psi_c\rangle$ とする:

$$
N|\Psi_c\rangle = c|\Psi_c\rangle.
$$

このとき, $a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle$ は固有値 $c+1$ に属する固有状態である:

$$
\begin{aligned}
Na^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}')a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, a^\dagger(\boldsymbol{p}')\big\{a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}') + \delta^3(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})\big\}|\Psi_c\rangle \\
&= a^\dagger(\boldsymbol{p})\bigg(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}') + 1\bigg)|\Psi_c\rangle \\
&= a^\dagger(\boldsymbol{p})(N+1)|\Psi_c\rangle \\
&= (c+1)a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle.
\end{aligned}
$$

したがって $|\Psi_{c+1}\rangle$ は $a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle$ を正規化して,

$$
\begin{gathered}
|\Psi_{c+1}\rangle = \frac{a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_c|a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}} = \frac{a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_c|(N+1)|\Psi_c\rangle}} = \frac{a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{c+1}}. \\
\therefore a^\dagger(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle = \sqrt{c+1}|\Psi_{c+1}\rangle.
\end{gathered}
$$

また, 同様に $a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle$ は固有値 $c-1$ に属する固有状態である:

$$
\begin{aligned}
Na(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, \big\{a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}') - \delta^3(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})\big\}a(\boldsymbol{p}')|\Psi_c\rangle \\
&= a(\boldsymbol{p})\bigg(\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\, a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}') - 1\bigg)|\Psi_c\rangle \\
&= a(\boldsymbol{p})(N-1)|\Psi_c\rangle \\
&= (c-1)a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle.
\end{aligned}
$$

したがって $|\Psi_{c-1}\rangle$ は $a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle$ を正規化して,

$$
\begin{gathered}
|\Psi_{c-1}\rangle = \frac{a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_c|a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}} = \frac{a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_c|N|\Psi_c\rangle}} = \frac{a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle}{\sqrt{c}}. \\
\therefore a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle = \sqrt{c}|\Psi_{n-1}\rangle.
\end{gathered}
$$

特に $c=0$ のときの状態 $|\Psi_0\rangle \equiv |0\rangle$ を真空状態といい, $a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0$ を満たす. $c<0$ は許されない: ある固有値 $c<0$ に属する固有状態 $|\Psi_c\rangle$ に対し,

$$c = \langle \Psi_c | N | \Psi_c \rangle = \langle \Psi_c | a^\dagger(\boldsymbol{p}) a(\boldsymbol{p}) | \Psi_c \rangle = \langle a(\boldsymbol{p})\Psi_c \mid a(\boldsymbol{p})\Psi_c \rangle \geq 0.$$

ただし $|a(\boldsymbol{p})\Psi_c\rangle \equiv a(\boldsymbol{p})|\Psi_c\rangle$. これは $c<0$ に矛盾する. したがって, $c \geq 0$ である. また, c が正の非整数とすると, 繰り返し c を左右することで c を負にすることができてしまうから, c は非整数ではない. したがって, $c = 0, 1, 2, \ldots$.

状態 $|\boldsymbol{p}\rangle \equiv a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の 1 粒子状態, $|\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'\rangle \equiv a^\dagger(\boldsymbol{p}) a^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle$ は運動量 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ の 2 粒子状態である. 一般に基底 $\{|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots\rangle\}$ で張られる Hilbert 空間を Fock 空間という.

12.2.1 例: 実 Klein-Gordon 場

実 Klein-Gordon 場 $\phi(x)$ と一般化運動量 $\pi(x)$ の平面波展開は

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right],$$

$$\pi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} (-i) p_0 \left[a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} - a^*(\boldsymbol{p}) e^{ipx} \right].$$

または $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ について解いて,

$$a(\boldsymbol{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} [p_0 \phi(x) + i\pi(x)] e^{ipx},$$

$$a^*(\boldsymbol{p}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} [p_0 \phi(x) - i\pi(x)] e^{-ipx}.$$

これらの量を量子化する. 同時刻交換関係 $[\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}')]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ の下で $[a(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p})]$ の括弧積を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&[a(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p}')]\\
&=\left[\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\{p_0\phi(t,\boldsymbol{x})+i\pi(t,\boldsymbol{x})\}e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})},\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}\{p'_0\phi(t,\boldsymbol{x}')-i\pi(t,\boldsymbol{x}')\}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}')}\right]\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}[p_0\phi(t,\boldsymbol{x})+i\pi(t,\boldsymbol{x}),p'_0\phi(t,\boldsymbol{x}')-i\pi(t,\boldsymbol{x}')]e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}')}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}')}\\
&\qquad\times\{p_0p'_0[\phi(t,\boldsymbol{x}),\phi(t,\boldsymbol{x}')]-ip_0[\phi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}')]+ip'_0[\pi(t,\boldsymbol{x}),\phi(t,\boldsymbol{x}')]+[\pi(t,\boldsymbol{x}),\pi(t,\boldsymbol{x}')]\}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}')}\{p_0\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+p'_0\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x}')}(p_0+p'_0)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{i(p_0t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}e^{-i(p'_0t-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{x})}(p_0+p'_0)\\
&=\frac{p_0+p'_0}{\sqrt{4p_0p'_0}}e^{i(p_0-p'_0)t}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}}{(2\pi)^3}e^{-i(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}}=\frac{p_0+p'_0}{\sqrt{4p_0p'_0}}e^{i(p_0-p'_0)t}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\
&=\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}').
\end{aligned}
$$

したがって $a(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p})$ の交換関係は,

$$
\begin{gathered}
[a(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p}')]=\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'),\\
[a(\boldsymbol{p}),a(\boldsymbol{p}')]=[a^\dagger(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p}')]=0.
\end{gathered}
$$

したがって, $a(\boldsymbol{p}),a^\dagger(\boldsymbol{p})$ はそれぞれ消滅・生成演算子である. また, Hermite 演算子

$$N\equiv\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$$

は数演算子である.

また, 場 $\phi(x)$ を消滅演算子で構成される部分 $\phi^{(+)}(x)$ と消滅演算子で構成される部分 $\phi^{(-)}(x)$ に分ける:

$$
\begin{aligned}
\phi(x)&=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x),\\
\phi^{(+)}(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}a(\boldsymbol{p})e^{-ipx},\\
\phi^{(-)}(x)&=\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}.
\end{aligned}
$$

このとき, 場の積は,

$$
\begin{aligned}
\phi(x)\phi(y) &= \{\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\}\{\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(y)\} \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}} \\
&\quad\times\Big\{ e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}')+e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}') \\
&\qquad + e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}')+e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}')\Big\}.
\end{aligned}
$$

また, これの真空期待値は,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}} \\
&\quad\times\Big\{ \langle 0|e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}')|0\rangle+\langle 0|e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle \\
&\qquad + \langle 0|e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}')|0\rangle+\langle 0|e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle\Big\}. \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{-ipx}e^{ip'y}\langle 0|a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}')|0\rangle. \\
&\quad \big(\because a(\boldsymbol{p})|0\rangle = \langle 0|a^\dagger(\boldsymbol{p}) = 0\big) \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{-ipx}e^{ip'y}\langle 0|\{a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p})+\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\}|0\rangle. \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p'_0}}e^{-ipx}e^{ip'y}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'). \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p_0}e^{-ip(x-y)}.
\end{aligned}
$$

あるいは, 場の交換積の真空期待値は,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|[\phi(x),\phi(y)]|0\rangle &= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle-\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \int\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p_0}\big(e^{-ip(x-y)}-e^{ip(x-y)}\big).
\end{aligned}
$$

12.3 正規積

場の積で与えられる量については, 量子化後に生成演算子が消滅演算子の左側に来るよう, 古典論の段階で並び換えておく. この操作を正規順序積と呼ばれる記号 $:\ldots:$ で表す; 例えば, $:a_1a_2^\dagger a_3a_4^\dagger: = a_2^\dagger a_4^\dagger a_1a_3$.

正規積の真空期待値はゼロである: 演算子 $:A: = a^\dagger\ldots a^\dagger a\ldots a$ に対して,

$$
\langle 0|:A:|0\rangle = \langle 0|a^\dagger\ldots a^\dagger a\ldots a|0\rangle = 0.
$$

ただし, 定義から $a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger = 0$. 生成演算子, 消滅演算子のみで構成される演算子も同様である.

12.3.1 例: 実 Klein-Gordon 場

実 Klein-Gordon 場

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\left[a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^*(\boldsymbol{p})e^{ipx}\right]$$

の場の積は

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) = &\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0'}}\\ &\times\Big\{e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}') + e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}')\\ &\quad + e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}') + e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}')\Big\}.\end{aligned}$$

これに正規積を適用させると,

$$\begin{aligned}:\phi(x)\phi(y): = &\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0'}}\\ &\times\Big\{:e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}'): + :e^{-ipx}a(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}'):\\ &\quad + :e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p}'): + :e^{ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p}'):\Big\}.\\ = &\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}}\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0'}}\\ &\times\Big\{e^{-ipx}e^{-ip'y}a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}') + e^{ip'y}e^{-ipx}a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p})\\ &\quad + e^{ipx}e^{-ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}') + e^{ipx}e^{ip'y}a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}')\Big\}.\end{aligned}$$

また, 実 Klein-Gordon 場の Hamiltonian を $a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})$ で表示すると,

$$H[\phi,\pi] = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0\Big\{a^*(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}[a(\boldsymbol{p}), a^*(\boldsymbol{p})]\Big\}.$$

この Hamiltonian を演算子化する: $[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p}')] = \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ に注意して,

$$\begin{aligned}H &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0\Big\{a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}[a(\boldsymbol{p}), a^\dagger(\boldsymbol{p})]\Big\}\\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0 a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0\delta^3(0).\end{aligned}$$

第二項は演算子を含まない無限 c-数であり, 真空状態のエネルギーである: $\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0\delta^3(0)$. これは正規順序積を用いることで除くことができる:

$$\begin{aligned}H &= :\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]:\\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0 :\{a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}) + a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\}:\\ &= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0 a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}).\end{aligned}$$

さて, 真空状態は $a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0$ を満たすが, 真空状態に Hamiltonian を作用させると,

$$H|0\rangle = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\; p_0 a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0.$$

したがって, 真空状態はエネルギーが 0 である状態である. また, 真空状態に生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を作用させた状態 $|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ について, Hamiltonian を作用させると

$$\begin{aligned}
H|\boldsymbol{p}\rangle &= Ha^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\; p_0' a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}')a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle. \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\; p_0' a^\dagger(\boldsymbol{p}')\big[a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}') + \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\big]|0\rangle. \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\; p_0' a^\dagger(\boldsymbol{p}')\big[a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p}') + \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\big]|0\rangle. \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'\; p_0'\big[a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p}')a(\boldsymbol{p}') + a^\dagger(\boldsymbol{p}')\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\big]|0\rangle \\
&= p_0 a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = p_0|\boldsymbol{p}\rangle.
\end{aligned}$$

また, 数演算子を作用させると同様に $N|\boldsymbol{p}\rangle = |\boldsymbol{p}\rangle$. したがって, $|\boldsymbol{p}\rangle$ はエネルギー p_0 の粒子が 1 個存在する状態と解釈ができる. 同様に, $|\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\rangle \equiv a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle$ はエネルギー $(p_1)_0, \ldots, (p_n)_0$ の n 個の粒子が存在する状態である.

12.4 伝播関数

場 $\phi(x)$ に対し,

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) \equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

を **Feynman 伝播関数** Feynman propagator という.

12.4.1 例: 実 Klein-Gordon 場

場の積の真空期待値 $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p_0} e^{-ip(x-y)}$ より,

$$
\begin{aligned}
\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \theta(x^0-y^0)\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle \\
&= \theta(x^0-y^0)\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p_0} e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0-x^0)\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p_0} e^{ip(x-y)} \\
&\quad \left(\theta(x^0-y^0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \, \frac{e^{-i\alpha(x^0-y^0)}}{\alpha + i\varepsilon'}, \theta(y^0-x^0) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \, \frac{e^{-i\alpha(x^0-y^0)}}{\alpha - i\varepsilon'} \text{ を用いて}\right) \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\alpha}{(2\pi)^4 2p_0} \frac{e^{-i\alpha(x^0-y^0)}}{\alpha + i\varepsilon'} e^{-ip(x-y)} - i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\alpha}{(2\pi)^4 2p_0} \frac{e^{-i\alpha(x^0-y^0)}}{\alpha - i\varepsilon'} e^{ip(x-y)} \\
&\quad \left(p_0 \equiv \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} \text{ に注意し, 第一項 } \alpha \mapsto \tilde{p}_0 + p_0, \text{第二項 } \alpha \mapsto \tilde{p}_0 - p_0, \boldsymbol{p} \mapsto -\boldsymbol{p}\right) \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4 2p_0} \frac{e^{-i(\tilde{p}_0-p_0)(x^0-y^0)}}{\tilde{p}_0 - p_0 + i\varepsilon'} e^{-ip_0(x^0-y^0)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4 2p_0} \frac{e^{-i(\tilde{p}_0+p_0)(x^0-y^0)}}{\tilde{p}_0 + p_0 - i\varepsilon'} e^{ip_0} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4 2p_0} \left(\frac{1}{\tilde{p}_0 - p_0 + i\varepsilon'} - \frac{1}{\tilde{p}_0 + p_0 - i\varepsilon'}\right) e^{-i\tilde{p}_0(x^0-y^0)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\tilde{p}_0(x^0-y^0)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{\tilde{p}_0^2 - (p_0 - i\varepsilon')^2} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\tilde{p}_0(x^0-y^0)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{\tilde{p}_0^2 - p_0^2 - ip_0\varepsilon'} \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}\tilde{p}_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i\tilde{p}_0(x^0-y^0)} e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}}{\tilde{p}_0^2 - |\boldsymbol{p}|^2 + m^2 - i\varepsilon'} \\
&\quad (\text{ただし } \varepsilon \equiv p_0\varepsilon' \text{ とした. } \tilde{p}_0 \text{ を新たに } p_0 \text{ とすれば}) \\
&= i\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = i\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\varepsilon}
$$

12.5 Feynman 図形

ϕ^4 モデルの Lagrangian 密度

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^4.
$$

12.6 参考文献

- 桂 太郎『新版 演習 場の量子論』(サイエンス社, 2006)
- 日置 善郎『場の量子論 -摂動計算の基礎- (第 3 版)』(吉岡書店, 2022)
- 日置 善郎, 場の量子論への第一歩, 2011.

13 一般相対論

import Gr from ‘./gr.md’;

13.1 平行移動

N 次元の平らな空間の基底を $\boldsymbol{e}_n$, 計量を $h_{nm} \equiv \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_m$ とする. 任意のベクトルは $\boldsymbol{A} = A^n \boldsymbol{e}_n$ と書ける. 微小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \mathrm{d}z^n\, \boldsymbol{e}_n$ の長さ $\mathrm{d}s \equiv |\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\,|$ は,

$$\mathrm{d}s = (\mathrm{d}z^n\, \boldsymbol{e}_n) \cdot (\mathrm{d}z^m\, \boldsymbol{e}_m) = h_{nm}\, \mathrm{d}z^n\, \mathrm{d}z^m\,.$$

また, $\mathrm{d}z_n \equiv h_{nm}\, \mathrm{d}z^m$ とすれば,

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}z_n\, \mathrm{d}z^n\,.$$

N 次元空間内の 4 次元部分空間を考える. 4 次元のパラメータ x^μ を用いて, 4 次元部分空間の各点は $\boldsymbol{y}(x) = y^n(x)\boldsymbol{e}_n$. これを各 x^μ, x_μ で偏微分したものをそれぞれ $\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}^\mu$ とおく:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_\mu(x) &\equiv \partial_\mu \boldsymbol{y}(x) = \partial_\mu y^n(x)\boldsymbol{e}_n,\\ \boldsymbol{e}^\mu(x) &\equiv \partial^\mu \boldsymbol{y}(x) = \partial^\mu y_n(x)\boldsymbol{e}^n.\end{aligned}$$

このとき, N 次元空間に沿った微小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x^n\, \boldsymbol{e}_n = \mathrm{d}x^\mu\, \boldsymbol{e}_\mu = \partial_\mu y^n\, \mathrm{d}x^\mu\, \boldsymbol{e}_n$ より $\mathrm{d}x^n = \partial_\mu y^n\, \mathrm{d}x^\mu$. 同様に, $\mathrm{d}x_n = \partial^\mu y_n\, \mathrm{d}x_\mu$. また, 微小ベクトルの長さ $\mathrm{d}s$ は,

$$\mathrm{d}s \equiv h_{nm}\, \mathrm{d}z^n\, \mathrm{d}z^m = h_{nm}\partial_\mu y^n \partial_\nu y^m\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu\,.$$

ここで $g_{\mu\nu}(x) \equiv \boldsymbol{e}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{e}_\nu(x)$ とおけば,

$$\begin{gathered}g_{\mu\nu}(x) = h_{nm}\partial_\mu y^n(x)\partial_\nu y^m(x) = \partial_\mu y^n(x)\partial_\nu y_n(x)\\ \mathrm{d}s = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu\,.\end{gathered}$$

同様に $g^{\mu\nu}(x) \equiv \boldsymbol{e}^\mu(x) \cdot \boldsymbol{e}^\nu(x)$ とおけば,

$$\begin{gathered}g^{\mu\nu}(x) = h^{nm}\partial^\mu y_n(x)\partial^\nu y_m(x) = \partial^\mu y^n(x)\partial^\nu y_n(x),\\ \mathrm{d}s = g^{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu\,.\end{gathered}$$

4 次元部分空間に沿った任意のベクトル $\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu = A_\mu \boldsymbol{e}^\mu$ についても同様に

$$A^n = \partial_\mu y^n A^\mu, \quad A_n = \partial^\mu y_n A_\mu.$$

4 次元部分空間上の点 x で接するベクトル $\boldsymbol{A} = A^n \boldsymbol{e}_n = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu(x)$ について, $x \mapsto x + \mathrm{d}x$ の平行移動を考える. $x + \mathrm{d}x$ 上において, $\boldsymbol{A}$ を 4 次元部分空間に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}}$ と垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}}$ に分解する:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}}.$$

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}}$ について, 定義から $\boldsymbol{e}_\mu(x + \mathrm{d}x)$ で展開することができる:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}} &= A^n_{\mathrm{tan}} \boldsymbol{e}_n = A^\mu_{\mathrm{tan}} \boldsymbol{e}_\mu(x + \mathrm{d}x)\\ &= A^\mu(x + \mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_\mu(x + \mathrm{d}x)\\ &= A^\mu(x + \mathrm{d}x)\partial_\mu y^n(x + \mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_n.\end{aligned}$$

$$\therefore A^n_{\mathrm{tan}} = A^\mu(x+\mathrm{d}x)\partial_\mu y^n(x+\mathrm{d}x).$$

また, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}}$ について, 定義から $\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x)$ と垂直である:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}}\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x) = (A^n_{\mathrm{nor}}\boldsymbol{e}_n)\cdot(\partial_\mu y^m(x)\boldsymbol{e}_m) = 0.$$
$$\therefore A^n_{\mathrm{nor}}\partial_\mu y_n(x) = 0.$$

したがって, $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x)$ の内積を計算すると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x) &= (A^n\boldsymbol{e}_n)\cdot(\partial_\mu y^m(x+\mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_m)\\ &= A^n\partial_\mu y_n(x+\mathrm{d}x),\end{aligned}$$

あるいは $\boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}}$ と $\boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}}$ に分解して,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x) &= (\boldsymbol{A}_{\mathrm{tan}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{nor}})\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x)\\ &= A^\nu(x+\mathrm{d}x)\boldsymbol{e}_\nu(x+\mathrm{d}x)\cdot\boldsymbol{e}_\mu(x+\mathrm{d}x)\\ &= g_{\mu\nu}(x+\mathrm{d}x)A^\nu(x+\mathrm{d}x)\\ &= A_\nu(x+\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

したがって,

$$A_\nu(x+\mathrm{d}x) = A^n\partial_\mu y_n(x+\mathrm{d}x).$$

または 1 次で展開して,

$$\begin{aligned}A_\nu(x+\mathrm{d}x) &= A^n\partial_\nu y_n(x+\mathrm{d}x)\\ &= \partial_\mu y^n(x)A^\mu(x)[\partial_\nu y_n(x)+\partial_\sigma\partial_\nu y_n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma]\\ &= A^\mu(x)\partial_\mu y^n(x)\partial_\nu y_n(x) + A^\mu\partial_\sigma\partial_\nu y_n(x)\partial_\mu y^n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma\\ &= A^\mu(x)g_{\mu\nu}(x) + A^\mu\partial_\sigma\partial_\nu y_n(x)\partial_\mu y^n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma\\ &= A_\nu(x) + A^\mu\partial_\sigma\partial_\nu y_n(x)\partial_\mu y^n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma.\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{d}A_\nu(x) \equiv A_\nu(x+\mathrm{d}x) - A_\nu(x)$ とすれば,

$$\mathrm{d}A_\nu(x) = A^\mu\partial_\mu y^n(x)\partial_\sigma\partial_\nu y_n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma.$$

同様に,

$$\mathrm{d}A^\nu(x) = A^\mu\partial_\mu y^n(x)\partial_\sigma\partial^\nu y_n(x)\,\mathrm{d}x^\sigma = A^\mu g^{\nu\lambda}[\partial_\mu y^n(x)\partial_\sigma\partial_\lambda y_n(x)]\,\mathrm{d}x^\sigma.$$

13.2 Christoffel 記号

$g_{\mu\nu} = \partial_\mu y^n\partial_\nu y_n$ より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} &= \partial_\sigma\partial_\mu y^n\partial_\nu y_n + \partial_\mu y^n\partial_\sigma\partial_\nu y_n\\ &= \partial_\sigma\partial_\mu y_n\partial_\nu y^n + \partial_\sigma\partial_\nu y_n\partial_\mu y^n.\end{aligned}$$

添字を適当に入れ替えることで, $\partial_\sigma\partial_\nu y_n\partial_\mu y^n$ について解くことができる:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}+\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\sigma\partial_\mu y_n\partial_\nu y^n + \partial_\sigma\partial_\nu y_n\partial_\mu y^n\right) + \left(\partial_\nu\partial_\mu y_n\partial_\sigma y^n + \partial_\nu\partial_\sigma y_n\partial_\mu y^n\right) - \left(\partial_\mu\partial_\nu y_n\partial_\sigma y^n + \partial_\mu\partial_\sigma y_n\partial_\nu y^n\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\nu y_n\partial_\mu y^n + \partial_\nu\partial_\sigma y_n\partial_\mu y^n\right)\\ &= \partial_\sigma\partial_\nu y_n\partial_\mu y^n\end{aligned}$$

であるから, これを $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ とおき, :

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right) = \partial_{\sigma}\partial_{\nu}y_{n}\partial_{\mu}y^{n}.$$

$\Gamma_{\mu\nu\sigma}$