

最优控制理论与应用

张洪钺 王青 编著

北京航空航天大学自动化学院

2005 年 8 月

目 录

第一章 绪论	1
第二章 静态优化——函数的极值问题	7
2.1 无约束条件的函数极值问题	7
2.2 有约束条件的函数极值问题	12
2.3 小结	14
2.4 习题	15
第三章 用变分法解最优控制——泛函极值问题	16
3.1 变分法基础	16
3.2 无约束条件的泛函极值问题	18
3.2.1 泛函的自变量函数为标量函数的情况	18
3.2.2 泛函的自变量函数为向量函数的情况	19
3.3 有约束条件的泛函极值——动态系统的最优控制问题	21
3.3.1 终端时刻 t_f 给定, 终端状态 $X(t_f)$ 自由	22
3.3.2 终端时刻 t_f 自由, 终端状态 $X(t_f)$ 受约束	29
3.4 小结	38
3.5 习题	39
第四章 极小值原理及其应用	41
4.1 经典变分法的局限性	41
4.2 连续系统的极小值原理	42
4.3 最短时间控制问题	47
4.4 最少燃料控制问题	56
4.5 离散系统的极小值原理	63
4.6 小结	69
4.7 习题	70
第五章 线性系统二次型指标的最优控制——线性二次型问题	73
5.1 引言	73
5.2 线性二次型问题的提法	74

5.3 终端时间有限时连续系统的状态调节器问题	75
5.3.1 用极小值原理求解上面的问题	76
5.3.2 矩阵黎卡提微分方程的求解及 $K(t)$ 的性质	78
5.4 稳态时连续系统的状态调节器问题	81
5.5 离散系统的线性二次型问题	86
5.5.1 终端时间有限的状态调节器问题	86
5.5.2 稳态状态调节器问题	90
5.6 伺服跟踪问题	93
5.7 设计线性二次型最优控制的若干问题	97
5.8 小结	99
5.9 习题	100
第六章 动态规划	104
6.1 多级决策的例子——最短时间问题	104
6.2 最优性原理	107
6.3 用动态规划解资源分配问题	109
6.4 用动态规划求离散最优控制	112
6.5 连续系统的动态规划	114
6.6 动态规划与极小值原理	115
6.7 小结	117
6.8 习题	118
第七章 最优控制的计算方法	120
7.1 直接法	121
7.2 间接法	134
7.3 小结	139
7.4 习题	141
第八章 随机线性系统的最优控制	142
8.1 分离定理和离散随机线性调节器问题	142
8.2 连续随机线性调节器问题	150
8.3 随机线性跟踪器问题	155

8.4 小结	157
8.5 习题	158
第九章 奇异最优控制	160
9.1 奇异最优控制问题的提出	160
9.2 奇异线性二次型最优控制问题	161
9.3 奇异最优控制的算法	168
9.4 小结	170
9.5 习题	171
第十章 对策论与极大极小控制	172
10.1 概述	172
10.2 离散对策(矩阵对策)	172
10.2.1 对策的极小极大值(纯策略解)	172
10.2.2 混合策略	174
10.2.3 矩阵对策存在极小极大解的条件	175
10.3 连续对策	178
10.4 微分对策	180
10.4.1 微分对策的提法	180
10.4.2 最优策略的充分条件	185
10.5 线性二次微分对策	192
10.6 最优线性原理和贝尔曼—依萨柯方程	200
10.7 小结	201
10.8 习题	202
第十一章 鲁棒与最优控制	205
11.1 数学基础知识	205
11.1.1 信号的范数	205
11.1.2 系统的范数	207
11.2 LQR、LQG 问题与 H_2 最优控制问题	208
11.2.1 LQR 问题与 H_2 最优控制问题	208
11.2.2 LQG 问题与 H_2 最优控制问题	210

11.3 H_∞ 控制理论	211
11.3.1 问题的提出	211
11.3.2 H_∞ 标准问题	212
11.3.3 不确定系统的 H_∞ 控制问题	214
11.4 线性定常系统的 H_∞ 最优控制问题	220
11.4.1 线性定常系统 H_∞ 最优控制问题的提出	220
11.4.2 线性定常系统 H_∞ 最优控制问题的求解	222
11.5 小结	224
11.6 习题	225
第十二章 用 MATLAB 解最优控制问题及应用实例	227
12.1 MATLAB 工具简介	227
12.2 用 MATLAB 解决线性二次型最优控制问题	229
12.3 用 MATLAB 解最优控制问题应用实例	245
12.3.1 导弹运动状态方程的建立	245
12.3.2 最优导引律的求解与仿真验证	248
12.4 小结	257
12.5 习题	257
参考文献	259

第一章 绪论

在生产过程、军事行动、经济活动以及人类的其它有目的的活动中，常需要对被控系统或被控过程施加某种控制作用以使某个性能指标达到最优，这种控制作用称为最优控制。

最优控制理论已有很长的发展历史。早在上世纪五十年代初期布绍（Bushaw）就研究了伺服系统的时间最优控制问题，他用几何方法证明了继电式的控制可以用最短的时间将伺服系统的误差调节到零。以后，拉塞尔（LaSalle）发展了时间最优控制的理论，即所谓 Bang—Bang 控制理论（“Bang—Bang”模拟了继电器动作时所发出的声音）。五十年代空间技术开始获得迅猛的发展。导弹、卫星等都是复杂的多输入—多输出的非线性系统，而且在性能上有严格的要求，如消耗燃料要小，飞行速度要快，在重量和可靠性方面也有严格的要求。这种工程上的要求刺激了最优控制理论的发展。人们发现，最优控制问题就其本质来说，是一个变分学的问题。然而，经典变分学只能解决控制作用不受限制的情况。实际上常常碰到控制作用受到限制的情况，这就要求人们开辟求解最优控制的新途径。1953 至 1957 年间美国学者贝尔曼（Bellman）创立了“动态规划”理论，发展了变分学中的哈密顿—雅可比（Hamilton—Jacobi）理论。1956 至 1958 年间苏联学者庞特里雅金等创立了“极大值原理”。这两种方法成为了目前最优控制理论的两个柱石。时至今日，最优控制理论的研究无论在深度上和广度上都有了很大的发展，例如发展了对分布参数系统、随机系统、大系统的最优控制理论的研究等等。电子计算机的发展为最优控制的实现提供了强有力的手段。可以毫不夸张的说，最优控制理论仍是一个活跃的科学研究的领域，它在国民经济和国防事业中将继续发挥重要的作用。下面列举几个简单的最优控制的例子。

例 1-1 火车快速运行问题。设有一列火车从甲地出发，要求算出容许的控制使其到达乙地的时间最短。

火车的运动方程

$$m\ddot{x} = u(t) \quad (1-1)$$

m 是火车的质量, \ddot{x} 是火车的加速度, 为使旅客舒适, 其值有限制。 $u(t)$ 是产生加速度的控制作用 (即推力), 其值也应有限制, 设

$$|u(t)| \leq M \quad (1-2)$$

初始条件

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = 0 \quad (1-3)$$

终端条件

$$x(t_f) = x_f \quad \dot{x}(t_f) = 0 \quad (1-4)$$

性能指标

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (1-5)$$

选择 $u(t)$ 使 $J(u)$ 为最小。

例 1-2 月球软着陆问题。为了使宇宙飞船在月球表面上实现软着陆 (即着陆时速度要为零), 要寻求着陆过程中发动机推力的最优控制规律, 使得燃料的消耗最少。设飞船的质量为 $m(t)$, 离月球表面的高度为 $h(t)$, 飞船的垂直速度为 $v(t)$, 发动机推力为 $u(t)$, 月球表面的重力加速度为 g , 设不带燃料的飞船质量为 M , 初始燃料的质量为 F , 则飞船的运动方程可表示为 (参见图 1-1)

$$\dot{h}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -g + \frac{u(t)}{m(t)} \quad (1-6)$$

$$\dot{m}(t) = -ku(t)$$

式中 k 为比例系数, 表示了推力与燃料消耗率的关系。

初始条件

$$h(t_0) = h_0 \quad v(t_0) = v_0 \quad m(t_0) = M + F \quad (1-7)$$

终端条件

$$h(t_f) = 0 \quad v(t_f) = 0 \quad (1-8)$$

容许控制

$$0 \leq u(t) \leq a \quad (1-9)$$

控制目的是使燃料消耗量最小，即飞船在着陆时的质量保持最大，即

$$J(u) = m(t_f) \quad (1-10)$$

为最大。

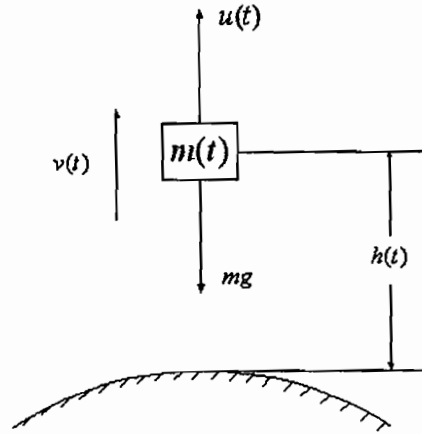


图 1-1 月球软着陆最优控制问题

例 1-3 生产计划问题。设 $x(t)$ 表示商品存货量， $r(t) \geq 0$ 表示对商品的需求率，是已知函数， $u(t)$ 表示生产率，它将由计划人员来选取，故是控制变量。 $x(t)$ 满足下面的微分方程

$$\dot{x}(t) = -r(t) + u(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-11)$$

$$x(0) = x_0$$

x_0 是初始时刻的商品存货量，且 $x_0 \geq 0$ 。从 $x(t)$ 的实际意义来看，显然必须选取生产率 $u(t)$ 使得

$$x(t) \geq 0 \quad t \in [0, t_f] \quad (1-12)$$

其次，生产能力应该有限制，即容许控制为

$$0 \leq u(t) \leq A \quad t \in [0, t_f] \quad (1-13)$$

这里 $A > 0$ 表示最大生产率，另外为了保证满足需求，必须有

$$A > r(t) \quad t \in [0, t_f] \quad (1-14)$$

假定每单位时间的生产成本是生产率 $u(t)$ 的函数, 即 $h[u(t)]$ 。设 $b>0$ 是单位时间储存单位商品的费用, 于是, 单位时间的总成本为

$$f[x(t), u(t), t] = h[u(t)] + bx(t) \quad (1-15)$$

由 $t=0$ 到 $t=t_f$ 的总成本为

$$J(u) = \int_0^{t_f} f[x(t), u(t), t] dt \quad (1-16)$$

要求寻找最优控制 $u^*(t)$, 使总成本 J 最小。

由上面的例子可见, 求解最优控制问题时要给定系统的状态方程, 状态变量所满足的初始条件和终端条件, 性能指标的形式 (时间最短、消耗燃料最小, 误差平方积分最小等) 以及控制作用的容许范围等。

我们用数学语言来比较详细地表达最优控制问题的内容:

1° 建立被控系统的状态方程

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \quad (1-17)$$

其中, $X(t)$ 为 n 维状态向量, $U(t)$ 为 m 维控制向量, $f[X(t), U(t), t]$ 为 n 维向量函数, 它可以是非线性时变向量函数, 也可以是线性定常的向量函数。状态方程必须精确的知道。

2° 确定状态方程的边界条件。一个动态过程对应于 n 维状态空间中从一个状态到另一个状态的转移, 也就是状态空间中的一条轨线。在最优控制中初态通常是知道的, 即

$$X(t_0) = X_0 \quad (1-18)$$

而到达终端的时刻 t_f 和状态 $X(t_f)$ 则因问题而异。例如, 在流水线生产过程中, t_f 是固定的; 在飞机快速爬高时, 只规定爬高的高度 $X(t_f) = X_f$, 而 t_f 是自由的, 要求 $t_f - t_0$ 越小越好。终端状态 $X(t_f)$ 一般属于一个目标集 S , 即

$$X(t_f) \in S \quad (1-19)$$

当终端状态是固定的, 即 $X(t_f) = X_f$ 时, 则目标集蜕化为 n 维状态空间中的一个点。而当终态满足某些约束条件, 即

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (1-20)$$

这时 $X(t_f)$ 处在 n 维状态空间中某个超曲面上。若终态不受约束, 则目标集便扩展到整个 n 维空间, 或称终端状态自由。

3° 选定性能指标 J 。性能指标一般有下列的形式:

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt \quad (1-21)$$

上述性能指标包括两个部分, 即积分指标 $\int_{t_0}^{t_f} L[X(t), U(t), t] dt$ 和终端指标 $\phi[X(t_f), t_f]$, 这种综合性指标所对应的最优控制问题称为波尔扎 (Bolza) 问题。

当只有终端指标时, 称为迈耶尔 (Mayer) 问题; 当只有积分指标时, 称为拉格朗日 (Lagrange) 问题。性能指标的确定因问题的性质而异。在导弹截击目标的问题中, 我们要求弹着点的散布度最小, 这时可用终端指标来表示。在快速控制问题时, 要求系统从一个状态过渡到另一个状态的时间最短, 即 $\int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min$, 这就是积分指标。性能指标 J 是控制作用 $U(t)$ 的函数, 也就是函数 $U(t)$ 的函数, 这种以函数为自变量的函数称为泛函, 所以 J 又称为性能泛函。有的文献中也把性能指标称为代价函数、目标函数等等。

4° 确定控制作用的容许范围 Ω , 即

$$U(t) \in \Omega \quad (1-22)$$

Ω 是 m 维控制空间 R^m 中的一个集合。例如, 控制飞机的舵偏角是受限制的, 控制电机的电流是受限制的, 即有 $|U(t)| \leq M$ 。这时控制作用属于一个闭集。当 $U(t)$ 不受任何限制时, 称它属于一个开集。下面将看到处理这两类问题的方法是不同的。 Ω 可称为容许集合, 属于 Ω 的控制则称为容许控制。

5° 按一定的方法计算出容许控制 $U(t)$ ($U(t) \in \Omega$), 将它施加于用状态方程描述的系统, 使状态从初态 $X(t_0)$ 转移到目标集 S 中的某一个终态 $X(t_f)$, 并使性能指标达到最大或最小, 即达到某种意义下的最优。

本书将介绍求解最优控制问题的方法：经典变分法，极大（小）值原理，动态规划法，线性二次型最优控制（系统为线性，指标为状态和控制的二次型），线性二次型高斯控制（系统为线性且有高斯噪声，指标为二次型），奇异最优控制，微分对策控制（系统受双方控制）， H_∞ 最优鲁棒控制等。本书还将介绍最优控制的一些基本的数值求解方法，最后介绍一些 MATLAB 在求解最优控制问题中的应用实例。

第二章 静态优化——函数的极值问题

正如在第一章中所述,性能指标 J 是控制作用(注意,它是时间的函数)的函数,即函数的函数,数学上将其定义为泛函。寻求控制作用使性能指标 J 达到极大或极小的问题,就是求泛函极值的问题。我们知道求函数的极值要用到函数的微分,而求泛函极值时则要用到泛函的变分。泛函的变分和函数的微分是十分类似的。所以,下面我们先来复习函数的极值理论,然后再来讨论泛函的极值问题,这样会比较容易理解。函数极值理论可应用于静态最优问题,即使对动态最优问题,若将控制作用参数化,也可将性能泛函的极值问题转化为函数的极值问题。

2.1 无约束条件的函数极值问题

一元函数 $f(x)$ 在 $x = x^*$ 处取极值的必要条件为

$$f'(x^*) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} = 0 \quad (2-1)$$

当

$$f''(x^*) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0 \quad (2-2)$$

$f(x^*)$ 为极小。当

$$f''(x^*) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x^*} < 0 \quad (2-3)$$

$f(x^*)$ 为极大。

为简单起见,今后我们将只讨论极小,式(2-1)和(2-2)一起构成 $f(x^*)$ 为极小值的充分条件。当 $f''(x^*) = 0$ 时也可能有极小值,不过要检验高阶导数。上述情况可用图 2-1 来表示。 R 点是局部极小点,又是总体极小点, U 只是局部极小点, T 是局部极大点, S 是拐点,不是极值点。

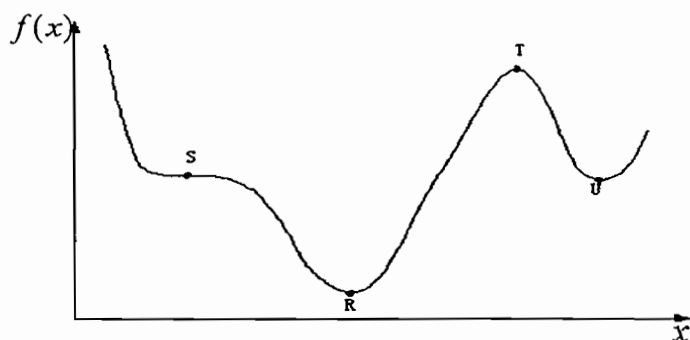


图 2-1 函数的极值点和拐点

例 2-1 求使

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

最小的 x 。

$$\text{解: } f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \cdots + 2(x - a_n) = 0$$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$f''(x^*) = 2n > 0$$

故解 x 使 $f(x)$ 达到极小。本例是著名的最小二乘问题。例如 x 是某个未知的物理量， a_i 是测量值。根据这些测量值可决定 x ，使误差的平方和为最小。

下面考虑二元函数 $f(x_1, x_2)$ 的极值问题。设 $f(x_1, x_2)$ 在 $X^* = [x_1^*, x_2^*]^T$ 处取得极小值，记 $f(x_1, x_2) = f(X)$ ，这里 $X = [x_1, x_2]^T$ (T 表示转置， X 是列向量)。 $f(X)$ 在 $X = X^*$ 处取得极小值的必要条件和充分条件可如下求得。将 $f(X)$ 在 $X = X^*$ 周围展开为台劳级数

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x_1, x_2) = f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) \\ &= f(X^*) + f'_{x_1}(X^*)\Delta x_1 + f'_{x_2}(X^*)\Delta x_2 + f''_{x_1x_1}(X^*)(\Delta x_1)^2 + \\ &\quad + 2f''_{x_1x_2}(X^*)\Delta x_1\Delta x_2 + f''_{x_2x_2}(X^*)(\Delta x_2)^2 + o[(\Delta x_1)^2, (\Delta x_2)^2] \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中

$$\begin{aligned}
f'_{x_1}(X^*) &= \left. \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} \\
f'_{x_2}(X^*) &= \left. \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} \\
f''_{x_1 x_1}(X^*) &= \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} & f''_{x_1 x_2}(X^*) &= \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} \\
f''_{x_2 x_2}(X^*) &= \left. \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}}
\end{aligned}$$

$o[(\Delta x_1)^2, (\Delta x_2)^2]$ 表示高阶无穷小。将 (2-4) 式用向量矩阵形式表示

$$\begin{aligned}
f(X) &= f(x_1, x_2) = f(X^*) + [\Delta x_1 \ \Delta x_2] \begin{bmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} + \\
&+ [\Delta x_1 \ \Delta x_2] \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + o[(\Delta x_1)^2, (\Delta x_2)^2] \\
&= f(X^*) + \Delta X^T f'_{X^*} + \Delta X^T f''_{X^*} \Delta X + o[(\Delta x_1)^2, (\Delta x_2)^2]
\end{aligned} \tag{2-5}$$

式中

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \Delta X &= \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} & f'_{X^*} &= [f'_{x_1} \ f'_{x_2}]^T_{X=X^*} \\
f''_{X^*} &= \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*}
\end{aligned} \tag{2-6}$$

由 (2-5) 式可知, $f(X^*) = f(x_1^*, x_2^*)$ 取极值的必要条件为

$$f'_{X^*} = 0 \tag{2-7}$$

进一步, 若

$$\Delta X^T f''_{X^*} \Delta X > 0 \tag{2-8}$$

则这个极值为极小值。由于 ΔX 是任意的不为零的向量, 要使 (2-8) 式成立, 由矩阵理论可知, 二阶导数矩阵 (又称为 Hessian 阵) f''_{X^*} 必须是正定的。正定阵形式上可表示为

$$f''_{X^*} > 0 \tag{2-9}$$

(2-7) 和 (2-9) 一起构成了 $f(X)$ 在 $X^* = [x_1^*, x_2^*]^T$ 处取极小值的充分条件。

上面的结果不难推广到多元函数的极值问题。设 n 个变量的多元函数为

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则 $f(X)$ 在 $X = X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ 处有极小值的必要条件为一阶导数向量等于零向量, 即

$$f'_X = [f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}]^T_{X=X^*} = 0 \quad (2-10)$$

进一步, 若二阶导数矩阵是正定阵, 即

$$f''_{X^*} = \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \dots & f''_{x_1 x_n} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \dots & f''_{x_2 x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_n x_1} & f''_{x_n x_2} & \dots & f''_{x_n x_n} \end{bmatrix}_{X=X^*} > 0 \quad (2-11)$$

则这个极值是极小。(2-10) 和 (2-11) 一起构成了多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ 处取极小值的充分条件。

由 (2-11) 式可知, f''_{X^*} 是实对称矩阵。判别实对称矩阵是否为正定有两个常用的方法。一是检验 f''_{X^*} 的特征值, 若特征值全部为正, 则 f''_{X^*} 就是正定的。另一是应用塞尔维斯特 (Sylvest) 判据。根据此判据, 若 f''_{X^*} 的各阶顺序主子式均大于零, 即

$$\det \begin{bmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} & \cdots & f''_{x_1 x_k} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2 x_2} & \cdots & f''_{x_2 x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_k x_1} & f''_{x_k x_2} & \cdots & f''_{x_k x_k} \end{bmatrix}_{X=X^*} > 0 \quad k=1,2,\cdots,n \quad (2-12)$$

则 f''_{X^*} 就是正定的。 $\det A$ 表示 A 阵的行列式。

例 2-2 求下面的多元函数的极值点

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 - 6x_2 + 3$$

解

$$f'_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_3 = 0$$

$$f'_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 10x_2 + 2x_3 - 6 = 0$$

$$f'_{x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

由上面三个方程求得可能的极值点为

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*]^T = [1, 1, -2]^T$$

二阶导数阵为

$$f''_{X^*} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

用塞尔维斯特判据来检验，有

$$4 > 0 \quad \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = 40 > 0 \quad \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 24 > 0$$

故 f''_{X^*} 为正定，在 $X^* = [1, 1, -2]^T$ 处， $f(X^*)$ 为极小。

2.2 有约束条件的函数极值问题

前面讨论函数的极值问题时，向量 X 的各个分量可独立地选择，相互间无约束。本节将讨论 X 的各分量满足一定约束条件的情况。

设具有 n 个变量的多元函数为

$$f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

X 的各分量满足下面的 m 个等式约束方程

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (m < n) \quad (2-13)$$

若能从 m 个约束方程中解出 m 个 X 的分量，即将它们用其它 $n-m$ 个 X 的分量表示，那么 X 中只剩下 $n-m$ 个独立变量。于是问题可化为求 $n-m$ 个变量的多元函数的无约束极值问题。这就是所谓的“消去法”。由于从 m 个方程（一般是非线性方程）求出 m 个分量常常是困难的，故经常采用“拉格朗日乘子法”。为此，对 m 个约束方程，引入 m 个拉格朗日乘子 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ，并作出一个辅助函数——拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2-14)$$

若令

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^T \quad G = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T$$

则 (2-14) 式可用向量形式表示为

$$L(X, \lambda) = f(X) + \lambda^T G(X) \quad (2-15)$$

于是 $f(X)$ 的条件极值问题就化为 $L(X, \lambda)$ 的无条件极值问题。函数 L 有极值的必要条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 & j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

例 2-3 求从原点 $(0, 0, 0)$ 至平面

$$g(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

的最短距离。

解 原点至空间任何一点 (x_1, x_2, x_3) 的距离的平方为

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

要使 $f(x_1, x_2, x_3)$ 极小, 而点 (x_1, x_2, x_3) 必须在 $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ 所规定的平面上。

这是一个条件极值问题。作拉格朗日函数

$$L(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d)$$

极值的必要条件为

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + a\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + b\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + c\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

联立求解上面四个方程可得

$$\lambda = \frac{2d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

可能的极值点坐标为

$$x_1^* = \frac{-ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad x_2^* = \frac{-bd}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad x_3^* = \frac{-cd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

根据问题的性质可以判断极小值存在且是唯一的。故上面的 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) 即是极小

点的坐标。将极小点坐标代入函数 f 中, 即可求出最短距离的平方为

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

此问题的约束方程 $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ 是 x_1 、 x_2 、 x_3 的线性函数, 因此容易用

“消去法”来求极值点。例如，从 $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ 中解出 x_1 ，将它用 x_2 、 x_3 表示，于是问题就化为求二元函数 $f(x_2, x_3)$ 的无条件极值问题。读者可自行验证这样做的结果与拉格朗日乘子法的结果是一样的。

例 2-4 动态控制问题的参数化法。

设一个动态系统由下面的非线性状态方程描述

$$\dot{x} = -0.2x + 10 \tan u$$

给定 $x(0) = 5$ ，终止时间 $t = 0.5s$ ，要求算出最优控制 $u(t)$ ，它使得指标函数

$$J = \int_0^{0.5} (10x^2 + u^2) dt + 10x^2(0.5)$$

为最小。

解 这是动态控制问题，这里将控制作用参数化，于是可用静态最优化的方法求解。设控制作用 $u(t)$ 可用下面的级数来逼近

$$u(t) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(t)$$

$f_i(t)$ 是已知的时间函数集，如 \sin 、 \cos 、Hermite 多项式等正交函数或其它线性无关的函数。于是 $u(t)$ 可用 N 个参数 $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 来表示，即 $u(t)$ 被参数化了。确定 $u(t)$ 就等于确定 N 个参数，使指标 J 最小。这里可用数值寻优的方法来确定参数 $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ 。

2.3 小结

1. n 个变量的多元函数 $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 取无约束极小值的必要条件为 $f'(X) = 0$ ，充分条件为 $f'(X) = 0$ 和 $f''(X) > 0$ 。

2. $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在满足约束条件 $G(X) = 0$ 时的极小值的求取，可用拉格朗日乘子法，令

$$L(X, \lambda) = f(X) + \lambda^T G(X)$$

λ 是拉格朗日乘子 (列) 向量。

2.4 习题

1. 求使得 $f(x) = \ln x - x^2$ 最小的 x 。

2. 求使 $f(X) = -10x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2$ 为极值的极值点 x 。

3. 求使 $f(X) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ 为极值的极值点 x 。

4. 求使 $\min f(X) = 4x_1^2 + 5x_2^2$, 且 $g(X) = 2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$ 。

5. 求原点到曲线 $y^2 - (x-1)^3 = 0$ 的距离为最小。

6. 求函数极值 $f(X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, 若 $(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 = 1$

7. 在第一象限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小, 求切点的坐标。

第三章 用变分法解最优控制——泛函极值问题

在动态系统最优控制问题中,性能指标是一个泛函,性能指标最优即泛函达到极值。解决泛函极值问题的有力工具是变分法。所以下面就来列出变分法中的一些主要结果,大部分不加证明,但读者可对照微分学中的结果来理解。

3.1 变分法基础

先来给出下面的一些定义。

1、泛函:如果对某一类函数 $\{X(t)\}$ 中的每一个函数 $X(t)$,有一个实数值 J 与之相对应,则 J 称为依赖于函数 $X(t)$ 的泛函,记为

$$J = J[X(t)]$$

粗略来说,泛函是以函数为自变量的函数。

2、泛函的连续性:若对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $\|X(t) - \hat{X}(t)\| < \delta$ 时,就有

$$|J(X) - J(\hat{X})| < \varepsilon$$

则称 $J(X)$ 在 \hat{X} 处是连续的。

3、线性泛函:满足下面条件的泛函称为线性泛函

$$J[\alpha X] = \alpha J[X]$$

$$J(X + Y) = J(X) + J(Y)$$

这里 α 是实数, X 和 Y 是函数空间中的函数。

4、自变量函数的变分:自变量函数 $X(t)$ 的变分 δX 是指同属于函数类 $\{X(t)\}$ 中两个函数 $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$ 之差

$$\delta X = X_1(t) - X_2(t)$$

这里, t 看作为参数。当 $X(t)$ 为一维函数时, δX 可用图 3-1 来表示。

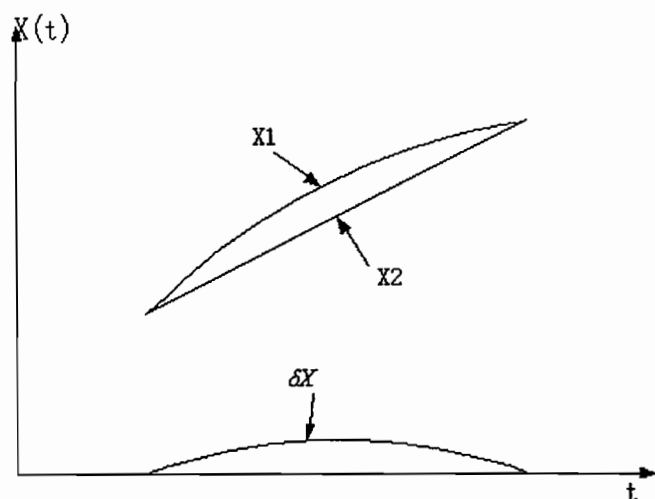


图 3-1 自变量函数的变分

5、泛函的变分：当自变量函数 $X(t)$ 有变分 δX 时，泛函的增量为

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[X + \delta X] - J[X] \\ &= \delta J[X, \delta X] + \varepsilon \|\delta X\|\end{aligned}$$

这里， $\delta J[X, \delta X]$ 是 δX 的线性泛函，若 $\|\delta X\| \rightarrow 0$ 时，有 $\varepsilon \rightarrow 0$ ，则称 $\delta J[X, \delta X]$ 是泛函 $J[X]$ 的变分。 δJ 是 ΔJ 的线性主部。

6、泛函的极值：若存在 $\varepsilon > 0$ ，对满足 $\|X - X^*\| < \varepsilon$ 的一切 X ， $J(X) - J(X^*)$ 具有同一符号，则称 $J(X)$ 在 $X = X^*$ 处有极值。

定理： $J(X)$ 在 $X = X^*$ 处有极值的必要条件是对于所有容许的增量函数 δX （自变量的变分），泛函 $J(X)$ 在 X^* 处的变分为零

$$\delta J(X^*, \delta X) = 0$$

为了判别是极大还是极小，要计算二阶变分 $\delta^2 J$ 。但在实际问题中根据问题的性质容易判别是极大还是极小，故一般不计算 $\delta^2 J$ 。

3.2 无约束条件的泛函极值问题

3.2.1 泛函的自变量函数为标量函数的情况

为简单起见,先讨论自变量函数为标量函数(一维)的情况。我们要寻求极值曲线 $x(t) = x^*(t)$, 使下面的性能泛函取极值

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), \dot{x}(t), t] dt \quad (3-1)$$

为此,让自变量函数 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ 在极值曲线 $x^*(t)$ 、 $\dot{x}^*(t)$ 附近发生微小变分 δx 、 $\delta \dot{x}$, 即

$$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t)$$

于是泛函 J 的增量 ΔJ 可计算如下(以下将*号省去)

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \{F[x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}, t] - F[x, \dot{x}, t]\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + o[(\delta x)^2, (\delta \dot{x})^2] \right\} dt \end{aligned}$$

上式中 $o[(\delta x)^2, (\delta \dot{x})^2]$ 是高阶项。

根据定义,泛函的变分 δJ 是 ΔJ 的线性主部,即

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt$$

对上式第二项作分部积分,按公式

$$\int_{t_0}^{t_f} u dv = uv \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} v du$$

可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (3-2)$$

J 取极值的必要条件是 δJ 等于零。因 δx 是任意的,要使(3-2)中第一项(积分项)为零,必有

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (3-3)$$

上式称为欧拉——拉格朗日方程。

(3-2) 式中第二项为零的条件要分两种情况来讨论：

1、固定端点的情况

这时 $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ ，它们不发生变化，所以 $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ 。而

(3-2) 中第二项可写成

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{t_0}^{t_f} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_f} \cdot \delta x(t_f) - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_0} \cdot \delta x(t_0) \quad (3-4)$$

当 $\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ 时，(3-4) 式自然为零。

2、自由端点的情况

这时 $x(t_0)$ 和 $x(t_f)$ 可以发生变化， $\delta x(t_0) \neq 0, \delta x(t_f) \neq 0$ ，而且可以独立地变化。

于是要使 (3-2) 中第二项为零，由 (3-4) 式可得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_f} \cdot \delta x(t_f) = 0 \quad (3-5)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_0} \cdot \delta x(t_0) = 0 \quad (3-6)$$

因为这里讨论 $x(t)$ 是标量函数的情况， $\delta x(t_0)$ 和 $\delta x(t_f)$ 也是标量，且是任意的，

故 (3-5)、(3-6) 可化为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_f} = 0 \quad (3-7)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=t_0} = 0 \quad (3-8)$$

(3-7)、(3-8) 称为横截条件。当边界条件全部给定（即固定端点）时，不需要这些横截条件。当 $x(t_0)$ 给定时，不要 (3-8)。当 $x(t_f)$ 给定时，不要 (3-7)。

3.2.2 泛函的自变量函数为向量函数的情况

现在，将上面对 $x(t)$ 是标量函数时所得到的公式推广到 $X(t)$ 是 n 维向量函数的情况。这时，性能泛函为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(X, \dot{X}, t) dt \quad (3-9)$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

泛函变分由 (3-2) 式改为

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \delta X^T \left[\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right) \right] dt + \delta X^T \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \Big|_{t_0}^{t_f}$$

向量欧拉——拉格朗日方程为

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right) = 0 \quad (3-11)$$

式中

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

横截条件为 (自由端点情况)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0 \quad (\text{当 } t = t_0 \text{ 和 } t = t_f \text{ 时})$$

例 3-1 求通过点(0, 0) 及 (1, 1) 且使

$$J = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2) dt$$

取极值的轨迹 $x^*(t)$ 。

解 这是固定端点问题, 相应的欧拉——拉格朗日方程为

$$2x - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$

即

$$\ddot{x} - x = 0$$

它的通解形式为

$$x(t) = A \cosh t + B \sinh t$$

式中: $cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

由初始条件 $x(0) = 0$, 可得 $A=0$ 。再由终端条件 $x(1)=1$, 可得 $B=1/sh1$, 因而极值轨迹为

$$x^*(t) = sht/sh1$$

例 3-2 求使指标

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{x}^3) dt$$

取极值的轨迹 $x^*(t)$, 并要求 $x^*(0) = 0$, 但对 $x^*(1)$ 没有限制。

解 这是终端自由的情况。欧拉—拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}(2\dot{x} + 3\dot{x}^2) = 0$$

即

$$2\dot{x} + 3\dot{x}^2 = \text{常数}$$

于是 \dot{x} 是常数, x 则是时间的线性函数, 令

$$x(t) = At + B$$

由 $x(0) = 0$ 可得 $B = 0$, 又终端是自由的, 由式 (3-7) 可得横截条件为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=1} = (2\dot{x} + 3\dot{x}^2)_{t=1} = 0$$

即

$$2A + 3A^2 = 0$$

由上式解得 $A = 0$ 或 $A = -2/3$ 。 $A = 0$ 时的极值轨迹为 $x^*(t) = 0$; $A = -2/3$ 时的极值轨迹为 $x^*(t) = -2t/3$ 。容易验证 $x(t) = 0$ 时, $J = 0$ 对应局部极小; $x(t) = -2t/3$ 时, $J = 4/27$, 对应局部极大。

3.3 有约束条件的泛函极值——动态系统的最优控制问题

前面讨论泛函极值问题时, 对极值轨迹 $X^*(t)$ 没有附加任何约束条件。但在

动态系统最优控制问题中, 极值轨迹必须满足系统的状态方程, 也就是要受到状态方程的约束。考虑下列系统

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \quad (3-13)$$

式中, $X(t)$ 为 n 维状态向量, $U(t)$ 为 m 维控制向量 (这里假定 $U(t)$ 不受限制, 否则不能用变分法求解, 而要用极小值原理或动态规划法求解), $f[X(t), U(t), t]$ 是 n 维连续可微的向量函数。性能指标如下:

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t] dt \quad (3-14)$$

这是综合指标。我们要求出最优控制 $U^*(t)$ 和满足状态方程的极值轨迹 $X^*(t)$, 使性能指标取极值。

在下面的讨论中, 假定初始时刻 t_0 和初始状态 $X(t_0) = X_0$ 是给定的, 终端则可能有几种情况。我们将就几种常见的情况来讨论, 即 t_f 给定, $X(t_f)$ 自由和 t_f 自由, $X(t_f)$ 属于一个约束集。

3.3.1 终端时刻 t_f 给定, 终端状态 $X(t_f)$ 自由

将状态方程 (3-13) 写成等式约束方程的形式

$$f(X, U, t) - \dot{X}(t) = 0 \quad (3-15)$$

与有约束条件的函数极值情况类似, 引入待定的 n 维拉格朗日乘子向量函数

$$\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)] \quad (3-16)$$

与以前不同的是, 在动态问题中拉格朗日乘子向量 $\lambda(t)$ 是时间函数。在最优控制中经常将 $\lambda(t)$ 称为伴随变量, 协态 (协状态向量) 或共轭状态。引入 $\lambda(t)$ 后可作出下面的增广泛函

$$J_a = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F[X, U, t] + \lambda^T(t)[f(X, U, t) - \dot{X}]\} dt \quad (3-17)$$

于是有约束条件的泛函 J 的极值问题化为无约束条件的增广泛函 J_a 的极值问题。

再引入一个标量函数

$$H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t) \quad (3-18)$$

它称为哈密顿 (Hamilton) 函数, 在最优控制中起着重要的作用。于是 J_a 可写成

$$J_a = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}] dt$$

对上式积分号内第二项作分部积分后可得

$$\begin{aligned} J_a = & \phi[X(t_f), t_f] - \lambda^T(t_f)X(t_f) + \lambda^T(t_0)X(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T X] dt \end{aligned} \quad (3-19)$$

设 $X(t)$ 、 $U(t)$ 相对于最优值 $X^*(t)$ 、 $U^*(t)$ 的变分分别为 $\delta X(t)$ 和 $\delta U(t)$, 因为 $X(t_f)$ 自由, 故还要考虑变分 $\delta X(t_f)$ 。下面来计算由这些变分引起的泛函 J_a 的变分 δJ_a

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \delta X^T(t_f) \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} - \delta X^T(t_f) \lambda(t_f) + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta X^T \left(\frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda} \right) + \delta U^T \frac{\partial H}{\partial U} \right] dt \end{aligned} \quad (3-20)$$

J_a 为极小的必要条件是: 对任意的 δX 、 δU 、 $\delta X(t_f)$, 变分 δJ_a 等于零。由

(3-18) 及 (3-20) 可得下面的一组关系式

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (\text{协态方程}) \quad (3-21)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{状态方程}) \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (\text{控制方程}) \quad (3-23)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} \quad (\text{横截条件}) \quad (3-24)$$

(3-21) ~ (3-24) 即为 J_a 取极值的必要条件, 由此即可求得最优值 $U^*(t)$,

$X^*(t)$, $\lambda^*(t)$ 。(3-22) 式即为状态方程, 这可由 H 的定义式 (3-18) 看出, 实

际解题时无需求 $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$, 只要直接用状态方程即可, 这里为形式上对称而写成

(3-22) 式。(3-21) 与 (3-22) 一起称为哈密顿正则方程。(3-23) 是控制方程, 它表示 H 在最优控制处取极值。注意, 这是在 δU 为任意时得出的方程, 当 $U(t)$ 有界且在边界上取得最优值时, 就不能用这方程, 这时要用极小值原理求解。

(3-24) 是在 t_f 固定、 $X(t_f)$ 自由时得出的横截条件。当 $X(t_f)$ 固定时, $\delta X(t_f) = 0$, 就不需要这个横截条件了。横截条件表示协态终端所满足的条件。

在求解 (3-21) ~ (3-24) 时, 我们只知道初值 $X(t_0)$ 和由横截条件 (3-24) 求得的协态终端值 $\lambda(t_f)$, 这种问题称为两点边值问题, 一般情况下它们是很难求解的。因为 $\lambda(t_0)$ 不知道, 如果假定一个 $\lambda(t_0)$, 然后正向积分 (3-21) ~ (3-24), 则在 $t = t_f$ 时的 λ 值一般与给定的 $\lambda(t_f)$ 不同, 于是反复修正 $\lambda(t_0)$ 的值, 直至 $\lambda(t_f)$ 与给定值的差可忽略不计为止。非线性系统最优控制两点边值问题的数值求解是一个重要的研究领域。对于线性系统两点边值问题的求解, 则可寻找缺少的边界条件并只要进行一次积分, 下面的例 3-4 给出了求解过程。

例 3-3 设系统状态方程为

$$\dot{x} = -x(t) + u(t)$$

$x(t)$ 的边界条件为 $x(0) = 1, x(t_f) = 0$ 。求最优控制 $u(t)$, 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt$$

为最小。

解 这里 $x(0)$ 、 $x(t_f)$ 均给定, 故不需要横截条件 (3-24) 式。作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

则协态方程和控制方程为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + \lambda \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= u + \lambda = 0 \end{aligned}$$

即

$$u = -\lambda$$

故可得正则方程

$$\dot{x}(t) = -x(t) - \lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -x(t) + \lambda(t)$$

对正则方程进行拉氏变换, 可得

$$sX(s) - x(0) = -X(s) - \lambda(s) \quad (3-25)$$

$$s\lambda(s) - \lambda(0) = -X(s) + \lambda(s) \quad (3-26)$$

由 (3-25) 式可求得

$$X(s) = \frac{x(0) - \lambda(s)}{s+1} \quad (3-27)$$

代入 (3-26), 即得

$$(s^2 - 2)\lambda(s) = (s+1)\lambda(0) - x(0)$$

于是, 解出 $\lambda(s)$ 为

$$\lambda(s) = \frac{(s+1)\lambda(0) - x(0)}{s^2 - 2} = \frac{s+1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0) - \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0) \quad (3-28)$$

反变换可求得

$$\begin{aligned} \lambda(t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t})x(0) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}]\lambda(0) \end{aligned} \quad (3-29)$$

将 (3-28) 代入 (3-26) 可得

$$X(s) = \frac{s-1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}x(0) - \frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}\lambda(0)$$

故

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t}]x(0) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}[e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t}]\lambda(0) \end{aligned}$$

由 $x(0)=1$, $x(t_f)=0$, 从上式可得

$$\lambda(0) = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}}$$

把 $\lambda(0)$ 代入 (3-29), 可得 $\lambda(t)$, 而最优控制为

$$u^*(t) = -\lambda(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ e^{-\sqrt{2}t} - e^{\sqrt{2}t} + \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t_f} + (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t_f}}{e^{\sqrt{2}t_f} - e^{-\sqrt{2}t_f}} [(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}] \right\}$$

例 3-4 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

初始条件为

$$x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 1$$

终端条件为

$$x_1(1) = 0 \quad x_2(1) \text{ 自由}$$

要求确定最优控制 $u^*(t)$, 使指标泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

取极小值

解 这里 $x_2(1)$ 是自由的, 所以要用到横截条件 (3-24) 式, 因终端指标

$\phi[X(t_f), t_f] = 0$, 所以

$$\lambda_2(1) = \frac{\partial \phi}{\partial X_2(1)} = 0 \quad (3-30)$$

作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \quad (3-31)$$

由 (3-21) ~ (3-23) 可求得

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

得

$$u + \lambda_2 = 0$$

即

$$u^*(t) = -\lambda_2(t) \quad (3-32)$$

将 $u^*(t)$ 代入状态方程, 可得

$$\dot{x}_1 = x_2(t) \quad (3-33)$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda_2(t) \quad (3-34)$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (3-35)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1(t) \quad (3-36)$$

边界条件为

$$x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 1 \quad (3-37)$$

$$x_1(1) = 0 \quad \lambda_2(1) = 0$$

可见这是两点边值问题, 对正则方程 (3-33) ~ (3-36) 进行拉氏变换, 可得

$$sX_1(s) - x_1(0) = X_2(s) \quad (3-38)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = -\lambda_2(s) \quad (3-39)$$

$$s\lambda_1(s) - \lambda_1(0) = 0 \quad (3-40)$$

$$s\lambda_2(s) - \lambda_2(0) = -\lambda_1(s) \quad (3-41)$$

由 (3-38) ~ (3-41) 可解出

$$s^4 X_1(s) = s^3 x_1(0) + s^2 x_2(0) - s\lambda_2(0) + \lambda_1(0)$$

代入初始条件 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, 可得

$$X_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \lambda_2(0) + \frac{1}{s^4} \lambda_1(0)$$

故

$$x_1(t) = 1 + t - \frac{1}{2} \lambda_2(0) t^2 + \frac{1}{6} \lambda_1(0) t^3 \quad (3-42)$$

同样可解得

$$\begin{aligned} \lambda_2(s) &= \frac{1}{s} \lambda_2(0) - \frac{1}{s^2} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(t) &= \lambda_2(0) - \lambda_1(0) t \end{aligned} \quad (3-43)$$

利用终端条件 $x_1(1) = 0$, $\lambda_2(1) = 0$, 由 (3-42)、(3-43) 可得

$$2 - \frac{1}{2} \lambda_2(0) + \frac{1}{6} \lambda_1(0) = 0$$

$$\lambda_2(0) - \lambda_1(0) = 0$$

由上二式可解出

$$\lambda_1(0) = 6 \quad \lambda_2(0) = 6$$

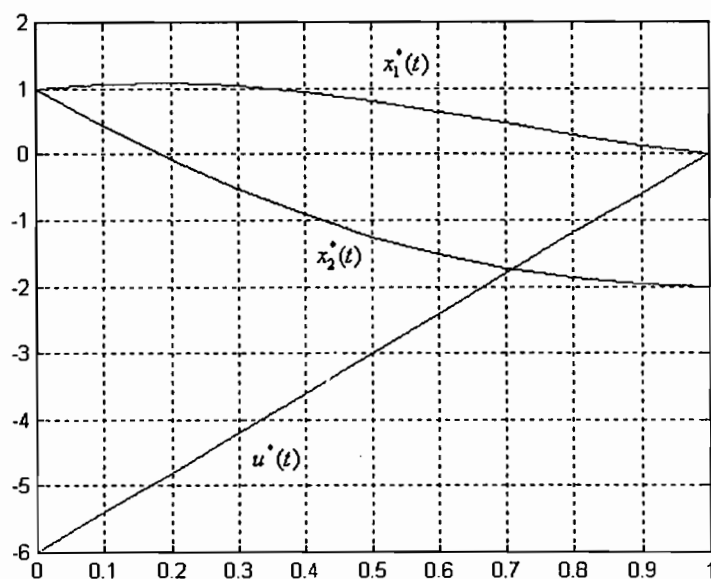


图 3-2 最优控制和最优状态轨迹解

由 (3-42) 式可得最优状态轨迹

$$x_1^*(t) = 1 + t - 3t^2 + t^3$$

由 (3-43) 式可得最优协态

$$\lambda_2^*(t) = 6(1 - t)$$

由 (3-32) 式可得最优控制

$$u^*(t) = 6(t-1)$$

同理还可求出

$$x_2^*(t) = 1 - 6t + 3t^2$$

图 3-2 是最优解的轨迹曲线。注意，这个系统是线性定常系统，这种线性两点边值问题的解可以通过寻找缺少的边界条件，并且进行一次积分而求得其解。对非线性两点边值问题，则要借助于迭代方法产生一个序列，来多次修正缺少的初始条件的试探值，直到满足两点边值的条件。

3.3.2 终端时刻 t_f 自由，终端状态 $X(t_f)$ 受约束

设终端状态 $X(t_f)$ 满足下面约束方程

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (3-44)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_1[X(t_f), t_f] \\ G_2[X(t_f), t_f] \\ \dots\dots \\ G_q[X(t_f), t_f] \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

性能指标为

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[X(t), U(t), t] dt \quad (3-46)$$

引入 n 维拉格朗日乘子向量函数 $\lambda(t)$ 和 q 维拉格朗日乘子向量 v ，作出增广性能泛函

$$J_a = \phi[X(t_f), t_f] + v^T G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F(X, U, t) + \lambda^T(t) [f(X, U, t) - \dot{X}]\} dt \quad (3-47)$$

引入哈密顿函数

$$H(X, U, \lambda, t) = F[X, U, t] + \lambda^T f(X, U, t) \quad (3-48)$$

将 H 代入 (3-47)，可得

$$J_a = \phi[X(t_f), t_f] + v^T G[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}] dt \quad (3-49)$$

令

$$\theta[X(t_f), t_f] = \phi[X(t_f), t_f] + v^T G[X(t_f), t_f] \quad (3-50)$$

则

$$J_a = \theta[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}] dt \quad (3-51)$$

与 t_f 固定时的情况不同, 现在 δJ_a 由 δU 、 δX 、 $\delta X(t_f)$ 和 δt_f 所引起。这里 δt_f 不再为零, 而 $\delta X(t_f)$ 可计算如下 (参见图 3-3):

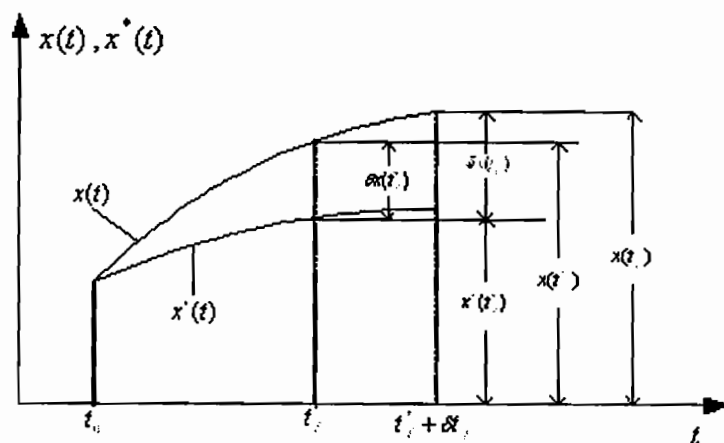


图 3-3 各种变分的表示

$$\text{令 } t_f = t_f^* + \delta t_f$$

$$\begin{aligned} \delta X(t_f) &= X(t_f) - X^*(t_f^*) = X(t_f^* + \delta t_f) + \delta X(t_f^*) - X(t_f^*) \\ &\approx \delta X(t_f^*) + \dot{X}(t_f^*) \delta t_f \end{aligned} \quad (3-52)$$

注意, 这里 $\delta X(t_f)$ 和 $\delta X(t_f^*)$ 不同, 故*号不能省去。上式表明 $\delta X(t_f)$ 由两部分组成: 一是在 t_f^* 时函数 $X(t_f)$ 相对 $X^*(t_f)$ 的变化 $\delta X(t_f^*)$, 另一是因 t_f 的变化所引起的函数值的变化量 $[X(t_f^* + \delta t_f) - X(t_f^*)]$ 。后者可用它的线性主部 $\dot{X}(t_f^*) \delta t_f$ 来近似。

现在来计算 δJ_a (只计算到一阶小量)。

$$\begin{aligned} \Delta J_a &= \theta[X(t_f) + \delta X(t_f), t_f + \delta t_f] + \int_{t_0}^{t_f^* + \delta t_f} [H(X + \delta X, U + \delta U, \lambda, t) - \lambda^T (\dot{X} + \delta \dot{X})] dt - \\ &\quad - \theta[X(t_f), t_f] - \int_{t_0}^{t_f^*} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}] dt \end{aligned}$$

上式中方括号外的下标*表示 X 、 U 、 t_f 是最优值 X^* 、 U^* 、 t_f^* 。 δJ_a 是上式的线性主部，故

$$\begin{aligned}\delta J_a = & \left[\frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} \right]^T \delta X(t_f) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right] \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)^T \delta U - \lambda^T \delta \dot{X} \right] dt + \\ & + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \left[H(X + \delta X, U + \delta U, \lambda, t) - \lambda^T (\dot{X} + \delta \dot{X}) \right] dt\end{aligned}$$

对第三项作分部积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda} \right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)^T \delta U \right] dt - \lambda^T(t_f) \delta X(t_f)$$

第四项可表示为（忽略二阶小量）

$$\begin{aligned}& \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \left[H(X, U, \lambda, t) + \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)^T \delta U - \lambda^T \dot{X} - \lambda^T \delta \dot{X} \right] dt \\ & \approx H^*(X, U, \lambda, t) \delta t_f - \lambda^T(t_f) \dot{X}(t_f) \delta t_f \\ & = H^* \delta t_f - \lambda^T(t_f) [\delta X(t_f) - \delta X(t_f^*)]\end{aligned}$$

上式最后一个等号用到了 (3-52) 式。 H^* 表示 H 的自变量取最优值时 H 的值。

根据上面的结果可得

$$\begin{aligned}\delta J_a = & \left[\frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} \right]^T \delta X(t_f) + \left[\frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right] \delta t_f + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial X} + \dot{\lambda} \right)^T \delta X + \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)^T \delta U \right] dt + H^* \delta t_f - \lambda^T(t_f) \delta X(t_f)\end{aligned}$$

J_a 取极值的必要条件为 $\delta J_a = 0$ ，因 $\delta X(t_f)$ 、 δt_f 、 δX 、 δU 为任意，故得

（省去*号）

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (\text{协态方程}) \quad (3-53)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{状态方程}) \quad (3-54)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (\text{控制方程}) \quad (3-55)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \quad (\text{横截方程}) \quad (3-56)$$

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f} v \quad (3-57)$$

与 t_f 固定情况相比, 这里多了一个方程, $H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f}$, 用它可求出最优

终端时间 $t_f = t_f^*$ 。

例 3-5 设系统状态方程为

$$\dot{x} = u$$

边界条件为

$$x(0) = 1 \quad x(t_f) = 0 \quad t_f \text{ 自由}$$

性能指标为

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

要求确定最优控制 u^* , 使 J 最小。

解 这是 t_f 自由问题。终端状态固定, $x(t_f) = 0$ 是满足约束集的特殊情况, 即

$$G[X(t_f), t_f] = x(t_f) = 0$$

作哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda u$$

正则方程是

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

控制方程是

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \quad u = -\lambda$$

因边界条件全部给定, 故不用横截条件。确定最优终端时刻的条件 (3-57) 式为

$$H(t_f) = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} = -\frac{\partial t_f}{\partial t_f} = -1$$

$$\frac{1}{2} u^2(t_f) + \lambda(t_f) u(t_f) = -1$$

将 $u(t) = -\lambda(t)$ 代入, 可得

$$\frac{1}{2}\lambda^2(t_f) - \lambda^2(t_f) + 1 = 0$$

由上式求得 $\lambda(t_f) = \sqrt{2}$ 。因为由正则方程 $\dot{\lambda} = 0$ ，所以 $\lambda(t) = \lambda(t_f) = \sqrt{2}$ ，于是最优控制

$$u^*(t) = -\sqrt{2}$$

再由正则方程 $\dot{x} = u = -\lambda$ ，可得

$$x(t) = -\sqrt{2}t + c$$

由初始条件 $x(0) = 1$ ，求得 $c = 1$ ，故最优轨迹为

$$x^*(t) = -\sqrt{2}t + 1$$

以终端条件 $x^*(t_f) = 0$ 代入上式，即求得最优终端时刻 $t_f^* = \sqrt{2}/2$ 。

例 3-6 火箭发射最优程序问题。设火箭在垂直平面内运动，加速度 $a(t)$ 与水平面夹角为 $\theta(t)$ ， $\theta(t)$ 是控制作用，见图 3-4。令

$$x_1 = V_L(t) \quad (\text{水平速度})$$

$$x_2 = V_h(t) \quad (\text{垂直速度})$$

$$x_3 = L(t) \quad (\text{水平距离})$$

$$x_4 = h(t) \quad (\text{垂直高度})$$

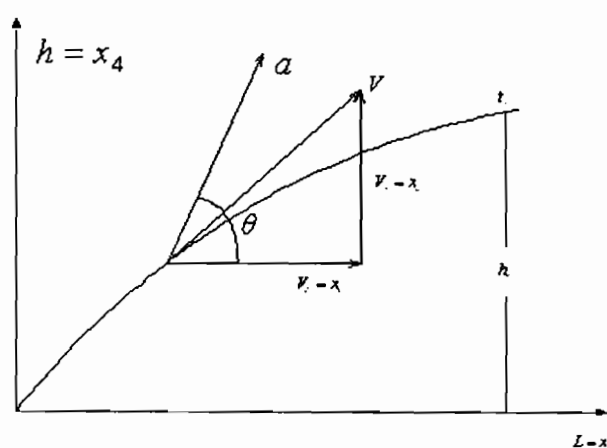


图 3-4 火箭发射示意图

忽略重力和空气阻力时，系统的状态方程和初始条件为

$$\dot{x}_1 = a \cos \theta$$

$$x_1(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= a \sin \theta & x_2(0) &= 0 \\
\dot{x}_3 &= x_1 & x_3(0) &= 0 \\
\dot{x}_4 &= x_2 & x_4(0) &= 0
\end{aligned} \tag{3-58}$$

终端状态为

$$x_1(t_f) = U \quad x_2(t_f) = 0 \quad x_3(t_f) \text{ 自由} \quad x_4(t_f) = h_f$$

要求选择最优控制程序 $u(t) = \theta(t)$ ，使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

为最小。

解 因为要求 t_f 最小，故是 t_f 自由问题。由给定的终端状态可得三个约束方程为

$$\begin{aligned}
G_1 &= x_1(t_f) - U = 0 \\
G_2 &= x_2(t_f) = 0 \\
G_3 &= x_4(t_f) - h_f = 0
\end{aligned} \tag{3-59}$$

作哈密顿函数

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1 a \cos \theta + \lambda_2 a \sin \theta + \lambda_3 x_1 + \lambda_4 x_2$$

协态方程为

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_3 \\
\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_4 \\
\dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0 \\
\dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0
\end{aligned} \tag{3-60}$$

横截条件为

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu = \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu, \text{ 即}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) \\ \lambda_3(t_f) \\ \lambda_4(t_f) \end{bmatrix} = \frac{\partial [G_1, G_2, G_3]}{\partial X(t_f)} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \nu_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_1} \nu_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_1} \nu_3 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \nu_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \nu_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_2} \nu_3 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3} \nu_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_3} \nu_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_3} \nu_3 \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_4} \nu_1 + \frac{\partial G_2}{\partial x_4} \nu_2 + \frac{\partial G_3}{\partial x_4} \nu_3 \end{bmatrix}$$

上式右端矩阵中 $x_i, i=1,2,3,4$ 的自变量 t_f 已省略。由 (3-59) 式求出上式中的偏导数，可得协态的终值为

$$\lambda_1(t_f) = \nu_1$$

$$\lambda_2(t_f) = \nu_2$$

$$\lambda_3(t_f) = 0$$

$$\lambda_4(t_f) = \nu_3 \quad (3-61)$$

积分协态方程可得

$$\lambda_1 = -\lambda_3 t + c_1$$

$$\lambda_2 = -\lambda_4 t + c_2$$

$$\lambda_3 = \text{常数} = \lambda_3(t_f) = 0$$

$$\lambda_4 = \text{常数} = \lambda_4(t_f) = \nu_3$$

代入协态终值条件后，得 $c_1 = \nu_1, c_2 = \nu_2 - \nu_3 t_f$ ，故

$$\lambda_1 = \nu_1$$

$$\lambda_2 = \nu_2 + \nu_3(t_f - t)$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = \nu_3 \quad (3-62)$$

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial U} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, 得

$$\lambda_1 a \sin \theta - \lambda_2 a \cos \theta = 0$$

即

$$\tan \theta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\nu_1 - \nu_2(t_f - t) \quad (3-63)$$

为了确定最优程序 $\theta(t)$, 还需确定拉格朗日未定常数 ν_1 、 ν_2 。下面来积分状态方程 (3-58), 为此将自变量 t 变成 θ 。由 (3-63) 式得

$$\frac{d \tan \theta}{d \theta} \cdot \frac{d \theta}{dt} = \sec^2 \theta \frac{d \theta}{dt} = \nu_2 \quad \frac{d \theta}{dt} = \frac{\nu_2}{\sec^2 \theta}$$

将上面关系代入状态方程, 即得

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d \theta} &= a \cos \theta \frac{dt}{d \theta} = \frac{a}{\nu_2 \cos \theta} \\ \frac{dx_2}{d \theta} &= a \sin \theta \frac{dt}{d \theta} = \frac{a}{\nu_2} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

积分上面两式得

$$x_1 = \frac{a}{\nu_2} \ln(\sec \theta + \tan \theta) + c_3$$

$$x_2 = \frac{a}{\nu_2} \sec \theta + c_3$$

由初始条件 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ 可求得

$$x_1 = \frac{a}{\nu_2} \ln \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta_0 + \sec \theta_0} \quad (3-64)$$

$$x_2 = \frac{a}{\nu_2} (\sec \theta - \sec \theta_0) \quad (3-65)$$

将上面的 x_1 和 x_2 代入状态方程 (3-58) 的后两式, 积分并经较复杂运算可得

$$x_3 = \frac{a}{\nu_2^2} (\sec \theta_0 - \sec \theta + \tan \theta \ln \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta_0 + \sec \theta_0}) \quad (3-66)$$

$$x_4 = \frac{a}{2v_2^2} \left[(\tan \theta_0 - \tan \theta) \sec \theta_0 - (\sec \theta_0 - \sec \theta) \tan \theta + \ln \frac{\tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta_0 + \sec \theta_0} \right] \quad (3-67)$$

由终端条件 $x_2(t_f) = 0$ 和 (3-65) 式可得 $\sec \theta(t_f) = \sec \theta_0$ ，故

$$\theta_f \stackrel{\Delta}{=} \theta(t_f) = 2\pi - \theta_0 \quad (3-68)$$

(注：另一解为 $\theta_f = \theta_0$ ，但这时由 (3-67) 式可得出 $x_4(t_f) = 0$ 与给定终端条件 $x_4(t_f) = h_f \neq 0$ 不符，故略去 $\theta_f = 0$ 的解)

由 (3-63) 式得

$$\tan \theta = \tan \theta_0 + v_2 t$$

$$\tan \theta_f = \tan \theta_0 + v_2 t_f$$

$$v_2 t_f = -2 \tan \theta_0$$

故

$$v_2 = -2 \tan \theta_0 / t_f \quad (3-69)$$

于是

$$\tan \theta = \left(1 - \frac{2t}{t_f}\right) \tan \theta_0 \quad (3-70)$$

将终端条件 $x(t_f) = U$ 和 (3-69) 式代入 (3-64) 式，可得

$$\frac{at_f}{U} = \frac{\tan \theta_0}{\frac{1}{2} \ln \frac{\sec \theta_0 + \tan \theta_0}{\sec \theta_0 - \tan \theta_0}} = \frac{\tan \theta_0}{\ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \theta_0)} \quad (3-71)$$

将终端条件 $x_4(t_f) = h_f$ ，(3-69) 式和 (3-71) 式代入 (3-67) 式可得

$$\frac{4ah_f}{U^2} = \frac{\tan \theta_0 \sec \theta_0 - \frac{1}{2} \ln \frac{\sec \theta_0 + \tan \theta_0}{\sec \theta_0 - \tan \theta_0}}{\left[\frac{1}{2} \ln \frac{\sec \theta_0 + \tan \theta_0}{\sec \theta_0 - \tan \theta_0} \right]^2} \quad (3-72)$$

现在归纳一下所得的结果：由 (3-72) 式可确定 θ_0 ，由 (3-71) 式确定最短时间 $t_f = t_f^*$ ，由 (3-70) 式即可求得最优推力方向角 $\theta(t)$ 。

由上面的计算可知, 对于这样一个比较简单的例子求出解析解也是比较困难的。一般情况下可用数值积分法求解。

3.4 小结

1、函数的函数叫做泛函。性能指标 J 是控制作用 $u(t)$ 的函数, 故称为性能泛函。和微分类似可引入泛函的变分 δJ 。 J 取极值的必要条件为 $\delta J = 0$ 。

2、泛函 $J = \int_{t_0}^t F[X, \dot{X}, t]dt$ (X, \dot{X} 为向量) 取无约束极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} \right) = 0 \quad (\text{欧拉——拉格朗日方程})$$

当 $X(t_0)$ 、 $X(t_f)$ 自由时, 还有横截条件

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0 \quad (\text{当 } t = t_0 \text{ 和 } t = t_f \text{ 时})$$

3、求解动态系统的最优控制是一个求取有约束条件的泛函极值问题。系统的状态方程就是状态变量要满足的一个约束方程, 即

$$f(X, U, t) - \dot{X} = 0$$

4、设系统状态方程为 $\dot{X} = f(X, U, t)$, 性能指标为

$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^t F[X, U, t]dt$, 初始状态 $X(t_0)$ 给定, 终端状态 $X(t_f)$ 满足向量约束方程 $G[X(t_f), t_f] = 0$ (包括 $X(t_f)$ 给定的情况)。则由变分法可得下面的结果:

(1) 终端时刻 t_f 给定时, J 取极值的必要条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial X} & (\text{协态方程}) \\ \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} & (\text{状态方程}) \end{aligned} \right\} \text{正则方程}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (\text{控制方程})$$

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} v \quad (\text{横截条件})$$

其中, $H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T \cdot f(X, U, t)$ 称为哈密顿函数。

正则方程有 $2n$ 个变量, 积分时要 $2n$ 个边界条件, 初始条件 $X(t_0)$ 给定时提

供了 n 个边界条件, 若 $X(t_f)$ 也完全给定则又提供了 n 个边界条件, 这时可不需要横截条件, 见例 3-3。当 $X(t_f)$ 自由或部分分量自由就要靠横截条件来提供缺少的边界条件, 见例 3-4。

(2) 终端条件 t_f 自由, J 取极值的必要条件与 t_f 给定时的不同处, 仅在于多一个求最优终端时刻的条件

$$H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f} \nu \quad (3-57)$$

5、用经典变分法求解最优控制时, 假定 $u(t)$ 不受限制, δU 为任意, 故得出控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

不满足这种情况时, 要用极小值原理或动态规划求解。这些内容在下面的章节中介绍。

3.5 习题

1. $\min_y J(y) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y'^2 + yy' + y' + y \right] dx$, 若 $y(0)$ 与 $y(2)$ 任意, 求 y^* 及 $J(y^*)$ 。

2. 电枢控制的直流电动机忽略阻尼时的运动方程为:

$$\ddot{\theta} = u(t)$$

式中, θ 为转轴的角位移, $u(t)$ 为输入。

目标函数为

$$\min_u J = \frac{1}{2} \int_0^2 (\ddot{\theta})^2 dt$$

使初态 $\theta(0) = 1$ 及 $\dot{\theta}(0) = 1$ 转移到终态 $\theta(2) = 0$ 及 $\dot{\theta}(2) = 0$, 求最优控制 $u^*(t)$ 及最优角位移 $\theta^*(t)$, 最优角速度 $\dot{\theta}^*(t)$ 。

3. $\min_u J = \frac{s^2}{2} x^2(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$

$$s.t., \quad \dot{x} = u(t), \quad x(0) = 1. \quad (s \text{ 为常量})$$

试求出最优控制 $u^*(t)$ 及相应的轨线 $x^*(t)$ 。

4. 系统由三个串联积分环节组成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad \text{初态} \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases} \quad \text{该系统由初态转到终端约束}$$

函数 $x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1$ ，目标函数 $\min_u J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$ ，求最优解。

5. 系统为 $\dot{x} = -x + u$ ， $x(0) = 10$ 转移到 $x(1) = 0$ ，目标函数为 $\min_u J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$ ，

求最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨迹 $x^*(t)$ 。

6. 系统为 $\dot{x} = -x^3 + u$ ， $x(0) = 1$ ，目标为 $\min_u J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$ ，试列出两点边值问题。

7. 系统为 $\dot{x} = -x + u$ ， $x(0) = 1$ ，目标为 $\min_u J = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$ ，求最优解 $u^*(t)$ 及 $x^*(t)$ 。

第四章 极小值原理及其应用

4.1 经典变分法的局限性

上面我们用经典变分法解最优控制问题时，得出了最优性的必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

在得出这个条件时，作了下面的假定：1° δU 是任意的，即 U 不受限制，它遍及整个向量空间，是一个开集；2° $\frac{\partial H}{\partial U}$ 是存在的。

在实际工程问题中，控制作用常常是有界的。如飞机舵面的偏角有限制，火箭的推力有限制，生产过程中的生产能力有限制等等。一般，我们可用下面的不等式来表示

$$|u_i(t)| \leq M_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

这时 $U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ 属于一个有界的闭集，写成 $U(t) \in \Omega$ ， Ω 为闭集。

更一般的情况可用下面的不等式约束来表示。

$$g[U(t), t] \geq 0$$

当 $U(t)$ 属于有界闭集， $U(t)$ 在边界上取值时， δU 就不是任意的了，因为无法向边界外取值，这时 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 就不一定是最优解的必要条件。考察由图 4-1 所表示

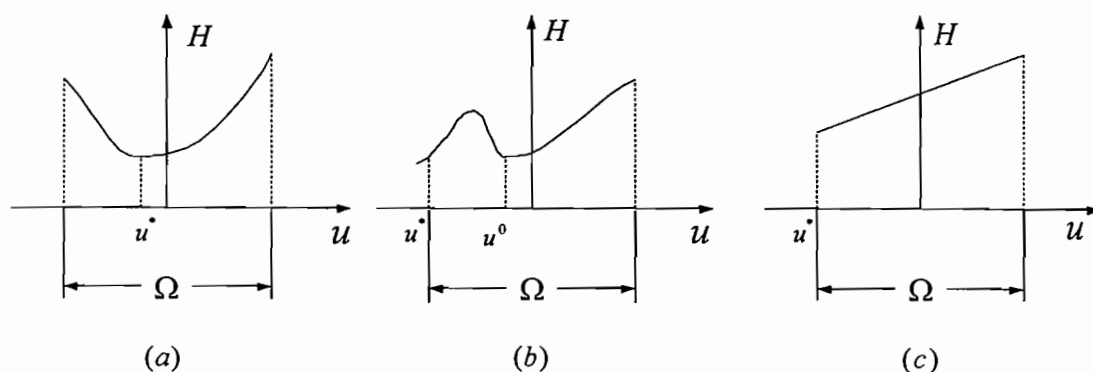


图 4-1 有界闭集内函数的几种形状

的几种情况，图中横轴上每一点都表示一个标量控制函数 u ，其容许取值范围为 Ω 。

对于图 4-1 (a) $\partial H / \partial u = 0$ 仍对应最优解 u^* 。对于图 4-1(b) $\partial H / \partial u = 0$ 所对应的解 u^0 不是最优解, 最优解 u^* 在边界上。对于图 4-1 (c) $\partial H / \partial U \equiv \text{常数}$, 由这个方程解不出最优控制 u 来 (这种情况称为奇异情况), 最优解 u^* 在边界上。另外, $\partial H / \partial U$ 也不一定是存在的。例如状态方程的右端 $f(X, U, t)$ 对 U 的一阶偏导数可能不连续, 或由于有些指标函数, 如燃料最优控制问题中, 具有下面的形式

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt = \int_{t_0}^{t_f} |U| dt$$

这时 $H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t)$ 对 U 的一阶偏导数不连续。

经典变分法无法处理上面的情况, 必须另辟新的途径。极小值原理就是解决这类问题的有力工具。用极小值原理求解控制无约束的最优控制问题和古典变分法是完全一样的。1956 年前苏联学者庞特里雅金提出这个原理时, 把它称为极大值原理, 目前较多地采用极小值原理这个名字。下面给出这个原理及其证明, 并举例说明其应用。

4.2 连续系统的极小值原理

由于可以利用扩充变量的方法将各类最优控制问题化为定常系统, 末值型性能指标情况下的标准形式。我们这里只就定常系统、末值型性能指标、 t_f 固定、末端受约束情况下给出极小值原理的简单证明。

设系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad X(t) \in R^n \quad (4-1)$$

初始条件为

$$X(t_0) = X_0 \quad (4-2)$$

控制向量 $U(t) \in R^m$, 并受下面的约束

$$U \in \Omega \quad (4-3)$$

末值状态必须满足的约束条件为

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (4-4)$$

性能指标函数为

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + v^T G[X(t_f), t_f] \quad (4-5)$$

其中 $v \in R^n$ 为待定列向量。

在本节中, 假设函数 $f_i(X, U, t)$, $\frac{\partial f_i}{\partial X}$, $\phi[X(t_f), t_f]$, $\frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)}$ 存在且连续,

并假定容许控制 $U(t)$ 是在控制域内取值的任何分段连续函数。这时如果选定了某一容许控制 $U(t)$, 则容易证明在任意的初始条件下 $X(t_0) = X_0$ 下, 方程 (4-1) 唯一的确定了系统状态的变化规律 $X(t)$, 且 $X(t)$ 是连续的和分段可微的。在这些条件下, 我们就定常系统、末值型性能指标、 t_f 固定、末端受约束情况下给出极小值原理的简单证明。

证明: 采用扰动法, 即给最优控制一个变分 δU , 它将引起最优轨线的变分 δX , 并使性能指标有一增量 ΔJ , 当 J 为极小时, 必有 $\Delta J \geq 0$, 由此即可导出最优控制所应满足的必要条件。在变分法中, δU 是微量, 即将最优控制和邻近的容许控制相比较, 因而最多只能建立哈密顿函数 H 的相对极小值性质。庞特里亚金极大值原理却将最优控制与控制域内所有可能的值进行比较, 因而得出结论, 在整个控制域内最优控制使哈密顿函数 H 成为绝对极小值。正是这个性质使得庞特里亚金极大值原理成为寻找最优控制的有力工具。但是这样, $U(t)$ 的改变量 δU 必须看成有限量, 而不再是微量。如果让改变的时间很短, 则由此引起的最优轨线的改变 δX 仍是微量, 性能指标的增量 ΔJ 也是微量, 因而对各关系式的数学处理仍是比较容易的。

设 $U^*(t)$ 为最优控制, 任选一时刻 $t_1 \in [t_0, t_f]$ 及一微量 $\varepsilon > 0$, 在时间间隔 $[t_1 - \varepsilon, t_1]$ 中给 $U^*(t)$ 一有限大小的改变量 δU , 且使得 $U^* + \delta U \in \Omega$ 。现在研究由 δU 引起的最优轨线 $X^*(t)$ 的变化。分为三段考虑:

$$\textcircled{1} 0 \leq t \leq t_1 - \varepsilon$$

在这一段中, $\delta U = 0$, 因而 $\delta X(t) = 0$ 。

② $t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_1$

系统的状态方程 (4-1) 可在初始条件 $X(t_1 - \varepsilon) = X^*(t_1 - \varepsilon)$ 下直接积分。

当 $U = U^*$ 时,

$$X^*(t) - X^*(t_1 - \varepsilon) = \int_{t_1 - \varepsilon}^t f(X^*, U^*, t) dt$$

当 $U = U^* + \delta U$ 时,

$$X(t) - X^*(t_1 - \varepsilon) = \int_{t_1 - \varepsilon}^t f(X, U^* + \delta U, t) dt$$

两式相减可得这一段的 $\delta X(t)$

$$\delta X(t) = \int_{t_1 - \varepsilon}^t [f(X, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt \quad (4-6)$$

可以对 $\delta X(t)$ 的大小作估计

$$|\delta X(t)| \leq \max_{t_1 - \varepsilon \leq t \leq t_1} |f(X, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)| (t - t_1 + \varepsilon)$$

由于 ε 是微量, 所以 $\delta X(t)$ 也是微量, 因而在精确到一阶微量的情况下, 下式成立

$$f(X, U^* + \delta U) = f(X^*, U^* + \delta U) + \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X=X^*} \delta X \quad (4-7)$$

将式 (4-7) 代入 (4-6), 并注意到微量 δX 在微小时间间隔上的积分是高阶微量, 即得

$$\delta X(t) = \int_{t_1 - \varepsilon}^t [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt$$

在第二段时间间隔得终点 $t = t_1$, 则有

$$\delta X(t_1) = \int_{t_1 - \varepsilon}^{t_1} [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] dt$$

或

$$\delta X(t_1) = [f(X^*, U^* + \delta U, t) - f(X^*, U^*, t)] \Big|_{t=t_1} \varepsilon + o(\varepsilon) \quad (4-8)$$

其中 $o(\varepsilon)$ 表示二阶以上的微量。

③ $t_1 \leq t \leq t_f$

这时又有 $U = U^*$ ，系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U^*, t)$$

而状态变量的变分 $\delta X(t)$ 满足方程

$$\delta \dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{U=U^*} \delta X \quad (4-9)$$

引入变量 $\lambda^*(t)$ 及哈密顿函数 H

$$H(X, U^*, \lambda^*, t) = \lambda^{*T} f(X, U^*, t) \quad (4-10)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \frac{\partial H}{\partial X} \Big|_{\substack{U=U^* \\ \lambda=\lambda^*}} = - \left(\frac{\partial f^T}{\partial X} \right) \Big|_{U=U^*} \lambda^* \quad (4-11)$$

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \quad (4-12)$$

显然，方程 (4-9) 和 (4-11) 为共轭方程，立即求得积分

$$\lambda^{*T}(t) \delta X(t) = \text{const}$$

$$\text{或} \quad \lambda^{*T}(t_f) \delta X(t_f) = \lambda^{*T}(t_1) \delta X(t_1) \quad (4-13)$$

即最终求得了由于 δU 的有限改变而引起的最优轨线的变化 $\delta X(t)$ ，特别是末值状态的变化 $\delta X(t_f)$ 。

下面研究由 δU 引起的最优性能指标的改变量 ΔJ 。

$$\text{由于} \quad J = \phi[X(t_f), t_f] + \nu^T G[X(t_f), t_f]$$

故有

$$\Delta J = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} \nu \right)^T \delta X(t_f) + o(\varepsilon) \geq 0 \quad (4-14)$$

综合 (4-8)、(4-12)、(4-13) 和 (4-14) 等式，可以建立 ΔJ 与有限改变量 δU 之间的关系

$$\Delta J = [\lambda^{*T} f(X^*, U^* + \delta U, t) - \lambda^{*T} f(X^*, U^*, t)] \Big|_{t=t_1} \varepsilon + o(\varepsilon) \geq 0$$

已知 $t_1 \in [t_0, t_f]$ 中的任意时刻，并以 U 表示 $U^* + \delta U$ ，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，上式变为

$$\lambda^{*T} f(X^*, U^*, t) \leq \lambda^{*T} f(X^*, U, t), \quad U \in \Omega, \quad t \in [t_0, t_f]$$

或用哈密顿函数 H 的表达式 (4-10) 表示可得

$$H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \leq \min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) \quad (4-15)$$

或
$$\min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t)$$

于是定常系统、末值型性能指标、 t_f 固定、末端受约束情况下极小值原理得以证明。

总结上述讨论，可将庞特里雅金极小值原理写为如下形式：

定理（极小值原理）：

系统状态方程

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad X(t) \in R^n \quad (4-1)$$

初始条件

$$X(t_0) = X_0 \quad (4-2)$$

控制向量 $U(t) \in R^m$ ，并受下面的约束

$$U \in \Omega \quad (4-3)$$

终端约束

$$G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (4-4)$$

指标函数

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (4-5)$$

要求选择最优控制 $U^*(t)$ ，使 J 取极小值。

J 取极小值的必要条件是 $X(t)$ 、 $U(t)$ 、 $\lambda(t)$ 和 t_f 满足下面的一组方程

1° 正则方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (\text{协态方程}) \quad (4-16)$$

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{状态方程}) \quad (4-17)$$

2° 边界条件

$$X(t_0) = X_0 \quad G[X(t_f), t_f] = 0 \quad (4-18)$$

3° 横截条件

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(t_f)} v \quad (4-19)$$

4° 最优终端时刻条件

$$H(t_f) = -\frac{\partial \phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f} v \quad (4-20)$$

5° 在最优轨线 $X^*(t)$ 和最优控制 $U^*(t)$ 上哈密顿函数取极小值

$$\min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \quad (4-21)$$

将上面的结果与用古典变分法所得的结果（(3-34) ~ (3-38) 式）对比可见，只是将 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 这个条件用 (4-21) 代替，其它无变化。

应该指出，当 $\frac{\partial H}{\partial U}$ 存在，且 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 得出 H 的绝对极小，如图 4-1 (a) 所示时， $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 即为条件 (4-21) 式。所以极小值原理可以解决变分法所能解决的问题，还能解决变分法不能解决的问题。如何应用条件 (4-21) 式，这是一个关键，我们将用具体例子来说明。

4.3 最短时间控制问题

节省时间意味着提高生产率或先发制人取得军事行动的胜利。所以人们很早就开始了对最短时间控制的研究，这方面的研究结果很多，这里先就简单的重积分系统的最短时间控制展开讨论。

在前面的绪论中列举了火车快速行驶问题。设火车质量 $m=1$ ，把运动方程写成状态方程形式，令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ ，可化为下面的最短时间控制问题。

例 4-1 重积分系统的最短时间控制

状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (4-22)$$

初始条件为

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad (4-23)$$

终端条件为

$$x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (4-24)$$

控制约束为

$$|u(t)| \leq 1 \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (4-25)$$

求出使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (4-26)$$

取极小的最优控制。

解 因为控制作用有限制（属于有界闭集），故要用极小值原理求解。取哈密顿函数

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (4-27)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (4-28)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad (4-29)$$

积分上面两个方程可得

$$\lambda_1(t) = c_1 \quad (4-30)$$

$$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t \quad (4-31)$$

其中， c_1 、 c_2 是积分常数。

由 H 的表达式 (4-27) 可见，若要选择 $u(t)$ 使 H 取极小，只要使 $\lambda_2(t)u(t)$ 越负越好，而 $|u(t)| \leq 1$ ，故当 $|u(t)| = 1$ ，且 $u(t)$ 与 $\lambda_2(t)$ 反号时， H 取极小，即最优控制为

$$u(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)] = \begin{cases} 1 & \text{当 } \lambda_2(t) < 0 \\ -1 & \text{当 } \lambda_2(t) > 0 \end{cases}$$

由此可见，最优解 $u(t)$ 取边界值 +1 或 -1，是开关函数的形式。什么时候发生开关转换，将取决于 $\lambda_2(t)$ 的符号。而由 (4-31) 式可见， $\lambda_2(t)$ 是 t 的线性函数，它有

四种可能的形状（见图 4-2）， $u(t)$ 也相应四种序列

$$\{+1\}, \quad \{-1\}, \quad \{+1, -1\}, \quad \{-1, +1\}$$

由图 4-2 可见，当 $\lambda_2(t)$ 为 t 的线性函数时 $u(t)$ 最多改变一次符号。

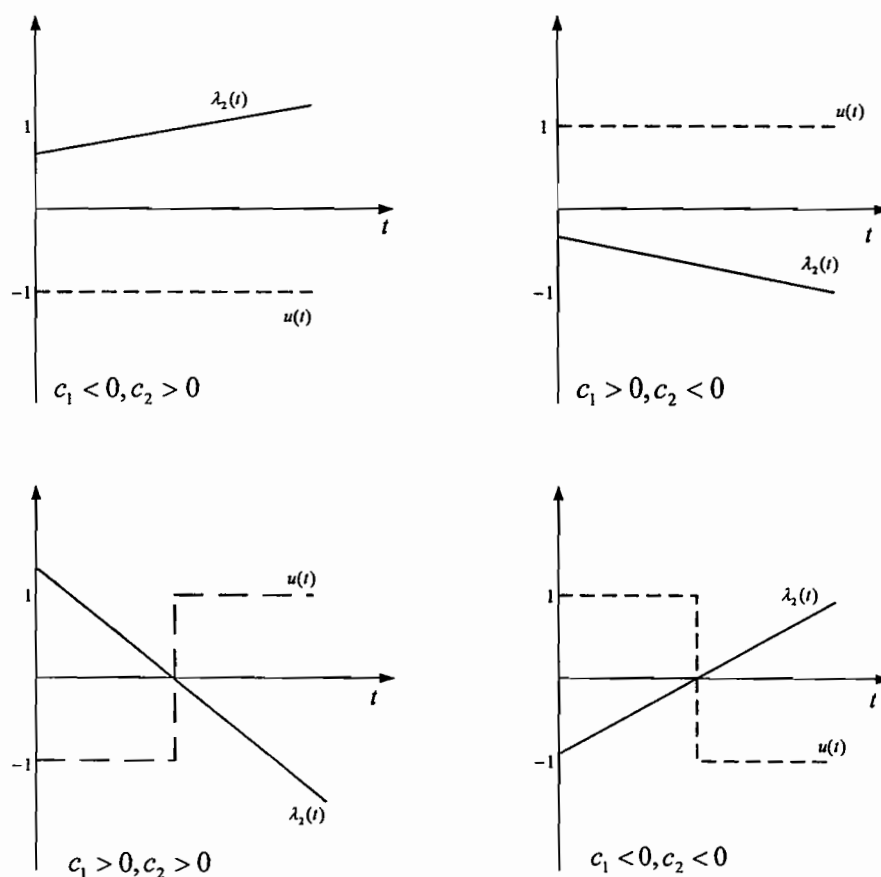


图 4-2 $u(t)$ 与 $\lambda_2(t)$ 的四种形状

下面来求出 $u(t)$ 取不同值时的状态轨迹（也称为相轨迹）。

当 $u(t) = +1$ 时，状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t + x_{20} \\ x_1(t) &= \frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned} \quad (4-32)$$

从上面两式消去 t ，即可得相轨迹方程

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (4-33)$$

在图 4-3 中用实线表示，不同的 c 值可给出一簇曲线。由 (4-32) 第一式知 t 增大时 $x_2(t)$ 增大，故相轨迹进行方向是自下而上，如图中曲线上箭头所示。

当 $u = -1$ 时, 状态方程的解为

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t + x_{20} \\ x_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \end{aligned} \quad (4-34)$$

消去 t , 可得相轨迹方程

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + c' \quad (4-35)$$

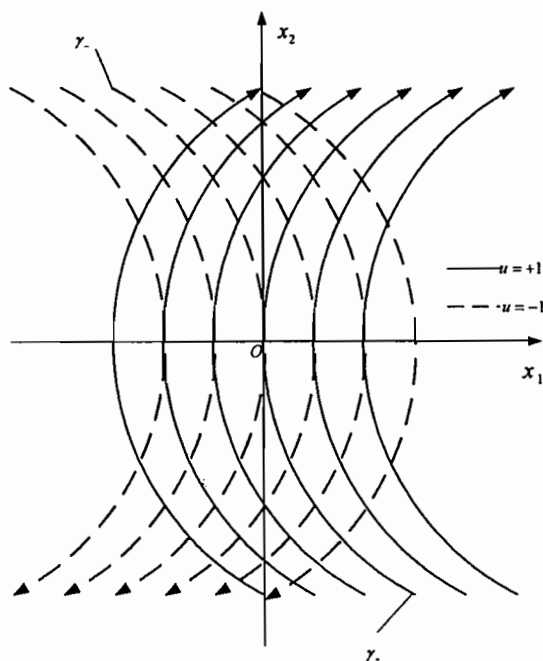


图 4-3 相轨迹图

在图 4-3 中用虚线表示。因 t 增大时, $x_2(t)$ 减少, 故相轨迹进行方向是自上而下。

两簇曲线中, 每一簇中有一条曲线的半支进入原点。在 $u = +1$ 的曲线簇中, 通过原点的曲线方程为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2(t) \leq 0 \quad (4-36)$$

这半支用 γ_+ 表示。在 $u = -1$ 的曲线簇中, 通过原点的曲线方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) \quad x_2(t) \geq 0 \quad (4-37)$$

这半支用 γ_- 表示。

γ_+ 和 γ_- 这两个半支通过原点的抛物线称为开关线, 其方程为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2(t)|x_2(t)| \quad (4-38)$$

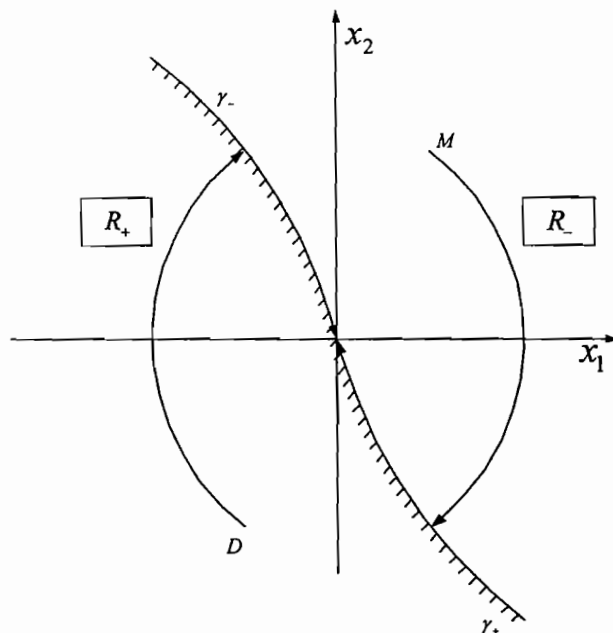


图 4-4 最优相轨迹与开关线

当初始状态 (x_{10}, x_{20}) 在开关线左侧, 如图 4-4 中 D 点, 从 D 点转移到原点, 并在转移过程中只允许 u 改变一次符号的唯一途径如图所示, 即从 D 点沿 $u = +1$ 的抛物线移到与 γ_- 相遇, 在相遇点改变 u 的符号为 $u = -1$, 再沿 γ_- 到达原点。因此, 只要初始状态在开关线左侧, 都沿 $u = +1$ 的抛物线转移到 γ_- , 然后 u 改变符号为 $u = -1$, 并沿 γ_- 到达原点。同样, 当初始状态在开关线右侧, 如图 4-4 中的 M 点, 则先沿 $u = -1$ 的抛物线转移到 γ_+ , 然后 u 改变符号为 $u = +1$, 并沿 γ_+ 到达原点。

在图 4-4 中开关曲线 (由 γ_- 和 γ_+ 组成) 把 x_1-x_2 平面划成两个区域。开关线左侧 (图中划阴影线部分) 区域用 R_+ 表示, R_+ 中的点满足

$$x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2| \quad \text{则 } u = +1 \quad (4-39)$$

开关线右侧区域用 R_- 表示, R_- 中的点满足

$$x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2| \quad \text{则 } u = -1 \quad (4-40)$$

于是最优控制规律可表示为状态 $x = (x_1, x_2)^T$ 的函数, 即

$$u^*(x_1, x_2) = +1 \quad \text{当 } x \in \gamma_+ \text{ 及 } x \in R_+ \quad (4-41)$$

$$u^*(x_1, x_2) = -1 \quad \text{当 } x \in \gamma_- \text{ 及 } x \in R_- \quad (4-42)$$

根据上面的关系, u^* 可以通过非线性的状态反馈来构成。

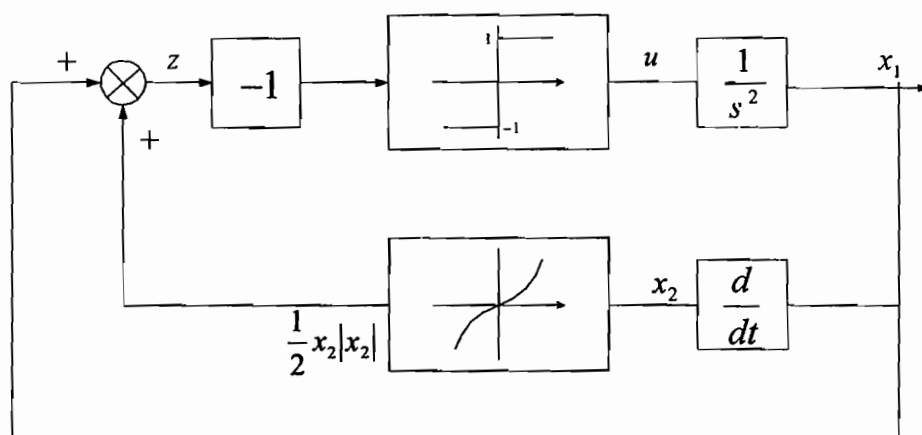


图 4-5 重积分系统时间最优控制的框图

图 4-5 表示了重积分系统时间最优控制的工程实现。由图可见

$$Z = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$$

$Z < 0$ 时, $u = 1$, 即满足 (4-39) 式, $Z > 0$ 时, $u = -1$, 即满足 (4-40) 式。图中的继电函数早期是用继电器实现的, 由于继电器在动作时有砰砰声, 故这种最优控制又称为“砰砰”控制。当然, 现在可以用无接触的电子开关或微处理机来实现这种控制规律, 既方便、可靠, 又无砰砰声了。

例 4-2 积分环节和惯性环节串联系统的最短时间控制

其传递函数为

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+a)} \quad (4-43)$$

其中 a 为大于零的实数。由 (4-43) 式可得运动方程为

$$\ddot{y} + a\dot{y} = u \quad (4-44)$$

令 x_1 和 x_2 为状态变量, 并有

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}$$

则可得状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + u\end{aligned}\quad (4-45)$$

控制约束为 $|u(t)| \leq 1$ ，最优控制只能取 ± 1 。

(1) 对于 $u = +1$ 情形，状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + 1\end{aligned}$$

其状态轨线相迹为

$$x_1 = -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2} \ln|1 - ax_2| + C \quad (4-46)$$

如图 4-6(a) 所示，箭头为状态运动方向。它有一条渐近线 $x_2 = 1/a$ ，如图中虚线所示。在这簇曲线中，只有 r_+ 到达平衡位置 0。

$$r_+ : x_1 = -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2} \ln|1 - ax_2|, \quad x_2 \leq 0 \quad (4-47)$$

(2) 对于 $u = -1$ 的情形，状态方程为

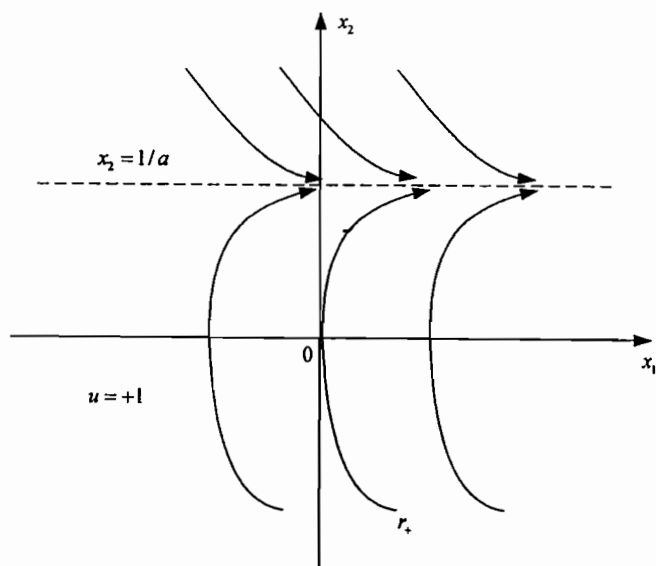
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - 1\end{aligned}$$

其状态轨线相迹为

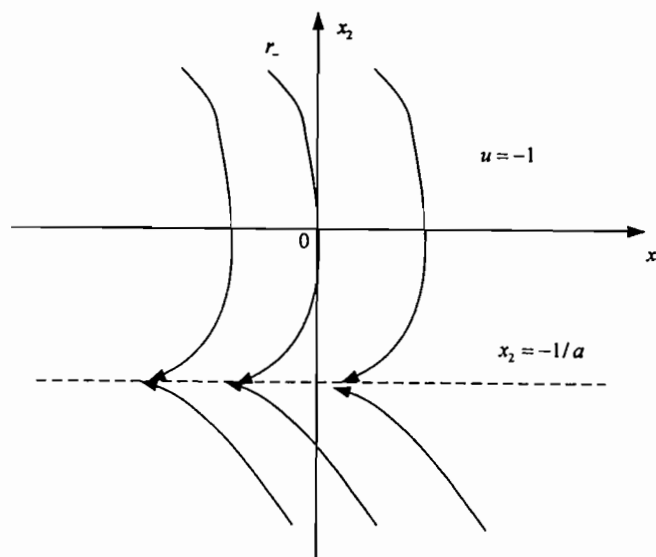
$$x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \ln|1 + ax_2| + C \quad (4-48)$$

如图 4-6(b) 所示，箭头为状态运动方向。它有一条渐近线 $x_2 = -1/a$ ，如图中虚线所示。在这簇曲线中，只有 r_- 到达平衡位置 0。

$$r_- : x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \ln|1 + ax_2|, \quad x_2 \geq 0 \quad (4-49)$$



(a) $u=1$



(b) $u=-1$

图 4-6 $\frac{1}{s(s+a)}$ 系统的相轨迹

将 r_+ 和 r_- 合并成一条曲线，其方程为

$$r: x_1 = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \operatorname{sgn}(x_2) \ln|1 + a|x_2|| \quad (4-50)$$

令

$$F(x_2) = -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2} \operatorname{sgn}(x_2) \ln|1 + a|x_2|| \quad (4-51)$$

$$\sigma(x_1, x_2) = x_1 - F(x_2) \quad (4-52)$$

于是曲线 r 方程可写为

$$r: \sigma(x_1, x_2) = x_1 - F(x_2) = 0 \quad (4-53)$$

曲线 r 将相平面分成两部分, 如图 4-7 所示。 r 的上半平面包括 r_- 记为 R_- , r 的下半平面包括 r_+ 记为 R_+ , 那么

$$\begin{aligned} R_+ &= \{(x_1, x_2) | \sigma(x_1, x_2) < 0\} \cup r_+ \\ R_- &= \{(x_1, x_2) | \sigma(x_1, x_2) > 0\} \cup r_- \end{aligned} \quad (4-54)$$

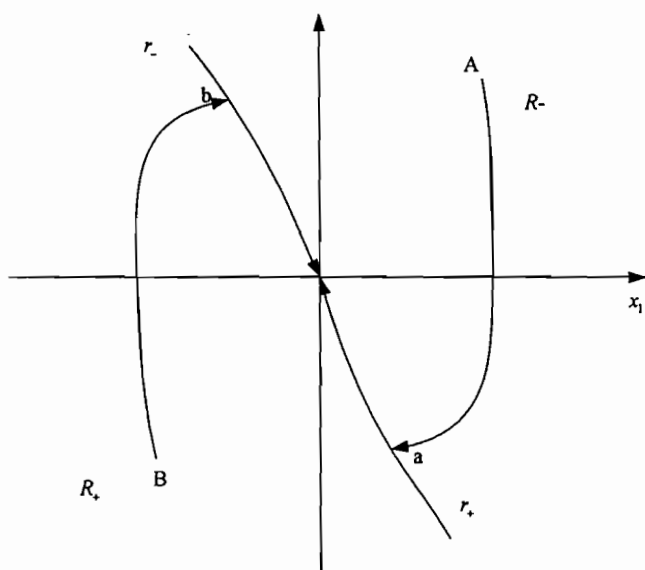


图 4-7 $\frac{1}{s(s+a)}$ 系统的时间最优相轨迹和开关线

由于最优控制只取 ± 1 , 它们的切换最多一次, 根据状态初始位置不同, 它们最优控制是不同的, 如图中初始状态在 A 点时, 它属于 R_- , 所以开始 $u^* = -1$ 。当运动到达 r_+ 时, 与 r_+ 交于 a 点, 马上切换为 $u^* = +1$, 以后沿 r_+ 运动直到平衡位置 0, 再除去控制量 u^* 。当初始状态在 B 点时, 它属于 R_+ , 最优控制应先取 $u^* = +1$, 到达 r_- 交于 b 点时, 马上切换为 $u^* = -1$, 以后沿 r_- 继续运动, 直到平衡位置 0, 切除控制量。

综上所述, 最优控制的状态反馈规律为

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} +1 & (x_1, x_2) \in R_+ \text{ 及 } \gamma_+ \\ -1 & (x_1, x_2) \in R_- \text{ 及 } \gamma_- \end{cases} \quad (4-55)$$

最短时间最优控制的方框图如图 4-8 所示，图中虚线部分是最短时间最优控制器。

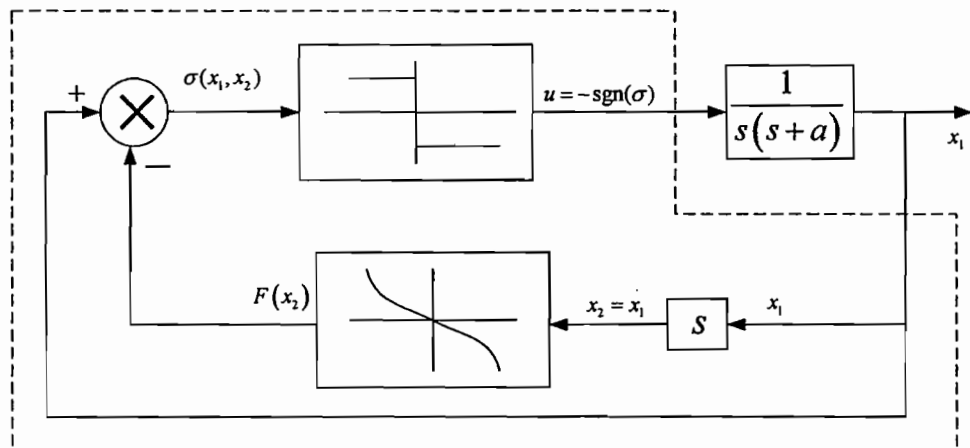


图 4-8 $\frac{1}{s(s+a)}$ 系统的时间最优控制框图

4.4 最少燃料控制问题

在人类的经济活动、军事行动以及其它活动中无时无刻不在消耗着形形色色的燃料，减少燃料消耗，节省能源成了当今世界科研的重要课题。特别在宇宙航行中，所消耗的燃料十分昂贵，而且如果需要的燃料多了，会减少运送的有效载荷（如卫星、空间站等），因此在宇宙航行中最早提出了最少燃料消耗的最优控制问题。一般来说，控制物体运动的推力或力矩的大小，是和单位时间内燃料消耗量成正比的，因而在某一过程中所消耗的燃料总量可用下面的积分指标来表示

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

其中 $u(t)$ 是单位时间内的燃料消耗量。

值得指出的是，在最少燃料控制问题中，终端时间 t_f 一般应给定，或者是考虑响应时间和最少燃料的综合最优问题。因为若考虑纯粹的最少燃料控制问题，则将导致系统的响应时间过长，理论上要经过无穷长时间，系统才转移到所要求

的状态。这是很显然的，因为燃料消耗得少，推力就小，系统的运动加速度和速度就小。另一方面所指定的时间 t_f 必须大于同一问题的最短时间控制所解出的最短时间 t_f^* ，否则最少燃料控制将会无解。我们还是以重积分系统为例来说明最少燃料控制的解法。

例 4-3 重积分系统的最少燃料控制

系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad (4-56)$$

初始条件

$$x_1(t_0) = x_{10} \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad (4-57)$$

终端条件

$$x_1(t_f) = 0 \quad x_2(t_f) = 0 \quad (4-58)$$

控制约束

$$|u(t)| \leq 1 \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (4-59)$$

求出使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt \quad (4-60)$$

取极小的最优控制。

解 用极小值原理求解，哈密顿函数为

$$H = |u(t)| + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (4-61)$$

协态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{aligned} \quad (4-62)$$

积分上面两个方程可得

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= c_1 \\ \lambda_2(t) &= c_2 - c_1 t \end{aligned} \quad (4-63)$$

这里哈密顿函数 H 与最短时间控制的 H 不同，考察 H 的表达式可知，无论 $\lambda_1(t)X_2(t)$ 为何值，使 H 极小等价于求下式的极小

$$\min_{u(t) \in \Omega} [|u(t)| + \lambda_2(t)u(t)]$$

考察上面的表达式，当 $|\lambda_2(t)| < 1$ 时，如 $u(t) \neq 0$ ，则 $[|u(t)| + \lambda_2(t) \cdot u(t)] > 0$ ，故应取 $u(t) = 0$ ；当 $|\lambda_2(t)| > 1$ 时，则应取 $u(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)]$ ，使 $[|u(t)| + \lambda_2(t)u(t)] < 0$ ，于是可得出使 H 极小的最优控制规律为

$$u(t) = 0 \quad \text{当 } |\lambda_2(t)| < 1 \quad (4-64)$$

$$u(t) = -\text{sgn}[\lambda_2(t)] \quad \text{当 } |\lambda_2(t)| > 1 \quad (4-65)$$

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad \text{当 } \lambda_2(t) = -1 \quad (4-66)$$

$$-1 \leq u(t) \leq 0 \quad \text{当 } \lambda_2(t) = +1 \quad (4-67)$$

注意到上面得到的最优控制规律中前两式确定了 $u(t)$ 可取值 0、 ± 1 ，而后两式只确定了 $u(t)$ 的符号，未确定 $u(t)$ 的值。但由 $\lambda_2(t)$ 的表达式可知，只要 $c_1 \neq 0$ ， $\lambda_2(t)$ 就随 t 而线性变化并有图 4-2 所示四种图形，于是 $\lambda_2(t)$ 只可能在两个孤立的时刻 t 取得值 +1 和 -1。这两个孤立时刻 $u(t)$ 的值对积分指标 J 的贡献为零，因此我们可不加考虑，而认为 $u(t)$ 只能取值 0 和 ± 1 。这说明 $u(t)$ 可用带死区的继电函数描述，如图 4-9。和最短时间控制一样， $u(t) = +1$ 时的状态轨迹为

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (4-68)$$

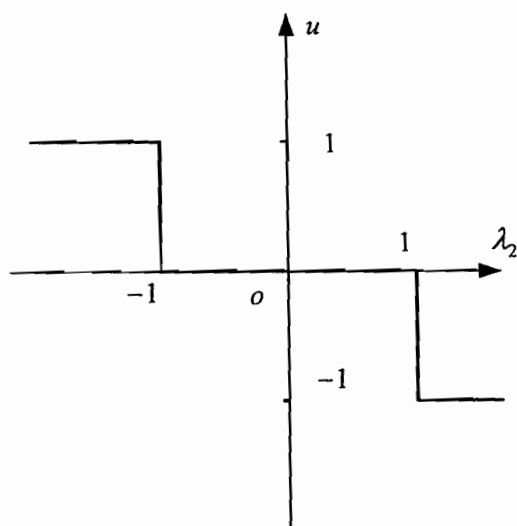


图 4-9 带死区的继电函数

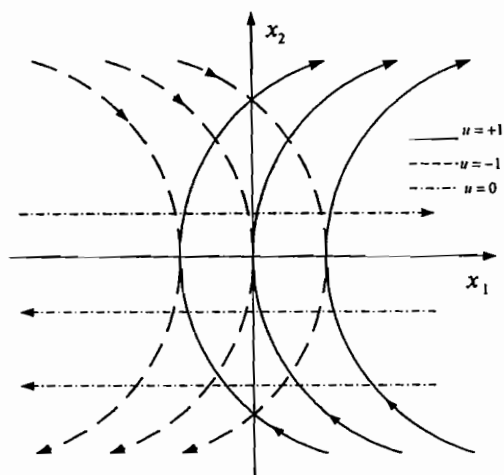


图 4-10 最少燃料控制的控制量和相轨迹

在图 4-10 中用实线表示。 $u(t) = -1$ 时的状态轨迹为

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t) + c \quad (4-69)$$

在图 4-10 中用虚线表示。

最少燃料控制的特点是 $u(t)$ 可取零值。当 $u(t) = 0$ ，由状态方程可求得

$$x_2(t) = x_{20} \quad x_1(t) = x_{10} + x_{20}(t - t_0) \quad (4-70)$$

状态轨迹为水平线，在图 4-10 中用点划线表示。当 $x_{20} > 0$ 时，水平线向右移动，

$x_{20} < 0$ 时，水平线向左移动。

若初始状态 (x_{10}, x_{20}) 是第一象限内的点 A，则从图 4-10 状态轨迹的运动方

向可知，引向原点的轨迹有下面几种（见图 4-11）：

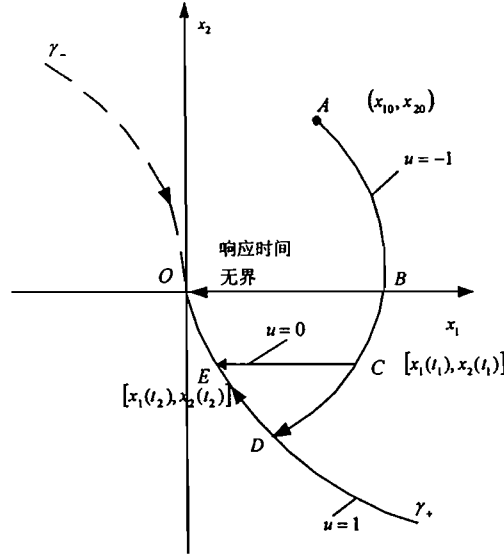


图 4-11 最少燃料控制的相轨迹

1° 沿 ABO 到达原点，对应的控制序列 $u(t)$ 为 $\{-1, 0\}$ 。这是最少燃料控制，但因为在 BO 段 $x_2 = 0$ （即 $\dot{x}_1 = 0$ ），故 x_1 到达原点的时间为无穷大，不能满足给定 t_f 值的要求。

2° 沿 ADO 到达原点，对应的控制序列为 $\{-1, +1\}$ 。这是最短时间控制的轨迹，到达原点时间将小于给定的 $t_f - t_0$ ，但它不是最少燃料控制。

3° 沿 ACEO 到达原点。其中 C 点和 E 点坐标待定，以满足给定的终端时刻 t_f 。这是满足终端时刻 t_f 要求的最少燃料控制。

设初始点 A 的时刻为 t_0 ，坐标为 x_{10}, x_{20} ；到达 C 点的时刻为 t_1 ，坐标为 $x_1(t_1), x_2(t_1)$ ，到 E 点的时刻为 t_2 ，坐标为 $x_1(t_2), x_2(t_2)$ ；到达原点 O 的时刻为 t_f 。AC 段对应 $u = -1$ ，CE 段 $u = 0$ ，EO 段 $u = +1$ ，由积分状态方程（4-56）可得

$$u = -1: \quad x_2(t_1) = -t_1 + x_{20} \quad (4-71)$$

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + x_{20}t_1 + x_{10} \quad (4-72)$$

$$u = 0: \quad x_2(t_2) = x_2(t_1) \quad (4-73)$$

$$x_1(t_2) = x_1(t_1) + x_2(t_1)(t_2 - t_1) \quad (4-74)$$

$$u = 1: \quad 0 = x_2(t_2) + (t_f - t_2) \quad (4-75)$$

$$0 = x_1(t_2) + x_2(t_2)(t_f - t_2) + \frac{1}{2}(t_f - t_2)^2 \quad (4-76)$$

由上面六个方程来解六个未知数: t_1 、 t_2 、 $x_1(t_1)$ 、 $x_2(t_1)$ 、 $x_1(t_2)$ 、 $x_2(t_2)$ 。

由 (4-75)、(4-76) 两式消去 $(t_f - t_2)$ ，再考虑 (4-73) 式可得

$$x_1(t_2) = \frac{1}{2}x_2^2(t_2) = \frac{1}{2}x_2^2(t_1) \quad (4-77)$$

$$t_2 = t_f + x_2(t_2) = t_f + x_2(t_1) \quad (4-78)$$

由 (4-71)、(4-72) 两式得

$$t_1 = x_{20} - x_2(t_1) \quad (4-79)$$

$$x_1(t_1) = x_{10} - \frac{1}{2}x_2^2(t_1) + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (4-80)$$

由 (4-78)、(4-79) 两式得

$$t_2 - t_1 = 2x_2(t_1) + t_f - x_{20} \quad (4-81)$$

将 (4-81) 代入 (4-74) 式得

$$2x_2^2(t_1) + (t_f - x_{20})x_2(t_1) + x_1(t_1) - x_1(t_2) = 0$$

再利用 (4-77) 和 (4-80) 式，即得

$$x_2^2(t_1) + (t_f - x_{20})x_2(t_1) + x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 = 0$$

由上式解出

$$x_2(t_1) = -\frac{t_f - x_{20}}{2} \pm \frac{1}{2} \left[(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-82)$$

这里必须保证 $x_2(t_1)$ 为实数，并在上式中选择正确的加减号。为了使 $x_2(t_1)$ 为实数，必须有

$$(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \geq 0$$

这说明，若 t_f 规定小于最短时间（使上式等于零的 t_f 值），最少燃料控制是无解的。为了选择正确的加、减号，应注意有下面的关系

$$0 < t_1 < t_2 < t_f$$

即 $t_2 - t_1 > 0$ ，由 (4-81) 式可得

$$x_2(t_1) > -\frac{1}{2}(t_f - x_{20})$$

于是从 (4-82) 式可知，应选择加号，即

$$x_2(t_1) = -\frac{1}{2} \left\{ t_f - x_{20} - \left[(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4-83)$$

将上式代入 (4-78) 和 (4-79) 式可得

$$t_1 = \frac{1}{2} \left\{ t_f + x_{20} - \left[(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4-84)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \left\{ t_f + x_{20} + \left[(t_f - x_{20})^2 - 4x_{10} - 2x_{20}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4-85)$$

这样，我们就完全可以确定转换点 C 和 E 的坐标。由图 4-11 可见 E 点的坐标 $[x_1(t_2), x_2(t_2)]$ 处在开关线 γ_+ 上，可按最短时间控制一样的方式来构成反馈控制。

C 点坐标 $[x_1(t_1), x_2(t_1)]$ 由式 (4-80) 和 (4-83) 给出，由此二式可见，它们取决于 t_f 和 x_{10} 、 x_{20} 。当 t_f 给定时，还要给定一个初始条件，譬如 $x_{20} = 0$ ，才能从此二式消去 x_{10} 得到下面的 C 点轨迹曲线（在图 4-12 中用 $\Gamma(t_f)$ 来表示）

$$x_1(t_1) = -1.5x_2^2(t_1) - x_2(t_1)t_f$$

当 x_{10} 、 x_{20} 可取各种值时，开关曲线将取决于初始条件，这在工程实现上是不方便的。

最后，我们要强调指出，规定了终端时刻，最少燃料的控制量 $u(t)$ 不仅可取边界值 ± 1 ，而且还可取零值，对重积分系统来讲，系统有加速段，减速段和等速运行段。而最短时间控制系统只有加速和减速段。以飞机为例，从一个城市以规定的时间飞到另一城市且使燃料消耗为最少的策略是，作一段加速飞行，作一段等速滑翔飞行，再作一段减速飞行，而且规定的时间要足够大，否则最少燃料问题是无解的。

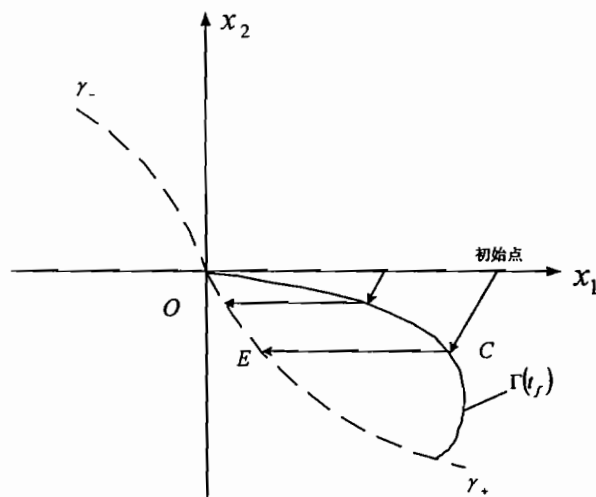


图 4-12 满足终端时刻 t_f 要求的最少燃料控制的相轨迹

4.5 离散系统的极小值原理

在现实世界中有些系统本身是离散的，要用离散的状态方程来加以描述。有些系统本身虽是连续的，但采用计算机控制，控制量只在离散的时刻算出来，设计这类系统时，连续对象的状态方程要进行离散化。下面就来讨论离散系统的极小值原理。问题的提法如下：

系统的状态方程为

$$X(k+1) = f[X(k), U(k), k] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-86)$$

$X(k)$ 为 n 维向量， $U(k)$ 为 m 维向量。上式右端在一般情况下是 $X(k)$ 和 $U(k)$ 的非线性函数。

初始条件为

$$X(0) = X_0 \quad (4-87)$$

终端约束为

$$G[X(N), N] = 0 \quad (4-88)$$

G 是 q 维向量方程。

性能指标为

$$J = \phi[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[X(k), U(k), k] \quad (4-89)$$

要求确定控制序列 $U(k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, 使 J 最小。下面按控制向量 $U(k)$ 受约束和不受约束两种情况来讨论。

(一) 控制向量无约束。这时可用古典变分法求解。作增广性能指标

$$\begin{aligned} J_a = & \phi[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} F[X(k), U(k), k] + \lambda^T(k+1)\{f[X(k), U(k), k] - X(k+1)\} \\ & + \nu^T G[X(N), N] \end{aligned} \quad (4-90)$$

式中, $\lambda(k+1)$ 是协态向量 (n 维), ν 是拉格朗日乘子向量 (q 维)。

引入下面的哈密顿函数

$$\begin{aligned} H(X, U, \lambda, k) = & F[X(k), U(k), k] \\ & + \lambda^T(k+1)f[X(k), U(k), k] \end{aligned} \quad (4-91)$$

并令

$$\theta[X(N), N] = \phi[X(N), N] + \nu^T G[X(N), N] \quad (4-92)$$

则

$$\begin{aligned} J_a = & \theta[X(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [H(X, U, \lambda, k) - \lambda^T(k+1)X(k+1)] \\ = & \theta[X(N), N] - \lambda^T(N)X(N) + \lambda^T(0)X(0) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} [H(X, U, \lambda, k) - \lambda^T(k)X(k)] \end{aligned} \quad (4-93)$$

J_a 的一次变分可写成

$$\begin{aligned} \delta J_a = & \left[\frac{\partial \theta^T}{\partial X(N)} - \lambda^T(N) \right] \delta X(N) + \lambda^T(0) \delta X(0) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\left(\frac{\partial H(k)}{\partial X(k)} \right)^T - \lambda^T(k) \right] \delta X(k) + \left(\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} \right)^T \delta U(k) \right\} \end{aligned} \quad (4-94)$$

上式中 $H(k) = H(X, U, \lambda, k)$ 。由于初始条件 $X(0)$ 给定, 故 $\delta X(0) = 0$ 。根据 $\delta J_a = 0$

以及 $\delta X(N)$, $\delta X(k)$, $\delta U(k)$ 的任意性, 可推导出最优控制序列应满足的必要条件:

正则方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial X(k)} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-95)$$

$$X(k+1) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k+1)} \quad (4-96)$$

横截条件

$$\lambda(N) = \frac{\partial \theta}{\partial X(N)} = \frac{\partial \phi}{\partial X(N)} + \frac{\partial G^T}{\partial X(N)} v \quad (4-97)$$

控制方程

$$\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-98)$$

初始条件

$$X(0) = X_0 \quad (4-99)$$

所得结果与连续系统类似, 但应注意协态方程 (4-95) 的右侧无负号。从上面的一组方程可知, 我们已知初始条件 $X(0) = X_0$, 又从横截条件可求出 $\lambda(N)$, 这样得出了离散非线性两点边值问题, 求解一般是困难的。

(二) 控制向量有约束。这时 $\frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} = 0$ 一般不成立。根据极小值原理, 哈密顿函数在最优控制序列上取极小值, 即

$$H[X^*(k), U^*(k), \lambda^*(k+1), k] = \min_{U \in \Omega} [X^*(k), U(k), \lambda^*(k+1), k]$$

例 4-4 系统的状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) = 1 \quad (4-100)$$

$u(k)$ 无约束, 指标函数为

$$J(u) = \frac{1}{2} x^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) \quad (4-101)$$

用离散极小值原理求最优控制 $u^*(0), u^*(1)$, 使 J 取极小。

解 哈密顿函数为

$$H(k) = \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + u(k)] \quad (4-102)$$

协态方程为

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = \lambda(k+1) \quad (4-103)$$

即协态为常数。

横截条件为

$$\lambda(2) = \frac{\partial \phi}{\partial x(2)} = \frac{\partial \left[\frac{1}{2}x^2(2) \right]}{\partial x(2)} = x(2) \quad (4-104)$$

控制方程为

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda(k+1) = 0 \quad (4-105)$$

$$u(k) = -\lambda(k+1) \quad (4-106)$$

因协态为常数, 故控制也是常数, 令

$$u(k) = u \quad (4-107)$$

现在来解系统的状态方程, 由初始条件 $x(0) = 1$ 可得

$$x(1) = 1 + u \quad (4-108)$$

$$x(2) = x(1) + u = 1 + 2u \quad (4-109)$$

因为

$$x(2) = \lambda(2) = -u = 1 + 2u \quad (4-110)$$

故

$$u = u^* = -\frac{1}{3} \quad (4-111)$$

于是最优控制为

$$u^*(k) = -\frac{1}{3} \quad k = 0, 1 \quad (4-112)$$

代入系统状态方程，可求得最优状态为

$$x^*(0) = 1 \quad x^*(1) = \frac{2}{3} \quad x^*(2) = \frac{1}{3} \quad (4-113)$$

例 4-5 在 N 级换热器系列的最优设计中，设 $x(k)$ 为流出第 k 个换热器的油料温度， $u(k-1)$ 是第 k 个换热器的换热面积， T_k 是第 k 个换热器的热载体温度， Q_k 是第 k 个换热器的正常数。则状态方程为

$$x(k+1) = \frac{x(k) + Q_{k+1}T_{k+1}u(k)}{1 + Q_{k+1}u(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (4-114)$$

方程右端对 $u(k)$ 是非线性的。这里 k 表示加热器级数，是空间离散变量，但在求解时与时间离散问题一样。

边界条件为

$$x(0) = a \quad x(N) = b \quad (4-115)$$

性能指标是使换热总面积最小，即

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} u(k) \quad (4-116)$$

最小。

解 这里 $u(k)$ 无约束，可用变分法求解。

作哈密顿函数

$$H(k) = u(k) + \lambda(k+1) \frac{x(k) + Q_{k+1}T_{k+1}u(k)}{1 + Q_{k+1}u(k)} \quad (4-117)$$

协态方程为

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = [1 + Q_{k+1}u(k)]^{-1} \lambda(k+1)$$

即

$$\lambda(k+1) = [1 + Q_{k+1}u(k)] \lambda(k) \quad (4-118)$$

控制方程为

$$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = 0$$

即

$$1 + \lambda(k+1) \frac{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k)]}{[1 + Q_{k+1}u(k)]^2} = 0 \quad (4-119)$$

由上式求出 $\lambda(k+1)$ 比求 $u(k)$ 容易, 故解得

$$\lambda(k+1) = -\frac{[1 + Q_{k+1}u(k)]^2}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k)]} \quad (4-120)$$

将 (4-120) 式代入协态方程 (4-118), 消去 $\lambda(k)$, 得

$$\frac{1 + Q_{k+1}u(k)}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k)]} = \frac{[1 + Q_k u(k-1)]^2}{Q_k[T_k - x(k-1)]} \quad (4-121)$$

由状态方程 (4-114) 可解出 $u(k)$

$$u(k) = \frac{x(k+1) - x(k)}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k+1)]} \quad (4-122)$$

令 $k = k-1$, 由上式可得

$$u(k-1) = \frac{x(k) - x(k-1)}{Q_k[T_k - x(k)]} \quad (4-123)$$

将 (4-122)、(4-123) 代入 (4-121), 消去 $u(k)$, 可得

$$x(k-1) = x(k) + [T_k - x(k)] \left\{ 1 - \frac{Q_k[T_k - x(k)]}{Q_{k+1}[T_{k+1} - x(k+1)]} \right\} \quad (4-124)$$

(4-124) 式是关于 $x(k)$ 的非线性差分方程, 若已知 $x(k)$ 和 $x(k+1)$ 就可递推求出 $x(k-1)$, 故从终端 $k = N$ 向后递推比较方便。已知 $x(N) = b$, 但不知 $x(N-1)$, 只能先假定一个 $x(N-1)$, 由 (4-124) 算出 $x(N-2)$; 再循环用 (4-124) 可依次递推求得 $x(N-3)$, \dots , $x(1), x(0)$ 。若最后求出的 $x(0)$ 等于或很接近于给定的初始条件 a , 则这组序列 $\{u(k)\}$ 就是最优状态轨迹; 否则另取 $x(N-1)$ 再重算, 直到 $x(0) \approx a$, 这组序列 $\{x(k)\}$ 就是最优状态轨迹。把 $\{x(k)\}$ 代入式 (4-122) 就可求出最优控制序列 $\{u(k)\}$ 。从上面的说明可知, 我们要反复试凑以满足 $x(k)$ 的边界条件, 这是非线性两点边值问题所引起的。这里因为 $x(k)$ 的初始和终端条件都

给定，我们采用的解题技巧是消去协态量 $\lambda(k)$ ，直接求解 $x(k)$ 。

4.6 小结

1、极小值原理是对经典变分法的扩展，它可以解决经典变分法无法解决的最优控制问题。也就是当控制有约束（控制变量属于一个有界闭集，可表示为 $U \in \Omega$ 或 $g[U(t), t] \geq 0$ ），哈密顿函数 H 对 U 不可微时，要用极小值原理。

2、极小值原理所得出的最优控制必要条件与变分法所得的条件的差别，仅在于用哈密顿函数在最优控制上取值的条件

$$H(X^*, U^*, \lambda^*, t) = \min_{U \in \Omega} H(X^*, U, \lambda^*, t)$$

代替 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ ，而后者可作为前者的特殊情况。其它条件如正则方程，横截条件，边界条件等都一样。参看图 4-1 可知，极小值原理可解决在边界上 H 取极值的情况，因此比变分法所得的条件大大加强了。总之，极小值原理可解决经典变分法可解决的问题，也可解决经典变分法不能解决的问题。所以有些书上把用经典变分法解决的问题也称为用极小值原理求解。若系统方程是非线性的，则用极小值原理求解（和经典变分法一样）将产生非线性微分方程两点边值问题，求解非常困难。

3、前面我们讨论了极小值原理，但经过简单的转换就可将极大值原理化为极小值原理。设要使性能指标 J' 极大，对应的协态变量为 $\lambda'(t)$ ，拉格朗日乘子为 ν' ，则令 $J = -J'$ 就化为 J 的极小值问题，并且极小值问题的 $\lambda(t)$ 和 ν 与 $\lambda'(t)$ 和 ν' 的关系为 $\lambda(t) = -\lambda'(t)$ ， $\nu = -\nu'$ 。

4、离散系统的极小值原理与连续系统的极小值原理所得出的最优解的必要条件在形式上是相似的，只是前者的协态方程（4-95）的右端没有负号。若系统方程是非线性差分方程，则离散极小值原理将产生非线性差分方程两点边值问题。从例 4-5 可见，即使对于一个简单的问题，求解也是很困难的。

5、极小值原理可成功地解决最短时间控制问题。若控制量满足约束条件 $|u(t)| \leq 1$ ，则最短时间的控制量只能取约束的边界值 +1 或 -1。于是在系统中必然

要有一个二位置继电器式元件来产生 $u(t)$ ，这就是所谓的砰砰控制。对于简单二阶系统—重积分系统，在相平面 x_1-x_2 上的相轨迹是抛物线，开关曲线由 γ_+ 和 γ_- 两个半支抛物线组成。

6、最少燃料控制的控制量可取边界值+1、-1 和 0，因此系统中必然要有一个包含死区的三位置继电器式元件来产生 $u(t)$ 。重积分系统的相轨迹除抛物线外还有平行于横轴的直线段。另外，终端时刻 t_f 必须大于同一问题的最短时间控制所需时间，否则最少燃料控制无解。

4.7 习题

1. $\min J = t_f$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 1, & x_2(0) &= 1, \\ \dot{x}_2 &= u, & x_1(t_f) &= 0, & x_2(t_f) &= 0, \\ |u| &\leq 1 \end{aligned}$$

求最优控制。

2. $\min_u J = \int_0^{t_f} dt$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}, \quad \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u \\ \dot{x}_2(t) &= u \end{aligned}$$

$$\text{且有} \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad |u| \leq 1, \text{求最优控制。}$$

3. $\min_u J = \int_0^{t_f} dt$

$$\text{s.t.}, \quad \dot{x}_1 = -x_2 \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\xi\omega_0 x_2 + u$$

$$\text{且有} \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \quad |u| \leq 1, \text{求最优控制。}$$

4.存在恢复力时,无阻尼运动的最小时间控制。如果忽略阻尼,考虑恢复力,则无阻尼运动方程为

$$\ddot{y} + y = u$$

若令 $y = x_1, \dot{x}_1 = x_2$

则无阻尼运动的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t), x(t_0) = x_0\end{aligned}$$

无阻尼运动的最小时间控制问题提法如下:

$$\begin{aligned}\min_u J &= \int_0^t dt \\ s.t. \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, x(t_0) = x_0 \\ |u| &\leq 1\end{aligned}$$

5.系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad |u| \leq 1$$

寻求时间最优控制函数,使系统由任意初始状态到达下列终端状态:

$$x_1(t_f) = 2 \quad x_2(t_f) = 1$$

求出开关曲线的方程,并绘出开关曲线的图形。

6. 设已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

约束条件 $|u| \leq 1$

寻求最优控制 $u^*(t)$,使系统由任意初始状态 (ξ_1, ξ_2) 到达原点 $(0,0)$,并使性能指标

$$J(u) = \int_0^t [k + |u(t)|] dt$$

最小,其中加权系数 $k > 0$, 末端时间 t_f 是自由的。

7.设有一阶系统

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 2$$

其控制函数 $u(t)$ 受的约束条件是 $-1 \leq u(t) \leq 1$

试确定控制函数 $u(t)$,使泛函

$$J = \int_0^1 [2x(t) - u(t)] dt$$

取极小值。

第五章 线性系统二次型指标的最优控制

——线性二次型问题

5.1 引言

用极小值原理解非线性系统的最优控制将导致非线性两点边值问题，求解是很困难的。即使系统是线性的，但当指标函数像是最短时间、最少燃料这种形式，要求得最优控制的解析表达式，并构成反馈控制（即把 $U(t)$ 表示为 $X(t)$ 的函数）也是非常困难的。下面我们将看到，若系统是线性的，指标函数是二次型的（指标函数是 $X(t)$ 和 $U(t)$ 的二次函数），则可以求得线性最优反馈控制律 $U(t) = -G(t)X(t)$ 。 $G(t)$ 的确定归结为求解一个非线性矩阵黎卡提（Riccati）微分方程或代数方程。而黎卡提方程的求解已研究得很透彻，有标准的计算机程序可应用，因此，求解既规范又方便。这种问题简称为线性二次型(Linear Quadratic 简称 LQ)问题，目前应用得十分广泛，是现代控制理论最重要的结果之一。

线性二次型问题的实用意义还在于：把它所得到的最优反馈控制与非线性系统的开环最优控制结合起来，可减小开环控制的误差，达到更精确的控制的目的。例如，在飞行器的轨迹优化问题中，根据飞行器的状态方程（一般是非线性的）用极小值原理计算出名义的最优控制和最优状态轨迹，设分别用 $U_0(t)$ 和 $X_0(t)$ 表示。因为状态方程只能是对飞行器实际动力学特性的近似描绘，这里存在着模型误差，把 $U_0(t)$ 加到飞行器上去后，所产生的实际状态 $X(t)$ 将不同于 $X_0(t)$ （这里我们还未考虑作用在飞行器上的其它扰动作用）。令状态误差为 $\Delta X(t) = X(t) - X_0(t)$ ，我们要使 $\Delta X(t)$ 愈小愈好，为此，可根据 $\Delta X(t)$ 构成一个最优反馈控制 $\Delta U(t)$ ，作为校正信号加到 $U_0(t)$ 上去，得到的实际控制信号 $U(t) = U_0(t) + \Delta U(t)$ 将使飞行器尽可能沿着 $X_0(t)$ 飞行。由于 $\Delta X(t)$ 、 $\Delta U(t)$ 应该比较小，它们将满足线性的状态方程，所以可用线性二次型问题设计出反馈控制 $\Delta U(t) = -G(t)\Delta X(t)$ 。我们可用图 5-1 表示上面的思想。

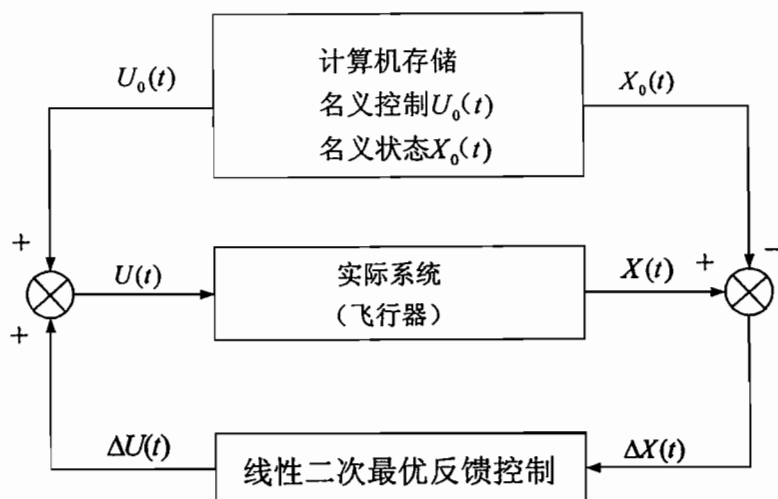


图 5-1 线性二次最优反馈控制的应用

在下面单独讨论线性二次型问题时，为使符号简洁，我们将用 X 和 U 分别代替 $\Delta X(t)$ 和 $\Delta U(t)$ 。

5.2 线性二次型问题的提法

一般情况的线性二次型问题可表示如下：

设线性时变系统的方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (5-1)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \quad (5-2)$$

其中， $X(t)$ 为 n 维状态向量， $U(t)$ 为 m 维控制向量， $Y(t)$ 为 l 维输出向量。设 $U(t)$ 不受约束。

令误差向量 $e(t)$ 为

$$e(t) = Z(t) - Y(t) \quad (5-3)$$

其中， $Z(t)$ 为 l 维理想输出向量。寻找最优控制，使下面的性能指标最小

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (5-4)$$

其中， P 是 $l \times l$ 对称半正定常数阵， $Q(t)$ 是 $l \times l$ 对称半正定阵， $R(t)$ 是 $m \times m$ 对称正定阵。一般将 P 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 取成对角阵。

下面对性能指标 J 中的每一项作一说明。因 $R(t)$ 为正定阵，则当 $U(t) \neq 0$ ，

就有 $U^T(t)R(t)U(t) > 0$ 。例如

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad R(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) & 0 \\ 0 & r_2(t) \end{bmatrix}$$

设 $r_1(t) > 0$, $r_2(t) > 0$, 则 $R(t)$ 为正定阵, 于是

$$\frac{1}{2} \int_0^T U^T(t)R(t)U(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^T [r_1(t)u_1^2(t) + r_2(t)u_2^2(t)]dt$$

它与消耗的控制能量成正比, 消耗得越多, 则性能指标值 J 越大。故性能指标中这一项表示了对消耗控制能量的惩罚。 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 可看作加权系数, 如认为 $u_1(t)$ 的重要性大于 $u_2(t)$, 则可加大 $r_1(t)$ 。将 $R(t)$ 选成时间函数, 是为了对不同时刻的 $U(t)$ 加权不一样。实际上, 为了简单起见常选用常数阵 R 。 $Q(t)$ 为半正定阵, 则当 $e(t) \neq 0$, 就有 $e^T(t)Q(t)e(t) \geq 0$, $\frac{1}{2} \int_0^T e^T(t)Q(t)e(t)dt$ 表示误差平方和积分, 故这项表示对系统误差的惩罚。 $\frac{1}{2} e^T(t_f)Pe(t_f)$ 表示对终端误差的惩罚, 当对终端误差要求较严时, 可将这项加到性能指标中。总之, 性能指标 $J(u)$ 最小表示了要用不大的控制量来保持较小的误差, 以达到能量和误差的综合最优。

下面讨论几种特殊情况:

1) 调节器问题。这时 $C(t) = I$ (单位阵), 理想输出 $Z(t) = 0$, 则 $Y(t) = X(t) = -e(t)$, 这时, 问题归结为用不大的控制量使 $X(t)$ 保持在零值附近。因而称为状态调节器问题。例如电机转速调节系统中, 由于外加电压波动使转速偏离要求值, 通过施加控制使转速偏差趋于零。

2) 伺服机问题。这时 $Z(t) \neq 0$, $e(t) = Z(t) - Y(t)$, 这时要用不大的控制量使 $Y(t)$ 跟踪 $Z(t)$, 因而称为跟踪问题。例如, 用雷达跟踪飞行器的运动, 通过控制使跟踪误差趋于零。

5.3 终端时间有限时连续系统的状态调节器问题

考虑下面的系统状态方程和性能指标 J

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (5-5)$$

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (5-6)$$

要求寻找最优控制 $U(t)$ ，使 J 最小。这里 $U(t)$ 无约束。 P 、 $Q(t)$ 为对称半正定阵， $R(t)$ 为对称正定阵。终端时间 t_f 为有限值。

5.3.1 用极小值原理求解上面的问题

因 $U(t)$ 无约束，故等同于用经典变分法求解。取哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] + \lambda^T(t) [A(t)X(t) + B(t)U(t)] \quad (5-7)$$

最优解的必要条件如下：

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -[Q(t)X(t) + A^T(t)\lambda(t)] \quad (5-8)$$

控制方程为

$$\frac{\partial H}{\partial U} = R(t)U(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0$$

$$U = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (5-9)$$

因 $R(t)$ 正定，故 $R^{-1}(t)$ 存在，由上式可确定最优控制。为寻求最优反馈控制律还需把 $U(t)$ 与状态 $X(t)$ 联系起来。

横截条件为

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial}{\partial X(t_f)} \left[\frac{1}{2} X^T(t_f) P X(t_f) \right] = P X(t_f) \quad (5-10)$$

我们再一次遇到了两点边值问题（已知 $X(t_0)$ 和 $\lambda(t_f)$ ），如前所述，一般要试凑 $\lambda(t_0)$ 再积分协态方程使 $\lambda(t_f)$ 满足要求。但这里处理的是线性微分方程，可找到更简单的解法。从(5-10)可见，协态 $\lambda(t)$ 和状态 $X(t)$ 在终端时刻 t_f 成线性关系。

这启发我们假定：

$$\lambda(t) = K(t)X(t) \quad (5-11)$$

然后再来求出 $K(t)$ （这种方法称为扫描法）。将 (5-11) 代入 (5-9)，再代入 (5-5)，得

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) \quad (5-12)$$

由 (5-11) 和 (5-8) 可得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)X(t) + K(t)\dot{X}(t) = -Q(t)X(t) - A^T(t)K(t)X(t) \quad (5-13)$$

将(5-12)代入(5-13)可得

$$[\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + \\ + A^T(t)K(t) + Q(t)]X(t) = 0$$

上式对任意 $X(t)$ 都应成立，故方括号内的项应为零，这就得出

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \\ + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t) \quad (5-14)$$

上式是 $K(t)$ 的非线性矩阵微分方程，称为黎卡提（Riccati）矩阵微分方程。一般来说得不出 $K(t)$ 的解析表达式，但可用计算机程序算出 $K(t)$ 的数值解。为了求解 $K(t)$ ，要知道它的边界条件。比较(5-11)和(5-10)可知

$$K(t_f) = P \quad (5-15)$$

因此可从 t_f 到 t_0 逆时间积分黎卡提微分方程，求出 $K(t)$ 。由(5-9)和(5-11)就可构成最优反馈控制

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) = -G(t)X(t) \quad (5-16)$$

$G(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 又称为最优反馈增益矩阵。最优反馈系统的结构图如图 5-2 所示。

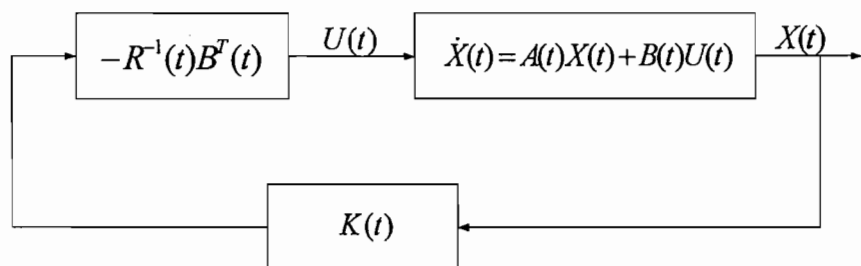


图 5-2 最优反馈系统的结构图

注意到 $K(t)$ 与状态 $X(t)$ 无关，故可在系统未运行前将 $R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 先计算出来（称为离线计算），把它存储在计算机中。在系统运行时，将 $-R^{-1}(t)B^T(t)K(t)$ 从计算机存储元件中取出，与同一时刻测量到的 $X(t)$ 相乘，就可构成最优控制 $U(t)$ 。由此可见，系统运行时的计算量（称为在线计算量）只是一个乘法计算，故可用简单的微计算机来完成。

5.3.2 矩阵黎卡提微分方程的求解及 $K(t)$ 的性质

1、矩阵黎卡提微分方程是非线性的，一般不能求得闭合形式的解。在数字机上求解时，可用一阶差分代替微分

$$\frac{dK(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t}$$

于是可用下面的差分方程来近似黎卡提微分方程

$$\begin{aligned} K(t + \Delta t) \approx & K(t) + \Delta t \{-K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)\} \end{aligned} \quad (5-17)$$

求解上式时，以 $K(t_f) = P$ 为初始条件， Δt 取为负的小量，从 t_f 到 t_0 逆时间递推计算，即可求出 $K(t)$ 。

2、 $K(t)$ 是对称矩阵，即 $K(t) = K^T(t)$ ， T 表示转置。这可证明如下：因为 P 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 都是对称的，将(5-14)式转置一下，可得

$$\begin{aligned} [\dot{K}(t)]^T = \dot{K}^T(t) = & -K^T(t)A(t) - A^T(t)K^T(t) + \\ & + K^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K^T(t) - Q(t) \end{aligned}$$

因此 $K^T(t)$ 和 $K(t)$ 一样满足同一黎卡提方程，并且边界条件一样，即 $K^T(t_f) = P = K(t_f)$ 。于是，由微分方程解的唯一性可知

$$K^T(t) = K(t)$$

利用这个对称性，求 $n \times n$ 维 $K(t)$ 的元时，只需积分 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个方程即可。

3、即使系统是定常的，即系统矩阵 A ，输入矩阵 B 为常数阵，加权阵 Q 和 R 也是常数阵，但 $K(t)$ 仍为时变阵。这从 $K(t)$ 是黎卡提微分方程的解可看出。 $K(t)$ 时变时，反馈控制增益也时变，在实现时总是不太方便。下一段将看到，对线性定常系统，若终端时间 $t_f \rightarrow \infty$ ，且系统满足一些附加条件时， $K(t)$ 将变为常数阵 K 。

例5-1 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1(0) = 1 \quad (5-18)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad x_2(0) = 0$$

寻找最优控制 $u(t)$ 使下面的性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt \quad (5-19)$$

为最小。

解 把状态方程 (5-18) 和 (5-5) 式相比较，把性能指标 (5-19) 和 (5-6) 式相比较，可得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (5-20)$$

考虑到 $K(t)$ 是对称阵，设

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

为简单起见，上式右端省略了自变量 t 。把上面的 A 、 B 、 Q 、 R 和 $K(t)$ 代入黎卡提方程 (5-14) 式，可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{k}_{11} & \dot{k}_{12} \\ \dot{k}_{12} & \dot{k}_{22} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 + k_{12}^2 & -k_{11} + k_{12}k_{22} \\ -k_{11} + k_{22}k_{12} & -2k_{12} + k_{22}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5-22}$$

令上式等号左右端的对应元相等，得

$$\begin{aligned}
\dot{k}_{11} &= -1 + k_{12}^2 \\
\dot{k}_{12} &= -k_{11} + k_{12}k_{22} \\
\dot{k}_{22} &= -2k_{12} + k_{22}^2
\end{aligned} \tag{5-23}$$

这是一组非线性微分方程。由边界条件

$$K(t_f) = P = 0 \tag{5-24}$$

得

$$k_{11}(t_f) = k_{12}(t_f) = k_{22}(t_f) = 0 \tag{5-25}$$

由 t_f 到 t_0 逆时间积分上面的非线性微分方程组，即可求得 $k_{11}(t), k_{12}(t), k_{22}(t)$ 。于是最优控制为

$$\begin{aligned}
u(t) &= -R^{-1}B^TK(t)X(t) = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
&= -k_{12}(t)x_1(t) - k_{22}(t)x_2(t)
\end{aligned}$$

$k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $u(t)$ 随时间变化的曲线可求出，如图 5-3(a)、(b)、(c) 所示。

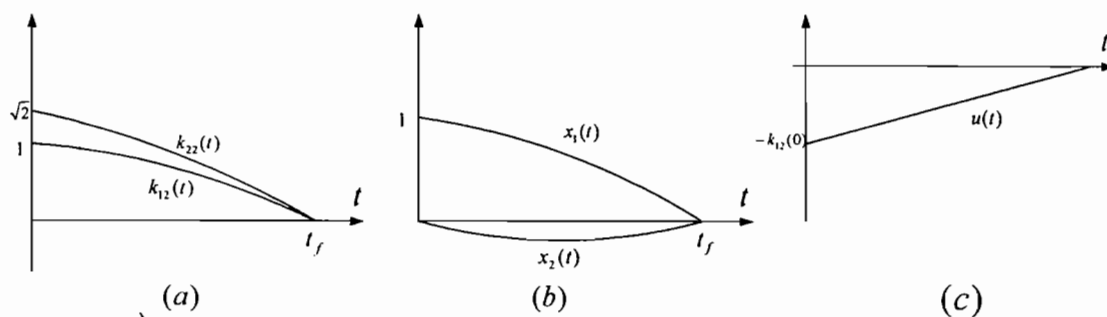


图 5-3 $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $u(t)$ 的时间曲线

由图 5-3 可见, 定常系统的反馈系数 $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 都是时变的。当 t_f 比系统的过渡过程时间大很多时, $k_{12}(t)$ 、 $k_{22}(t)$ 只在接近 t_f 时才有较大的变化, 其它时间接近于常数。当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, \dot{k}_{11} 、 \dot{k}_{12} 和 \dot{k}_{22} 都趋于零, 则黎卡提微分方程变为黎卡提代数方程

$$0 = -1 + k_{12}^2$$

$$0 = -k_{11} + k_{12}k_{22}$$

$$0 = -2k_{12} + k_{22}^2$$

解上面的方程组可得 k_{11} 、 k_{12} 、 k_{22} 的稳态值

$$k_{11} = \sqrt{2} \quad k_{12} = 1 \quad k_{22} = \sqrt{2}$$

于是最优控制律可表示为

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{2} x_2(t) \quad (5-27)$$

最优控制系统的结构图如图 5-4 所示。

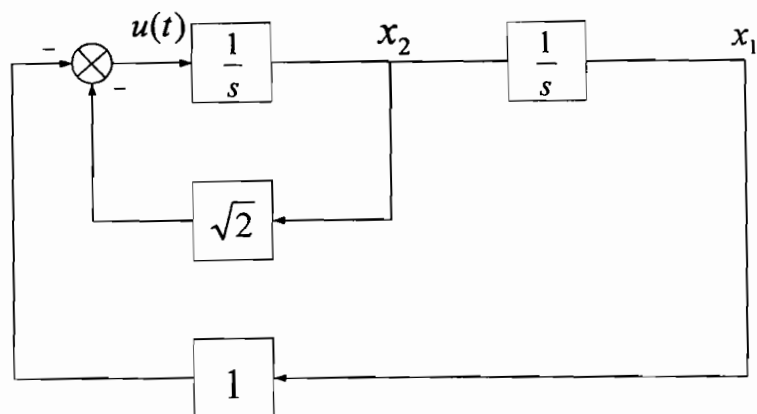


图 5-4 重积分系统最优控制的结构图

5.4 稳态时连续系统的状态调节器问题

现在来研究工程实践中经常碰到的情况: 系统是定常的, 积分指标的上限为无穷大。这种线性二次型问题称为稳态问题。对于稳态问题, 当系统状态方程和

性能指标中的加权阵满足一定条件时,可得出常数的最优反馈增益阵,这样在实现时非常方便,因此有很大的实际意义。我们不加证明地列出下面的结果,然后再对问题中的条件作一些说明。

线性定常系统

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (5-28)$$

X 为 n 维, U 为 m 维, 系统是可控的或至少是可稳的(可稳指不可控的状态是渐近稳定的)。性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (5-29)$$

其中 U 不受约束, Q 和 R 为常数对称正定阵。或者可将对 Q 的要求改为 Q 对称半正定, (A, Q_1) 可观测, 或至少可检测(可检测指不可观测的状态是渐近稳定的), Q_1 是 Q 的矩阵平方根: $Q = Q_1^T Q_1$ 。上节我们已经证明了: 使 J 为极小的最优控制是存在和唯一的, 且可表示为:

$$U(t) = -R^{-1} B^T K X(t) = -G X(t) \quad (5-30)$$

其中 G 为 $m \times n$ 维常数阵, 称为反馈增益阵, K 为 $n \times n$ 维正定对称阵, 满足下面的矩阵黎卡提代数方程

$$-KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q = 0 \quad (5-31)$$

对照有限时间调节器的公式(5-14)可见, 令 $\dot{K}(t) = 0$, 并将时变阵换成常数阵即得到(5-31)式。在 5.5 中将针对离散型系统求取与(5-30)对应的线性二次型状态调节器的控制规律。

我们看到, 与有限时间的调节器不同, 稳态调节器问题附加了两个条件: 系统可控或至少可稳; Q 为对称正定阵, 或 Q 对称半正定并且 (A, Q_1) 可观, 至少可检测, $Q = Q_1^T Q_1$ 。下面对这些条件作些解释。

1) 系统可控或至少可稳。这个要求是为了保证性能指标的积分为有限值(不趋于无穷)而提出的。因为稳态问题的性能指标积分上限为无穷, 为了保证积分值为有限, $X(t)$ 和 $U(t)$ 要收敛到零。也就是受控系统的状态变量必须是渐近稳定的(这时由 $X(t)$ 产生的反馈控制 $U(t)$ 也收敛到零)。如果系统可控, 则通过状

态反馈可任意配置闭环系统极点，使系统渐近稳定。可控的条件可减弱为可稳，即不可控的状态是渐进稳定的。对有限时间调节器来讲，因为积分上限 t_f 为有限值，即使系统不可控，状态变量不稳定，但积分指标仍可为有限值，故仍旧有最优解。

2) Q 为正定或 Q 为半正定并且 (A, Q_1) 可观测至少可检测， $Q = Q_1^T Q_1$ 。这个条件是保证最优反馈系统稳定而提出的，因性能指标 J 取有限值，还不能保证系统稳定。例如只要不稳定的状态变量在性能指标中不出现（未被指标函数所“观测”到）即可。 Q 为半正定时就可能出现这种情况，所以 Q 必须正定。或者 Q 半正定，但还有 (A, Q_1) 可观，至少可检。下面用例子来说明。

例5-2 已知系统方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad (5-32)$$

性能指标是

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [qx^2(t) + ru^2(t)] dt \quad (5-33)$$

要寻找最优控制使 J 最小。

解 设 $a > 0$ ，即未控系统是不稳的，但系统是可控的。若 $q > 0$ ， $r > 0$ ，即 q 、 r 为正定。黎卡提代数方程 (5-31) 化为

$$-Ka - aK + K \frac{1}{r} K - q = 0 \quad (5-34)$$

$$K^2 - 2raK - rq = 0$$

$$K = ar \pm r \sqrt{\frac{q}{r} + a^2}$$

取正定解

$$K = ar + r \sqrt{\frac{q}{r} + a^2} \quad (5-35)$$

由 (5-30) 求得最优控制

$$u(t) = -\frac{1}{r} Kx(t) \quad (5-36)$$

代入状态方程 (5-32)，得

$$\dot{x}(t) = \left[a - \frac{1}{r}K \right] x(t) \quad (5-37)$$

闭环特征根变为

$$a - \frac{1}{r}K = -\sqrt{\frac{q}{r} + a^2} < 0$$

即最优反馈系统是稳定的。

若 $q=0$ (相当于 Q 为半正定), 则指标蜕化为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} r u^2(t) dt$$

从 J 的形式立即可判断出 $u(t)=0$ 时 J 最小。这时无反馈控制作用, 系统保持为开环不稳定。从黎卡提方程来看, 这时有

$$K^2 - 2raK = 0$$

有两个解: $K=0$ 和 $K=2ar>0$ 。只有 $K=0$ 可使 $u=0$, 从而性能指标为最小, 但这时系统不稳定。

例5-3 考虑下面的不可控系统

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t) \quad (5-38)$$

$$\dot{x}_2(t) = ax_2(t) \quad (5-39)$$

性能指标为

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + u^2(t)] dt \quad (5-40)$$

要求出最优控制使 J 为最小。

解 显然, 这个系统的 $x_1(t)$ 是可控的, 而 $x_2(t)$ 不可控, 性能指标中只包含了可控的状态变量 x_1 。由状态方程和性能指标求得

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (5-41)$$

显然 Q 为半正定阵。可控性阵为

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-42)$$

是奇异的，系统不可控。将 Q 阵作下面的分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = Q_1^T Q_1$$

由 (Q_1, A_1) 对构成的可观性阵为

$$[Q_1^T, A^T Q_1^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

是非奇异阵，故 (A, Q_1) 为可观测对。令

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

代入矩阵黎卡提代数方程 (5-31) 可得

$$\begin{aligned} -1 + k_{11}^2 &= 0 \\ -k_{11} + k_{11}k_{12} - ak_{12} &= 0 \\ -2k_{12} - 2ak_{22} + k_{12}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5-44)$$

由上式可解得

$$k_{11} = 1 \quad k_{12} = \frac{1}{1-a} \quad k_{22} = \frac{2a-1}{2a(1-a)^2} \quad (5-45)$$

为保证 K 正定，根据塞尔维斯特判据， K 的各阶主子式应大于零，即

$$k_{11} > 0 \quad k_{22} > 0 \quad k_{11}k_{22} > k_{12}^2 \quad (5-46)$$

将求得的 k_{11} 、 k_{12} 、 k_{22} 的值代入上面正定性条件，可得

$$\frac{2a-1}{2a(1-a)^2} > \frac{1}{(1-a)^2} \quad \text{或} \quad \frac{2a-1}{2a} > 1 \quad (5-47)$$

若 $a > 0$ ，则上式将导致 $-1 > 0$ ，发生矛盾。若 $a < 0$ ，则 $\frac{2a-1}{2a} > 1$ 可成立， K 可

正定。而由 (5-39)， $a < 0$ 时，不可控的状态 $x_2(t)$ 是稳定的，即系统满足可稳的要

求，于是存在正定的最优反馈增益阵 K 。

最优控制可计算如下

$$\begin{aligned}
u(t) &= -R^{-1}B^TKX(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\
&= -k_{11}x_1(t) - k_{12}x_2(t) = -x_1(t) - \frac{1}{1-a}x_2(t)
\end{aligned} \tag{5-48}$$

最优闭环系统为

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) - \frac{a}{1-a}x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= ax_2(t)
\end{aligned} \tag{5-49}$$

闭环系统矩阵为

$$A_{CL} = [A - BR^{-1}B^TK] = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & a \end{bmatrix} \tag{5-50}$$

它的特征根为

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = a \tag{5-51}$$

当 $a < 0$ 时, 闭环系统也是稳定的。

5.5 离散系统的线性二次型问题

先考虑一般的线性时变离散系统在终端时间有限时的状态调节器问题, 再考虑线性定常离散系统在终端时间无限时的稳态状态调节器的问题。

5.5.1 终端时间有限的状态调节器问题

设系统状态方程为

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k) \tag{5-52}$$

$$X(0) = X_0$$

二次型性能指标为

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}X^T(N)P(N)X(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [X^T(k)Q(k)X(k) + \\
&\quad U^T(k)R(k)U(k)]
\end{aligned} \tag{5-53}$$

$P(N)$ 、 $Q(k)$ 为半正定阵， $R(k)$ 为正定阵。要求寻找最优控制序列 $u(k)$ ，使 J 最小。

写出哈密顿函数

$$H(k) = \frac{1}{2} X^T(k) Q(k) X(k) + \frac{1}{2} U^T(k) R(k) U(k) + \lambda^T(k+1) [A(k) X(k) + B(k) U(k)] \quad (5-54)$$

协态方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial X(k)} = Q(k) X(k) + A^T(k) \lambda(k+1) \quad (5-55)$$

横截条件为

$$\begin{aligned} \lambda(N) &= \frac{\partial \phi}{\partial X(N)} = \frac{\partial}{\partial X(N)} \left[\frac{1}{2} X^T(N) P(N) X(N) \right] \\ &= P(N) X(N) \end{aligned} \quad (5-56)$$

控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k)}{\partial U(k)} &= R(k) U(k) + B^T(k) \lambda(k+1) = 0 \\ U(k) &= -R^{-1}(k) B^T(k) \lambda(k+1) \end{aligned} \quad (5-57)$$

假设

$$\lambda(k) = K(k) X(k) \quad (5-58)$$

把 (5-58) 代入协态方程 (5-55) 得

$$K(k) X(k) = Q(k) X(k) + A^T(k) K(k+1) X(k+1) \quad (5-59)$$

由状态方程 (5-52) 和控制方程 (5-57) 可得

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A(k) X(k) + B(k) U(k) \\ &= A(k) X(k) - B(k) R^{-1}(k) B^T(k) K(k+1) X(k+1) \end{aligned}$$

所以

$$X(k+1) = [I + B(k) R^{-1}(k) B^T(k) K(k+1)]^{-1} A(k) X(k)$$

把上式代入 (5-59) 并消去等式两端的 $X(k)$ ，可得 $K(k)$ 必须满足下面的黎卡提

矩阵差分方程

$$K(k) = Q(k) + A^T(k)K(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1}A(k) \quad (5-60)$$

对上式方括号部分应用矩阵求逆引理。

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

$$\text{令 } A = I, \quad B = B(k), \quad C = R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)$$

可得矩阵黎卡提差分方程的另一形式

$$K(k) = Q(k) + A^T(k)K(k+1)A(k) - A^T(k)K(k+1)B(k)[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)K(k+1)A(k) \quad (5-61)$$

黎卡提方程的终端条件为

$$K(N) = P(N) \quad (5-62)$$

从 $k = N$ 开始反向递推计算 (5-60) 即可决定 $K(k)$ 。 $K(k)$ 求出后, 下面来决定

$U(k)$ 。由 (5-55) 得

$$\begin{aligned} \lambda(k+1) &= (A^T(k))^{-1}[\lambda(k) - Q(k)X(k)] \\ &= A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) \end{aligned}$$

因而由 (5-57) 得

$$U(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) \quad (5-63)$$

式 (5-63) 可化为另一形式, 将 (5-60) 代入 (5-63) 并利用 (5-61) 得

$$\begin{aligned} U(k) &= -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1}A(k)X(k) \\ &= -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1} \cdot \\ &\quad \{[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)] - B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\}A(k)X(k) \\ &= -R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)\{I - [I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1}B(k)R^{-1}(k)B^T(k) \cdot \\ &\quad K(k+1)\}A(k)X(k) \\ &= -\{R^{-1}(k) - R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)[I + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)K(k+1)]^{-1} \cdot \end{aligned}$$

$$B(k)R^{-1}(k)\}B^T(k)K(k+1)A(k)X(k)$$

对上式花括号内引用前面的矩阵求逆引理

取 $A = R(k)$, $B = B^T(k)K(k+1)$, $C = B(k)$ 可得

$$\begin{aligned} U(k) &= -[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k)X(k) \\ &= -L(k)X(k) \end{aligned} \quad (5-64)$$

$$L(k) = [R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k) \quad (5-65)$$

$L(k)$ 是最优反馈增益阵。

例 5-4 设系统状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) \text{ 给定} \quad (5-66)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}cx^2(2) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^1 u^2(k) \quad (5-67)$$

要求寻找最优序列 $u(0)$ 、 $u(1)$ ，使 J 最小。

解 从给定的系统方程可见，系统矩阵 $A(k)=1$ ，输入矩阵 $B(k)=1$ 。从给定的性能指标可知加权阵 $P(N)=c$ ， $Q(k)=0$ ， $R(k)=1$ 。黎卡提方程 (5-60) 可写成

$$\begin{aligned} K(k) &= Q(k) + A^T(k)[K^{-1}(k+1) + B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k) \\ &= [K^{-1}(k+1) + 1]^{-1} = \frac{K(k+1)}{K(k+1) + 1} \end{aligned} \quad (5-68)$$

终端值 $K(2) = P(2) = c$ 。由 $k=2$ 反向计算，求出 $K(1)$ 、 $K(0)$ 。

$$K(1) = \frac{K(2)}{K(2) + 1} = \frac{c}{c + 1} \quad (5-69)$$

$$K(0) = \frac{K(1)}{K(1) + 1} = \frac{c}{2c + 1} \quad (5-70)$$

再利用 (5-63) 式计算 $u(k)$ ， $k=0, 1$ 。

$$u(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]X(k) = -K(k)X(k)$$

$$u(0) = -K(0)x(0) = -\frac{c}{2c+1}x(0) \quad (5-71)$$

$$x(1) = x(0) + u(0) = \frac{c+1}{2c+1}x(0) \quad (5-72)$$

再计算 $u(1)$

$$u(1) = -K(1)x(1) = -\frac{c}{c+1}x(1) = -\frac{c}{2c+1}x(0) \quad (5-73)$$

5.5.2 稳态状态调节器问题

设系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) \quad (5-74)$$

X 为 n 维状态向量, U 为 m 维输入向量。性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k)] \quad (5-75)$$

假设 (A, B) 可控或可稳, R 为对称正定的常数阵, Q 为对称正定的常数阵, 或 Q 为对称半正定常数阵, 但 (A, Q_1) 可观测或可检测, $Q = Q_1^T Q_1$ 。要求寻找最优控制使 J 最小。

可以证明, 对于上面的问题, 最优控制是存在和唯一的, 它可以表示为

$$U(k) = -LX(k) \quad (5-76)$$

L 为 $m \times n$ 维的常数反馈增益阵, 参考 (5-65), 将时变阵换成常数阵, L 可表示为

$$L = (R + B^T KB)^{-1} B^T KA \quad (5-77)$$

其中 K 为 $n \times n$ 常数阵, 是下面的矩阵黎卡提代数方程的唯一的对称正定解。在 (5-61) 的矩阵黎卡提差分方程中, 将时变阵换为常数阵, 即可得出矩阵黎卡提代数方程为

$$-K + Q + A^T KA - A^T KB(R + B^T KB)^{-1} B^T KA = 0 \quad (5-78)$$

最优反馈控制系统为

$$X(k+1) = [A - BL]X(k) \quad (5-79)$$

它是渐近稳定的, 即 $[A - BL]$ 的特征值的模小于 1。

下面用例子来说明上述结果的应用。

例 5-5 系统的状态方程为

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + u(k) \quad (5-80)$$

性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [qx_1^2(k) + u^2(k)] \quad (5-81)$$

寻找最优控制使 J 最小。

解 由状态方程 (5-80) 和性能指标 (5-81) 可求得下面的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1 \quad (5-82)$$

因 $[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 非奇异, 故系统可控。

当 $q > 0, Q$ 为半正定, 故有下面的分解

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{q} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} \sqrt{q} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q_1^T \quad A^T Q_1^T] = \begin{bmatrix} \sqrt{q} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{bmatrix} \quad (5-83)$$

(5-83) 非奇异, 故 (A, Q_1) 对可观测。于是满足稳态状态调节器问题的条件。由

(5-78) 令 $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$, 黎卡提方程可写成

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{11} + 2k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{A^T K A} =$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{A^T K B} \underbrace{\frac{1}{1 + k_{22}}}_{[R + B^T K B]^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k_{12} + k_{22} \end{bmatrix}}_{B^T K A} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由上式可解得

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + 4q}) \end{bmatrix} \quad (5-84)$$

由 (5-76)、(5-77) 可得

$$\begin{aligned}
U(k) &= -LX(k) = \frac{-1}{1 + k_{22}} \begin{bmatrix} 0 & k_{12} + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \\
&= \frac{-(k_{12} + k_{22})}{1 + k_{22}} x_2(k) = -\frac{q + \sqrt{q^2 + 4q}}{2 + q + \sqrt{q^2 + 4q}} x_2(k)
\end{aligned}$$

最优反馈增益阵

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{12} + k_{22}}{1 + k_{22}} \end{bmatrix}$$

闭环系统的系统矩阵为

$$\begin{aligned}
A_{CL} &= A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{12} + k_{22}}{1 + k_{22}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{1 + k_{22}} \end{bmatrix} \\
k_{22} &= \frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + 4q})
\end{aligned}$$

闭环特征根为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{1 + k_{22}}$ 。显然, 根的模都小于 1, 闭环系统稳定。由状

态方程 (5-80) 可见, 开环系统的根为 $\lambda_1' = 0, \lambda_2' = 1$, 系统不是渐近稳定的。当

$q = 0$, 于是 $k_{22} = 0, \lambda_2 = 1$, 闭环系统不是渐近稳定的, 这是由于 $q = 0$ 不满足可

观性条件, 即 (5-83) 式为奇异阵, 这时稳态状态调节器的最优控制解是不存在的。

此外, 当 $q \rightarrow \infty$, 则有 $k_{22} \rightarrow \infty, \lambda_2 \rightarrow 0$ 。

5.6 伺服跟踪问题

设系统的状态方程和输出方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (5-85)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \quad (5-86)$$

其中, X 为 n 维, U 为 m 维, Y 为 q 维。设理想输出为 $Z(t)$, 跟踪误差 $e(t)$ 为

$$e(t) = Z(t) - Y(t) \quad (5-87)$$

寻找控制 u (u 不受约束) 使下列性能指标最小

$$J = \frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (5-88)$$

其中 $R(t)$ 为正定阵, P 、 $Q(t)$ 为半正定阵, t_f 给定。

跟踪问题的哈密顿函数为

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} [Z(t) - C(t)X(t)]^T Q(t) [Z(t) - C(t)X(t)] \\ & + \frac{1}{2} U^T(t) R(t) U(t) + \lambda^T(t) [A(t)X(t) + B(t)U(t)] \end{aligned} \quad (5-89)$$

因 U 无约束, 由控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial U} = R(t)U(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0$$

可得

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (5-90)$$

由协态方程得出

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & -\frac{\partial H}{\partial X(t)} = -C^T(t)Q(t)C(t)X(t) - A^T(t)\lambda(t) \\ & + C^T(t)Q(t)Z(t) \end{aligned} \quad (5-91)$$

由横截条件得

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} = \frac{\partial}{\partial X(t_f)} \left[\frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) \right]$$

$$= C^T(t_f)P[C(t_f)X(t_f) - Z(t_f)] \quad (5-92)$$

由上式可见 $\lambda(t_f)$ 中有一项与 $X(t_f)$ 成线性关系, 另一项与理想输出 $Z(t_f)$ 成线性关系。根据扫描法的思想, 令

$$\lambda(t) = K(t)X(t) - g(t) \quad (5-93)$$

其中矩阵 $K(t)$ 和向量时间函数 $g(t)$ 待定。将 (5-93) 式对 t 微分, 得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{K}(t)X(t) + K(t)\dot{X}(t) - \dot{g}(t) \quad (5-94)$$

设法从上式中消去 $\dot{X}(t)$, 为此把 (5-90) 和 (5-93) 代入状态方程 (5-85), 可求出

$$\dot{X}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]X(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) \quad (5-95)$$

将 (5-95) 代入 (5-94), 即得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & [\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]X(t) \\ & + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) - \dot{g}(t) \end{aligned} \quad (5-96)$$

另外, (5-93) 代入 (5-91) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & [-C^T(t)Q(t)C(t) - A^T(t)K(t)]X(t) + A^T(t)g(t) \\ & + C^T(t)Q(t)Z(t) \end{aligned} \quad (5-97)$$

(5-96) 减去 (5-97) 可得

$$\begin{aligned} 0 = & [\dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \\ & + C^T(t)Q(t)C(t)]X(t) + [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) \\ & - \dot{g}(t) - C^T(t)Q(t)Z(t) \end{aligned} \quad (5-98)$$

上式对任意的 $X(t)$ 、 $Z(t)$ 均应成立, 于是可得

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) \\ & - C^T(t)Q(t)C(t) \end{aligned} \quad (5-99)$$

$$\dot{g}(t) = [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) - C^T(t)Q(t)Z(t) \quad (5-100)$$

上面的微分方程组的边界条件可推导如下：由（5-93）得

$$\lambda(t_f) = K(t_f)X(t_f) - g(t_f)$$

而由（5-92）得

$$\lambda(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f)X(t_f) - C^T(t_f)PZ(t_f)$$

比较上面两式，可得

$$K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f) \quad (5-101)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)PZ(t_f) \quad (5-102)$$

由上面的 t_f 时的边界条件出发，逆时间积分（5-99）和（5-100）即可求出 $K(t)$ 、 $g(t)$ 。于是，最优控制可根据（5-90）和（5-93）求得为

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)X(t) - g(t)] \quad (5-103)$$

$U(t)$ 中一项与状态 $X(t)$ 成正比（同状态调节问题），另一项与时间函数 $g(t)$ 成正比，而 $g(t)$ 是与理想输出 $Z(t)$ 有关的，故它表示了跟踪 $Z(t)$ 的驱动作用。

值得指出的是：为了求出当时时刻的 $g(t)$ ，需要知道全部未来时刻的 $Z(\tau)$ ， $t \leq \tau \leq t_f$ 。这是因为积分（5-100）求 $g(t)$ 是从 t_f 逆时间进行的。于是在实现最优控制时，必须预先知道 $Z(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 中的变化规律。在某些情况下能做到这点，如跟踪卫星时，卫星的运动可事先计算出来。但大部分情况下 $Z(t)$ 的将来值是未知的，如导弹攻击敌机，敌机的运动规律不知道。这时可有两种处理方法：一种是根据对 $Z(t)$ 的测量，预报它的将来值，另一种是将 $Z(t)$ 看成随机的。用后一种处理方法时，当然只能得到统计平均意义下的最优。

例5-6 已知一阶系统

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t)$$

$$y(t) = x(t) \quad (5-104)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}pe^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [qe^2(t) + ru^2(t)]dt \quad (5-105)$$

其中 $p \geq 0$, $q > 0$, $r > 0$ 。寻找最优控制 $u(t)$ 使 J 最小。

解 由 (5-104) (5-105) 知 $A = a$, $B = 1$, $C = 1$, $Q = q$, $R = r$, $P = p$

由 (5-103) 得

$$u(t) = \frac{1}{r} [g(t) - K(t)x(t)] \quad (5-106)$$

由 (5-99) 可得标量函数 $K(t)$ 满足下面的一阶黎卡提方程

$$\dot{K}(t) = -2aK(t) + \frac{1}{r} K^2(t) - q \quad (5-107)$$

由 (5-101) 求得边界条件

$$K(t_f) = p$$

标量函数 $g(t)$ 满足微分方程 (5-100), 即

$$\dot{g}(t) = -\left[a - \frac{1}{r} K(t)\right] g(t) - qZ(t)$$

边界条件由 (5-102) 求得为

$$g(t_f) = pZ(t_f)$$

最优轨线 $x(t) = y(t)$ 由 (5-95) 求得:

$$\dot{x}(t) = \left[a - \frac{1}{r} K(t)\right] x(t) + \frac{1}{r} g(t)$$

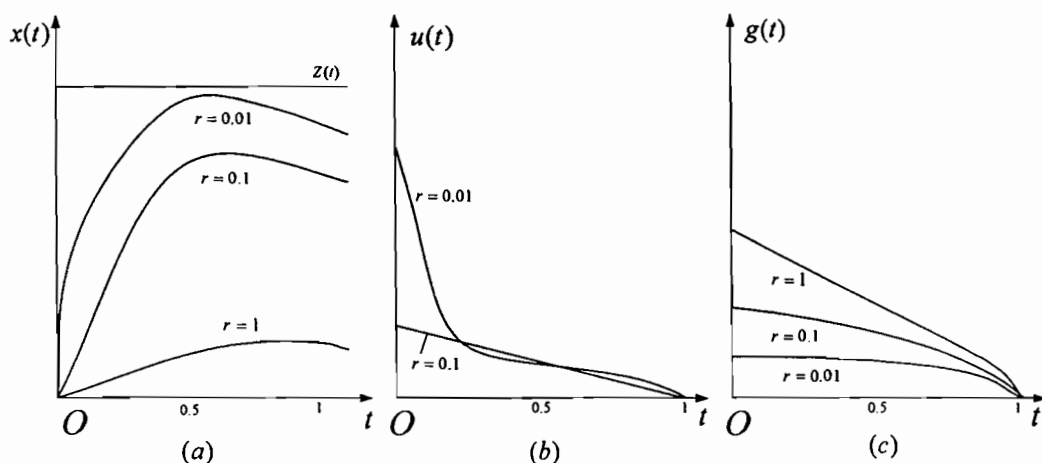


图 5-5 $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $g(t)$ 以 r 为参数的时间曲线

图 5-5 (a) 表示了当 $a = -1$, $x(0) = 0$, $p = 0$, $q = 1$, $t_f = 1$ 和理想输出 $Z(t) = 1(t)$

时,以 r 为参数的最优 $x(t)$ 的一组曲线。由图可见,随着 r 的减小, $x(t)$ 跟踪 $Z(t)$ 的能力增强。此外,在接近 $t_f=1$ 时,跟踪误差又回升,这时因为 $p=0$, $g(t_f)=K(t_f)=0$,使 $u(t_f)=0$ 的缘故。图 5-5 (b)表示了最优控制曲线,随着 r 的减小, $u(t)$ 增大,所以提高跟踪能力是以增大控制量为代价的。图 5-5 (c) 是 $g(t)$ 的变化曲线。由图 5-5 (a)可见当 $r=0.01$,也就是 q 的百分之一时,控制量较大才获得较好的跟踪性能。

5.7 设计线性二次型最优控制的若干问题

线性二次型最优控制的设计步骤可大致归结为:

- 1) 给出系统的数学模型,通常以 $\dot{X} = AX + BU$ 、 $Y = CX$ 的形式给出(本章只讨论了 C 为单位阵的情况)。
- 2) 给定二次型性能指标中的加权矩阵 P 、 Q 、 R 。通常选用常数对角阵。
- 3) 解黎卡提方程。对定常系统,终端时间 t_f 无穷的稳态问题可解矩阵黎卡提代数方程,其它情况一般要解矩阵黎卡提微分方程,或矩阵黎卡提差分方程。对连续系统得到 $K(t)$ 或 K 以后,可求得反馈增益阵 $G(t)$ 或 G 。对离散系统则是求得反馈增益矩阵 $L(k)$ 或 L ,若 L 或 G 阵各元素的值太大,不易在系统中实现,则要更换 Q 、 R 、 P 阵,并返回到步骤 2),若 L 或 G 阵各元素的值合理,则进行步骤 4)。
- 4) 构成闭环系统,求解在典型输入或初始条件下各状态变量的动态响应,若响应不满足要求,则要进一步改变 Q 、 R 、 P 阵,并返回步骤 2),若满足要求,则停止计算。一般来说,把 Q 中某个加权系数增大,则对应的状态变量会收敛得更快些, R 中某个加权系数增大则对应的控制量会小些。

从上面的设计步骤可看出,这是一个试凑的过程。若 Q 、 R 阵选择得合理,

就可以减少试凑次数。若 Q 、 R 选择不合理，设计出来的系统是不满意的。因此所谓“最优”控制只是使 J 取最小值，并不一定保证系统的特性在实用中“最优”。另外，采用合理的计算方法可以使黎卡提方程的求解快速和精确。下面对这两个问题作一些简单的讨论。

(一) 加权阵的选择。若已知各状态变量和控制变量允许的最大值为 $x_{1\max}$ ， $x_{2\max}$ ，…… $x_{n\max}$ 和 $u_{1\max}$ ， $u_{2\max}$ ，…… $u_{m\max}$ ，则作为初始选择，可令

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{1\max}^2} & & & \\ & \frac{1}{x_{2\max}^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{x_{n\max}^2} \end{bmatrix} \quad (5-108)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_{1\max}^2} & & & \\ & \frac{1}{u_{2\max}^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{u_{m\max}^2} \end{bmatrix}$$

然后，再根据情况进行调整，直至设计结果满意为止。

(二) 对黎卡提矩阵微分方程的求解，建议采用变步长的四阶龙格——库塔法。不推荐用欧拉法，因为它的数值特性不好。龙格——库塔法的计算机程序在一般的计算机数学库中都可找到。黎卡提矩阵代数方程的数值求解也不是一件容易的事，它的解法有很多种。这里介绍一种迭代法（称为牛顿方法）。在 (5-31) 所示的黎卡提代数方程中，加上一项 $KBR^{-1}B^TK$ 再减去 $KBR^{-1}B^TK$ 可得

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q + KBR^{-1}B^TK - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (5-109)$$

因为

$$(A - BR^{-1}B^TK)^TK = (A^T - KBR^{-1}B^T)K = A^TK - KBR^{-1}B^TK$$

故 (5-109) 可写成

$$K(A - BR^{-1}B^TK) + (A - BR^{-1}B^TK)^TK + (Q + KBR^{-1}B^TK) = 0$$

迭代格式为

$$\begin{aligned} K_{i+1}(A - BR^{-1}B^TK_i) + (A - BR^{-1}B^TK_i)^TK_{i+1} \\ = -(Q + K_iBR^{-1}B^TK_i) \end{aligned} \quad (5-110)$$

上式是关于 K_{i+1} 的线性方程, 当已求得第 i 步的 K_i 后, 很容易求得下一次迭代值 K_{i+1} 。一般来说迭代不一定收敛, 但已证明, 若选择初始估计 K_0 使得闭环系统方程 $(A - BR^{-1}B^TK_0)$ 稳定, 则迭代将收敛到黎卡提代数方程的唯一正定解。收敛标准可用

$$\sum_{l,j}^n [k_{i+1}(l,j) - K_i(l,j)]^2 \leq \varepsilon \quad (5-111)$$

其中, $K(l,j)$ 表示 K 矩阵的第 l 行第 j 列元素, ε 是指定的小数。

5.8 小结

1、本节讨论了线性系统二次型指标的最优控制问题, 这时可得到线性的最优反馈控制律, 即控制量正比于状态变量, 可写成 $u(t) = -G(t)X(t)$, 或 $u(k) = -L(k)X(k)$ 。把这种线性二次型问题的最优控制与非线性系统的开环控制结合起来, 还可减少开环控制的误差。线性二次型问题的最优控制一般可分状态调节器问题和伺服跟踪问题两大类。

2、对于终端时刻 t_f 有限的连续系统状态调节器问题, 要求加权阵 P 、 Q 为对称半正定, R 为对称正定, 但并不要求系统完全可控。这时最优控制可写成 $U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)X(t) = -G(t)X(t)$ 。 $K(t)$ 满足黎卡提矩阵微分方程 (5-14), 终端条件 $K(t_f) = P$ 。从 t_f 到 t_0 逆向积分 (5-14) 即可求得 $K(t)$, 积分方法建议采用变步长四阶龙格—库塔法。对离散系统有类似要求, 最优控制

$U(k) = -[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k)$ 。 $K(k)$ 满足矩阵黎卡提差分方程。

3、当连续系统是定常的, t_f 为无限时, 可得到所谓稳态状态调节器问题。

这时的附加条件是: 系统要可控, 至少可稳; Q 要正定, 或 Q 半正定, 但 (A, Q_1) 可观测, 至少可检, $Q = Q_1^T Q_1$ 。满足这些条件后, $U(t) = -R^{-1} B^T KX(t) = -GX(t)$, G 为常数阵。 K 满足黎卡提矩阵代数方程。可用牛顿迭代法求解。离散系统的稳态状态调节器的求解是类似的, 由 (5-76)、(5-77) 得 $U(k) = -(R + B^T KB)^{-1} B^T KAX(k)$, 而 K 满足黎卡提代数方程 (5-78)。

4、跟踪问题的解法可表示为 $U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[K(t)X(t) - g(t)]$, $K(t)$ 、 $g(t)$ 满足微分方程 (5-99)、(5-100), 终端条件为 (5-101)、(5-102), 即 $K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f)$, $g(t_f) = C^T(t_f)PZ(t_f)$, $Z(t)$ 是理想输出。

5、设计线性二次型最优控制系统时, 关键问题是要选择合理的 Q 、 R 、 P 阵, 另外, 要选择好的数值方法来求解黎卡提方程。

5.9 习题

1. 已知二阶系统的状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

性能泛函

$$J = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt$$

求最优控制。

2. 能控的系统其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

这是一种双积分系统,其输出为 $x_1(t)$,其输入为 $u(t)$,其传递函数为

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2}$$

其性能泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

其中 $a^2 - b^2 > 0$

求最优控制。

$$3. \min J = \int_0^{\infty} (x_2^2 + 0.1u^2)dt$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

求最优控制。

4. 线性系统的状态方程

$$\dot{x}(t) = -u(t), \quad x(0) = 1$$

$$\text{性能泛函} \quad J = \int_0^{\infty} (x^2(t) + u^2(t))dt$$

试求最优控制函数。

$$5. \quad \min J = \sum_{k=0}^2 (x_k^2 + u_k^2)$$

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

试求最优控制函数。

6. 给定一阶系统 $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(1) = 3$, 性能泛函

$$J = x^2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2(t)dt$$

试求最优控制 u^* , 使 J 取极小值。

7. 对一维线性系统

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$J = x^2(N) + 4\beta \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k), \quad (\beta \text{ 为正常数})$$

求使 J 取最小值的最优控制。

$$8. \min_{u(k)} J = \frac{1}{2} \sum_0^9 u^2(k), \quad \text{s.t. } x(k+1) = x(k) + \alpha u(k), \quad x(0) = 1, x(10) = 0$$

求最优控制 $u^*(k)$ 和最优轨迹 $x^*(k)$ 。

9. 上机作业:

a. 已知系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u,$$

其中: $\tau = 2$. 设计控制系统使得目标函数

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) & \ddot{h}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + 2u^2(t) dt$$

最小。

(1) 求状态反馈增益阵。

(2) 当系统的初始状态为 $x(0) = [10 \ 0 \ 0]^T$ 时, 进行闭环仿真。画出控制变量和状态变量的变化曲线。

(3) 画出 Nyquist 曲线和找出稳定裕度。

(4) 当 Q 和 R 变化时, 即

$$a. \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 200; \quad b. \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2;$$

$$c. \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2.$$

系统在相同的初始条件下，控制变量和状态变量的变化曲线。

(5) 随着 Q 和 R 变化画出闭环极点的根轨迹。

b. 已知系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

设计一控制系统使得目标函数

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x_3^2(t) + x_4^2(t) + \rho u^T(t) u(t) dt$$

最小。

(1) 当 $\rho = 2$ ，求状态反馈增益阵。

(2) 当系统的初始状态为 $x(0) = [0 \ 0 \ 50 \ 20]^T$ 时，进行闭环仿真。画出控制变量和状态变量的变化曲线。

(3) 当 a. $\rho = 0.02$; b. $\rho = 200$. 时，系统在相同的初始条件下，控制变量和状态变量的变化曲线。

(4) 随着 ρ 的变化画出闭环极点的根轨迹。

第六章 动态规划

动态规划是贝尔曼(Bellman)在五十年代为解决多级决策过程而提出来的。它可以解决很多领域中的问题,如生产过程的决策,收益和投资问题,有多级反应器的化工装置的设计,多级轧钢机的最速轧制问题,资源分配、机器负荷分配、生产计划编制,特别是控制工程问题。它和极小值原理一样,可解决控制变量受约束的最优控制问题,而且在这两种方法之间存在某种内在的联系。动态规划的中心思想是利用所谓“最优性原理”,把一个 N 级决策过程化为 N 个单级决策过程,从而使问题简单。

6.1 多级决策的例子——最短时间问题

为了便于理解动态规划的思想,我们来研究图 6-1 所示的最短时间问题。设有人要从 A 点开车到 E 站,中间要经过任意三个中间站,站名在图中圆圈内表示。站与站之间称为段,每段路程所需时间(小时)标在段上。现要问,这人应如何选择路线才能最快到达目的地?

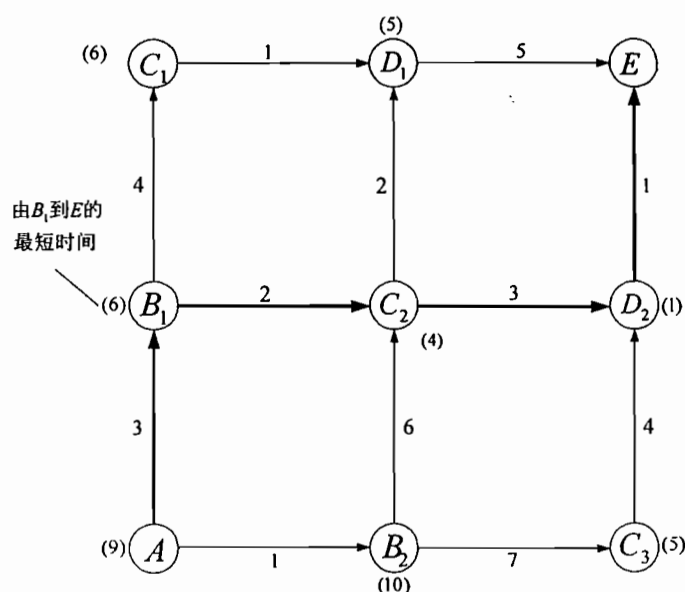


图 6-1 按最短时间的路径选择

(一) 穷举法

从 A 走到 E 一共有六条路线,每条路线由四段组成。这六条路线和对应的行车时间如下

路 线	行车时间（小时）
$AB_2C_3D_2E$	13
$AB_2C_2D_2E$	11
$AB_2C_2D_1E$	14
$AB_1C_1D_1E$	13
$AB_1C_2D_1E$	12
$AB_1C_2D_2E$	9

显然最优路线是 $AB_1C_2D_2E$ ，它所花时间为 9 小时。这里每条路线由四段组成，也可以说是四级决策。为了计算每条路线所花时间，要做三次加法运算，为了计算六条路线所花的时间要作 $3 \times 6 = 18$ 次运算。这种方法称为“穷举法”。显然当段数很多时，计算量是很大的。这种方法的特点是从起点站往前进行，而且把这四级决策一起考虑。应注意从 A 到下一站 B_2 所花的时间为 1，而到 B_1 所花时间为 3，但最优路线却不经过 B_2 。这说明只看下一步的“眼前利益”来作决策是没有意义的。

（二）动态规划法

为将问题表达得清楚，引进下面的术语。

令 n 表示由某点到终点 E 的段数（如 C_2 到 E 为 2 段）。

令 x 表示当前所处点的位置（如， A, B_1, C_2 ），称为状态变量。

令 $u_n(x)$ 为决策（控制）变量，它表示当处在 x 位置而还有 n 段要走时，所要选取的下一点。例如，从 C_2 出发，下一点为 D_2 时，则表示为 $u_2(C_2) = D_2$ 。

令 $T_n(x)$ 表示在位置 x ，向终点还有 n 段要走时，由 x 到终点 E 的最短时间。例如，从 C_2 到 E 的最短时间为 4，可表示为 $T_2(C_2) = 4$ 。

令 $t_n(x, u_n)$ 表示从 x 点到 $u_n(x)$ 点的时间。例如，从 C_2 到 D_2 的时间为 $t_2(C_2, D_2) = 3$

有了这些术语后,就可用动态规划来解这个例子。从最后一段出发进行计算,并将计算出的最短时间 $T_n(x)$ 用括号表示在相应的点 x 处(见图 6-1)。

- 1、 $n=1$ (倒数第一段) 考虑从 D_1 和 D_2 到 E 的路线,由定义可知,最短时间分别为

$$T_1(D_1) = 5 \qquad T_1(D_2) = 1$$

- 2、 $n=2$ (倒数第二段) 考虑从 C_1 、 C_2 或 C_3 到 E 的路线。由 C_2 到 E 有两种路线: C_2D_1E , C_2D_2E 。两种路线中的最短时间由下式确定:

$$T_2(C_2) = \min_{D_1, D_2} \left\{ \begin{array}{l} t(C_2, D_1) + T_1(D_1) \\ t(C_2, D_2) + T_1(D_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2+5 \\ 3+1 \end{array} \right\} = 4$$

最优决策为 $u_2(C_2) = D_2$ 。

由 C_1 到 E 只有一种路线 C_1D_1E ,其时间为 $T_2(C_1) = 1+5 = 6$

由 C_3 到 E 也只有一种路线 C_3D_2E ,其时间为

$$T_2(C_3) = 4+1 = 5$$

- 3、 $n=3$ (倒数第三段) 考虑从 B_1 或 B_2 到 E 的路线。 B_1 到 E 有两种路线: B_1C_1E 和 B_1C_2E 。最短时间为

$$T_3(B_1) = \min_{C_1, C_2} \left\{ \begin{array}{l} t(B_1, C_1) + T_2(C_1) \\ t(B_1, C_2) + T_2(C_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 4+6 \\ 2+4 \end{array} \right\} = 6$$

最优决策 $u_3(B_1) = C_2$

从 B_2 到 E 有两种路线: B_2C_3E 和 B_2C_2E 。最短时间为

$$T_3(B_2) = \min_{C_2, C_3} \left\{ \begin{array}{l} t(B_2, C_3) + T_2(C_3) \\ t(B_2, C_2) + T_2(C_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 7+5 \\ 6+4 \end{array} \right\} = 10$$

最优决策为 $u_3(B_2) = C_2$ 。

- 4、 $n=4$ (倒数第四段) 从 A 到 E 的路线有两种: AB_1E 和 AB_2E 。最短时间为:

$$T_4(A) = \min_{B_1, B_2} \left\{ \begin{array}{l} t(A, B_1) + T_3(B_1) \\ t(A, B_2) + T_3(B_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 3+6 \\ 1+10 \end{array} \right\} = 9$$

最优决策为 $u_4(A) = B_1$ 。

至此求出了 A 到 E 的最短时间为 9，最优路线为 $AB_1C_2D_2E$ 。在图 6-1 中用粗线表示。这里，为决定最优路线进行了 10 次加法，比穷举法的 18 次少了 8 次。当段数 n 更多时，节省计算将会更多。

从上面解题过程可见，动态规划解题的两个特点：它是从最后一级往后倒着计算的；它把一个 N 级决策问题（这里是决定一整条路线）化为 N 个单级决策问题，即把一个复杂问题化为多个简单问题来求解。我们可看出 n 阶段与 $n-1$ 阶段有下面的关系（ $n=1, 2, \dots, N$ ）

$$T_n(x) = \min_{u_n(x)} \{ t[x, u_n(x)] + T_{n-1}[u_n(x)] \} \quad (6-1)$$

$$T_1(x) = t_1(x, E) \quad (\text{表示最后一级})$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

(6-1)式称为函数方程，从(6-1)式可见，在选择了决策 $u_n(x)$ 后有两个影响，其一是直接影响下一段的时间 t （眼前利益），其二是影响以后 $n-1$ 段的最短时间 T_{n-1} （未来利益）。因此动态规划方法可以说是把眼前利益和未来利益区分开来又结合起来考虑的一种优化方法。这些特点都是由动态规划法的基本原理——最优性原理所决定的。

6.2 最优性原理

贝尔曼的最优性原理可叙述如下：

“一个多级决策问题的最优决策具有这样的性质：当把其中任何一级及其状态作为初始级和初始状态时，则不管初始状态是什么，达到这个初始状态的决策是什么，余下的决策对此初始状态必定构成最优策略。”

以上面的最短时间问题为例，如把 C_2 当作初始状态，则余下的决策 C_2D_2E

对 C_2 来讲是最优策略；如把当 B_1 初始状态，则余下的决策 $B_1C_2D_2E$ 对 B_1 来讲也构成最优策略。一般来说，如果一个最优过程用状态 x_0, x_1, \dots, x_N 来表示，最优决策为 u_0, u_1, \dots, u_{N-1} ，则对状态 x_k 来讲， $u_k, u_{k+1}, \dots, u_{N-1}$ 必定是最优的，这可用图 6-2 来表示。

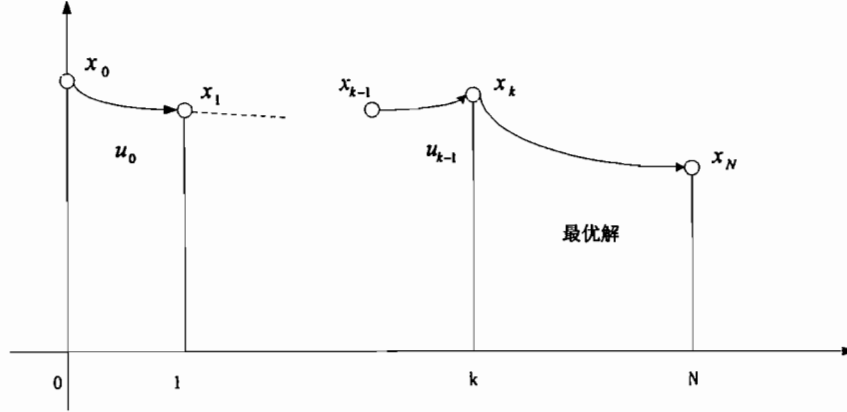


图 6-2 最优性原理示意图

在多数实际问题中， N 级决策的性能指标 J 取如下形式

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k, u_k)$$

$F(\cdot, \cdot)$ 是由某级状态和决策决定的性能函数，要求寻找决策 u_0, u_1, \dots, u_{N-1} 使 J 取极小值 J_N^* 。最优性原理可表示为

$$\begin{aligned} J_N^* &= \min_{u_0, \dots, u_{N-1}} \{F(x_0, u_0) + F(x_1, u_1) + \dots + F(x_{N-1}, u_{N-1})\} \\ &= \min_{u_0} \{F(x_0, u_0) + \min_{u_1, \dots, u_{N-1}} [F(x_1, u_1) + \dots + F(x_{N-1}, u_{N-1})]\} \\ &= \min_{u_0} \{F(x_0, u_0) + J_{N-1}^*\} \end{aligned} \quad (6-2)$$

根据上式就可证明最优性原理的正确性。若以 x_1 为初态时，余下的决策 u_1, \dots, u_{N-1} 不是最优的，那么就存在另一决策序列 u'_1, \dots, u'_{N-1} 所决定的指标值 $J'_{N-1} < J_{N-1}^*$ ，于是

$$J_N^* = \min_{u_0} \{F(x_0, u_0) + J_{N-1}^*\} > J'_N = \min_{u_0} \{F(x_0, u_0) + J'_{N-1}\}$$

这与 J_N^* 是极小值发生矛盾，所以余下的决策必须是最优的。

(6-1) 式的函数方程与 (6-2) 式所表示的最优性原理是一致的，只是表示

方法不同。(6-1) 式中 $u_n(x)$ 的下标 n 表示离终点的级数, (6-2) 式中 u_k 的下标 k 表示离起点的级数。两式的对照留给读者去做。

将 (6-2) 式进一步分解为

$$\min_{u_0, \dots, u_{N-1}} J_N = \min_{u_0} \left[F(x_0, u_0) + \min_{u_1} \left[F(x_1, u_1) + \dots + \min_{u_{N-1}} [F(x_{N-1}, u_{N-1})] \right] \right] \quad (6-3)$$

由上式可见, 最优化的过程是从最里面的方括号开始向外扩展的, 即寻找最优控制的次序是 $u_{N-1}, u_{N-2}, \dots, u_1, u_0$ 。因此根据最优性原理, 动态规划是从最后一级倒退计算的。

6.3 用动态规划解资源分配问题

我们提到过, 动态规划的应用范围是非常广的。这里介绍用动态规划解决资源分配问题。假定有 m 种资源用来生产 n 种产品 (资源可以指工人、机床、资金等, 每种资源的总数为 x_1, x_2, \dots, x_m)。如果生产第 i 种产品时投入的各种资源量为 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$, 则可以得到的收益为 g_i , 它是所分配的资源量的函数, 可写成 $g_i(x_{i1}, \dots, x_{im})$ 。现在问应如何分配这些资源到各个产品上, 使得所有产品的总收益为最大? 写成数学形式, 即使

$$J = \sum_{i=1}^n g_i(x_{i1}, \dots, x_{im}) \quad g_i \geq 0 \quad (6-4)$$

取最大, 其中 x_{ij} 满足约束

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq x_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (6-5)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m \quad (6-6)$$

上面的问题可以用动态规划求解。为了说明问题简单起见, 这里只考虑单资源分配问题, 即如何将一种资源分配给 n 种产品, 使总收益最大。设这种资源的总数为 x , 分配给第 i 种产品的数量为 x_i , 则性能指标为

$$J = \sum_{i=1}^n g_i(x_i) \quad g_i \geq 0 \quad (6-7)$$

取最大，约束条件是

$$\sum_{i=1}^n x_i = x \quad x_i \geq 0 \quad (6-8)$$

为了用动态规划求解，引进一个函数 $f_k(x_T)$ ，它表示将资源量 $x_T \leq x$ 分配给第 1 至第 K 种产品时所能得到的最大收益。显然 $f_n(x)$ 表示将总资源 x 分配到所有 n 种产品上所得到的最大收益，即

$$f_n(x) = J_{\max} \quad (6-9)$$

容易看出，函数 $f_k(x_T)$ 有下列性质：

(i) $f_k(0) = 0$ ，即没有资源投入时收益为零。

(ii) $f_0(x_T) = 0$ ，即不生产产品时收益为零。

(iii) $f_1(x_T) = g_1(x_T)$ ，这表明将资源量 x_T 只用于生产一种产品时的总收益，就是这种产品本身收益。

这些性质构成了以后解题的边界的条件。

现在来推导 $f_k(x_T)$ 所应满足的关系式。已知投入前 K 种产品的资源量为 x_T 。如果投入第 K 种产品的资源量为 x_K ，则投入前 $(K-1)$ 种产品的资源量为 $x_T - x_K$ 。如果把 K 种产品的资源分配看成是 K 步决策，则 $f_k(x_T)$ 表示 K 步决策的指标最优值， $g_k(x_K)$ 表示用决策量 x_K 时第 K 步的指标值， $f_{k-1}(x_T - x_K)$ 表示余下 $K-1$ 步决策的指标最优值，根据最优性原理（对照 (6-2) 式），则有

$$f_k(x_T) = \max_{x_K} [g_k(x_K) + f_{k-1}(x_T - x_K)] \quad (6-10)$$

这表明若 x_T 在第 1 至 K 种产品上的最优分配为 x_1, \dots, x_K ，则 x_1, \dots, x_{K-1} 一定是资源量 $x_T - x_K$ 在前 $K-1$ 种产品上的最优分配。

例6-1 假定某一种资源的量有四个单元（如重量单元千克，体积单元公升等），把它分配到三种产品的生产中，每种产品的收益函数 $g_i(x)$ 如下表所表示， x

表示所分配的资源单元数。问怎样分配资源才能使总收益最大？

x (投入资源单元数)	1	2	3	4
$g_1(x)$ (第一种产品增益)	8	18	22	24
$g_2(x)$ (第二种产品增益)	3	6	9	12
$g_3(x)$ (第三种产品增益)	6	7	8	10

解 由边界条件知 $f_1(x) = g_1(x)$ 。现在考虑 $f_k(x_T) = f_2(1)$ ，它表示用 1 个单元资源分配到 2 个产品上的最大收益。 $x_k = x_2$ 表示投入第 2 个产品的资源，则 x_2 可取值 1 或 0，对应地将有下表。

x_2	$x_T - x_2$	第一产品收益	第二产品收益
1	0	$g_1(0) = f_1(0)$	$g_2(1)$
0	1	$g_1(1) = f_1(1)$	$g_2(0)$

根据 (6-10) 式可得

$$\begin{aligned} f_2(1) &= \max\{g_2(1) + f_1(0), g_2(0) + f_1(1)\} \\ &= \max\{3 + 0, 0 + 8\} = 8 \end{aligned}$$

$f_2(2)$ 表示用 2 个单元的资源分配到 2 个产品上，显然 x_2 可取值 2、1、0。类似地可得

$$\begin{aligned} f_2(2) &= \max\{g_2(2) + f_1(0), g_2(1) + f_1(1), g_2(0) + f_1(2)\} \\ &= \max\{6 + 0, 3 + 8, 0 + 18\} \\ &= 18 \end{aligned}$$

同理，当 x_2 可取值 3、2、1、0 时可求得

$$\begin{aligned} f_2(3) &= \max\{g_2(3) + f_1(0), g_2(2) + f_1(1), g_2(1) + f_1(2), g_2(0) + f_1(3)\} \\ &= \max\{9, 14, 21, 22\} = 22 \\ f_2(4) &= \max\{12, 17, 24, 25, 24\} = 25 \end{aligned}$$

再考虑 3 个产品的资源分配，可得这三个产品投入资源的单元数为 1、2、3、4 时的，最优值如下

$$\begin{aligned}
f_3(1) &= \max \{g_3(1) + f_2(0), g_3(0) + f_2(1)\} \\
&= \max \{6 + 0, 0 + 8\} = 8 \\
f_3(2) &= \max \{g_3(2) + f_2(0), g_3(1) + f_2(1), g_3(0) + f_2(2)\} \\
&= \max \{7 + 0, 6 + 8, 0 + 18\} = 18 \\
f_3(3) &= \max \{8, 15, 24, 22\} = 24 \\
f_3(4) &= \max \{10, 16, 25, 28, 25\} = 28
\end{aligned}$$

可见

$$f_3(4) = g_3(1) + f_2(3) = g_3(1) + g_2(0) + f_1(3) = g_3(1) + g_2(0) + g_1(3)$$

即把一个单元的资源分配给第三种产品，把三个单元的资源分配给第一种产品，第二种产品不分配资源，这时总收益达最大值 28。

6.4 用动态规划求离散最优控制

离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6-11)$$

性能指标为

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} J_k[x(k), u(k)] \quad (6-12)$$

寻找最优控制序列 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ 使 J 最小，这正是多级决策问题，利用最优性原理，根据递推方程 (6-2)，从最后一步开始，逐步求出 $u(N-1), u(N-2), \dots, u(0)$ 。下面用例子来说明求解过程。

例 6-2 系统方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) \text{ 给定} \quad (6-13)$$

$$J = \frac{1}{2} cx^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) \quad (6-14)$$

要求用动态规划寻找最优控制序列 $u(0), u(1)$ 使 J 最小。

解 先考虑最后一步，即从 $x(1)$ 到 $x(2)$ 。这时由 (6-13)、(6-14) 式得

$$x(2) = x(1) + u(1)$$

$$J_1 = \frac{1}{2}cx^2(2) + \frac{1}{2}u^2(1) = \frac{1}{2}c[x(1) + u(1)]^2 + \frac{1}{2}u^2(1)$$

求 $u(1)$ 使 J_1 最小, 得

$$\frac{\partial J_1}{\partial u(1)} = c[x(1) + u(1)] + u(1) = 0$$

$$u(1) = -\frac{cx(1)}{1+c}$$

将 $u(1)$ 代入 J_1 和 $x(2)$ 可得, 相应于上面最优控制的性能指标与最优状态转移为

$$J_1^* = \frac{c}{2} \cdot \frac{x^2(1)}{1+c} \quad (6-15)$$

$$x(2) = \frac{x(1)}{1+c} \quad (6-16)$$

再考虑倒数第二步, 即从 $x(0)$ 到 $x(1)$ 。这时有

$$x(1) = x(0) + u(0)$$

$$J = J_0 + J_1^* = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{c}{2} \frac{x^2(1)}{1+c} = \frac{1}{2}u^2(0) + \frac{c}{2(1+c)} [x(0) + u(0)]^2$$

求 $u(0)$ 使 J 最小, 得

$$\frac{\partial J}{\partial u(0)} = u(0) + \frac{c}{1+c} [x(0) + u(0)] = 0$$

$$u(0) = -\frac{cx(0)}{1+2c}$$

于是最优性能指标与最优状态转移为

$$J^* = \frac{cx^2(0)}{2(1+2c)} \quad (6-17)$$

$$x(1) = x(0) + u(0) = \frac{1+c}{1+2c} x(0) \quad (6-18)$$

这个结果与例 5-4 用离散极小值原理求解结果完全一样。

6.5 连续系统的动态规划

设系统的状态方程和性能指标为

$$\dot{X} = f(t, X, U) \quad X(t_0) = X_0 \quad (6-19)$$

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (6-20)$$

U 受约束, 可写成 $U \in \Omega$, Ω 为某一闭集。要寻找满足此约束且使 J 最小的最优控制 U 。

设时间 t 在区间 $[t_0, t_f]$ 内, 则根据最优性原理, 从 t 到 t_f 这一段过程应当是最优过程。把这段最优指标写成 $V(X, t)$, 则

$$V(X, t) \triangleq J^*(X, t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ \phi[X(t_f), t_f] + \int_t^{t_f} F(X, U, \tau) d\tau \right\} \quad (6-21)$$

显然 $V(X, t)$ 满足终端条件

$$V[X(t_f), t_f] = \phi[X(t_f), t_f] \quad (6-22)$$

通常假定 $V(X, t)$ 对 X 及 t 的二阶偏导数存在且有界。

现在, 考虑系统从 t 出发, 到 t_f 分两步走: 先从 t 到 $t + \Delta t$, 再从 $t + \Delta t$ 到 t_f , Δt 是小量, 则

$$V(X, t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ \phi[X(t_f), t_f] + \int_t^{t+\Delta t} F(X, U, \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} F(X, U, \tau) d\tau \right\} \quad (6-23)$$

根据最优性原理, 从 $t + \Delta t$ 到 t_f 也应是最优过程。因 $X(t + \Delta t) \approx X + \dot{X}\Delta t$, 故

$$V(X + \dot{X}\Delta t, t + \Delta t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t+\Delta t}^{t_f} F(X, U, \tau) d\tau \right\}$$

这样, 式 (6-23) 可写成

$$\begin{aligned} V(X, t) &= \min_{u \in \Omega} \left\{ F(X, U, t)\Delta t + V(X + \dot{X}\Delta t, t + \Delta t) \right\} \\ &= \min_{u \in \Omega} \left\{ F(X, U, t)\Delta t + V(X, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T \Delta X + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + 0(\Delta t^2) \right\} \end{aligned} \quad (6-24)$$

注意到 $\Delta X = \dot{X}\Delta t = f(X, U, t)\Delta t$, 上式右边括号中 $V(X, t)$ 表示最优指标, 其中 U

为最优控制, 不需再选择, $\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t$ 也与 U 选择无关。故

$$V(X,t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ F(X,U,t)\Delta t + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T f(X,U,t)\Delta t \right\} + V(X,t) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t^2)$$

从上式两端消去 $V(X,t)$ ，除以 Δt ，再令 $\Delta t \rightarrow 0$ ，可得

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \left\{ F(X,U,t) + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T f(X,U,t) \right\} \quad (6-25)$$

引用以前使用过的哈密顿函数

$$H(X,U,\lambda,t) = F(X,U,t) + \lambda^T f(X,U,t) \quad (6-26)$$

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial X} \quad (6-27)$$

则 (6-25) 可写成

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} &= \min_{u \in \Omega} H(X,U,\frac{\partial V}{\partial X},t) \\ &= H^*(X,U,\frac{\partial V}{\partial X},t) \end{aligned} \quad (6-28)$$

(6-25) 或 (6-28) 称为哈密顿—雅可比—贝尔曼方程，边界条件是 (6-22) 式。哈密顿—雅可比—贝尔曼方程在理论上很有价值，但它是 $V(X,t)$ 的一阶偏微分方程并带有取极小的运算，因此求解是非常困难的，一般情况得不到解析解，只能用计算机求数值解。对于线性二次问题，可以得到解析解，而且求解结果与用极小值原理或变分法所得结果相同。这时，哈密顿——雅可比——贝尔曼方程可归结为黎卡提方程。在实际计算线性二次问题时，一般用直接求解黎卡提方程来求最优控制。

6.6 动态规划与极小值原理

动态规划和极小值原理是最优控制理论的两大基石，它们都可以解决有约束的最优控制问题，虽然在形式上和解题方法上不同，但却存在着内在的联系。下面我们从动态规划来推演极小值原理，不过要说明这种推演是基于最优指标 $V(X,t)$ 对 X 和 t 两次连续可微这个条件的。设我们要解决的问题如下：系统状态方程为

$$\dot{X} = f(X, U, t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (6-29)$$

要求确定 $U(t)$ 使性能指标

$$J = \phi[X(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \quad (6-30)$$

极小。其中, t_0, t_f 固定, $X(t_f)$ 自由, U 可以有约束, 也可以没有。

用极小值原理求解的结果可以由 (4-32) ~ (4-37) 来表示, 因这里 t_f 固定, 故不需最优终端时刻条件; $X(t_f)$ 自由, 故无终端约束方程 $G[X(t_f)] = 0$ 。将最优解的条件再写在下面以对照。

$$1、\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (\text{状态方程}) \quad (6-31)$$

$$2、\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (\text{协态方程}) \quad (6-32)$$

$$3、X(t_0) = X_0 \quad (\text{边界方程}) \quad (6-33)$$

$$4、\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial X(t_f)} \quad (\text{横截条件}) \quad (6-34)$$

$$5、\min_{u \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \quad (\text{极值条件}) \quad (6-35)$$

用动态规划求解的结果已在上节中得到, 现在归纳一下: 在动态规划中协态变量 λ 满足

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial X}$$

哈密顿—雅可比—贝尔曼方程 (6-28) 本身说明了哈密顿函数 H 在最优控制上取极值的条件, 故等同于上面极小值原理所得的条件 5, 不过 (6-28) 还多给出了一点信息, 即 $H^* = -\frac{\partial V}{\partial t}$ 。

下面由动态规划法来推出协态方程。由 (6-27)

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial V(X, t)}{\partial X} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial V(X, t)}{\partial X} \right] + \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X \partial X^T} \frac{dx}{dt}$$

因假设 $V(X, t)$ 对 X, t 两次连续可微, 因此上式成立, 且可交换求导次序, 得

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial V(X, t)}{\partial t} \right] + \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X \partial X^T} f(X, U, t) \\
&= -\frac{\partial}{\partial X} \left[F(X, U, t) + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T \cdot f(X, U, t) \right] + \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X \partial X^T} f(X, U, t) \\
&= -\left[\frac{\partial F}{\partial X} + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T \frac{\partial f}{\partial X} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial X} \left[F + \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)^T f \right] \\
&= -\frac{\partial H}{\partial X}
\end{aligned}$$

即协态方程 (6-32) (因都是最优解条件。故省去*号)。由 (6-22) 和 (6-27) 再来推横截条件

$$\begin{aligned}
\lambda(t_f) &= \frac{\partial V[X(t_f), t_f]}{\partial X(t_f)} \\
&= \frac{\partial \phi[X(t_f), t_f]}{\partial X(t_f)}
\end{aligned}$$

即横截条件 (6-34)。其它条件如状态方程和初始条件都是给定的。故由动态规划推出了极小值原理的全部条件。应该强调, 这不是说用动态规划可证明极小值原理。因为上面的推演要求 $V(X, t)$ 对 X, t 二次连续可微, 而极小值原理的证明本身不需要这一条件。

6.7 小结

1、动态规划是把多级决策问题化为多个单级决策问题来求解的, 而单级问题比多级问题容易处理得多。这种把一个复杂的特定问题化为 (又可称为嵌入) 一系列性质相似的易于求解的问题的做法称为“不变嵌入”法。

2、动态规划的基础是最优性原理。这个原理告诉我们: 在多级最优决策中, 不管初始状态是什么, 余下的决策对此状态必定构成最优决策。根据这个原理, 动态规划解决多级决策问题 (包括离散系统最优控制) 是从最后一级开始倒向计算的。

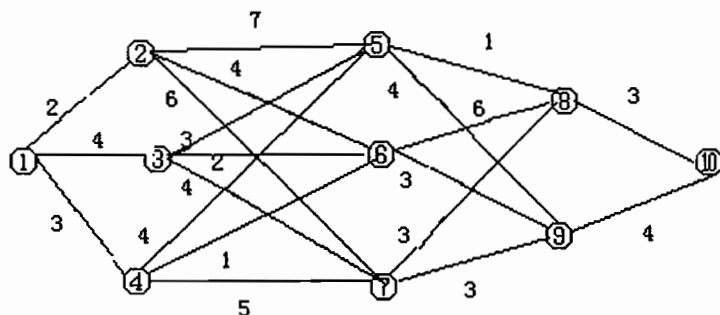
3、连续系统的动态规划可导出哈密顿——雅可比——贝尔曼方程, 这个方程一般只能有数值解。从它可推演出极小值原理, 不过要假定 $V(X, t)$ 对 X, t 二次

连续可微。

4、动态规划比穷举法的计算量是少了不少，但对复杂问题（状态变量和控制变量的数目多，级数多），它的计算量和存储量仍旧非常大，有时用一般计算机也解决不了。这种情况称为“维数灾”。

6.8 习题

1.有十个城市①为起点,⑩为终点.站与站之间称为段,每段路程所用的时间(小时)写在段上,则应如何行使,让从①到⑩所花的时间最短。



2.一维线性系统,设变量无约束,最优控制问题的数学模型为:

$$J = \sum_{k=0}^2 (qx_k^2 + ru_k^2)T$$

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k$$

初始状态 x_0 为已知.式中 a, b, q, r 为常数, $r > 0$, 设 $T=1$. 求最优控制序列。

3.

$$J = \sum_{k=0}^2 (x_k^2 + ru_k^2)T$$

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k, \quad T=1$$

求最优控制序列。

4.运用动态规划方法确定下列系统的最优控制

$$\begin{aligned}x(t+1) &= 2x(t) + u(t). \\t &= 0, 1, 2, 3\end{aligned}$$

$$J = \sum_{t=0}^3 [x^2(t) + u^2(t)]$$

5.系统方程为

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + bu(t), \quad x(t_0) = x^0$$

求最优控制使

$$J = cx^2(t_1) + \int_0^{t_1} u^2 dt$$

取最小值,此处 a, b, c 均为正常数.

6.对于系统 $\dot{x} = u$, 最小化

$$J = \int_0^T \left[u^2 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right] dt$$

写出哈密顿—雅可比—贝尔曼方程式。

第七章 最优控制的计算方法

在前面讨论变分法、极小值原理和动态规划时，我们列举了一些例子。为了易于说明问题，这些例子都是非常简单的，可以用手算来解决问题。但是在实际工作中所遇到的最优控制问题，一般都是很复杂的，必须用计算机求解。因此，最优控制的计算方法就变得十分重要了。这方面的内容十分丰富，由于篇幅所限，我们只介绍几种典型的算法。

由极小值原理可知，最优控制问题的解必须满足以下几个条件

(i) 正则方程

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (7-1)$$

(ii) 哈密顿函数 H 取极小的必要条件

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \quad (U \text{ 无约束})$$

$$\text{或} \quad \min_{U \in \Omega} H(X^*, \lambda^*, U, t) = H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \quad (U \text{ 有约束}) \quad (7-2)$$

(iii) 边界条件（包括横截条件）

最优控制的计算方法一般是先求出满足上面三个条件中某两个的解，然后用合适的迭代计算形式逐次改变这个解，以达到满足剩下的另一个条件的解（即最优解）。

通常把最优控制的计算方法分成两类：直接法和间接法。

直接法。它的特点是，在每一步迭代中， $U(t)$ 不一定要满足 H 取极小的必要条件，而是逐步改善它，在迭代终了使它满足这个必要条件，而且，积分状态方程是从 t_0 到 t_f ，积分协态方程是从 t_f 到 t_0 ，这样就避免了去寻找缺少的协态初值 $\lambda(t_0)$ 的困难。常用的直接法有梯度法，二阶梯度法，共轭梯度法。

间接法。它的特点是，在每一步迭代中都要满足 H 取极小的必要条件，而且要同时积分状态方程和协态方程，两种方程的积分都从 t_0 到 t_f 或从 t_f 到 t_0 。常用的间接法有边界迭代法和拟线性化法。

7.1 直接法

(一) 梯度法 这是一种直接方法, 应用比较广泛。它的特点是: 先猜测任意一个控制函数 $U(t)$, 它可能并不满足 H 取极小的必要条件, 然后用迭代算法根据 H 梯度减小的方向来改善 $U(t)$, 使它最后满足必要条件。

计算步骤如下:

1. 先猜测 $[t_0, t_f]$ 中的一个控制向量 $U^K(t) = U^0(t)$, K 是迭代步数, 初始时 $K = 0$ 。 U^0 的决定要凭工程经验, 猜得合理, 计算收敛得就快。

2. 在第 K 步, 以估计值 U^K 和给定的初始条件 $X(t_0)$, 从 t_0 到 t_f 顺向积分状态方程, 求出状态向量 $X^K(t)$ 。

3. 用 $U^K(t)$ 、 $X^K(t)$ 和横截条件求得的终端值 $\lambda(t_f)$, 从 t_f 到 t_0 反向积分协态方程, 求出协态向量 $\lambda^K(t)$ 。

4. 计算哈密顿函数 H 对 U 的梯度向量 g^K

$$g^K \triangleq \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)_K$$

$\left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)_K$ 表示在 U^K 、 X^K 、 λ^K 处取值。当这些量非最优值时, $g^K \neq 0$ 。

5. 修正控制向量

$$U^{K+1} = U^K - \alpha^K g^K \quad (7-3)$$

α^K 是一个步长因子, 它是待定的数。选择 α^K 使指标达到极小。这是一维寻优问题, 有很多现成的优化方法可用。如分数法, 0.618 法, 抛物线法, 立方近似法等。(7-3) 表明迭代是沿着梯度 g^K 的负方向进行的。

6. 计算是否满足下列指标

$$\left| \frac{J(U^{K+1}) - J(U^K)}{J(U^K)} \right| < \varepsilon \quad (7-4)$$

ε 是指定小量, 若满足则停止计算, 否则, 令 $K = K + 1$, 转步骤 2。另一停止计算的标准是

$$\|g^K\| < \varepsilon \quad (7-5)$$

例 7-1 考虑下面的一阶非线性状态方程

$$\dot{x} = -x^2 + u \quad x(0) = 10 \quad (7-6)$$

用梯度法寻找最优控制使下面的指标最小

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \quad (7-7)$$

解 哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) - \lambda x^2 + \lambda u \quad (7-8)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + 2\lambda x \quad (7-9)$$

因 $x(1)$ 自由, 由横截条件得

$$\lambda^0(1) = 0 \quad (7-10)$$

1. 选初始估计 $u^0(t) = 0$ 。

2. 将 $u^0(t) = 0$ 代入状态方程 (7-6) 可得

$$\frac{dx}{x^2} = -dt \quad (7-11)$$

积分上式可得

$$-\frac{1}{x} = -t + c \quad (7-12)$$

代入初始条件: $t = 0, \quad x(0) = 10$, 确定积分常数

$$c = -\frac{1}{10} \quad (7-13)$$

代入 (7-12) 式即可得

$$x(t) = x^0(t) = \frac{10}{10t + 1} \quad (7-14)$$

3. 将 $x^0(t)$ 代入协态方程 (7-9), 且由边界条件 $\lambda^0(1) = 0$ 从 $t=1$ 倒向积分可得

$$\lambda^0(t) = \frac{1}{2}[1 - (1 + 10t)^2 / 121] \quad \lambda^0(1) = 0$$

4. 由 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda$

$$\therefore \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^0 = \lambda^0(t)$$

$$5. \quad u^1(t) = u^0(t) - \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^0 = -\frac{1}{2}[1 - (1+10t)^2/121]。$$

这里选步长因子 $\alpha^K = 1$ 。如此继续下去，直至指标函数随迭代变化很小为止。

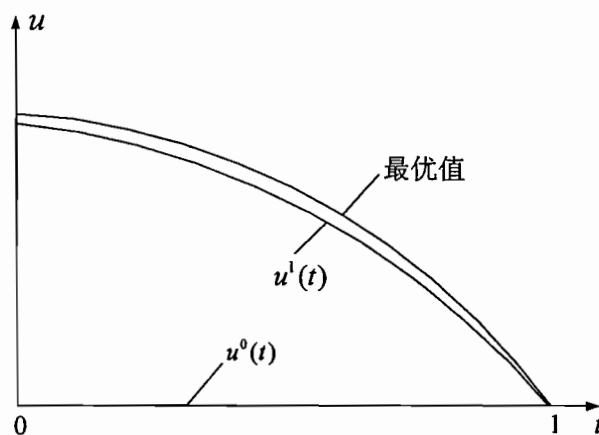


图 7-1 用梯度法寻找最优控制

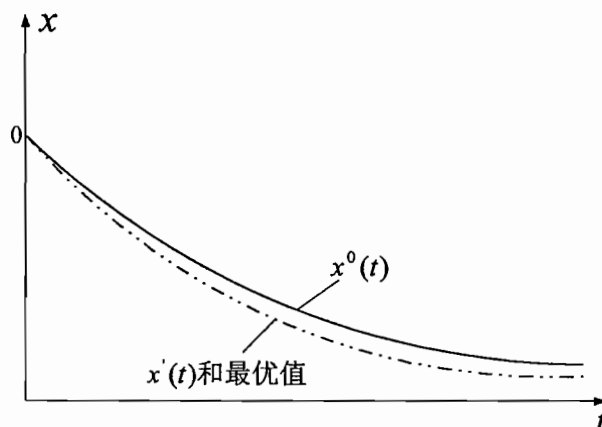


图 7-2 最优状态的求解

图 7-1 和图 7-2 表示了控制和状态的初始值和第一次迭代值，可以看到第一次迭代 $x(t)$ 就几乎收敛到最优值， $u^1(t)$ 与最优值还有差异，而且一般说来愈接近最优值收敛愈慢。

梯度法应用得比较多，它的优点是：（1）简单，编制程序容易；（2）计算稳定可靠。缺点是：（1）在接近最优解时，迭代收敛很慢，为改善收敛性可用共轭梯度法和二阶变分法等；（2）不能区分局部极小和全局极小；（3）对控制变量受约束，终端状态受约束的情况不能直接处理。对于这种有约束的情况可用约束梯度法或惩罚函数法（代价函数法）加以处理。

约束梯度法可处理如下的不等式约束:

$$a_i \leq u_i(t) \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7-15)$$

首先, 对于任何控制 \hat{u} , 定义约束算子 C_u

$$u_i(t) = C_u \hat{u}_i(t) = \begin{cases} a_i & \hat{u}_i(t) \leq a_i \\ \hat{u}_i(t) & a_i < \hat{u}_i(t) < b_i \\ b_i & \hat{u}_i(t) \geq b_i \end{cases} \quad (7-16)$$

显然 $u_i(t), i = 1, 2, \dots, m$ 满足约束, 即

$$u = C_u \hat{u} \quad (7-17)$$

满足约束, 其中 $u = [u_1 \dots u_m]^T$, $\hat{u} = [\hat{u}_1 \dots \hat{u}_m]^T$ 。再由 \hat{u} 用无约束的梯度法

求解, 在每一次迭代中得出 \hat{u} , 然后用 $u = C_u \hat{u}$ 代替, 再进行下一次迭代。

惩罚函数法可处理如下形式的约束:

$$g_i(X, u, t) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (7-18)$$

$$h_i(X(t_f), t_f) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (7-19)$$

这时, 将性能指标 $J(u)$ 增广为 $\bar{J}(u)$.

$$\bar{J}(u) = J(u) + \mu \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^q [g_i(X, U, t)]^2 \delta(g_i) dt + \sum_{i=1}^l N_i [h_i(X(t_f), t_f)]^2 \quad (7-20)$$

其中, $\mu > 0$, $N_i > 0$,

$$\delta(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i \leq 0 \\ 1 & g_i > 0 \end{cases} \quad (7-21)$$

显然, 当满足约束时, $\bar{J}(u)$ 中后两项为零。当不满足约束时, 后两项将使 $\bar{J}(u)$ 增大, 故称为惩罚函数。在迭代过程中, 逐次增大 μ 和 N_i 。显然当 μ 和 N_i 很大时, 所求得的 $\bar{J}(u)$ 的无约束最优控制近似于 $J(u)$ 的有约束最优控制。

(二) 共轭梯度法 用共轭梯度法寻找最优控制时是沿着所谓共轭梯度向量的方向进行的。为了说明共轭梯度的意义, 我们先从求函数极值问题的共轭梯度法开始, 再推广到求泛函极值问题。

1. 求函数极值的共轭梯度法

设 $F(X)$ 是定义在 R^n 空间中的二次指标函数

$$F(X) = \frac{1}{2}(X, QX) + a^T X + C \quad (7-22)$$

其中, $X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$, $a^T = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$, C 为常数, Q 为正定阵。

$$(X, QX) = X^T QX \quad (7-23)$$

是 X 和 QX 的内积。要求寻找 X 使 $F(X)$ 取极值。

定义 若 R^n 中两个向量 X 和 Y 满足

$$(X, QY) = X^T QY = 0 \quad (7-24)$$

则称 X 和 Y 是 Q 共轭的。 $Q = I$ (单位阵) 时, 共轭就变为通常的正交。

设向量 P^K , $K = 0, 1, 2, \cdots$ 是两两 Q 共轭的, 以 P^K 为寻找方向, 可得共轭梯度法的迭代寻优程序:

$$X^{K+1} = X^K + \alpha^K P^K \quad (7-25)$$

与梯度法不同处仅在于用共轭梯度 P^K 代替负梯度 $-g^K = -(\partial F / \partial X)^K$ 。问题是产生共轭梯度方向 P^K , $K = 0, 1, 2, \cdots$ 。

令 $P^0 = -g^0$, 即初始时共轭梯度与梯度方向相反、大小相等。以后的共轭梯度可如下递归产生:

$$P^K = -g^K + \beta^K P^{K-1} \quad (7-26)$$

β^K 的值由 P^K 和 P^{K-1} 对 Q 共轭的关系来确定, 即

$$(P^K, QP^{K-1}) = 0 \quad (7-27)$$

将 (7-26) 代入 (7-27), 得

$$\begin{aligned} 0 &= (P^K, QP^{K-1}) = (-g^K + \beta^K P^{K-1}, QP^{K-1}) \\ &= -(g^K, QP^{K-1}) + \beta^K (P^{K-1}, QP^{K-1}) \end{aligned}$$

故

$$\beta^K = \frac{(g^K, QP^{K-1})}{(P^{K-1}, QP^{K-1})} \quad (7-28)$$

β^K 称为共轭系数。

用 (7-28) 式计算 β^K 是不方便的, 因为要用到二阶导数阵 Q 。由 (7-22) 和 (7-23) 知

$$Q = \left(\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (7-29)$$

x_i, x_j 分别为 X 的第 i 个和第 j 个分量, 右端表示由 Q 的第 i 行第 j 列元素构成的矩阵。计算这个二阶导数阵非常困难。为此, 有必要推导不用 Q 来计算 β^K 的公式。在这个推导中要用到共轭梯度的下列性质:

性质 1 若 $\{P^0, P^1, \dots, P^{n-1}\}$ 是 R^n 空间中彼此 Q 共轭的向量, 则它们是线性独立的。

证明: 用反证法。若不线性独立, 则必存在不全为零的常数 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} 使

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i P^i = 0 \quad (7-30)$$

上式左端各项对 QP^j 取内积后有

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i (P^i, QP^j) = C_j (P^j, QP^j) = 0 \quad (7-31)$$

因为 Q 正定, 上式对每一个 P^j 成立, 所以必须有 $C_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

与假设矛盾, 这说明 P^0, P^1, \dots, P^{n-1} 是线性独立的, 它们构成了 R^n 空间中的一组基向量。

按照这个性质, 函数 $F(X)$ 的极小点 $X = X^*$ 可用这组基来表示, 即

$$X^* = \sum_{i=0}^{n-1} C_i P^i \quad (7-32)$$

其中, $C_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 可这样来求: 作内积

$$(QX^*, P^K) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i QP^i, P^K \right) = C_K (QP^K, P^K)$$

从而

$$C_K = \frac{(QX^*, P^K)}{(QP^K, P^K)} \quad K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (7-33)$$

性质2 如果 $g^K = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_K \neq 0$, 则有

$$(P^K, g^{K+1}) = 0 \quad (7-34)$$

式中, $\left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_K = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X=X^K}$ 。(7-34)说明, 在 $X = X^{K+1}$ 处函数 $F(X)$ 的梯度 g^{K+1} 与前一步的寻找方向 P^K 必正交。

证 若不然, 不妨先设 $(P^K, g^{K+1}) > 0$ 。再设 $F(X^K + \alpha^K P^K)$
 $= \min_{\alpha > 0} F(X^K + \alpha P^K)$, 即 α^K 是最优步长。在 α^K 附近选一个 $\alpha_0^K < \alpha^K$, 将 $F(X)$ 在
 $X = X^{K+1} = X^K + \alpha^K P^K$ 处展开, 保留一阶项后, 有

$$\begin{aligned} F(X^K + \alpha^K P^K) - F(X^K + \alpha_0^K P^K) &= \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{K+1}^T (\alpha^K - \alpha_0^K) P^K \\ &= (\alpha^K - \alpha_0^K) (g^{K+1})^T P^K = (\alpha^K - \alpha_0^K) (g^{K+1}, P^K) > 0 \end{aligned} \quad (7-35)$$

这与 $F(X^K + \alpha^K P^K)$ 为极小相矛盾。若设 $(P^K, g^{K+1}) < 0$ 则可取 $\alpha_0^K > \alpha^K$, 同样得出矛盾, 于是必有 (7-34) 成立。

性质3 若 $g^K = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_K \neq 0$, 则必有

$$(g^K, P^{j-1}) = 0 \quad 1 \leq j \leq K \quad (7-36)$$

(7-36)说明, $F(X)$ 在 $X = X^K$ 处的梯度 g^K 与以前各步的共轭梯度寻找方向都正交。

证明 重复使用

$$X^K = X^{K-1} + \alpha^{K-1} P^{K-1}$$

得到

$$X^K = X^j + \sum_{i=j}^{K-1} \alpha^i P^i \quad 0 \leq j \leq K-1 \quad (7-37)$$

由 (7-22) 式所假定的二次函数 $F(X)$ ，可得

$$g^K = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_K = a + QX^K \quad (7-38)$$

设 $X = X^*$ 为极小点，则

$$g(X^*) = a + QX^* = 0 \quad (7-39)$$

(7-38) 减去 (7-39) 得

$$g^K = Q(X^K - X^*) \quad (7-40)$$

(7-37) 代入 (7-40)，得

$$\begin{aligned} g^K &= QX^j + \sum_{i=j}^{K-1} Q\alpha^i P^i - QX^* \\ &= g^j + \sum_{i=j}^{K-1} Q\alpha^i P^i \quad 0 \leq j \leq K-1 \end{aligned} \quad (7-41)$$

上式两边对 P^{j-1} 作内积，得

$$(g^K, P^{j-1}) = (g^j, P^{j-1}) + \sum_{i=j}^{K-1} \alpha^i (QP^i, P^{j-1}) \quad (7-42)$$

由性质 2 知 $(g^j, P^{j-1}) = 0$ ，再由 $P^i, i = j \cdots k-1$ 与 P^{j-1} 是 Q 共轭的定义可知 (7-42)

右端第二项也为零，因此

$$(g^K, P^{j-1}) = 0 \quad 1 \leq j \leq K$$

(7-36) 得证。

如果取 $K = n$ ，则

$$(g^n, P^{j-1}) = 0 \quad 1 \leq j \leq n \quad (7-43)$$

但 P^0, P^1, \dots, P^{n-1} 是线性无关的，它们构成 R^n 中一组基， g^n 与所有基正交，而 R^n 中只有 n 个基，故 $g^n = 0$ 。这说明 X^n 处的梯度为零，即 X^n 为二次函数 $F(X)$ 的极小点。

由此可见，在 R^n 空间中，对二次函数 $F(X)$ 用 (7-25) 式所示的共轭梯度法寻优，迭代至多 n 步就可达到极小点。如果一个算法能在有限步内求出二次函数

的极小点,就称这个算法具有二阶收敛性或有限步收敛性。在实际计算时,由于舍入误差,总要多进行几步才能达到所需精度的结果,对于非二次的一般指标函数则更是如此。

性质 4 若 $g^K = (\frac{\partial F}{\partial X})_K \neq 0$, 则

$$(g^K, g^{K-1}) = 0 \quad K=1, 2, \dots \quad (7-44)$$

证: 由性质 3 和 (7-26) 式知

$$\begin{aligned} 0 &= (g^K, P^{K-1}) = (g^K, -g^{K-1} + \beta^{K-1}P^{K-2}) = -(g^K, g^{K-1}) + \\ &+ \beta^{K-1}(g^K, P^{K-2}) = -(g^K, g^{K-1}) = 0 \end{aligned}$$

(7-44) 得证。

下面根据这四个性质来推出 β^K 的一个简单的计算公式。在 (7-41) 中令 $j = K-1$, 可导出

$$\begin{aligned} (P^K, g^K) &= (P^K, g^{K-1} + \alpha^{K-1}QP^{K-1}) \\ &= (P^K, g^{K-1}) + \alpha^{K-1}(P^K, QP^{K-1}) = (P^K, g^{K-1}) \\ &= (-g^K + \beta^K P^{K-1}, g^{K-1}) \\ &= -(g^K, g^{K-1}) + \beta^K (P^{K-1}, g^{K-1}) \end{aligned}$$

由性质 4 知 $(g^K, g^{K-1}) = 0$, 因此得

$$\beta^K = \frac{(P^K, g^K)}{(P^{K-1}, g^{K-1})} \quad (7-45)$$

再利用 (7-26) 式, 可得

$$\beta^K = \frac{(-g^K + \beta^K P^{K-1}, g^K)}{(-g^{K-1} + \beta^{K-1}P^{K-2}, g^{K-1})} = \frac{-(g^K, g^K) + \beta^K (P^{K-1}, g^K)}{-(g^{K-1}, g^{K-1}) + \beta^{K-1}(P^{K-2}, g^{K-1})}$$

由性质 3, 就可得出

$$\beta^K = \frac{(g^K, g^K)}{(g^{K-1}, g^{K-1})} = \frac{\|g^K\|^2}{\|g^{K-1}\|^2} \quad (7-46)$$

用(7-46)计算 β^K , 只用到 $F(X)$ 在 X^K 和 X^{K-1} 两处的梯度, 因此非常方便。(7-46)

对二次函数是精确的，对非二次函数，它只是一个近似公式。

我们将共轭梯度法求 $F(X)$ 的极小解的算式归纳如下：

$$(1) \text{ 算梯度 } g^K = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_K$$

$$(2) \text{ 算共轭系数 } \beta^K = \frac{\|g^K\|^2}{\|g^{K-1}\|^2}, \quad \beta^0=0$$

$$(3) \text{ 算共轭梯度 } P^K = -g^K + \beta^K P^{K-1}, \quad P^0 = -g^0$$

$$(4) \text{ 递推逼近极值点解 } X^{K+1} = X^K + \alpha^K P^K$$

α^K 用一维寻优决定。

2、用共轭梯度法解最优控制问题

前面已说过，最优控制计算的直接法是用迭代方法逐步改善控制量 $u(t)$ ，使它最后满足哈密顿函数 H 取极小的必要条件。故梯度向量为

$$g^K = g^K(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{u(t)=u^K(t)} \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_K \quad (7-47)$$

这里梯度向量 $g^K(t)$ 是时间的函数，向量时间函数的内积定义为

$$(g^K(t), g^K(t)) \stackrel{\Delta}{=} \int_{t_0}^{t_f} (g^K(t))^T g^K(t) dt = \|g^K(t)\|^2 \quad (7-48)$$

除了这些以外，其它在形式上与求函数极值的共轭梯度法一样。

共轭梯度法求最优控制步骤为

- (1) 设已求出第 K 步估计的控制函数 $u^K(t)$ ， $u^0(t)$ 可任选。
- (2) 以 $X(t_0)$ 为初值，从 t_0 到 t_f 积分状态方程，得出状态轨迹 $X^K(t)$ 。
- (3) 以 $\lambda(t_f)$ 为终值，从 t_f 到 t_0 反向积分协态方程，求得协态轨迹 $\lambda^K(t)$ 。
- (4) 计算梯度向量 $g^K = \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_{u=u^K}$
- (5) 计算共轭系数

$$\beta^K = \frac{\|g^K(t)\|^2}{\|g^{K-1}(t)\|^2} \quad K=0 \text{ 时}, \quad \beta^0=0. \quad (7-49)$$

- (6) 计算共轭梯度

$$P^K = -g^K + \beta^K P^{K-1} \quad K=0 \text{ 时, } P^0 = -g^0. \quad (7-50)$$

(7) 计算控制函数

$$u^{K+1}(t) = u^K(t) + \alpha^K P^K \quad (7-51)$$

$$\text{用一维寻优决定 } \alpha^K, \text{ 即 } J(u^K + \alpha^K P^K) = \min_{\alpha > 0} J(u^K + \alpha P^K) \quad (7-52)$$

(8) 当满足下面的不等式

$$\left| \frac{J(u^{K+1}) - J(u^K)}{J(u^K)} \right| < \varepsilon \quad (7-53)$$

停止计算。否则令 $K = K + 1$, 回到步骤 2。

例 7-2 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = u \quad x_1(0) = \frac{1}{2} \quad (7-54)$$

$$\dot{x}_2 = (1+u)x_1 + u + \frac{1}{2}u^2 \quad x_2(0) = 0 \quad (7-55)$$

性能指标

$$J = x_2(1) \quad (7-56)$$

要求用共轭梯度法决定最优控制 $u(t)$, 使 J 最小。

解 哈密顿函数为

$$H = \lambda_1 u + \lambda_2 [(1+u)x_1 + u + \frac{1}{2}u^2] \quad (7-57)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_2(1+u) \quad (7-58)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \quad \therefore \lambda_2(t) = c \text{ (常数)} \quad (7-59)$$

由横截条件

$$\lambda_1(1) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1(1)} = \frac{\partial J}{\partial x_1(1)} = 0 \quad (7-60)$$

$$\lambda_2(1) = \frac{\partial J}{\partial x_2(1)} = 1 \quad \therefore c = 1 \quad (7-61)$$

故协态方程化为

$$\dot{\lambda}_1 = -(1+u) \quad \lambda_1(1) = 0 \quad (7-62)$$

$$\lambda_2(t) = 1 \quad (7-63)$$

(1) $K=0$ 时的计算

选 $u^0(t) = 0$, 代入状态方程和协态方程 (7-54)、(7-55)、(7-62) 和 (7-63),

可求得 $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{\lambda}_1 = -\lambda_2$, $\lambda_2 = 1$ 。积分可得

$$x_1^0(t) = \frac{1}{2}, \quad x_2^0(t) = \frac{1}{2}t, \quad \lambda_1^0(t) = -t + 1$$

梯度向量

$$\begin{aligned} g^0(t) &= \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_0 = (\lambda_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_2 + \lambda_2 u)_0 \\ &= \lambda_1^0 + \lambda_2^0 x_1^0 + \lambda_2^0 = -t + 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2} - t \end{aligned}$$

共轭梯度 $P^0 = -g^0 = t - \frac{5}{2}$ 。

(2) $K=1$ 时

$u^1(t) = u^0(t) + \alpha^0 P^0 = \alpha^0 (t - \frac{5}{2})$, α^0 用一维寻优来决定。将 u^1 代入状态方

程 (7-54)、(7-55) 和协态方程 (7-62)、(7-63), 得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha^0 (t - \frac{5}{2}) \\ \dot{x}_2(t) &= [1 + \alpha^0 (t - \frac{5}{2})] x_1^0 + \alpha^0 (t - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2} [\alpha^0 (t - \frac{5}{2})]^2 \end{aligned}$$

积分得

$$\begin{aligned} x_1^1(t) &= \alpha^0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}t \right) + \frac{1}{2} \\ x_2^1(t) &= \frac{t}{2} + \alpha^0 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - \frac{15}{4}t \right) + (\alpha^0)^2 \left(\frac{t^4}{8} - \frac{13}{12}t^3 + \frac{15}{8}t^2 + \frac{25}{8}t \right) \\ J = x_2(1) &= \frac{1}{2} - \frac{49}{12}\alpha^0 + \frac{97}{24}(\alpha^0)^2 \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha^0} &= -\frac{49}{12} + \frac{97}{12}\alpha^0 = 0 \end{aligned}$$

可求得 α^0 的最优值为

$$\alpha^0 = 49/97$$

于是

$$u^1(t) = \frac{49}{97}(t - \frac{5}{2})$$

由 (7-62) 式

$$\dot{\lambda}_1 = -[1 + \frac{49}{97}(t - \frac{5}{2})]$$

积分上式可得

$$\lambda_1^1(t) = -\frac{49}{194}t^2 + \frac{51}{194}t - \frac{1}{97}$$

$$\lambda_2^1(t) = 1$$

$$\begin{aligned} g^1(t) &= (\frac{\partial H}{\partial u})_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_2 + \lambda_2 u)_1 \\ &= -\frac{48}{97}t + \frac{22}{97} \end{aligned}$$

共轭系数

$$\beta^1 = \frac{\|g^1(t)\|^2}{\|g^0(t)\|^2} = \frac{\int_0^1 (-\frac{48}{97}t + \frac{22}{97})^2 dt}{\int_0^1 (\frac{5}{2} - t)^2 dt} = \frac{192}{194^2}$$

共轭梯度

$$P^1 = -g^1 + \beta^1 P^0 = \frac{48}{97}t - \frac{22}{97} + \frac{192}{194^2}(t - \frac{5}{2}) = \frac{18816}{194^2}t - \frac{9016}{194^2}$$

(3) $K=2$ 时, 控制量为 u^2

$$u^2(t) = u^1(t) + \alpha^1 P^1 = \frac{49}{97}(t - \frac{5}{2}) + \alpha^1 (\frac{18816}{194^2}t - \frac{9016}{194^2})$$

同以上步骤, 将 $u^2(t)$ 代入状态方程和协态方程, 求出

$$x_1^2(t), x_2^2(t) \text{ 和 } \lambda_1^2(t) \quad (\lambda_2^2(t) = 1)$$

由 $J = x_2(1) = f(\alpha^1)$

对 α^1 寻优, 可得 $\alpha^1 = \frac{194}{196}$, 于是

$$u^2(t) = t - \frac{3}{2}$$

可以证明 $u^2(t) = u^*(t)$, 即为最优控制。这只要证明 $(\frac{\partial H}{\partial u})_2 = (\lambda_1 + \lambda_2 x_1 + \lambda_2 + \lambda_2 u)_2 = 0$

即可。所以这个例子只要两步迭代即可得到最优解。一般说来，共轭梯度法比梯度法收敛快，但接近最优解后收敛性仍是较慢的。一个补救办法是重新启动，即找出几个共轭梯度方向 P^0, P^1, \dots, P^{n-1} 后，令 $P^n = -g^n$ ，再用 (7-50) 重新迭代，寻找共轭梯度方向。

7.2 间接法

(一) 边界迭代法 这个方法的特点是逐步改善对缺少的初始条件的估计，以满足规定的边界条件。它的原理如下。

利用哈密顿函数 H 取极小的方法

$$\frac{\partial H(X, U, \lambda, t)}{\partial U} = 0$$

可解出 U ，将它表示为 X 和 λ 的函数，即

$$U = U(X, \lambda, t) \quad (7-64)$$

将所求得的 $U = U(X, \lambda, t)$ 代入正则方程 (7-1)，消去正则方程中的 U 。再引入增

广状态 $Y(t) \in R^{2n}$

$$Y(t) \triangleq \begin{bmatrix} X(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad (7-65)$$

则正则方程 (7-1) 可写成

$$\dot{Y} = g(Y, t) \quad (7-66)$$

g 一般是非线性向量函数。设 (7-65) 式有 n 个已知初始条件 $X(t_0) = X_0$ ， n 个终端条件已知，设为 $x_i(t_f)$ ($i = 1, \dots, q$) 和 $\lambda_i(t_f)$ ($i = q+1, \dots, n$)，这是混合式的两点边值条件 (参见例 3-6)，用边界迭代法也很易处理。定义

$$Z(t) \triangleq [x_1(t), \dots, x_q(t), \lambda_{q+1}(t), \dots, \lambda_n(t)]^T \quad (7-67)$$

显然， $Z(t_f)$ 是已知的，设 $Z(t_f) = Z_f$ 。

设由 $X(t_0)$ 、 $\lambda(t_0)$ 出发积分正则方程 (7-66)，求得解 $Y(t)$ ，从中抽出 n 个分

量构成 $Z(t)$ 。显然 $Z(t_f)$ 的值将随 $\lambda(t_0)$ 而变，记成

$$Z(t_f) = \Psi[\lambda(t_0)] \quad (7-68)$$

因 $\lambda(t_0)$ 未知，用一个估计值 $\hat{\lambda}(t_0)$ 得到的解为

$$\hat{Z}(t_f) = \Psi[\hat{\lambda}(t_0)] \quad (7-69)$$

因 $\hat{\lambda}(t_0)$ 估计得不一定准确，故 $\hat{Z}(t_f)$ 一般不等于给定值 Z_f 。

将 (7-68) 在 $\lambda(t_0) = \hat{\lambda}(t_0)$ 处展开为台劳级数，保留一次项，得

$$Z(t_f) = \Psi[\hat{\lambda}(t_0)] + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T(t_0)} [\lambda(t_0) - \hat{\lambda}(t_0)] \quad (7-70)$$

其中， $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T}$ 是 $n \times n$ 维矩阵，称为敏感矩阵或转移矩阵。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T(t_0)} = \left[\frac{\partial Z_i(t_f)}{\partial \lambda_j(t_0)} \right]_{\lambda_j(t_0) = \hat{\lambda}_j(t_0)} \quad (7-71)$$

式中， $\frac{\partial Z_i(t_f)}{\partial \lambda_j(t_0)}$ 是 $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$ 的第 i 行，第 j 列元素。(7-71) 式右端表示由第 i 行第 j 列元素构成的矩阵。

由 (7-69) 和 (7-70) 可得

$$\lambda(t_0) = \hat{\lambda}(t_0) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T(t_0)} \right)^{-1} (Z(t_f) - \hat{Z}(t_f)) \quad (7-72)$$

因 Ψ 一般是非线性函数，(7-72) 式是一个近似式，为了求得正确的 $\lambda(t_0)$ ，要用迭代求解。令 $\hat{\lambda}^K(t_0)$ 是第 K 步的估值，则根据 (7-72) 可得到下面的迭代格式

$$\hat{\lambda}^{K+1}(t_0) = \hat{\lambda}^K(t_0) + \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T(t_0)} \right)^{-1}_K (Z(t_f) - \hat{Z}^K(t_f)) \quad (7-73)$$

其中， K 是迭代次数， β 是松弛因子， $0 \leq \beta \leq 1$ ， β 可改善收敛性，收敛到最后时，将 β 取为 1。在第 K 步，用 $\hat{\lambda}^K(t_0)$ 作为估值，积分正则方程，求得 $\hat{Z}^K(t_f)$ ，若

$$\|Z(t_f) - \hat{Z}^K(t_f)\| < \varepsilon \quad (7-74)$$

ε 为指定的小值，则停止计算。否则用 $\hat{\lambda}^K(t_0)$ 代替 $\hat{\lambda}^{K+1}(t_0)$ ，再积分正则方程，重复进行。

计算步骤如下

(1) 由 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 解出 $u = u(X, \lambda, t)$ ，代入状态和协态方程。

(2) 设已求出 $\lambda(t_0)$ 的第 K 步估计值 $\hat{\lambda}^K(t_0)$ 和给定的 $X(t_0)$ 合在一起，从 t_0 到 t_f 积分正则方程，求出 $X^K(t)$ ， $\lambda^K(t)$ 。抽出 n 个要求的分量的终值 $\hat{Z}^K(t_f)$ ，若 $\|Z(t_f) - \hat{Z}^K(t_f)\| < \varepsilon$ ，停止计算，否则进行下一步。

(3) 求敏感矩阵 $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda^T}$

(4) 按 (7-73) 计算 $\hat{\lambda}^{K+1}(t_0)$ 。

(5) 令 $K = K + 1$ 回到步骤 2。

这种方法的缺点是：(1) 第一次估计 $\lambda(t_0)$ 很困难，(2) 终端值对 $\lambda(t_0)$ 非常敏感时， $\hat{Z}(t_f)$ 与 $Z(t_f)$ 相差很大，线性关系 (7-70) 不成立。(3) 敏感矩阵难于确定得很精确，对它求逆的运算也容易引入误差。

例 7-3 系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1(0) = -5 \quad (7-75)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + 1.4x_2 - 0.14x_2^3 + 4u \quad x_2(0) = -5 \quad (7-76)$$

性能指标为

$$J(u) = \int_0^{0.1} (x_1^2 + u^2) du \quad (7-77)$$

用边界迭代法寻找 $u(t)$ ，使 $J(u)$ 最小。

解 因终端 $x_1(0.1)$ ， $x_2(0.1)$ 自由，故

$$\lambda_1(0.1) = \lambda_2(0.1) = 0$$

设 $\lambda_1(t_0)$ 和 $\lambda_2(t_0)$ 的初始估计值为零，迭代结果见表 7-1。可见在第 7 次迭代时，

$\lambda_1(t_f)$ 、 $\lambda_2(t_f)$ 已为零，满足了边界条件。

表 7-1

迭代次数	1	2	4	7	10
$\lambda_1(t_0)$	-1.05000	-1.04187	-1.04401	-1.04413	-1.04413
$\lambda_2(t_0)$	-0.05000	-0.04415	-0.04140	-0.04114	-0.04140
$\lambda_1(t_f)$	-0.00711	0.00183	0.00013	0.00000	0.00000
$\lambda_2(t_f)$	-0.01589	-0.00566	0.00000	0.00000	0.00000

(二)拟线性化法 这个方法的特点是用迭代算法来改善对正则方程解的估计,使它逐步逼近正则方程的精确解。和前面一样,将正则方程写成。

$$\dot{Y} = g(Y, t) \quad (7-78)$$

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (7-79)$$

设已知 n 个初始条件 $X(t_0) = X_0$ 和 n 个终端条件 $\lambda(t_f) = \lambda_f$ 。拟线性化法将非线性两点边值问题转化为线性两点边值问题,因此变得容易求解。

设在迭代的第 K 步获得近似解 $Y^K(t)$, 将正则方程 (7-78) 在 $Y^K(t)$ 展开, 保留一次项, 可得到 $K+1$ 步的近似解 Y^{K+1} , 有

$$\dot{Y}^{K+1} = g(Y^K, t) + \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_K (Y^{K+1} - Y^K) \quad K = 0, 1, \dots \quad (7-80)$$

满足给定边界条件

$$Y_j^{K+1}(t_0) = X_j(t_0) = X_{j0} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7-81)$$

$$Y_j^{K+1}(t_f) = \lambda_j(t_f) = \lambda_{jf} \quad j = n+1, n+2, \dots, 2n \quad (7-82)$$

(7-80) 可写成下面的线性非齐次方程

$$\dot{Y}^{K+1} = \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_K Y^{K+1} + [g(Y^K, t) - \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_K Y^K] \quad (7-83)$$

或

$$\dot{Y}^{K+1} = A_K(t) Y^{K+1} + v_K(t) \quad (7-84)$$

其中

$$A_K(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial Y}\right)_K \quad (7-85)$$

是 $2n \times 2n$ 的系统矩阵,

$$\nu_K(t) = [g(Y^K, t) - (\frac{\partial g}{\partial Y})_K Y^K] \quad (7-86)$$

是 $n \times 1$ 驱动函数向量。(7-84) 是线性微分方程, 由给定的 $2n$ 个边界条件可确定其通解的 $2n$ 个未知常数, 故解 $Y^{K+1}(t)$ 可完全被确定。

当满足

$$|Y_i^{K+1}(t) - Y_i^K(t)| \leq \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (7-87)$$

可停止计算。

例 7-4 系统方程为

$$\dot{x} = -x^2 + u \quad x(0) = 10 \quad (7-88)$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \quad (7-89)$$

用拟线性化法求 $u(t)$, 使 J 最小。

解 哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x^2 + u) \quad (7-90)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$$

$$u = -\lambda \quad (7-91)$$

上式代入状态方程后得到

$$\dot{x} = -x^2 - \lambda \quad x(0) = 10 \quad (7-92)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + 2\lambda x \quad \lambda(1) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(1)} = 0 \quad (7-93)$$

或写成

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - \lambda \\ -x + 2\lambda x \end{bmatrix} \quad (7-94)$$

上式与 (7-78) 对照可知

$$g(Y, t) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - \lambda \\ -x + 2\lambda x \end{bmatrix} \quad (7-95)$$

根据 (7-85)、(7-86) 可得

$$A_k(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial Y} \right)_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} -2x^k & -1 \\ 2\lambda^k - 1 & 2x^k \end{bmatrix} \quad (7-96)$$

$$\begin{aligned} v_k(t) &= [g(Y^k, t)] - \left[\left(\frac{\partial g}{\partial Y} \right)_k Y^k \right] \\ &= \begin{bmatrix} -(x^k)^2 - \lambda^k \\ -x^k + 2\lambda^k x^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2x^k & -1 \\ 2\lambda^k - 1 & 2x^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x^k)^2 \\ -2\lambda^k x^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-97)$$

于是线性化后的正则方程 (7-84) 中的系数阵 $A_k(t)$ 和驱动项 $v_k(t)$ 都已确定, 解这个非齐次时变微分方程, 并用边界条件 $x^{k+1}(0) = 10$ 和 $\lambda^{k+1}(1) = 0$ 以决定通解中的未定常数, 就完全确定了 $Y^{k+1}(t)$, 这就完成了一次迭代。当满足 (7-87) 式时, 停止计算, 求解结束。

7.3 小结

1. 最优控制的计算方法可分为直接法和间接法两大类。直接法中我们列举了梯度法和共轭梯度法。间接法中列举了边界迭代法和拟线性化法。

2. 直接法的特点是: 在每步迭代中并不满足哈密顿函数 H 取极小的必要条件, 只是在迭代终了才满足这个条件; 另外积分状态方程时是从 t_0 到 t_f , 而积分协态方程时是从 t_f 到 t_0 。由于状态和协态的稳定性是相反的, 所以这种双向积分, 可使最优化过程非常稳定。这可举一简单例子来说明。

例 7-5

$$\dot{x} = ax + u \quad (7-98)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t u^2 dt \quad (7-99)$$

则

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda(ax + u) \quad (7-100)$$

于是协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -a\lambda \quad (7-101)$$

解这两个方程，得

$$x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (7-102)$$

$$\lambda(t) = -\lambda(t_0)e^{-a(t-t_0)} \quad (7-103)$$

设 $a < 0$ ，则从 t_0 到 t_f ， $x(t)$ 收敛，而 $\lambda(t)$ 发散。若从 t_f 到 t_0 ，则 $\lambda(t)$ 就变为收敛了。

3. 梯度法是利用梯度信息 $\partial H / \partial u$ 来不断改善对控制函数 $u(t)$ 的估计，最后满足 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 的必要条件。这是一种简单又稳定的算法，几乎对所有的 $u(t)$ 的初始估计都有很好的收敛性。但在远离最优解时收敛速度快，在接近最优解时收敛得慢（原因在于 $\frac{\partial H}{\partial u} \rightarrow 0$ ）。

共轭梯度法比梯度法稍微复杂些，但收敛速度也快些。同样，在接近最优解时，共轭梯度法收敛速度变慢。要加速接近最优解时的收敛速度可用二阶变分法，不过这种方法的计算复杂程度要增加很多。

4. 间接法的特点是：在每步迭代中都满足 H 取极小的必要条件；另外，它同时从一个方向（从 t_0 到 t_f 或从 t_f 到 t_0 ）积分状态和协态方程。由于状态和协态的稳定性相反，这就使得对边界条件的初始估计非常敏感。尤其当终端时刻远远大于系统的最小时间常数时，收敛性可能很差。

5. 边界迭代法是在每步迭代中不断改善对缺少的初始条件的估计去满足给定的终端条件（也可改善对缺少的终端条件的估计去满足给定的初始条件），这种方法对初始估计（如 $\lambda(t_0)$ ）是非常敏感的，只有在能获得良好的初始估计时，才建议使用这种方法。

拟线性化法将非线性正则方程围绕上一步的估计解轨迹 $Y^K(t)$ 线性化，递推解出 $Y^{K+1}(t)$ ，最后满足正则方程。这种方法对初始估计 $Y^0(t)$ 可能不如边界迭代法对初始估计 $\lambda(t_0)$ 那么敏感。并且求线性微分方程的解也比较容易。

7.4 习题

1. 已知给定一阶系统 $\dot{x} = -x + 1.5u$, $x(0) = 5$, 试用梯度法求最优控制 u , 使得性

能指标 $J = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 + u^2) dt$ 最小。

2. 设给定一阶系统 $\dot{x} = -2x + u$, $x(0) = 1$, 试用共轭梯度法求解最优控制 u , 使

得性能指标 $J = \frac{1}{2} x^2(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt$ 最小。

3. 设给定二阶系统及初始条件为

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad x_2(0) = 0$$

性能指标为

$$J = 2x_1^2(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt$$

试用边界迭代法求解最优控制 u , 使得 J 最小。

4. 系统方程为

$$\dot{x} = -x^2 + 2u, \quad x(0) = 5$$

性能指标为

$$J = \int_0^1 (x^2 + 2u^2) dt$$

试用拟线性化法求最优控制 $u(t)$, 使 J 最小。

第八章 随机线性系统的最优控制

以前我们在讨论状态变量的最优估计问题时,并没有考虑反馈控制的作用。前几章在讨论最优控制问题时,我们认为控制系统是确定性的,它不受随机干扰的影响。实际工作中的系统免不了要带有随机干扰的因素,所以我们要研究在随机干扰作用下系统的最优控制问题,即要同时考虑最优估计和最优控制问题。这是一个复杂的问题,我们仅讨论系统是线性的,指标函数是二次型的以及随机干扰是高斯分布噪声情况下的最优控制问题,即所谓 LQG 问题 (Linear Quadratic Gaussian Problem)。这种情况下存在一个有名的分离定理(或确定性等价原理),按照此定理,可把最优控制问题和状态变量的最优估计问题分开来讨论。在研究最优控制问题时,假定所有状态变量都可直接得到,而在研究状态变量的最优估计时,则假定控制信号是已知的确定性函数。最后把控制规律中的状态变量用其估计值代替,就得到了随机线性系统的最优控制。

8.1 分离定理和离散随机线性调节器问题

首先回顾一下第五章中关于确定性系统线性二次型最优控制的结果。将第五章中的 (5-52)、(5-53)、(5-64)、(5-61) 式重写于下
线性离散系统状态方程 (第五章 (5-52) 式)

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k) \quad (8-1)$$

二次型性能指标 (第五章 (5-53) 式)

$$J = \frac{1}{2} X^T(N)P(N)X(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [X^T(k)Q(k)X(k) + U^T(k)R(k)U(k)] \quad (8-2)$$

$P(N), Q(k)$ 为半正定加权阵, $R(k)$ 为正定加权阵。最优控制为 (第五章 (5-64) 式)

$$U(k) = -[R(k) + B^T(k)K(k+1)R(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k)X(k) \quad (8-3)$$

其中 $K(k)$ 满足矩阵黎卡提差分方程(第五章(5-61)式)

$$K(k) = Q(k) + A^T(k)K(k+1)A(k) - A^T(k)K(k+1)B(k)$$

$$[R(k) + B^T(k)K(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k)K(k+1)A(k) \quad (8-4)$$

$$K(N) = P(N) \quad (8-5)$$

为了与本章的符号统一起来,将上面的方程改写如下:

$$\text{令 } X(k) = X_k \quad U(k) = U_k \quad A(k) = \Phi_{k+1,k}$$

$$B(k) = \Gamma(k) \quad P(N) = P_N \quad Q(k) = \bar{Q}_k, \quad R(k) = \bar{R}_k \quad K(k) = \bar{K}_k \quad (8-6)$$

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + \Gamma_k U_k \quad (8-7)$$

$$J = \frac{1}{2} X_N^T P_N X_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [X_k^T \bar{Q}_k X_k + U_k^T \bar{R}_k U_k] \quad (8-8)$$

$$U_k = -[\bar{R}_k + \Gamma_k \bar{K}_{k+1} \bar{R}_k]^{-1} \Gamma_k^T \bar{K}_{k+1} \Phi_{k+1,k} X_k \quad (8-9)$$

令

$$\Lambda_{k+1} = [\bar{R}_k + \Gamma_k \bar{K}_{k+1} \bar{R}_k]^{-1} \Gamma_k^T \bar{K}_{k+1} \quad (8-10)$$

其中, \bar{K}_k 满足下面的矩阵黎卡提差分方程

$$\bar{K}_k = \bar{Q}_k + \Phi_{k+1,k}^T \bar{K}_{k+1} \Phi_{k+1,k} - \Phi_{k+1,k}^T \bar{K}_{k+1} \Gamma_k [\bar{R}_k + \Gamma_k^T \bar{K}_{k+1} \Gamma_k]^{-1} \Gamma_k^T \bar{K}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \quad (8-11)$$

$$\bar{K}_N = P_N \quad (8-12)$$

$$\text{故 } U_k = -\Lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} X_k \quad (8-13)$$

现在来考虑 LQG 问题。随机线性系统的状态方程和测量方程为

$$X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + \Gamma_k U_k + W_k \quad (8-14)$$

$$Z_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1} + V_{k+1} \quad (8-15)$$

其中 W_k, V_k 是零均值高斯分布的白噪声, 满足

$$E[W_k] = 0 \quad E[W_k W_j^T] = Q_k \delta_{kj}$$

$$E[V_k] = 0 \quad E[V_k V_j^T] = R_k \delta_{kj}$$

$$E[W_k V_j^T] = 0 \quad (8-16)$$

对于这样一类线性随机系统，在设计最优反馈控制时，由于状态向量 X_k 的随机性，(8-8) 式所表示的性能指标也是随机变量，直接考虑它的最小化问题是没有意义的。我们把 (8-8) 式的数学期望作为随机最优控制的指标函数并省去 $\frac{1}{2}$ 这个因子。

$$\begin{aligned} J &= E\{X_N^T P_N X_N + \sum_{K=0}^{N-1} (X_k^T \bar{Q}_k X_k + U_k^T \bar{R}_k U_k)\} \\ &= E\{\sum_{K=0}^N (X_k^T \bar{Q}_k X_k + U_{k-1}^T \bar{R}_{k-1} U_{k-1})\} \end{aligned} \quad (8-17)$$

$$\text{其中 } \bar{Q}_N = P_N \quad (8-18)$$

注意，为了与噪声方差阵符号区分，这里把加权阵改为 \bar{Q}_k ， \bar{R}_k 。

对于线性高斯随机系统 (8-14) (8-15) 的最优控制问题，就是要求找到一组最优控制量 U_0, U_1, \dots, U_{N-1} 使指标函数 (8-17) 取得极小值。对于这种 LQG 问题，最优控制规律可按确定性系统 (8-7) 来求，只是将状态变量的反馈改为状态变量估计值的反馈，这就是分离定理。我们将它表达如下

分离定理 对于由方程 (8-14) (8-15) 以及指标函数 (8-17) 所描述的线性高斯随机控制系统，其最优控制为

$$U_k = -\Lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{X}_k \quad (8-19)$$

其中 \hat{X}_k 是 X_k 的最优线性滤波估计， Λ_{k+1} 的求法与确定性系统的公式 (8-10) 相同。

证明 我们用第六章中动态规划的最优性原理来证明。因此，从最后一区间向后倒退计算，即依次计算 $U_{N-1}, U_{N-2}, \dots, U_0$ 。

1) 一步问题

首先考虑最后一段的最优控制问题，即确定从采样时刻 $k = N-1$ 到终止时刻 $k = N$ 这一步上的最优控制 U_{N-1} ，使这一步的指标函数为最小，即

$$J_1^* = \min_{U_{N-1}} E\{X_N^T \bar{Q}_N X_N + U_{N-1}^T \bar{R}_{N-1} U_{N-1}\} \quad (8-20)$$

将 $k = N-1$ 时的状态转移方程 (8-14) 代入上式，消去 X_N 后得到

$$J_1^* = \min_{U_{N-1}} E\{(\Phi_{N,N-1}X_{N-1} + \Gamma_{N-1}U_{N-1} + W_{N-1})^T \bar{Q}_N(\Phi_{N,N-1}X_{N-1} + \Gamma_{N-1}U_{N-1} + W_{N-1}) + U_{N-1}^T \bar{R}_{N-1}U_{N-1}\} \quad (8-21)$$

将上式展开（为简明起见，暂时不写下标）得

$$\begin{aligned} J_1^* = \min_{U_{N-1}} E\{ & X^T \Phi^T \bar{Q} \Phi X + X^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma U + X^T \Phi^T \bar{Q} W \\ & + W^T \bar{Q} \Phi X + W^T \bar{Q} \Gamma U + W^T \bar{Q} W + U^T \Gamma^T \bar{Q} \Phi X \\ & + U^T \Gamma^T \bar{Q} W + U^T (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R}) U\} \end{aligned} \quad (8-22)$$

由于其中每一项均为标量，并且 \bar{Q} 是对称阵，所以上式右端第二项等于第七项，第三项等于第四项，第五项等于第八项。于是

$$\begin{aligned} J_1^* = \min_{U_{N-1}} E\{ & X^T \Phi^T \bar{Q} \Phi X + 2X^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma U + \\ & 2X^T \Phi^T \bar{Q} W + 2W^T \bar{Q} \Gamma U + W^T \bar{Q} W + U^T (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R}) U\} \end{aligned} \quad (8-23)$$

由 (8-14) 可知 X_k 只与 W_{k-1} 、 W_{k-2} 、 \dots 、 W_0 有关而与 W_k 无关，并且 W_k 是零均值的，故上式中第三项和第四项的均值为零。又因为所求控制量所依据的信息只有系统过去的输出量（状态变量不能直接测量）和初始状态的均值，即

$$U_k = f_k(Z^k, m_0)$$

其中。 $m_0 = E[X_0]$

$$Z^k \triangleq (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)^T \quad (8-24)$$

根据 W_k 与 Z^k 和 X_0 的随机独立性，可知 U_k 与 W_k 也是独立的，故 (8-21) 中第四项的均值也为零。至此 J_1^* 化为（恢复下标）

$$\begin{aligned} J_1^* = \min_{U_{N-1}} E\{ & X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} X_{N-1} + 2X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} U_{N-1} \\ & + W_{N-1}^T \bar{Q}_N W_{N-1} + U_{N-1}^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1}\} \end{aligned} \quad (8-25)$$

由于上式右端花括号内的量是依赖于测量值 $Z^{N-1} = [Z_1, Z_2, \dots, Z_{N-1}]^T$ 和 m_0 为已知这一条件上的，而条件 Z^{N-1} 又是随机的，因此要利用条件期望的性质来计算。根据本章 §2 中关于条件概率的定义可推出下面的性质

$$E[\xi] = E_\eta[E_\xi(\xi | \eta)] \quad (8-26)$$

上式右端方括号内的求数学期望是对随机变量 ξ 而言的（假定 η 已知），外层的求数学期望是对条件 η 而言的，而等式左端是无条件数学期望，上式可证明

如下:

$$\begin{aligned}
 E[\xi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) d\eta \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) f(\xi | \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) [\int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi | \eta) d\xi] d\eta \\
 &= E_{\eta}[E_{\xi}(\xi | \eta)]
 \end{aligned}$$

于是(8-25)式可进一步化为

$$\begin{aligned}
 J_1^* &= \min_{U_{N-1}} E\{E[X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} X_{N-1} + 2X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} U_{N-1} + W_{N-1}^T \\
 &\quad \bar{Q}_N W_{N-1} + U_{N-1}^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1} | Z^{N-1}, m_0]\} \quad (8-27)
 \end{aligned}$$

由于 m_0 非随机, 所以上式外层数学期望只是对 Z^{N-1} 取的, 为了找到 U_{N-1} 使 J_1 最小, 这等价于使上式内层的条件数学期望最小。这时假定条件 Z^{N-1} 给定, 而 U_{N-1} 是 Z^{N-1} 的确定性函数, 因此 U_{N-1} 与求内层条件数学期望无关, 即有

$$\begin{aligned}
 &E[2X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} U_{N-1} | Z^{N-1}, m_0] \\
 &= 2E[X_{N-1}^T | Z^{N-1}, m_0] \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} U_{N-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{和 } E[U_{N-1}^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1} | Z^{N-1}, m_0] = U_{N-1}^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1}$$

然后, 将这此与 U_{N-1} 有关的项对 U_{N-1} 求导并令其等于零, 即

$$\frac{\partial}{\partial U_{N-1}} \{2E[X_{N-1}^T | Z^{N-1}, m_0] \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} U_{N-1} + U_{N-1}^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1}\} = 0$$

利用标量对向量的求导公式, 可得

$$2\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} E[X_{N-1} | Z^{N-1}, m_0] + 2(\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) U_{N-1} = 0$$

由此解出最优控制 U_{N-1} 为

$$U_{N-1} = -(\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1})^{-1} \Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} E[X_{N-1} | Z^{N-1}, m_0] \quad (8-28)$$

我们知道, 最小方差估计即条件均值, 在高斯分布情况下, 线性最小方差估计即最小方差估计, 因为卡尔曼滤波值是线性最小方差估计, 故滤波值 \hat{X}_{N-1} 就是条件均值, 即

$$E[X_{N-1} | Z^{N-1}, m_0] = \hat{X}_{N-1} \quad (8-29)$$

于是(8-28)式可成

$$U_{N-1} = -(\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1})^{-1} \Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} \hat{X}_{N-1} \quad (8-30)$$

把上式与确定性最优控制的解(8-13)式(令 $k = N-1$)对照,并注意(8-12)即 $\bar{Q}_N = P_N = \bar{K}_N$,可见两者形式完全一样,只是将 \hat{X}_{N-1} 代 X_{N-1} 而已。(8-18)

(8-30)还可简化为

$$U_{N-1} = -\Lambda_N \Phi_{N,N-1} \hat{X}_{N-1} \quad (8-31)$$

其中

$$\Lambda_N = (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1})^{-1} \Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \quad (8-32)$$

这样,我们就证明了分离定理对最后一步来讲是正确的。

下面来计算最后一段的最优指标值 J_1^* 。将(8-31)代入(8-25)得

$$\begin{aligned} J_1^* = E \{ & X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Phi_{N,N-1} X_{N-1} - 2X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} \Lambda_N \Phi_{N,N-1} \hat{X}_{N-1} \\ & + W_{N-1}^T \bar{Q}_N W_{N-1} + \hat{X}_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \Lambda_N^T (\Gamma_{N-1}^T \bar{Q}_N \Gamma_{N-1} + \bar{R}_{N-1}) \Lambda_N \Phi_{N,N-1} \hat{X}_{N-1} \} \end{aligned} \quad (8-33)$$

上式第二项可写成(略去下标)

$$\begin{aligned} -2X^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma \Lambda \Phi \hat{X} &= -2X^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})^{-1} \Gamma^T \bar{Q} \Phi \hat{X} \\ &= -2X^T S \hat{X} \end{aligned} \quad (8-34)$$

式中

$$S = \Phi^T \bar{Q} \Gamma (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})^{-1} \Gamma^T \bar{Q} \Phi = \Phi^T \bar{Q} \Gamma \Lambda \Phi \quad (8-35)$$

是对称阵。(8-33)第四项可写成

$$\begin{aligned} \hat{X}^T \Phi^T \Lambda^T (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R}) \Lambda \Phi \hat{X} &= \hat{X}^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})^{-1} (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R}) \\ (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})^{-1} \Gamma^T \bar{Q} \Phi \hat{X} &= \hat{X}^T \Phi^T \bar{Q} \Gamma (\Gamma^T \bar{Q} \Gamma + \bar{R})^{-1} \Gamma^T \bar{Q} \Phi \hat{X} = \hat{X}^T S \hat{X} \end{aligned} \quad (8-36)$$

而(8-34)与(8-36)相加得

$$\begin{aligned} -2X^T S \hat{X} + \hat{X}^T S \hat{X} &= (\hat{X} - 2X)^T S \hat{X} = -(\tilde{X} + X)^T S (X - \tilde{X}) \\ &= -\tilde{X}^T S X + \tilde{X}^T S \tilde{X} - X^T S X + X^T S \tilde{X} \\ &= \tilde{X}^T S \tilde{X} - X^T S X \end{aligned} \quad (8-37)$$

式中, $\tilde{X} = X - \hat{X}$, 并注意 S 为对称,故可得出(8-37)式。将(8-34)~(8-37)

代入 (8-33) 可得

$$J_1^* = E\{X^T \Phi^T \bar{Q} \Phi X + W^T \bar{Q} W + \tilde{X}^T S \tilde{X} - X^T S X\}$$

利用 (8-35) 合并同类项, 并恢复下标, 可得

$$J_1^* = E\{X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \tilde{Q}_N \Phi_{N,N-1} X_{N-1}\} + \alpha_{N-1} \quad (8-38)$$

式中

$$\tilde{Q}_N = Q_N^0 - Q_N^0 \Gamma_{N-1} \Lambda_N, \quad Q_N^0 = \bar{Q}_N \quad (8-39)$$

$$\alpha_{N-1} = E\{W_{N-1}^T Q_N^0 W_{N-1} + \tilde{X}_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T Q_N^0 \Gamma_{N-1} \Lambda_N \Phi_{N,N-1} \tilde{X}_{N-1}\} \quad (8-40)$$

α_{N-1} 反映了由动态噪声 W_{N-1} 和滤波误差 \tilde{X}_{N-1} 造成的指标函数的增加。在确定性最优控制中因 Q_N^0 为零, 这项将为零。

2) 两步问题

接下来讨论最后两步的最优控制问题。根据动态规划最优化原则, 可把最后两步的最优化指标表示为

$$J_2^* = \min_{U_{N-2}} \{E\{X_{N-1}^T \bar{Q}_{N-1} X_{N-1} + U_{N-2}^T \bar{R}_{N-2} U_{N-2}\} + J_1^*\} \quad (8-41)$$

将一步最优化的结果 (8-38) 代入上式, 并注意到 α_{N-1} 不受 U_{N-2} 的影响, 可把它提到 min 号之外, 即可得到

$$\begin{aligned} J_2^* &= \min_{U_{N-2}} E\{X_{N-1}^T \bar{Q}_{N-1} X_{N-1} + U_{N-2}^T \bar{R}_{N-2} U_{N-2} + X_{N-1}^T \Phi_{N,N-1}^T \tilde{Q}_N \Phi_{N,N-1} X_{N-1}\} + \alpha_{N-1} \\ &= \min_{U_{N-2}} E\{X_{N-1}^T Q_{N-1}^0 X_{N-1} + U_{N-2}^T \bar{R}_{N-2} U_{N-2}\} + \alpha_{N-1} \end{aligned} \quad (8-42)$$

其中

$$Q_{N-1}^0 = \bar{Q}_{N-1} + \Phi_{N,N-1}^T \tilde{Q}_N \Phi_{N,N-1} \quad (8-43)$$

将 J_2^* 的表达式 (8-42) 与 J_1^* 的表达式 (8-20) 相比, 可见除 J_2^* 中多一个常数项 α_{N-1} 之外, 两者形式完全相同, 于是可重复一步最优化过程的步骤, 得到下面的结果

$$U_{N-2} = -\Lambda_{N-1} \Phi_{N-1,N-2} \hat{X}_{N-2} \quad (8-44)$$

$$\Lambda_{N-1} = (\Gamma_{N-2}^T Q_{N-1}^0 \Gamma_{N-2} + \bar{R}_{N-2})^{-1} \Gamma_{N-2}^T Q_{N-1}^0 \quad (8-45)$$

$$Q_{N-1}^0 = \bar{Q}_{N-1} + \Phi_{N,N-1}^T \tilde{Q}_N \Phi_{N,N-1} \quad (8-46)$$

$$\tilde{Q}_{N-1} = Q_{N-1}^0 - Q_{N-1}^0 \Gamma_{N-2} \Lambda_{N-1} \quad (8-47)$$

$$J_2^* = E\{X_{N-2}^T \Phi_{N-1,N-2}^T \tilde{Q}_{N-1} \Phi_{N-1,N-2} X_{N-2}\} + \alpha_{N-2} \quad (8-48)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{N-2} &= \alpha_{N-1} + E\{W_{N-2}^T Q_{N-1}^0 W_{N-1} + \tilde{X}_{N-2}^T \Phi_{N-1,N-2}^T Q_{N-1}^0 T_{N-2} \Lambda_{N-1} \Phi_{N-1,N-2} \tilde{X}_{N-2}\} \\ &= E\left\{\sum_{k=1}^2 (W_{N-k}^T Q_{N-k+1}^0 W_{N-k} + \tilde{X}_{N-k}^T \Phi_{N-k+1,N-k}^T Q_{N-k+1}^0 \Gamma_{N-k} \Lambda_{N-k+1} \Phi_{N-k+1,N-k} \tilde{X}_{N-k})\right\} \quad (8-49) \end{aligned}$$

3) 一般结果

类似于从一步问题至两步问题的推演过程，由后向前算第 $N-K$ 步（即由前向后算第 K 步）的最优指标为

$$J_{N-K} = \min_{U_k} \{E\{X_{k+1}^T \bar{Q}_{k+1} X_{k+1} + U_k^T \bar{R}_k U_k\} + J_{N-k-1}^*\} \quad (8-50)$$

采用数学归纳法即可得出如下的一般结果

$$U_k = -\Lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{X}_k \quad (8-51)$$

$$\Lambda_{k+1} = (\Gamma_k^T Q_{k+1}^0 \Gamma_k + \bar{R}_k)^{-1} \Gamma_k^T Q_{k+1}^0 \quad (8-52)$$

$$Q_{k+1}^0 = \bar{Q}_{k+1} + \Phi_{k+2,k+1}^T \tilde{Q}_{k+2} \Phi_{k+2,k+1} \quad (8-53)$$

$$\tilde{Q}_{k+1} = Q_{k+1}^0 - Q_{k+1}^0 \Gamma_k \Lambda_{k+1} \quad (8-54)$$

$$J_{N-k}^* = E\{X_k^T \Phi_{k+1,k} \tilde{Q}_{k+1} \Phi_{k+1,k} X_k\} + \alpha_k$$

$$\alpha_k = E\left\{\sum_{j=1}^{N-k} (W_{N-j}^T Q_{N-j+1}^0 W_{N-j} + \tilde{X}_{N-j}^T \Phi_{N-j+1,N-j}^T Q_{N-j+1}^0 \Gamma_{N-j} \Lambda_{N-j+1} \Phi_{N-j+1,N-j} \tilde{X}_{N-j})\right\} \quad (8-55)$$

将 (8-54) 代入 (8-53)，并将下标 $k+1$ 改为 k ，可得

$$Q_k^0 = \bar{Q}_k + \Phi_{k+1,k}^T Q_{k+1}^0 \Phi_{k+1,k} - \Phi_{k+1,k}^T Q_{k+1}^0 \Gamma_k (\Gamma_k^T Q_{k+1}^0 \Gamma_k + \bar{R}_k)^{-1} \Gamma_k^T Q_{k+1}^0 \Phi_{k+1,k} \quad (8-56)$$

此即 Q_k^0 所满足的矩阵黎卡提方程。终端条件为

$$Q_N^0 = Q_N = P_N \quad (8-57)$$

现在将上面 LQG 问题的结果 (8-51) (8-52) (8-56) (8-57) 与确定性最优控制的结果 (8-13) (8-10) (8-11) 和 (8-12) 分别对比，注意到 LQG 问题解中的 Q_k^0 相当于确定性最优控制解中的 \bar{K}_k ，于是两者解的形式完全相同，只是在

LQG 问题中用估计值 \hat{X}_k 代替状态 X_k 而已, 于是分离定理得证。

利用分离定理的结论来设计线性随机系统的最优反馈控制器, 框图如图 8-1 所示, 图中 Z^{-1} 表示一步延迟, 反馈增益阵为

$$L_k = \Lambda_{k+1} \Phi_{k+1,k} \quad (8-58)$$

它和滤波增益阵 K_k 都可预先离线计算出来。

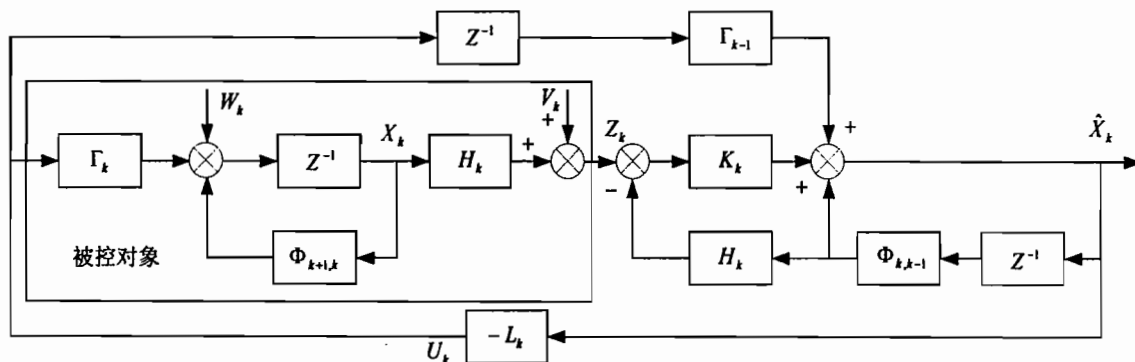


图 8-1 线性随机系统的最优反馈控制框图

8.2 连续随机线性调节器问题

我们不加证明地列出下面的结果, 设连续随机线性系统为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) + G(t)W(t) \quad (8-59)$$

$$Z(t) = H(t)X(t) + V(t) \quad (8-60)$$

其中, $W(t)$ 和 $V(t)$ 为零均值高斯白噪声, 且

$$\left. \begin{aligned} E[W(t)] &= 0, \quad E[W(t)W^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau) \\ E[V(t)] &= 0, \quad E[V(t)V^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau) \end{aligned} \right\} \quad (8-61)$$

$$E[W(t)V^T(\tau)] = 0 \quad (8-62)$$

指标函数为

$$J = E \left\{ X^T(t_f) P X(t_f) + \int_0^{t_f} [X^T(t) \bar{Q}(t) X(t) + U^T(t) \bar{R}(t) U(t)] dt \right\} \quad (8-63)$$

这里用 Q, R 表示噪声方差阵, 为避免混淆将加权阵改为 \bar{Q}, \bar{R} 。

上述问题称为连续系统的线性高斯二次型问题 (LQG 问题)。和离散的情况

相同, 根据分离定理, 最优控制系统由两部分组成: 一部分是确定性最优控制器; 另一部分是与其串联的最优线性滤波器。最优控制可写成

$$U(t) = -L(t)\hat{X}(t) \quad (8-64)$$

反馈增益与确定性最优控制一样 (参考第五章 (5-16) 式), 即

$$L(t) = \bar{R}^{-1}(t)B^T(t)K(t) \quad (8-65)$$

$K(t)$ 满足下面的矩阵黎卡提微分方程 (参考第五章 (5-14) 式, 注意这里 $K(t)$ 不是卡尔曼滤波增益)

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)\bar{R}^{-1}(t)B^T(t)K(t) - \bar{Q}(t) \quad (8-66)$$

图 8-2 表示连续随机线性系统最优控制的方块图。

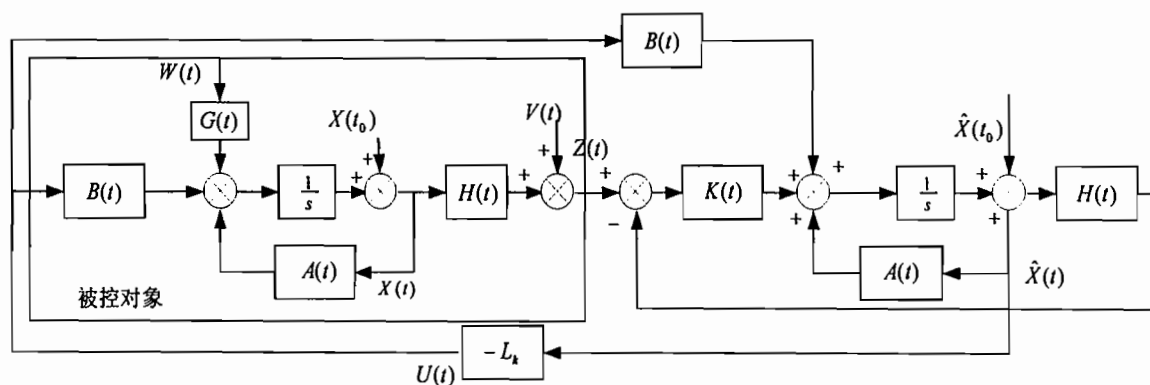


图 8-2 连续随机线性系统最优控制的方块图

例 8-1 图 8-3 是汽车自动控制系统的示意图。汽车沿着道路上设置的制导电缆自动行驶, 汽车偏移电缆的横向位移由传感器测出。图 8-4 是自动控制系统的原理方块图。图中 W 为作用在汽车上的干扰力 (例如路面不平引起), U 为方向舵控制力, V 为传感器测量噪声, X 为汽车侧向位移。

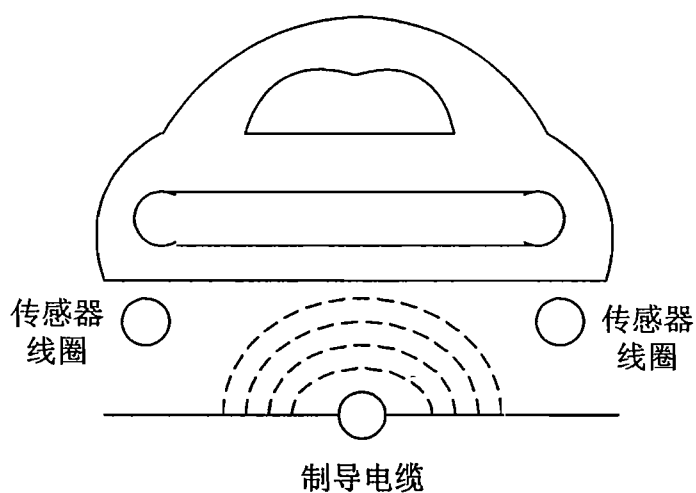


图 8-3 汽车制导传感器原理图

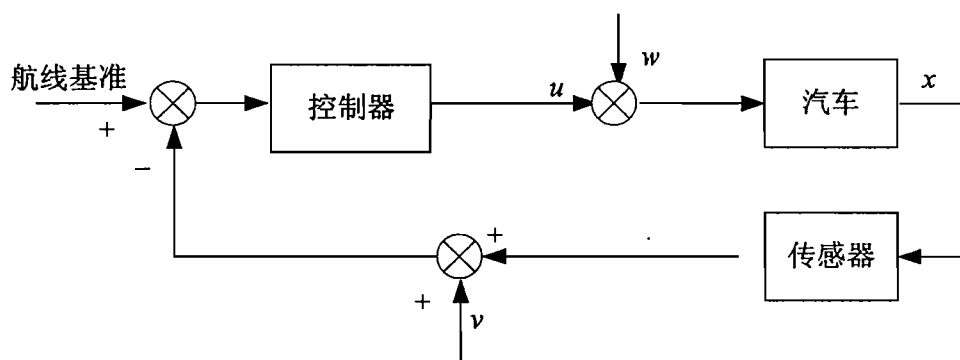


图 8-4 汽车制导方块图

1、对象状态方程

汽车可看成纯惯性环节，其传递函数为

$$G_p(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_v}{s^2} \quad (8-67)$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$ ，则汽车的状态方程为

$$\dot{X} = AX + BU + W \quad (8-68)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K_v \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$$

根据实例，干扰力 W 为服从正态分布的白噪声

$$E[W(t)] = 0, \quad E[W(t)W^T(\tau)] = Q\delta(t - \tau)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$$

K_v 和 q 为常数。

2、量测方程

$$Z = HX + V \quad (8-69)$$

其中, $H = [1 \ 0]$, V 为正态分布的噪声, $E[V(t)] = 0$

$E[V(t)V^T(\tau)] = r\delta(t-\tau)$ 且干扰 W 和测量噪声 V 不相关, 即

$$E[V(t)W^T(\tau)] = 0$$

3、性能指标

$$J = E\left[\int_0^\infty (ax_1^2 + bu^2)dt\right] \quad (8-70)$$

其中, 第一项表示对汽车侧向位移的约束, 第二项则表示对控制量 U 的约束。

4、最优控制的设计

这是线性二次型高斯问题, 可以应用分离定理。因不是无限长时间定常系统调节器问题, 可以用稳态控制增益, 即

$$u = -L\hat{X} \quad (8-71)$$

$$L = \bar{R}^{-1}B^TK \quad (8-72)$$

其中 K 满足矩阵黎卡提代数方程

$$-KA - A^TK + K\bar{B}\bar{R}^{-1}B^TK - \bar{Q} = 0 \quad (8-73)$$

这里,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K_v \end{bmatrix} \quad \bar{R} = b$$

把这些值代黎卡提方程 (8-73), 得

$$-\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_v \end{bmatrix} \frac{1}{b}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

由上式可得到三个方程式

$$\begin{cases} a = \frac{1}{b} K_v^2 K_{12}^2 \\ K_{11} = \frac{1}{b} K_v^2 K_{12} K_{22} \\ K_{12} = \frac{1}{2b} K_v^2 K_{22}^2 \end{cases}$$

可解得, $K_{11} = K_v^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}$, $K_{12} = a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{2}} K_v^{-\frac{1}{2}}$, $K_{22} = 2^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}} K_v^{-\frac{3}{2}}$

将上面求到的 K 代入 (8-72), 可求得稳态增益阵为

$$L = \left[\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{2}{K_v}} \sqrt{\frac{a}{b}} \right] = [L_1, L_2]$$

于是由 (8-71) 得

$$u = -L_1 \hat{x}_1 - L_2 \hat{x}_2 = -\sqrt{\frac{a}{b}} \hat{x}_1 - \sqrt{\frac{2}{K_v}} \sqrt{\frac{a}{b}} \hat{x}_2 \quad (8-74)$$

其中, 滤波值由下面的卡尔曼滤波方程决定

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + K_c(Z - H\hat{X}) \quad (8-75)$$

其中, 稳态卡尔曼滤波增益 K_c 为

$$K_c = PH^T R^{-1} \quad (8-76)$$

满足下面的矩阵黎卡提代数方程

$$AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP = 0 \quad (8-77)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K_v \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_1 \end{bmatrix}$$

$$H = [1, 0], \quad R = r_1, \quad K_c = \begin{bmatrix} K_{c1} \\ K_{c2} \end{bmatrix}$$

由上面的值代入 (8-77) 求出 P , 将 P 代入 (8-76) 求出, 再代入 (8-75), 可得

$$\dot{\hat{x}}_1 = -K_{c1} \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + K_{c1} Z \quad (8-78)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -2K_{c2} \hat{x}_1 + K_v u + K_{c2} Z \quad (8-79)$$

其中,

$$K_{C1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{q_1}{r_1}}, \quad K_{C2} = \sqrt{\frac{q_1}{r_1}}$$

由 (8-78), (8-79) 解出 \hat{x}_1, \hat{x}_2 , 代入 (8-74) 即可求出所需最优控制。

8.3 随机线性跟踪器问题

前面我们讨论的问题是使系统状态变量和输出量尽量控制到零, 这种问题称为调节器问题 (使输出量跟踪常值外作用的问题可归化为这种问题)。但在实际工作中有时要求系统的输出跟踪一个随时间变化的外作用, 这种问题称为跟踪问题。制导系统和随动系统就可归入这类。

设系统的动态方程和量测方程为

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + \Gamma_k U_k + W_k \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

另有一个输出方程为

$$C_k = M_k X_k \quad (8-80)$$

X_k 为 n 维, U_k 为 m 维, Z_k 为 q 维, C_k 为 s 维。要求 C_k 跟踪一个指令作用 D_k 。

性能指标为

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N e_k^T \bar{Q}_k e_k + U_{k-1}^T \bar{R}_{k-1} U_{k-1} \right\} \quad (8-81)$$

其中

$$e_k = D_k - C_k \quad (8-82)$$

是跟踪误差。

设指令作用 D_k 由另一个系统 (如被跟踪的敌机) 生成, 其状态方程和量测方程为

$$\begin{cases} Y_{k+1} = \psi_{k+1,k} Y_k + B_k \xi_k \\ D_k = N_k Y_k \end{cases} \quad (8-83)$$

$$(8-84)$$

其中, ξ_k 是白噪声

一种基本的处理方法是引入增广状态向量

$$X_k^a = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} \quad (8-85)$$

和增广噪声向量

$$\xi_k^a = \begin{bmatrix} W_k \\ \xi_k \end{bmatrix} \quad (8-86)$$

于是, 关于 X_k^a 的动态方程是

$$X_{k+1}^a = \Phi_{k+1,k}^a X_k^a + \Gamma_k^a U_k + B_k^a \xi_k^a \quad (8-87)$$

其中

$$\Phi_{k+1,k}^a = \begin{bmatrix} \Phi_{k+1,k} & 0 \\ 0 & \psi_{k+1,k} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k^a = \begin{bmatrix} \Gamma_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_k^a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_k \end{bmatrix}$$

新的输出方程为

$$Z_k^a = H_k^a X_k^a + F_k^a V_k \quad (8-88)$$

其中

$$Z_k^a = \begin{bmatrix} Z_k \\ D_k \end{bmatrix}, \quad H_k^a = \begin{bmatrix} H_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad F_k^a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

用这些增广向量和增广矩阵来表示指标函数, 有

$$e_k = D_k - C_k = N_k Y_k - M_k X_k = [-M_k, N_k] X_k^a$$

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N \left[(X_k^a)^T [-M_k, N_k]^T \bar{Q}_k [-M_k, N_k] X_k^a + U_{k-1}^T \bar{R}_{k-1} U_{k-1} \right] \right\}$$

令

$$Q_k = [-M_k, N_k]^T \bar{Q}_k [-M_k, N_k]$$

得

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N \left[(X_k^a)^T Q_k X_k^a + U_{k-1}^T \bar{R}_{k-1} U_{k-1} \right] \right\} \quad (8-89)$$

(8-87) ~ (8-89) 组成了关于 X_k^a 的 LQG 调节器问题。当 $M_k \equiv I, N_k \equiv 0$, 就化为关于 X_k 的 LQG 调节器问题。

在设计这个增广系统的最优控制时, 仍可采用分离定理的结论。不过这时的

状态估计是对增广状态 X_k^a 的估计，它是由 \hat{X}_k 和 \hat{Y}_k 组成的向量。将 \hat{X}_k 和 \hat{Y}_k 反馈即可构成最优跟踪控制系统，其结构图如图 8-5 所示。

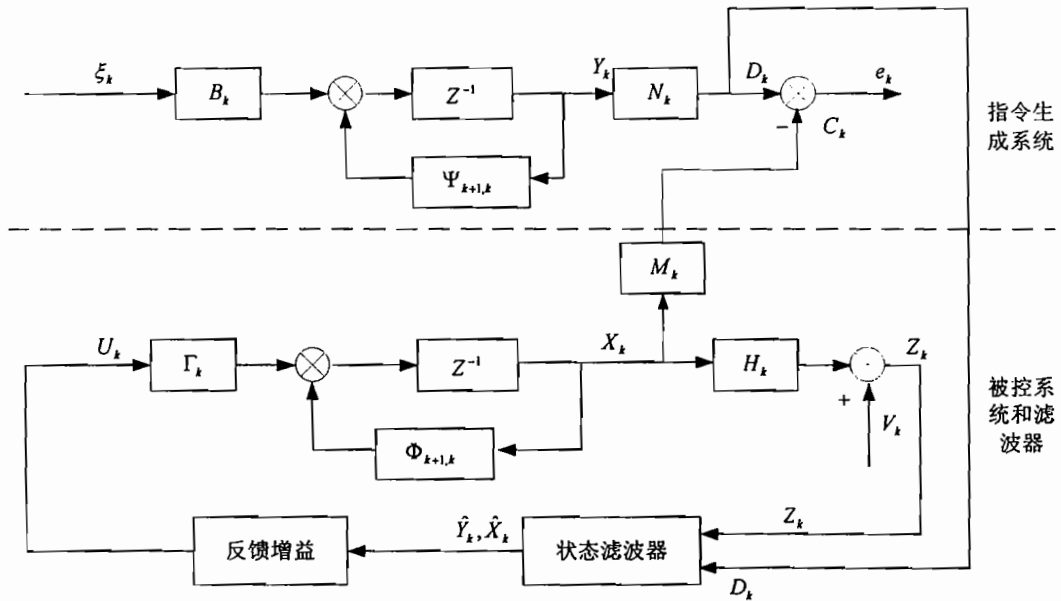


图 8-5 随机线性跟踪器原理图

8.4 小结

1、在随机线性系统最优控制中，目前在理论上和应用上比较成熟的是所谓 LQG 问题，即线性系统、二次型指标、高斯分布噪声情况下的最优调节器问题。这时分离定理可以成立。根据分离定理，可将 LQG 分成两部分，即根据确定性系统来求出最优反馈控制律，再由卡尔曼滤波器来测定最优状态估计值，将这个状态估计值代替状态变量本身，就得到了最优反馈控制。

2、用动态规划证明了离散系统的分离定理，证明中用到了最优性原理以及高斯分布下线性最小方差估计即条件均值的结论。还可用极大值原理来证明分离定理。

3、随机线性系统的最优跟踪器的设计问题可以用增广状态的方法化为调节器问题，因而设计与 LQG 问题是类似的。

8.5 习题

1. 设随机系统为

$$x(k) = x(k-1) + 2u(k-1) + w(k-1)$$

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

其中 $w(k)$ 和 $v(k)$ 为互不相关的零均值正态白噪声序列, $w(k) \sim N(0, 25)$, $v(k) \sim N(0, 15)$, 它们均与 $N(\mu_0, 100)$ 的初始状态 $x(0)$ 不相关, 试根据量测值 $z(1), z(2)$

求使得目标泛函

$$J = E \left\{ x^2(3) + \sum_{k=0}^2 u^2(k) \right\}$$

达到最小值的最优控制, 并计算 $\min J$ 。

2. 设随机系统的状态方程和量测方程分别为

$$X(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k-1) + \begin{bmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{bmatrix} U(k-1) + w(k-1)$$

$$z(k) = [1 \quad 0] X(k) + v(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $\{w(k)\}$ 和 $\{v(k)\}$ 为两个互不相关的零均值正态平稳白噪声序列, 方差为

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R(k) = 1. \quad \text{又设初始状态 } X(0) \text{ 为正态随机向量, 均值 } \mu_0 = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \end{bmatrix},$$

方差矩阵 $P_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X(0)$ 与 $w(k)$ 和 $v(k)$ 均不相关, 若以 $z(1), z(2), \dots$ 表示

测量值, 试求使目标泛函

$$J = E \left\{ x_2^2(3) + \sum_{k=0}^2 [x_1^2(k) + u_1^2(k) + u_2^2(k)] \right\}$$

达到最小值的最优控制, 并求出 $\min J$ 。

3. 设随机系统方程为

$$X(k) = \Phi(k, k-1)X(k-1) + B(k-1)u(k-1)$$

$$z(k) = X(k) + v(k)$$

其中 $X(k)$ 为 n 维状态向量, $u(k)$ 为 n 维控制向量, $B(k)$ 为 n 阶非奇异方阵

$(k = 0, 1, 2, \dots, N)$, $X(0) = N(0, P_0)$, $\{v(k)\}$ 为与 $X(0)$ 不相关的正态白噪声序列,

$E[v(k)] = 0$, $E[v(k)v^T(k)] = R(k) > 0$, 目标泛函为 $J = E\{\sum_{k=1}^N [X^T(k)A(k)X(k)]\}$,

其中 $A(k) > 0$

(1) 试求最小化 J 的最优控制及 $\min J$ 。

(2) 证明系统按最优控制方案运行时, 滤波值为增益矩阵与量测值之积, 即

$$\hat{X}(k) = K(k)z(k)。$$

(3) 当系统进行最优运行时, 证明对状态一步预测的误差等于系统 (距原点) 的误差, 即 $\tilde{X}(k+1|k) = X(k+1)$ 。

4. 利用上题结果, 对一阶随机系统

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

其中 $v(k)$ 为 $N(0, 5)$ 的白噪声序列, $x(0) \sim N(0, 5)$, 且 $x(0)$ 与 $v(k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 不

相关, 求使 $J = E[x(2)]^2$ 为最小的最优控制以及有关的卡尔曼滤波值和 $\min J$ 。

第九章 奇异最优控制

奇异最优控制问题是在以下情况下产生的。对于任何最优控制问题，无论是奇异的还是非奇异的，使得哈密顿函数 H 取极值的弧被定义为极值弧。如果此极值弧不能使控制向量表示成状态向量和协状态向量的函数，那么问题就是奇异的，下面具体分析一下奇异最优控制问题。

9.1 奇异最优控制问题的提出

在研究时间最短和燃料最少的最优控制问题时就会涉及到奇异解问题，在时间最短最优控制问题中，应用庞特里亚金极小值原理可得

$$u_j^*(t) = -\text{sgn}[q_j(t)] \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r \quad , \quad t \in [t_0, t_f] \quad (9-1)$$

在正常情况下，函数 $q_j(t)$ 在控制区间 $[t_0, t_f]$ 中只有有限个零值点。控制变量在其约束的边界上取值，得到的最优控制为 Bang-Bang 控制。但在奇异情况下，至少有一个函数 $q_j(t)$ 在某一区间 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上恒等于零。

在线性二次型性能指标最优控制问题中也有类似的奇异情况。我们可以将性能指标中的被积函数取为 $X^T Q X + U^T R U$ 。其中 $U^T R U$ 项的出现体现了对控制变量的约束，可以使最优控制 U^* 的值在合理的范围内。如果我们直接规定控制变量满足如下不等式约束

$$|u_j| \leq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (9-2)$$

这时就没有必要在性能指标中出现 $U^T R U$ 这项了。此类问题与规范调节器的差别在于控制的不等式约束，且 $R = 0$ 。哈密顿函数 H 也是控制变量 U 的线性函数。若在控制区间 $[t_0, t_f]$ 上， $H = B^T \lambda$ 只存在有限个零值点，则是 Bang-Bang 控制。如果在某一控制区间 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上满足 $H = B^T \lambda = 0$ ，那么，控制变量在控制边界内取值总满足极小值原理。但是，由极小值原理同样很难解出最优控制的具体形式。考虑到上述线性二次型问题的最优控制一般情况下是由 Bang-Bang 控制和线性反馈控制两部分组成的。所以，

对于一般的 Bolza 问题:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U, t) \\ J = \phi(X(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(X, U, t) dt \\ X(t_0) = X_0 \\ G(x(t_f), t_f) = 0 \\ U = \{u_j(\cdot) : u_j(t) \text{ 是分段连续函数, 且} \\ |u_j(t)| \leq M < \infty, t \in [t_0, t_f], j = 1, 2, \dots, r\} \\ t_0 \text{ 给定, } t_f \text{ 可以固定, 也可以不固定} \end{cases} \quad (9-3)$$

其哈密顿函数为

$$H(X, U, \lambda, t) = F(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t) \quad (9-4)$$

当控制变量在约束的边界范围内取值时, 极值条件应为

$$H_u = 0 \quad (9-5)$$

$$H_{uu} \geq 0 \quad (9-6)$$

条件(9-6)常称勒让德—克莱勃希条件(Legendre-Weierstrass Condition)。若条件(9-6)只取严格的不等式符号, 则称强化的勒让德—克莱勃希条件。

如果在某一时间间隔 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上, 矩阵 H_{uu} 是奇异的, 即

$$\det(H_{uu}) = 0 \quad (9-7)$$

或者 H_{uu} 是非负定的, 不满足强化的勒让德—克莱勃希条件, 则称 Bolza 问题为奇异的。此时的最优控制为奇异最优控制。与此对应的最优轨线部分称为奇异孤, $[t_1, t_2]$ 则称为奇异区间。

9.2 奇异线性二次型最优控制问题

把奇异和线性二次型这两个概念结合在一起就得到了奇异线性二次型问题这个概念。一个奇异线性二次型问题的奇异性等价于性能指标中的被积函数 $X^T Q X + U^T R U$ 中矩阵 R 的奇异性。奇异线性二次型问题可以是直接提出的, 也可以作为对一般的最优控制问题应用二次变分原理的结果而产生的。

奇异二次型最优控制是一类常见的最优化奇异解问题，该问题可以用数学语言描述如下：

考虑线性受控系统

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (9-8)$$

系数矩阵 A , B 是具有适当维数的常数矩阵。控制变量受如下不等式约束

$$|u_j(t)| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (9-9)$$

性能指标仅取为状态的二次型，即

$$J = \frac{1}{2} X^T P X + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T Q X] dt \quad (9-10)$$

假定其中的加权阵 P 和 Q 都是非负定对称阵。

哈密顿函数 H 为 U 的线性函数，即

$$H = \frac{1}{2} X^T Q X + \lambda^T (A X + B U) \quad (9-11)$$

根据极小值原理可知，在正常弧段上最优控制具有 Bang-Bang 形式，即

$$u^* = -\text{sgn}\{B^T \lambda\} \quad (9-12)$$

协态方程与边界条件为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -[QX + A^T \lambda], \quad \lambda(T) = PX(T) \quad (9-13)$$

的解。

若存在奇异解，则在奇异弧段上有下式成立，

$$\frac{\partial H}{\partial U} = B^T \lambda \equiv 0 \quad (9-14)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = 0 \quad (9-15)$$

这时，控制满足极小值原理，但是，由极小值原理解不出最优控制的具体形式。我们需要用其它方法来计算奇异弧。

假设在某区间 $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ 上存在奇异最优控制，则(9-14)的关系在此区间上必然存在，进而必须满足 $\frac{\partial H}{\partial U}$ 的各阶导数为零的附加条件，由此条件可以得到奇异最优控制。

实际上，上述问题的奇异弧段必满足

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right) = \frac{d}{dt}(B^T \lambda) = -B^T(QX + A^T \lambda) = 0 \quad (9-16)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right) = \frac{d}{dt}[-B^T(QX + A^T \lambda)] = -B^T[QAX + QBU - A^T QX - A^T A^T \lambda] = 0 \quad (9-17)$$

我们假设 $B^T QB$ 是非奇异阵，否则，奇异控制不存在。解得

$$U = -(B^T QB)^{-1} B^T [(QA - A^T Q)X - A^T A^T \lambda] \quad (9-18)$$

上式表明，若存在奇异解，则奇异解必具有式(9-18)的形式。将式(9-18)和式(9-8)、(9-13)联立求解两点边值问题，可求出最优奇异弧段及其上的奇异最优控制。

若哈密顿函数 H 不显含 t ，且末端时间 T 未定，由极小值原理可知沿最优轨迹哈密顿函数值恒等于零，即

$$H \equiv 0 \quad (9-19)$$

式(9-14)、(9-16)和(9-19)共 $2r+1$ 个标量方程。它们共同决定 $2n$ 维 (X, λ) 空间中的 $2(n-r)-1$ 维的超曲面。因为奇异弧上的各点 (X, λ) 满足上述 $2r+1$ 个方程。因此，若最优奇异弧存在，必在由上述 $2r+1$ 个方程所决定的超曲面上，此超曲面称为奇异超曲面。

例 9-1 已知二阶受控系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2 &= -u(t) \end{aligned} \quad (9-20)$$

标量约束满足如下不等式约束

$$|u(t)| \leq 1 \quad (9-21)$$

试求系统(9-20)由已知初态 $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ 转移到坐标原点。且使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x_1^2(t) dt \quad (9-22)$$

为极小的最优控制。

哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2} x_1^2 + \lambda_1(x_2 + u) - \lambda_2 u \quad (9-23)$$

由极小值原理可知，正常弧段上的最优控制为 Bang-Bang 形式，即

$$u^* = -\operatorname{sgn}\{\lambda_1 - \lambda_2\} \quad (9-24)$$

相应的最优控制轨线（Bang-Bang 弧段）满足如下的规范方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \operatorname{sgn}\{\lambda_1 - \lambda_2\} \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sgn}\{\lambda_1 - \lambda_2\} \\ \dot{\lambda}_1 = -x_1 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases} \quad (9-25)$$

因为 H 曲线可能依赖于 u ，所以可能存在奇异弧，满足

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (9-26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 = -x_1 + \lambda_1 = 0 \quad (9-27)$$

$$H = \frac{1}{2}x_1^2 + \lambda_1 x_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)u = C(\text{常数}) \quad (9-28)$$

当 T 是给定的有限时间， C 为某一常数。若 T 自由时，则 $C = 0$ ，由式(9-26)~(9-28)解得

$$\frac{1}{2}x_1^2 + x_1 x_2 = C \quad (9-29)$$

上式表示一个单参数的双曲线族。如果存在奇异弧，它必是某一特定双曲线的一部分。

现在我们进一步利用条件

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = -\dot{x}_1 + \dot{\lambda}_1 = -x_2 - u - x_1 = 0 \quad (9-30)$$

解得

$$u = -(x_1 + x_2) \quad (9-31)$$

此即奇异弧上的最优控制，它是状态的线性反馈。

现在我们讨论如下两种情况。

(1) T 为给定的有限值，式(9-29)中的常数 C 是取决于初态的非零值。这时，奇异弧是双曲线。它不通过原点，因此，不是最优轨线的最后一段弧线。典型的最优轨线由三段组成：

第一段控制取其边界值 ± 1 ，将系统转移到奇异弧上。

第二段采用状态的线性反馈控制律(9-31)，系统沿着双曲线奇异弧运动。

第三段是再一次应用 $u = \mp 1$ ，使系统沿着为 Bang-Bang 弧转移到坐标原点。

下面我们讨论一种控制不受约束的特殊情况(见图 9-1)。这时，第一段是脉冲控制（控制的幅度为无穷大，持续时间为无穷小）。脉冲控制所对应的轨线可由下式定出

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{u}{x_2 + u} \\ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} &= -1 \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{dx_2}{dx_1} &= -1\end{aligned}\quad (9-32)$$

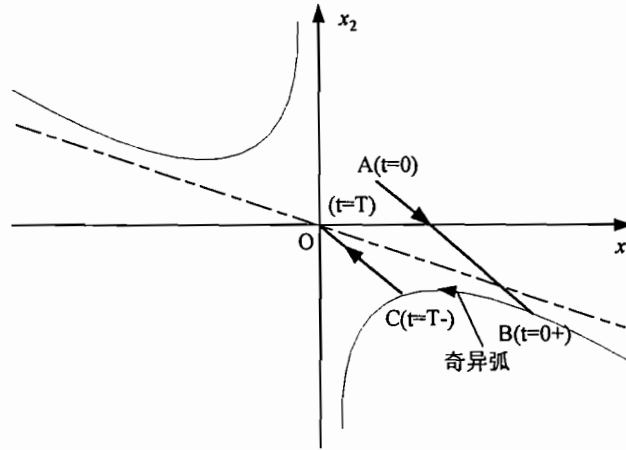


图 9-1 最优轨线

在 $x_1 - x_2$ 相平面上，这是一条斜率为-1 的直线。正的脉冲控制导致状态向右下方移动，而负的脉冲控制会使状态向左上方转移。因此，假如已知的初态为图中的 A 点，则最优轨线 ABCO 如图 9-1 所示。利用脉冲函数的控制，系统的状态沿 $(x_1 + x_2)$ 等于常数的直线瞬时地由 A 转移到 B 点。在奇异弧上，使用式 (9-31) 的控制律，由状态方程解得

$$x_1(t) = x_1(0_+)e^{-t} \quad (9-33)$$

x_1 的大小随时间按指数规律减小，状态按着箭头所示的方向沿奇异弧变化，当 $t = T$ 时到达直线 $x_1 + x_2 = 0$ 。此后，再用一个负脉冲控制，系统瞬时地转移到原点。

控制过程要在规定时间 T 完成，即要求沿奇异弧在 $t = T$ 时刻到达直线 $x_1 + x_2 = 0$ ，由此条件确定哈密顿函数 H 的常数值 C 。这样，就从单参数曲线族 (9-29) 中找出一个特定的奇异弧。设初态为 $x_1(0)$ 、 $x_2(0)$ 。则由上述条件不难定出

$$H = -2D^2 \frac{e^{-2T}}{(1 - e^{-2T})^2} \quad (9-34)$$

式中 $D = x_1(0) + x_2(0)$

并可求得第一段弧与奇异弧的交点为

$$\begin{aligned} x_1(0_+) &= \frac{2C}{1 - e^{-2T}} \\ x_2(0_+) &= \frac{-C}{\tan HT} \end{aligned} \quad (9-35)$$

(2) 若 T 不受限制，则奇异弧(9-29)变为

$$\frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 = x_1\left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right) = 0 \quad (9-36)$$

由此得两个可能的奇异弧段为

$$x_1 = 0 \text{ 和 } x_1 + 2x_2 = 0 \quad (9-37)$$

在弧线 $x_1 = 0$ 上，奇异弧控制为 $u = -x_2(t)$ 。由此得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \\ x_2(t) &= x_2(t_1)e^{-(t-t_1)} \end{aligned} \quad (9-38)$$

在弧线 $x_1(t) + 2x_2(t) = 0$ 上，奇异控制为 $u = x_2(t)$ ，由此得

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(t_1) + [1 - e^{-(t-t_1)}]x_2(t_1) \\ x_2(t) &= e^{-(t-t_1)}x_2(t_1) \end{aligned}$$

其中 t_1 是奇异弧起始时刻。

如果控制受式(9-21)约束，则奇异弧只能限制在图 9-2 所示的 S_1 和 S_2 的范围内

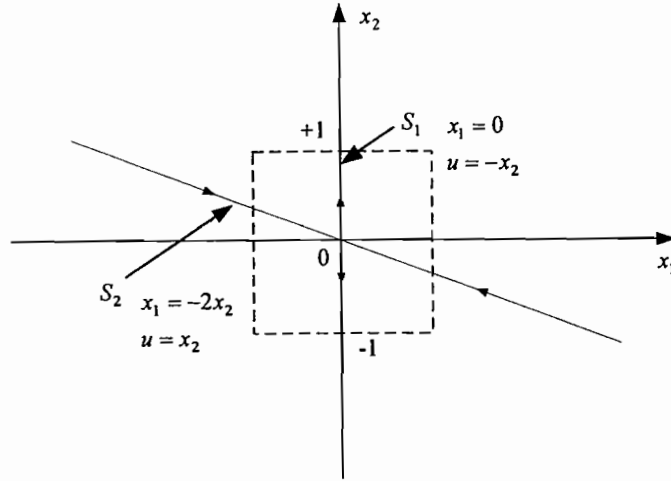


图 9-2 S_1 和 S_2 的范围

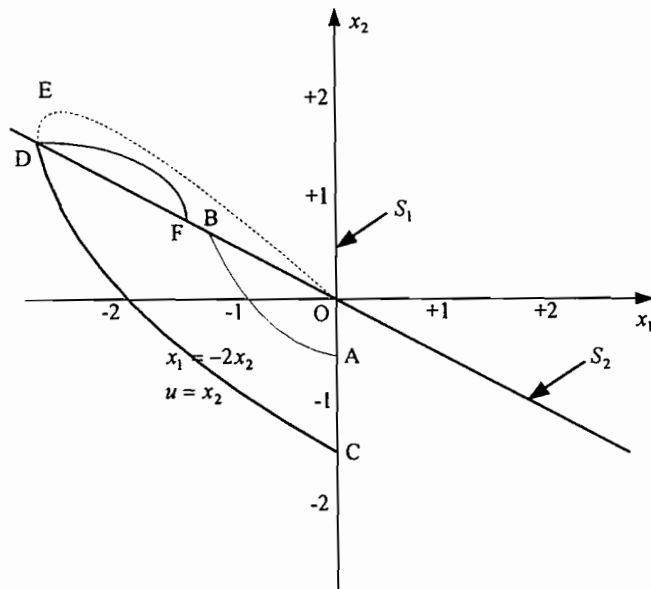


图 9-3 最优轨线

将 S_1 和 S_2 上的控制 $u = -x_2$ 和 $u = +x_2$ 代入状态方程(9-20)，可以判定沿 S_1 的运动是远离原点的，而沿 S_2 的运动则指向原点。如果末态指定为坐标原点， S_1 不能成为最优奇异弧。若初态落在弧线 S_2 上，则沿 S_2 从初态到原点这个弧段是最优轨线。

一般情况下，初态和末态可以是 $x_1 - x_2$ 相平面上的任何点，在这种情况下还不能预断最优解中是否包括奇异弧。然而，若末态指定为坐标原点，则对很多初态来说，最优控制既包括 Bang-Bang 弧段，又包括奇异弧段。

例如初态点 A 为 $x_1(0) = 0, x_2(0) = -0.5$ ，顶点为末态时，如图 9-3 所示，最优轨线的第一段是 $u = -1$ 的 Bang-Bang 控制正常弧，直到该弧与 S_2 相交(交点 B 为 $x(t_1) = -1, x_2 = 0.5$)，此后改为奇异控制 $u = +x_2$ ，系统沿 S_2 一直到达原点。相应的最优轨线为 ABO。

当初态远离原点时，比如， $x_1(0) = 0, x_2(0) < -1$ ，如图 9-3 所示的 C 点，前两段分别是 $u = -1, u = +1$ 的 Bang-Bang 控制，最后一段是沿 S_2 运动的奇异控制。显然，直线 S_2 是正常弧段转为奇异弧的开关曲线，而由 $u = -1$ 转换到 $u = +1$ 的开关线可由 S_2 倒推出来。除 S_2 外，开关线的其它部分如图 9-3 的虚线所示。典型的控制曲线如图 9-4 所示。

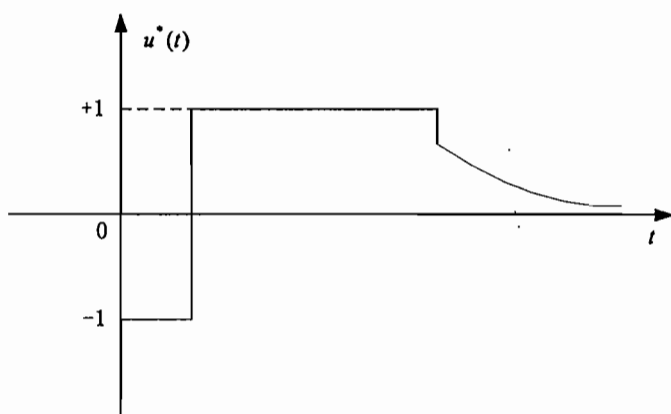


图 9-4 典型的控制曲线

综上所述，典型的最优控制包括 Bang-Bang 控制和奇异控制两部分：前者的开关曲面是状态空间中的一个超曲面，一般情况下它不是线性的，然而，在原点附近有一部分超曲面是有界的奇异超曲面或者有界的超平面。

9.3 奇异最优控制的算法

求解奇异最优控制的算法有很多，其中较为成熟的方法是正则化方法，也就是利用摄动方法把一个奇异问题化成为相应的非奇异问题，这种摄动应使非奇异问题的解在某种意义上能逼近原来的奇异问题的解。所采用的正则化方法是一

个很简单的方法，这就是在性能指标中的被积函数上加上一项 $\frac{1}{2}\varepsilon_k u^T u$ ，其中 ε_k 是一个正的小量，其效果是对最优性能指标作了一个微小摄动。下面我们介绍一下正则化方法。

如下的受控系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, t) + f_u(x, t)u \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\quad (9-39)$$

其中控制 $u(t)$ 受不等式约束

$$|u_j(t)| \leq 1, \text{ 对所有 } t \in [t_0, t_f], j = 1, 2, \dots, r \quad (9-40)$$

性能指标为

$$J[u(\cdot)] = S(x(t_f)) + \int_0^t L(x, t) dt \quad (9-41)$$

这里 t_0, t_f 已知。 f_1, f_u, L 和 S 对每个自变量至少是一次连续可微的。问题是选择满足约束(9-40)的分段连续函数 $u(\cdot)$ ，使 J 最小。

如无进一步的假设，这类问题的最优控制函数是由 Bang-Bang 弧及奇异子弧所组成的。解正常最优控制问题，目前已有一些有效的计算方法。而计算奇异控制的方法的基本思想是在性能指标的被积函数中增加 $\frac{1}{2}\varepsilon_k u^T u$ 项，将性能指标(9-41)修改为

$$J[u(\cdot), \varepsilon_k] = S(x(t_f)) + \int_0^t (L(x, t) + \frac{1}{2}\varepsilon_k u^T u) dt \quad (9-42)$$

问题就变成非奇异的了。然后利用解非奇异最优控制的算法来解修改后的非奇异问题。可以证明，当 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ 时， $J[u(\cdot), \varepsilon_k]$ 将收敛以于式(9-41)的最小值。采用此种方法并不需要预先知道是否有奇异弧、奇异弧的段数及所在位置。算法的步骤如下：

第一步：选择一个起始值 $\varepsilon_1 > 0$ 和一个标称控制函数 $\bar{u}(\cdot)$ ；

第二步：解所得的正则问题($k=1$)，得到最小化的控制函数 $u_k(\cdot)$ ；

第三步：选择 $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ (例如 $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{10}\varepsilon_k$)，并令 $\bar{u}_{k+1}(\cdot) = u_k(\cdot)$, $k = k + 1$ ，重复

步骤 2，直至 $\varepsilon_k < \sigma$ 停止运算，其中 σ 是一个预先规定的小正数。

剩下的问题需要证明算法的收敛性。为此，我们先作两个假设：

假设 1：设 U 是定义在 $[t_0, t_f]$ 上，且满足(9-40)约束的 r 维分段连续函数的集合，且有

$$\inf_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \min_{u(\cdot)} J[u(\cdot)] = \gamma_0 \quad (9-43)$$

该假设说明，式(9-41)性能指标 J 的下确界存在，且等于 J 的最小值 γ_0 。

假设 2：对于 $u(\cdot) \in U$ ，有

$$\inf_{u(\cdot)} J[u(\cdot), \varepsilon_k] = J[u^*(\cdot), \varepsilon_k] \quad (9-44)$$

其中 $u^*(\cdot)$ 是使式(9-42)为最小的控制。

在上述两个假设的条件下，有如下收敛定理。

定理：对于任意正的序列 $\{\varepsilon_k\}$ ， $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} > 0$ ，且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ ，那么在上述两个假设条件下，有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J[u(\cdot), \varepsilon_k] = \gamma_0 \quad (9-45)$$

定理表明，当 k 趋于 ∞ 时，算法的解逐渐趋于原来奇异问题的解。实际上， ε_k 降低到足够小的数值时，可以得到原奇异解的一个相当好的近似。然而，当 ε_k 太小时，常常会造成数值计算上的困难，为克服此种困难，人们还提出了一些改进的算法。除此之外，用广义梯度法和函数空间拟牛顿法计算奇异解也是可行的。

9.4 小结

1、对于任何最优控制问题，无论是奇异的还是非奇异的，使得哈密顿函数 H 取极值的弧被定义为极值弧。如果此极值弧不能使控制向量表示成状态向量和协状态向量的函数，那么问题就是奇异的。

2、求解奇异最优控制比求解正常的最优控制问题要困难得多，因为只有极小值原理还算不出最优控制律的具体形式，以至于不得不另外寻找奇异弧的其它条件，弥补奇异情况下定解条件的不足。奇异解通常是由正常弧和奇异弧所组成的。

3、求解奇异最优控制的正则化方法，也就是利用摄动方法把一个奇异问题化成为相应的非奇异问题，正则化方法是在性能指标中的被积函数中加上一项 $\frac{1}{2}\varepsilon_k u^T u$ ，其中 ε_k 是一个正的小量，其效果是对最优性能指标作了一个微小摄动，这种摄动应使非奇异问题的解在某种意义上能逼近原来的奇异问题的解。

9.5 习题

1. 对于系统 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$ ，求控制使性能指标 $J = \int_0^T x_1^2 dt$ 最小，且

适合约束 $|u| \leq 1$ ，并证明相应的可控性和可观测性条件得到满足。

2. 对于系统 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ，求控制使性能指标

$J = \int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dt$ 最小，且适合约束 $|u| \leq 1$ 。

3. 已知二阶受控系统 $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ ， $\dot{x}_2(t) = u(t)$ ，试求系统由已知初态

$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ ，且使性能指标 $J = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$ 为极小的最优控制，

并判断奇异弧段是否是最优的，给出奇异弧段是非最优解时的条件。

第十章 对策论与极大极小控制

10.1 概述

前面各章讨论的极值控制（时间最小，燃料最省等）都由一个控制方所决定，可称为单方控制问题。在实际情况中，往往存在着厉害冲突的双方。如甲方（追逐导弹）要攻击乙方（飞机），甲方采取最优策略使脱靶量最小，而乙方采取最优逃逸策略使脱靶量最大，这是双方控制问题。讨论矛盾冲突活动中，局中双方采取何种合理的策略而使自己处于“优越”地位的理论称为对策论。对策论又称为博弈论（Game Theory），是由冯·诺依曼（John · Von Neumann）和奥·摩根斯特思（Osger · Morgenstern）于1944年首先创立的，它在经济竞争、军事冲突中获得了广泛的应用。微分对策研究的是动态情况下的对策理论。它是由依萨柯（R · Isaacs）首先创立的。在二次世界大战期间，由美国空军赞助，美国兰德公司组织了以依萨柯博士为首的研究小组开展了对抗双方都能自由决策行动的追逐问题的研究。1965年，依萨柯将研究成果整理出版了《微分对策》一书，此书的出版标志了微分对策的正式诞生。

本章将先讨论离散对策（又称矩阵对策，策略取离散值）和连续对策（策略取连续值），进而讨论本章的重点——微分对策（用微分方程描述的动态情况下的对策）。

10.2 离散对策（矩阵对策）

10.2.1 对策的极小极大值（纯策略解）

在对策中双方必然会考虑到对方会使自己的支付最大，所以应从最坏的方案着手，去争取最好的结果，即对策的双方都是理智的，他们都考虑对方会用什么对策。这里我们讨论的情况是对方的支付就是自己的赢得，支付与赢得之和为零，故称零和对策。

设厉害冲突双方 u 和 v （局中人）各有一套策略，即 u_i 和 v_j , $i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$ 。

与每一对策略 (u_i, v_j) 相对应, 产生出一个支付: $J=L_{ij}$ 。 v 方力图使 u 支付最大, 而 u 方则试图使之最小。由 L_{ij} 可构成一个支付矩阵。设 $n=m=2$, 一个支付矩阵的例子如图 10-1 所示

	v_1	v_2	v 求极大值
u_1	$L_{11}=2$	$L_{12}=7$	有较小极大值的行
u_2	$L_{21}=5$	$L_{22}=9$	
u 求极小值		有较大极小值的列	

图 10-1 离散对策的简单例子

假设 v (求极大值者) 先开局, 若选择策略 v_1 , 这时 L 的值为 $(L_{11}, L_{21})=(2, 5)$, 因 $\min(2, 5)=2$, 故随后 u 方会选择 u_1 使 $J=2$ 。另一方面, v 方若选择 v_2 , 这时 L 的值为 $(L_{12}, L_{22})=(7, 9)$, $\min(7, 9)=7$ 。比较 v_1, v_2 的结果, 有 $\max(2, 7)=7$, 所以 v 方应选择 v_2 , 这是有“较大极小值”7的第二列。这时不管 u 方选 u_1 或 u_2 , v 的赢得不会小于7。

再假设 u 先开局, 类似地, 选 u_1 时 $\max(2, 7)=7$, 选 u_2 时 $\max(5, 9)=9$, 而 $\min(7, 9)=7$, 故 u 方应选择策略 u_1 这是有“较小极大值”7的第一行。这时不管 v 方取何策略, v 方的赢得不会大于7。

这样不管谁先开局, 最优对策为 (u_1, v_2) , 相应的支付为 $L_{12}=7$ 。即我们有

$$\max_{v_j} \min_{u_i} L_{ij} = \min_{u_i} \max_{v_j} L_{ij} = 7 \quad (10-1)$$

(v 先开局) (u 先开局)

以及

$$L(u_1, v_j) \leq L(u_1, v_2) \leq L(u_i, v_2) \quad (10-2)$$

这时, 不管谁先开局都存在唯一的最优对策解, 称为极小极大解或最优纯策略解。这是由 Nash 首先提出的, 故又称为 Nash 平衡解。

应该注意到, 当支付矩阵取不同值时, 可能不存在极小极大解, 即不满足 (10-1) 式。例如, 将图 1 中的 L_{11} 改为 11, 得到下面的支付矩阵

	v_1	v_2	$\leftarrow v$ 求极大值
u_1	$L_{11}=11$	$L_{12}=7$	
u_2	$L_{21}=5$	$L_{22}=9$	
$\uparrow u$ 求极小值			

图10-2 开局先后造成差异的离散对策

若 v 先开局，因选 v_1 时 $\min(11,5)=5$ ，选择 v_2 时 $\min(7,9)=7$ ， $\max(5,7)=7$ ，故应选 v_2 ，即具有较大极小值“7”的第二列，随后 u 选择 u_1 ，得支付为 7。若 u 先开局，同理他应选 u_2 ，即具有较小极大值“9”的第二行，随后 v 选择 v_2 ，得支付为 9。这时

$$\min_{u_i} \max_{v_j} L_{ij} = 9 \geq \max_{v_j} \min_{u_i} L_{ij} = 7 \quad (10-3)$$

(u 先开局) (v 先开局)

即，不存在极小极大解。

10.2.2 混合策略

当不存在最优纯策略解（极小极大解）时，可以采用混合策略。这时局中人分别以不同的概率来混合选取纯策略。设 u 以概率 P_u 使用策略 u_1 ，以概率 $(1-P_u)$ 使用策略 u_2 ； v 以概率 P_v 使用策略 v_1 ，以概率 $(1-P_v)$ 使用策略 v_2 。仍用图 10-2 所示的例子期望支付为

$$\begin{aligned} E(P_u, P_v) &= L_{11}P_uP_v + L_{12}P_u(1-P_v) + L_{21}(1-P_u)P_v + L_{22}(1-P_u)(1-P_v) \\ &= 11P_uP_v + 7P_u(1-P_v) + 5(1-P_u)P_v + 9(1-P_u)(1-P_v) \\ &= 8(P_u - \frac{1}{2})(P_v - \frac{1}{4}) + 8 \end{aligned} \quad (10-4)$$

从上式可见，当 u 先开局，取 $P_u = \frac{1}{2}$ 时， u 方的最小期望支付为 8，他不能期望比这更小的支付，因为 v 方会取 $P_v = \frac{1}{4}$ 使得 u 的支付 $E(P_u, P_v)$ 不小于 8，因此 8 是 u 方所期望的最小支付。而 u 的支付就是 v 的赢得，因此 v 的最大期望赢得也是 8，他不能期望有更大的赢得，因为 u 会取 $P_u = \frac{1}{2}$ 使得 v 的赢得不大于 8，

这样就有

$$\min_{P_u} \max_{P_v} E(P_u, P_v) = \max_{P_v} \min_{P_u} E(P_u, P_v) = 8 \quad (10-5)$$

这种对策称为概率的混合对策，而 $(P_u = \frac{1}{2}, P_v = \frac{1}{4})$ 就是最优对策解。

上述求解最优对策的过程可以化为求解一组不等式。设 u 的期望最小支付(即 v 的期望最大赢得)为 E^* (上例中 $E^*=8$)，于是有

$$\begin{cases} 11P_u + 5(1 - P_u) \geq E^* & (\text{固定用 } v_1, u \text{ 可选}) \\ 7P_u + 9(1 - P_u) \geq E^* & (\text{固定用 } v_2, u \text{ 可选}) \end{cases} \quad (10-6-a)$$

$$\begin{cases} 11P_v + 7(1 - P_v) \leq E^* & (\text{固定用 } u_1, v \text{ 可选}) \\ 5P_v + 9(1 - P_v) \leq E^* & (\text{固定用 } u_2, v \text{ 可选}) \end{cases} \quad (10-6-b)$$

$$P_u \geq 0, \quad P_v \geq 0 \quad (10-6-c)$$

用图形表示上述两组不等式的求解，如图 3 所示

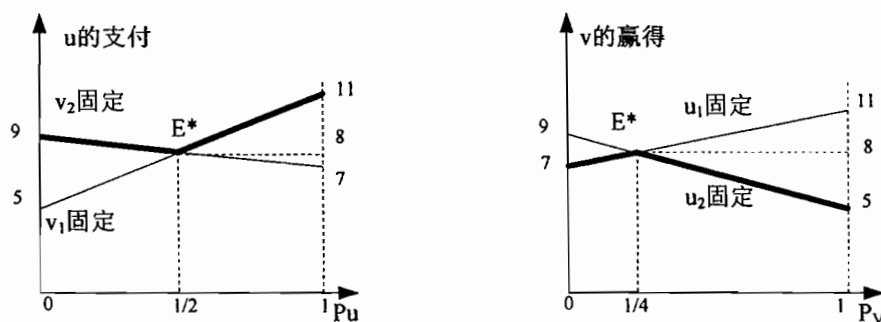


图 10-3 不等式求解示意图

求解的结果是 $P_u = \frac{1}{2}$, $P_v = \frac{1}{4}$, $E^*=8$ 。不难发现，上述一组不等式的求解与线性规划理论有紧密联系。

10.2.3 矩阵对策存在极小极大解的条件

设对策的支付矩阵为 L ，此时 v 方力图使 u 支付最大，而 u 方则试图使之最小。

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & \cdots & L_{mn} \end{bmatrix} \quad (10-7)$$

对局中人 v 来讲, 对 L 中的每一列取其中的最小值 $\min_i L_{ij}$ ($j=1,2,\cdots,n$) (最坏情况), 再从这些列的最小值中取最大值, 得 $\max_j \min_i L_{ij}$ (最坏情况下的最好的结果)。对局中人 u 来讲, 则对 L 中的每一行取其中的最大值 $\max_j L_{ij}$ ($i=1,2,\cdots,m$), 再从这些行的最大值中取最小值, 得 $\min_i \max_j L_{ij}$ 。如果

$$\max_j \min_i L_{ij} = \min_i \max_j L_{ij} = V \quad (10-8)$$

V 是对策值, 则称存在极小极大解, 对应的第 i^* 行, 第 j^* 列的对策 (u_{i^*}, v_{j^*}) 或简写为 (i^*, j^*) 称为对策的最优解 (或称最优纯策略)。注意, 对策的解不一定唯一, 即可能存在多于一个的 i^* 或 j^* 使 (10-8) 式成立。下面给出 (10-8) 式成立的条件。

引理 1 对任一对策 (不一定最优) 都有

$$\max_j \min_i L_{ij} \leq \min_i \max_j L_{ij} \quad (10-9)$$

上式可以表述为: 最小中的最大值不大于最大中的最小值。

证: 由极值的定义, 都有

$$\begin{aligned} \min_i L_{ij} &\leq L_{ij} \\ L_{ij} &\leq \max_j L_{ij} \end{aligned}$$

从而有

$$\min_i L_{ij} \leq L_{ij} \leq \max_j L_{ij} \quad (10-10)$$

由于 (10-10) 式左端已与 i 无关, 故有

$$\min_i (\min_i L_{ij}) = \min_i L_{ij} \leq \min_i \max_j L_{ij}$$

又由于上式的右端与任何 i, j 都无关, 故有

$$\max_j \min_i L_{ij} \leq \max_j (\min_i \max_j L_{ij}) = \min_i \max_j L_{ij}$$

引理 1 得证。

定理 1 零和矩阵对策有极小极大解的充要条件是: 存在一个最优对策解 $(i^*,$

j^*) 使

$$L_{i^*j} \leq L_{i^*j^*} \leq L_{ij^*} \quad (10-11)$$

对一切 $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ 都成立。

证：先证充分性。因为对一切 ij 均有

$$L_{i^*j} \leq L_{i^*j^*} \leq L_{ij^*}$$

故有

$$\min_i L_{ij^*} \geq L_{i^*j^*} \geq \max_j L_{i^*j} \quad (10-12)$$

而由 (10-12) 式左边，可得

$$\max_j \min_i L_{ij} \geq \min_i L_{ij^*} \quad (10-13)$$

上式右端 L_{ij^*} 表示 v 方先开局已选了 j^* 策略，使 L 尽可能大（可能不是保守的）， u 方再选择策略使 L_{ij^*} 尽可能小。

由 (10-12) 式右边，可得

$$\max_j L_{i^*j} \geq \min_i \max_j L_{ij} \quad (10-14)$$

从而可得

$$\max_j \min_i L_{ij} \geq L_{i^*j^*} \geq \min_i \max_j L_{ij} \quad (10-15)$$

再结合引理 1，可得

$$\max_j \min_i L_{ij} = \min_i \max_j L_{ij} = L_{i^*j^*} \quad (10-16)$$

这就证明了，满足条件 (10-11) 后，即可得到矩阵对策的最优解。

现在来证明必要性。既然假设存在最优对策解，则 $\max_j L_{ij}$ 可找到在 $i=i^*$ 时达到最小，而 $\min_i L_{ij}$ 在 $j=j^*$ 时达到最大，即

$$\min_i \max_j L_{ij} = \max_j L_{i^*j}$$

$$\max_j \min_i L_{ij} = \min_i L_{ij^*}$$

而

$$L_{i^*j^*} = \max_j \min_i L_{ij} = \min_i \max_j L_{ij}$$

从而有

$$L_{i^*j^*} = \min_i \max_j L_{ij} = \max_j L_{i^*j} \geq L_{i^*j}$$

$$L_{i^*,j^*} = \max_j \min_i L_{ij} = \min_i L_{ij^*} \leq L_{ij^*}$$

这就得出了

$$L_{i^*,j} \leq L_{i^*,j^*} \leq L_{ij^*}$$

对一切 $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ 成立。定理完全得证。

例 10-1: 给定矩阵对策的支付矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 & 0 \\ \textcircled{5} & 4 & \textcircled{5} & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 6 \\ \textcircled{5} & -1 & \textcircled{5} & 2 \end{bmatrix}$$

由于各列中的极小为 (5,-1,5,0), 其中的最大值为 5, 故

$$\max_j \min_i L_{ij} = L_{i^*,j^*} = 5, \quad i^* = 2, 4; j^* = 1, 3$$

又由于各行中的极大为 (8,5,7,5), 其中的最小值为 5, 故

$$\min_i \max_j L_{ij} = L_{i^*,j^*} = 5, \quad i^* = 2, 4; j^* = 1, 3$$

显然有

$$\min_i \max_j L_{ij} = \max_j \min_i L_{ij} = 5$$

即存在极小极大解, 而 $(u_2, v_1), (u_2, v_3), (u_4, v_1), (u_4, v_3)$ 且都是对策解, 即

$$(u_{i^*}, v_{j^*}) = (u_2, v_1) = (u_2, v_3) = (u_4, v_1) = (u_4, v_3)$$

由上例可见, 对策的值为 5 这是唯一的, 而对策的解却可以是不唯一的。

10.3 连续对策

若 u 与 v 的选择为连续值时 (即可有无限个对策), 则有一个连续的支付函数 $L(u, v)$, 而非离散的支付矩阵 L_{ij} 现在要找一对最优的 (u^*, v^*) 使得

$$L(u^*, v) \leq L(u^*, v^*) \leq L(u, v^*)$$

上式表明 (u^*, v^*) 是 L 的一个鞍点, 鞍点可用图 4 表示。 $L(u, v)$ 有鞍点的必要条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} &\geq 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (10-17)$$

充分条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} &> 0, & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} &< 0 \end{aligned} \quad (10-18)$$

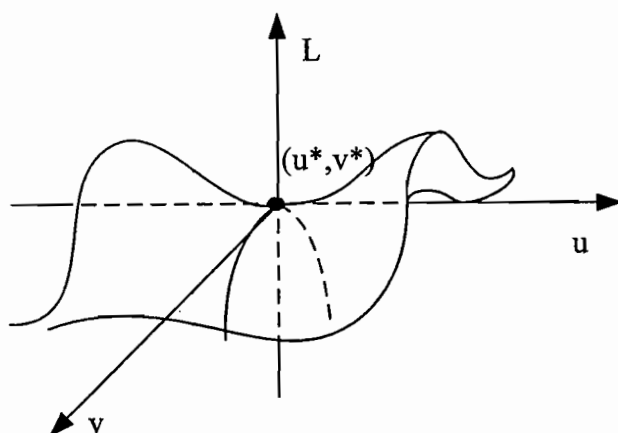


图10-4 连续对策的鞍点

例10-2: 设对策的支付函数为

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ -1 \leq u \leq 1, & \quad -1 \leq v \leq 1 \end{aligned}$$

u 要选取策略使 L 最小, 而 v 则要使 L 最大, 求最优对策解, 即鞍点的值。

解: $\frac{\partial L}{\partial u} = u = 0 \rightarrow u^* = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -v = 0 \rightarrow v^* = 0$$

且,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = 1 > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = -1 < 0$$

故 (u^*, v^*) 确实是 $L(u, v)$ 的鞍点。并且有

$$\max_v \min_u L(u, v) = \min_u \max_v L(u, v) = L(u^*, v^*) = 0$$

下面的支付函数

$$L(u, v) = u^2 - 3uv + 2v^2 \quad -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$$

就不存在鞍点, 因为 $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} = 4 \neq 0$ 。(存在这种情形的原因是 $L(u, v)$ 中存在交叉积项 $3uv$, 这使得 L 不能分成二项, 一项仅与 u 有关, 另一项仅与 v 有关。)

对于不存在鞍点的情况, 可以采用类似于矩阵对策中的概率混合对策。

10.4 微分对策

用微分方程描述的动态过程受到双方对策控制的理论和方法称为微分对策。20 世纪 50 年代以来, 由于导弹拦截飞行器等军事上的需要, 美国兰德 (Rand) 公司在空军赞助下, 以 R · Isaacs 博士为领导开始了这方面的研究, 他们将现代控制理论中的一些概念和原理引入到对策论中, 取得了重大的进展。

现在, 微分对策已引起世界各国的广泛关注, 特别是一些军事强国。在导弹拦截, 电子战, 火力配置等军事领域和商业竞争, 招标与投标, 资源开发与环境污染等经济和社会领域中, 微分对策都可以发挥其作用。

10.4.1 微分对策的提法

给定动态系统

$$\dot{x} = f(x, u, v, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (10-19)$$

终端约束

$$G[x(t_f), t_f] = 0$$

及指标函数 (类似于前面的支付函数)

$$J = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, v, t) dt \quad (10-20)$$

对于甲方, 选 $u \in U$, 使 J 取最小可能的值; 对于乙方, 选 $v \in V$, 以使 J 取最大可能的值, 亦即寻求对策的最优解 (u^*, v^*) 使

$$J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*) \quad (10-21)$$

(u^*, v^*) 是 J 的鞍点, u^* 和 v^* 分别称为甲、乙的最优策略, $J(u^*, v^*)$ 称为 (双方零和) 最优微分对策值。

从微分对策问题的描述和最优策略的定义可以看出, 微分对策问题和最优控制问题紧密相关, 可以想象两者的处理方法也应该十分相似的。

下面我们将给出微分对策问题最优策略 $(u^*(t), v^*(t))$ 所应满足的必要条件, 即双方极值原理; 并将证明当哈密顿函数和性能指标函数可分解为两部分, 一部分只与 u 有关, 另一部分只与 v 有关时, 则这个必要条件也就是充分条件。

定理 1: 双方极值原理——最优策略的必要条件

引入哈密顿函数

$$H(x, u, v, \lambda, t) = F(x, u, v, t) + \lambda^T f(x, u, v, t) \quad (10-22)$$

和增广性能指标函数

$$J_a = \Phi[x(t_f), t_f] + \nu^T G[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F(x, u, v, t) + \lambda^T [f(x, u, v, t)] - \dot{x}\} dt \quad (10-23)$$

如果 $(x^*(t), u^*(t), v^*(t))$ 是双方零和微分对策问题(10-19) ~ (10-20)的最优解, 即 $(u^*(t), v^*(t))$ 为鞍点, 则 $x^*(t), u^*(t), v^*(t), \lambda(t), \nu$ 一起满足

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \dot{x}^* = f(x^*(t), u^*(t), v^*(t), t) \\ & x^*(t_0) = x_0, \quad G[x^*(t_f), t_f] = 0 \end{aligned} \quad (10-24)$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad & \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ & \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} \nu \end{aligned} \quad (10-25)$$

$$\begin{aligned} 3^\circ \quad & H(x^*(t), u^*(t), v^*(t), \lambda(t), t) \\ & = \min_u \max_v H(x^*, u, v, \lambda, t) \\ & = \max_v \min_u H(x^*, u, v, \lambda, t) \end{aligned} \quad (10-26)$$

$$4^\circ \quad H(x^*(t_f), u^*(t_f), v^*(t_f), \lambda(t_f), t_f) = -\frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} \nu \quad (10-27)$$

证: 上述双方极值原理的证明分三步。先给出关于 v^* 的极大值原理, 再给出关于 u^* 的极小值原理, 最后将前两步组合起来, 给出双方极值(极大极小)原理。

1) 关于 u^* 的极小值原理——最优控制问题(一)

状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, v^*, t) \quad (10-28)$$

终端约束

$$G[x(t_f), t_f] = 0$$

指标函数

$$J[u, v^*] = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, v^*, t) dt \quad (10-29)$$

对 u 取极小。即寻求 u^* , 使满足

$$J[u^*, v^*] \leq J[u, v^*] \quad (10-30)$$

对于上面的最优控制问题（一），引入哈密顿函数 H_1

$$H_1(x, u, v^*, \lambda_1, t) = F(x, u, v^*, t) + \lambda_1^T f(x, u, v^*, t) \quad (10-31)$$

根据第四章中的极小值原理，知 J 取极小值的必要条件是 x^*, u^*, λ_1 和 t_f 满足

1° 正则方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\partial H_1 / \partial x \\ \dot{x} &= \partial H_1 / \partial \lambda_1 \end{aligned} \quad (10-32)$$

2° 边界条件

$$x(t_0) = x_0, \quad G[x(t_f), t_f] = 0 \quad (10-33)$$

3° 横截条件

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} v \quad (10-34)$$

4° 最优终端时刻条件

$$H_1(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f} v \quad (10-35)$$

5° 在最优轨线 $x^*(t)$ 和最优控制 $u^*(t)$ 上，哈密顿函数取极小值

$$\min_{u \in U} H_1(x^*, u, v^*, \lambda_1, t) = H_1(x^*, u^*, v^*, \lambda_1, t) \quad (10-36)$$

2) 关于 v^* 的极大值原理——最优控制问题（二）

状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u^*, v, t) \quad (10-37)$$

终端约束

$$G[x(t_f), t_f] = 0$$

指标函数

$$J[u^*, v] = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u^*, v, t) dt \quad (10-38)$$

对 v 取极大。即寻求 v^* ，使满足

$$J[u^*, v] \leq J[u^*, v^*] \quad (10-39)$$

对于上面的最优控制问题（二），引入哈密顿函数 H_2

$$H_2(x, u^*, v, \lambda_2, t) = F(x, u^*, v, t) + \lambda_2^T f(x, u^*, v, t) \quad (10-40)$$

于是 J 取极大值的必要条件是： x^*, v^*, λ_2 和 t_f 满足

1° 正则方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= -\partial H_2 / \partial x \\ \dot{x} &= \partial H_2 / \partial \lambda_2 \end{aligned} \quad (10-41)$$

2° 边界条件

$$x(t_0) = x_0, \quad G[x(t_f), t_f] = 0 \quad (10-42)$$

3° 横截条件

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} v \quad (10-43)$$

4° 最优终端时刻条件

$$H_2(t_f) = -\frac{\partial \Phi}{\partial t_f} - \frac{\partial G^T}{\partial t_f} v \quad (10-44)$$

5° 在最优轨线 $x^*(t)$ 和最优控制 $v^*(t)$ 上，哈密顿函数取极大值

$$\max_{v \in V} H_2(x^*, u^*, v, \lambda_2, t) = H_2(x^*, u^*, v^*, \lambda_2, t) \quad (10-45)$$

3) 双方极值（极大极小）原理

由（10-19）、（10-20）描述的微分对策问题的哈密顿函数为

$$H(x, u, v, \lambda, t) = F(x, u, v, \lambda, t) + \lambda^T f(x, u, v, \lambda, t) \quad (10-46)$$

考察前面极大和极小控制的拉格朗日变量 λ_1 和 λ_2 所满足的方程（10-32）和

（10-41），有

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H_1}{\partial x} = -\frac{\partial F(x^*, u^*, v^*, t)}{\partial x} - \lambda_1^T \frac{\partial f(x^*, u^*, v^*, t)}{\partial x} \\ \lambda_1(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} v \end{aligned} \quad (10-47)$$

和

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H_2}{\partial x} = -\frac{\partial F(x^*, u^*, v^*, t)}{\partial x} - \lambda_2^T \frac{\partial f(x^*, u^*, v^*, t)}{\partial x} \\ \lambda_2(t_f) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial G^T}{\partial x(t_f)} v\end{aligned}\quad (10-48)$$

由(10-47)、(10-48)可见, $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$ 满足相同的线性非齐次方程, 且其终端条件相同。根据线性非齐次方程的终值问题的唯一性定理知

$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

令

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) = \lambda_2(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (10-49)$$

再由哈密顿函数 H_1 和 H_2 取极值的表达式(10-36)和(10-45)可得

$$H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t) = H_1(x^*, u^*, v^*, \lambda_1, t) = H_2(x^*, u^*, v^*, \lambda_2, t)$$

上式可写成

$$\min_u H(x^*, u, v^*, \lambda, t) = H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t) = \max_v H(x^*, u^*, v, \lambda, t) \quad (10-50)$$

类似于(10-13)、(10-14), 有

$$\min_u \max_v H(x^*, u, v, \lambda, t) \leq \max_v H(x^*, u^*, v, \lambda, t) \quad (10-51)$$

$$\max_v \min_u H(x^*, u, v, \lambda, t) \geq \min_u H(x^*, u, v^*, \lambda, t) \quad (10-52)$$

联合(10-50)、(10-51)和(10-52), 可得

$$\min_u \max_v H(x, u, v, \lambda, t) \leq H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t) \leq \max_v \min_u H(x^*, u, v, \lambda, t) \quad (10-53)$$

另一方面, 将矩阵对策中的引理1——关于“最小中的最大不大于最大中的最小”的结论用于 $H(x^*, u, v, \lambda, t)$, 得

$$\min_u \max_v H(x^*, u, v, \lambda, t) \geq \max_v \min_u H(x^*, u, v, \lambda, t) \quad (10-54)$$

联合(10-53)和(10-54), 即得

$$\begin{aligned}H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t) &= \min_u \max_v H(x^*, u, v, \lambda, t) \\ &= \max_v \min_u H(x^*, u, v, \lambda, t)\end{aligned}\quad (10-55)$$

上式即双方极值原理最优策略的必要条件中的(10-26)式。根据(10-47)~(10-49)式, 可以得到必要条件中的其它几个式子。

注: 当 u, v 为开集, $f(x, u, v, t)$, $F(x, u, v, t)$, $\Phi(x, t)$, $G(x, t)$ 关于变元都是二次

连续可微的, 则双方极值原理中的 (10-26) 或 (10-55) 式与下列一组关系式等价:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial H(x^*, u, v^*, \lambda, t)}{\partial u} \right|_{u^*} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial H(x^*, u^*, v, \lambda, t)}{\partial v} \right|_{v^*} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 H(x^*, u, v^*, \lambda, t)}{\partial u^2} \right|_{u^*} &\geq 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 H(x^*, u^*, v, \lambda, t)}{\partial v^2} \right|_{v^*} &\leq 0
 \end{aligned} \tag{10-56}$$

上面所证明的双方极值原理是先假设存在最优策略所满足的鞍点条件 (10-21), 然后将鞍点条件拆成两个不等式 (10-30) 和 (10-39), 利用极小值原理和极大值原理得到两个最优解所满足的必要条件, 再将它们结合起来得到极大极小解 (最优策略) 的必要条件。下面来讨论, 在什么情况下这些必要条件也是充分条件。

10.4.2 最优策略的充分条件

当状态方程和性能指标可分解为一部分仅与策略 u 有关, 另一部分仅与策略 v 有关, 则可证明 (10-24) ~ (10-27) 所示的最优策略的必要条件也是充分条件, 也就是可满足指标鞍点条件 (10-21)。

定理 2: 设状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(u, t) + f_2(v, t) \tag{10-57}$$

性能指标为

$$J[u, v] = c^T x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [p^T(t)x(t) + L_1(u(t), t) + L_2(v(t), t)] dt \tag{10-58}$$

其中 $A(t) \in R^{n \times n}$, $p^T(t) \in R^n$ 对 t 连续。 $c \in R^n$ 是常向量, t_f 固定。 $f_1(u, t) \in R^n$, $f_2(v, t) \in R^n$, $L_1(u, t) \in R^1$, $L_2(v, t) \in R^1$ 关于变元 u, v 都是连续的, 而关于 t 都是连续可微的。相应于 (u^*, v^*) 的轨迹为 x^* , 它们满足

$$\dot{x}^*(t) = A(t)x^*(t) + f_1(u^*, t) + f_2(v^*, t), \quad x^*(t_0) = x_0 \tag{10-59}$$

哈密顿函数为

$$H(x, u, v, \lambda, t) = p^T(t)x(t) + L_1(u, t) + L_2(v, t) + \lambda^T(t)[A(t)x + f_1(u, t) + f_2(v, t)] \quad (10-60)$$

若 x^*, u^*, v^*, λ 一起满足条件 (10-24) ~ (10-27), 将条件 (10-26) 写成

$$H(x^*, u^*, v, \lambda, t) \leq H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t) \leq H(x^*, u, v^*, \lambda, t) \quad (10-61)$$

则 (u^*, v^*) 必是对策的最优策略。

证: 1) 任取 $u \in U$, 记状态方程 (10-57) 相对于 (u, v^*) 的解为 $x(t)$, 它满足

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f_1(u, t) + f_2(v^*, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (10-62)$$

注意到由 (10-60) 式可得

$$\dot{\lambda}^T(t) = (-\partial H / \partial x)^T = -p^T(t) - \lambda^T(t)A(t) \quad (10-63)$$

利用 (10-59)、(10-62) 和 (10-63), 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \lambda^T(t)[x(t) - x^*(t)] \} &= \dot{\lambda}^T[t]x(t) - \lambda^T(t)\dot{x}(t) \\ &= [-p^T(t) - \lambda^T(t)A(t)][x(t) - x^*(t)] + \lambda^T(t)[\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)] \\ &\quad - A(t)x^*(t) - f_1(u^*, t) - f_2(v^*, t) \\ &= -p^T(t)x(t) + p^T(t)x^*(t) + \lambda^T(t)f_1(u, t) - \lambda^T(t)f_1(u^*, t) \end{aligned}$$

将上式从 t_0 积分到 t_f , 且注意到 $x^*(t_0) = x(t_0) = x_0$ 和

$\lambda^T(t_f) = \partial c^T x(t_f) / \partial x(t_f) = c^T$, 可得

$$\begin{aligned} c^T x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [p^T(t)x(t) - \lambda^T(t)f_1(u, t)]dt \\ = c^T x^*(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [p^T(t)x^*(t) - \lambda^T(t)f_1(u^*, t)]dt \end{aligned}$$

将上式左右积分号下同减 $\lambda^T(t)[A(t)x^*(t) + f_2(v^*, t)] - p^T(t)x^*(t)$, 得

$$\begin{aligned} c^T x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{ [p^T(t)x(t) + L_1(u, t) + L_2(v^*, t)] - L_1(u, t) - L_2(v^*, t) - p^T(t)x^*(t) \\ - \lambda^T(t)[A(t)x^*(t) + f_1(u, t) + f_2(v^*, t)] \} dt \\ = c^T x^*(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \{ [p^T(t)x^*(t) + L_1(u^*, t) + L_2(v^*, t)] - L_1(u^*, t) - L_2(v^*, t) \\ - \lambda^T(t)[A(t)x^*(t) + f_1(u^*, t) + f_2(v^*, t)] \} dt \end{aligned}$$

将 (10-58) 与 (10-60) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} J[u, v^*] - \int_{t_0}^{t_f} H(x^*, u, v^*, \lambda, t)dt \\ = J[u^*, v^*] - \int_{t_0}^{t_f} H(x^*, u^*, v^*, \lambda, t)dt \end{aligned} \quad (10-63)$$

注意到 (10-61) 式, 可得

$$J[u^*, v^*] \leq J[u, v^*] \quad (10-64)$$

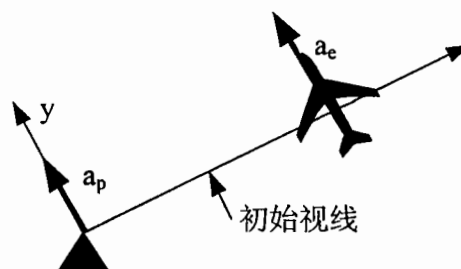
同理, 若任取 $v \in V$, 记状态方程相对于 (u^*, v) 的解为 $x(t)$, 则可以推得

$$J[u^*, v^*] \geq J[u^*, v] \quad (10-65)$$

(10-64) 和 (10-65) 说明鞍点条件 (10-21) 成立, (u^*, v^*) 确实是最优策略, 充分性得证。

例 10-3: 加速度有限时的追—逃问题

设追逐者的控制量是它的加速度 $a_p(t)$, 它垂直于指向逃逸者的初始视线。逃逸者的控制量为 $a_e(t)$, 它也垂直于初始视线。设 $y(t)$ 是垂直于初始视线的追—逃者之间的相对位置, v_y 为其相对速度 (见图 10-5)。则相对运动的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{y} = v_y & y(t_0) = 0 \\ \dot{v}_y = \dot{v}_y = a_p - a_e & v_y(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (10-66)$$


追逐者希望使用 (其控制量决策) a_p 使终端脱靶量 $|y(t_f)|$ 最小; 而逃逸者则希望使用控制量 a_e 使得 $|y(t_f)|$ 最大。故性能指标可选为:

图 10-5 追—逃问题示意图

$$J = \frac{1}{2} y^2(t_f) \quad (10-67)$$

追逐者和逃逸者的加速度都有限:

$$\left. \begin{aligned} |a_p| &\leq a_{pm} \\ |a_e| &\leq a_{em} \end{aligned} \right\} \text{ 且 } a_{pm} > a_{em} \quad (10-68)$$

下面来寻求最优对策解。首先构成哈密顿函数, 令

$$x = [y, \dot{y}]^T, \lambda^T = [\lambda_y, \lambda_v], f(x) = [v_y, \dot{v}_y]^T,$$

则

$$H = \lambda^T f(x) = \lambda_y v_y + \lambda_v (a_p - a_e) \quad (10-69)$$

注意到这里哈密顿函数是控制量 a_p 和 a_e 的线性函数

共轭方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_y \\ \dot{\lambda}_v \end{bmatrix} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_y \end{bmatrix}$$

于是,

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_v = -\lambda_y, \lambda_v(t_f) = 0 \\ \dot{\lambda}_y = 0, \lambda_y(t_f) = y(t_f) \end{cases} \quad (10-70)$$

而最优策略可由 (10-69) 式所示的哈密顿函数 H 取极值得到, 为

$$\begin{aligned} a_p(t) &= -a_{pm} \operatorname{sgn} \lambda_v \\ a_e(t) &= -a_{em} \operatorname{sgn} \lambda_v \end{aligned} \quad (10-71)$$

将 (10-70) 积分, 得

$$\begin{aligned} \lambda_y(t) &= \lambda_y(t_f) = y(t_f) = \text{常值} \\ \lambda_v(t) &= -(t - t_f) \lambda_y(t) = (t - t_f) y(t_f) \end{aligned} \quad (10-72)$$

由上式, 有

$$\operatorname{sgn} \lambda_v(t) = \operatorname{sgn} y(t_f) \quad (10-73)$$

将 (10-73) 代入 (10-72) 和 (10-71), 并将所得的 a_p 和 a_e 代入运动方程 (10-66), 再积分之, 可得其解为:

$$y(t_f) = v_0(t_f - t_0) - \frac{1}{2}(a_{pm} - a_{em})(t_f - t_0)^2 \operatorname{sgn} y(t_f) \quad (10-74)$$

由上式右端可见, 若

$$v_0(t_f - t_0) > \frac{1}{2}(a_{pm} - a_{em})(t_f - t_0)^2$$

这表明由初始相对速度引起的位移大于由于机动加速度引起的位移。则从

(10-74) 可得出解 $y(t_f) > 0$ 反之, 若

$$v_0(t_f - t_0) < -\frac{1}{2}(a_{pm} - a_{em})(t_f - t_0)^2$$

则可得出解 $y(t_f) < 0$ 。于是有

$$y(t_f) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t_f - t_0)^2 \left[\frac{2v_0}{t_f - t_0} - (a_{pm} - a_{em}) \right] > 0, \text{ 若 } \frac{2v_0}{(t_f - t_0)(a_{pm} - a_{em})} > 1 \\ -\frac{1}{2}(t_f - t_0)^2 \left[\frac{-2v_0}{t_f - t_0} - (a_{pm} - a_{em}) \right] < 0, \text{ 若 } \frac{2v_0}{(t_f - t_0)(a_{pm} - a_{em})} < -1 \end{cases} \quad (10-75)$$

上式中, 可将最优策略 u^* 看成 a_{pm} , v^* 为 a_{em} ; 令非最优策略为

$u = a_p \leq a_{pm}, v = a_e \leq a_{em}$ 因为 $J = \frac{1}{2} y^2(t_f)$, 由 (10-75) 可得出

$$J(a_{pm}, a_e) \leq J(a_{pm}, a_{em}) \leq J(a_p, a_{em})$$

$$\text{即 } J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*)$$

所以鞍点条件满足。

注意, 对于

$$-1 \leq \frac{2v_0}{(t_f - t_0)(a_{pm} - a_{em})} \leq 1 \quad (10-76)$$

(10-74) 无解。事实上, 对于 (10-76) 这样的初始条件范围, 追逐者总有可能使脱靶量为零。例如, 只要选择 $a_p(t)$ 使

$$a_p(t) = a_e(t) + \frac{2v_0(t)}{t_f - t_0} \quad (10-77)$$

便可做到这一点。这种问题已不是双方对策问题了。

例 10-4: 近地圆形轨道上的卫星拦截问题

设 A 为拦截卫星, B 为目标卫星。A 欲控制自己, 使在给定时间内尽可能接近 B; B 则控制自己, 使在此时间内尽可能远离 A。

A、B 两卫星的相对运动可用下面的状态方程表示

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = 2\omega x_5 + T_A \cos u_1 \cos u_2 - T_B \cos v_1 \cos v_2 \\ \dot{x}_5 = 3\omega^2 x_2 - 2\omega x_4 + T_A \cos u_1 \sin u_1 - T_B \cos v_1 \sin v_2 \\ \dot{x}_6 = -\omega^2 x_3 + T_A \sin u_1 - T_B \sin v_1 \end{cases} \quad (10-78)$$

式中,

x_1, x_2, x_3 是两卫星之间的相对距离在直角坐标系上的投影分量; ω 是卫星运行的角速率; T_A 、 T_B 分别为作用在 A、B 卫星上的单位质量所受的推力幅值; u_1 、 u_2 是 T_A 在直角坐标系中的两个方向角; v_1 、 v_2 是 T_B 直角坐标系中的两个方向角。

性能指标是终端时间的相对距离的平方, 即

$$\begin{aligned} J(u, v) &= x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) + x_3^2(t_f) \\ u &= [u_1, u_2]^T, \quad v = [v_1, v_2]^T \end{aligned} \quad (10-79)$$

对于卫星 A, 将选 u 使 J 尽可能小; 对 B, 则将选 v 使得 J 尽可能大。求解过程如下:

哈密顿函数 H , 共轭方程及其他边界条件可求得为

$$\begin{aligned}
H = & \lambda_1 x_4 + \lambda_2 x_5 + \lambda_3 x_6 + \lambda_4 (2\omega x_5 + T_A \cos u_1 \cos u_2 - T_B \cos v_1 \cos v_2) \\
& + \lambda_5 (3\omega^2 x_2 - 2\omega x_4 + T_A \cos u_1 \sin u_2 - T_B \cos v_1 \sin v_2) + \lambda_6 (-\omega^2 x_3 \\
& + T_A \sin u_1 - T_B \sin v_1)
\end{aligned} \quad (10-80)$$

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -3\omega^2 \lambda_5 \\ \dot{\lambda}_3 = \omega^2 \lambda_6 \\ \dot{\lambda}_4 = -\lambda_1 + 2\omega \lambda_5 \\ \dot{\lambda}_5 = -\lambda_2 - 2\omega \lambda_4 \\ \dot{\lambda}_6 = -\lambda_3 \end{cases} \quad (10-81)$$

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f) = -2x_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) = -2x_2(t_f) \\ \lambda_3(t_f) = -2x_3(t_f) \\ \lambda_4(t_f) = 0 \\ \lambda_5(t_f) = 0 \\ \lambda_6(t_f) = 0 \end{cases} \quad (10-82)$$

由于 H 对 u_1, u_2, v_1, v_2 连续, 双方极值原理可由 (10-56) 式给出。因为

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u_1} = T_A (-\lambda_4 \sin u_1 \cos u_2 - \lambda_5 \sin u_1 \sin u_2 + \lambda_6 \cos u_1) \\ \frac{\partial H}{\partial u_2} = T_A (-\lambda_4 \cos u_1 \sin u_2 + \lambda_5 \cos u_1 \cos u_2) \\ \frac{\partial H}{\partial v_1} = T_B (\lambda_4 \sin v_1 \cos v_2 + \lambda_5 \sin v_1 \sin v_2 - \lambda_6 \cos v_1) \\ \frac{\partial H}{\partial v_2} = T_B (\lambda_4 \cos v_1 \sin v_2 - \lambda_5 \cos v_1 \cos v_2) \end{cases} \quad (10-83)$$

由 $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$ 和 $\frac{\partial H}{\partial v_2} = 0$ 分别可得

$$\tan u_2 = \lambda_5 / \lambda_4, \quad \tan v_2 = \lambda_5 / \lambda_4$$

由此可得

$$u_2 = v_2 \quad \text{或} \quad u_2 = v_2 + \pi \quad (10-84)$$

由 $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$ 和 $\frac{\partial H}{\partial v_1} = 0$ 可分别求得

$$\tan u_1 = \frac{\lambda_6}{\lambda_4 \cos u_2 + \lambda_5 \sin u_2}$$

$$\tan v_1 = \frac{\lambda_6}{\lambda_4 \cos v_2 + \lambda_5 \sin v_2}$$

考虑到 (10-84) 式, 又可得

$$u_1 = v_1 \quad \text{或} \quad u_1 = -v_1 \quad (10-85)$$

下面来验证哈密顿函数 H 对 u 、 v 的二阶导数的符号

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = -T_A(\lambda_4 \cos u_1 \cos u_2 + \lambda_5 \cos u_1 \sin u_2 + \lambda_6 \sin u_1) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} = -T_A(\lambda_4 \cos u_1 \cos u_2 + \lambda_5 \cos u_1 \sin u_2) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2} = T_B(\lambda_4 \cos v_1 \cos v_2 + \lambda_5 \cos v_1 \sin v_2 + \lambda_6 \sin v_1) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v_2^2} = T_B(\lambda_4 \cos v_1 \cos v_2 + \lambda_5 \cos v_1 \sin v_2) \end{cases} \quad (10-86)$$

当 $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ 时, 只要

$$\begin{cases} \lambda_4 \cos u_1 \cos u_2 + \lambda_5 \cos u_1 \sin u_2 > 0 \\ \lambda_4 \cos u_1 \cos u_2 + \lambda_5 \cos u_1 \sin u_2 + \lambda_6 \sin u_1 > 0 \end{cases} \quad (10-87)$$

就给出

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial v_2^2} > 0$$

即满足鞍点条件, 所以在满足条件 (10-84) 时

$$u^*_1 = v^*_1, \quad u^*_2 = v^*_2$$

即为双方极值原理的最优策略。

当 $u_2 = v_2 + \pi$, $u_1 = -v_1$ 时, 可得到

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2} = T_A(\lambda_4 \cos v_1 \cos v_2 + \lambda_5 \cos v_1 \sin v_2 + \lambda_6 \sin v_1)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v_1^2} = T_B(\lambda_4 \cos v_1 \cos v_2 + \lambda_5 \cos v_1 \sin v_2 + \lambda_6 \sin v_1)$$

二者具有相同符号, 故不满足双方极值原理。

10.5 线性二次微分对策

考虑追逐、逃逸双方各自的线性状态方程为

$$\dot{x}_e = A_e(t)x_e + B_e(t)v, x_e(t_0) = x_{e0} \quad (10-88)$$

$$\dot{x}_p = A_p(t)x_p + B_p(t)u, x_p(t_0) = x_{p0} \quad (10-89)$$

式中, 下标 p, e 代表追逐者 (*pursuer*) 和逃逸者 (*evader*)。追逐者利用控制 $u(t)$ 力图捕获逃逸者, 而逃逸者利用控制 $v(t)$ 力图避免被捕获。这就是说, 追逐者要使终端脱靶量最小, 而逃逸者则要使它最大。脱靶量用加权二次型给出为

$$[x_p(t_f) - x_e(t_f)]^T F^T F [x_p(t_f) - x_e(t_f)] \quad (10-90)$$

另一方面, 设控制变量服从下面的积分二次约束

$$\int_{t_0}^{t_f} u^T R_p u dt \leq E_p \quad (10-91)$$

$$\int_{t_0}^{t_f} v^T R_e v dt \leq E_e \quad (10-92)$$

在追逐—逃逸过程中, 双方都要使用他们能用的一切控制量, 因此约束 (10-91)、(10-92) 应取等式。将 (10-90)、(10-91)、(10-92) 组合起来可得下面的性能指标

$$\begin{aligned} J(u, v) = & \frac{1}{2} [x_p(t_f) - x_e(t_f)]^T F^T F [x_p(t_f) - x_e(t_f)] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R_p(t) u(t) - v^T(t) R_e(t) v(t)] dt \end{aligned} \quad (10-93)$$

其中 F 阵非奇异, $R_p(t) > 0$, $R_e(t) > 0$ 。

P 方选择 $u(t)$ 使 $J(u, v)$ 达到极小, 而 E 方选择 $v(t)$ 使 $J(u, v)$ 达到极大。上述问题称为线性二次微分对策问题。为了求解此问题, 首先从 P、E 双方的状态方程获得它们之间的相对运动方程。定义相对运动 $x(t)$ 为

$$x(t) = F(\Phi_p(t_f, t)x_p(t) - \Phi_e(t_f, t)x_e(t)) \quad (10-94)$$

其中, F 是性能指标中的加权阵的因子, $\Phi_p(t_f, t)$ 和 $\Phi_e(t_f, t)$ 分别为 $A_p(t)$ 和 $A_e(t)$ 的基本解阵, 故满足

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_p(t_f, t)}{dt} = -\Phi_p(t_f, t)A_p(t) \\ \frac{d\Phi_e(t_f, t)}{dt} = -\Phi_e(t_f, t)A_e(t) \end{cases} \quad (10-95)$$

(10-94) 对 t 求导, 并注意到状态方程 (10-88) 和 (10-89) 以及 (10-94), 可得

$$\dot{x}(t) = G_p(t)u(t) - G_e(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (10-96)$$

式中

$$\begin{cases} G_p(t) = F\Phi_p(t_f, t)B_p(t) \\ G_e(t) = F\Phi_e(t_f, t)B_e(t) \end{cases} \quad (10-97)$$

于是, 性能指标可变为

$$J(u, v) = \frac{1}{2}x^T(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t)R_p(t)u(t) - v^T(t)R_e(t)v(t)] dt \quad (10-98)$$

下面来求解此线性二次微分对策问题。为此引入哈密顿函数 H

$$\begin{aligned} H(x, u, v, \lambda, t) = & \frac{1}{2}[u^T(t)R_p(t)u(t) - v^T(t)R_e(t)v(t)] \\ & + \lambda^T[G_p(t)u(t) - G_e(t)v(t)] \end{aligned} \quad (10-99)$$

由双方极值原理, 知共轭方程和横截条件为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)} = x(t_f) \end{cases} \quad (10-100)$$

因为 H 对 u 、 v 是二次连续可微的, 最优解应满足:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= u^T(t)R_p(t) + \lambda^T(t)G_p(t) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= -v^T(t)R_e(t) - \lambda^T(t)G_e(t) = 0 \end{aligned}$$

由上二式可解出

$$\begin{cases} u^*(t) = -R_p^{-1}(t)G_p^T(t)\lambda(t) \\ v^*(t) = -R_e^{-1}(t)G_e^T(t)\lambda(t) \end{cases} \quad (10-101)$$

故 $u^*(t)$ 使 H 达到极大, $v^*(t)$ 使 H 达到极小。 $(u^*(t), v^*(t))$ 确实为极小极大解。

由于相对运动方程 (10-96)、共轭方程 (10-100) 都是线性的, 求解 $x^*(t)$ 和

$\lambda(t)$ 的两点边值问题为线性的，可以采用第五章中的扫描法。令

$$\lambda(t) = K(t)x(t) \quad (10-102)$$

将上式两边对 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) \\ &= \dot{K}(t)x(t) + K(t)[G_p(t)u(t) - G_e(t)v(t)] \\ &= \dot{K}(t)x(t) - K(t)[G_p(t)R_p^{-1}(t)G_p^T(t) - G_e(t)R_e^{-1}(t)G_e^T(t)]K(t)x(t) \\ &= \{\dot{K}(t) - K(t)[G_p(t)R_p^{-1}(t)G_p^T(t) - G_e(t)R_e^{-1}(t)G_e^T(t)]K(t)\}x(t) \end{aligned}$$

因上式左端为零，且对任意的 $x(t)$ 均成立，故有

$$\dot{K}(t) - K(t)[G_p(t)R_p^{-1}(t)G_p^T(t) - G_e(t)R_e^{-1}(t)G_e^T(t)]K(t) = 0 \quad (10-103)$$

由 (10-102)， $\lambda(t) = K(t)x(t)$ 和横截条件 (10-100) $\lambda(t_f) = x(t_f)$ ，故得出

$$K(t_f) = I \quad (10-104)$$

(10-103) 是一个关于 $K(t)$ 的黎卡提型微分方程。由 A_p 、 B_p 、 A_e 、 B_e 对 t 连续和 R_p 、 R_e 为正定的假设，带终端条件 (10-104) 的黎卡提微分方程 (10-103)

有唯一解；且由 (10-104) 知 $K(t_f) = K^T(t_f)$ ，故有 $K(t) = K^T(t)$

下面给出 $K(t)$ 解的解析式。因为

$$\begin{aligned} \frac{dK^{-1}}{dt} &= -K^{-1} \frac{dK}{dt} K^{-1} = -K^{-1}[K(G_p R_p^{-1} G_p^T - G_e R_e^{-1} G_e^T)K]K^{-1} \\ &= -(G_p R_p^{-1} G_p^T - G_e R_e^{-1} G_e^T) \end{aligned}$$

将上式从 t 到 t_f 积分，并注意 $K(t_f) = I$ ，可得

$$K^{-1}(t_f) - K^{-1}(t) = -\int_t^{t_f} [G_p(t)R_p^{-1}(t)G_p^T(t) - G_e(t)R_e^{-1}(t)G_e^T(t)]dt$$

注意到 $K^{-1}(t_f) = I$ ，于是有

$$K(t) = [I + \int_t^{t_f} [G_p(t)R_p^{-1}(t)G_p^T(t) - G_e(t)R_e^{-1}(t)G_e^T(t)]dt]^{-1} \quad (10-105)$$

上式即为 $K(t)$ 的解析解。

将 (10-102) 代入 (10-101), 得

$$\begin{cases} u^*(t) = -R_p^{-1} G_p^T K(t) x(t) \\ v^*(t) = -R_e^{-1} G_e^T K(t) x(t) \end{cases} \quad (10-106)$$

这样, $u^*(t)$, $v^*(t)$ 成为 $x(t)$ 的函数, 即构成了一种反馈控制。

下面来验证 $u^*(t)$ 、 $v^*(t)$ 确实满足鞍点条件:

$$J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*)$$

为此先求出 $J(u, v)$ 的表达式。注意到 (10-96)、(10-103) 式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} x^T K x &= \frac{1}{2} \dot{x}^T K x + \frac{1}{2} x^T \dot{K} x + \frac{1}{2} x^T K \dot{x} \\ &= \frac{1}{2} [u^T G_p^T - v^T G_e^T] K x + \frac{1}{2} x^T K [G_p u - G_e v] + \frac{1}{2} x^T [K (G_p R_p^{-1} G_p^T - G_e R_e^{-1} G_e^T) K] x \\ &= \frac{1}{2} [u + R_p^{-1} G_p^T K x]^T R_p [u + R_p^{-1} G_p^T K x] - \frac{1}{2} [v + R_e^{-1} G_e^T K x]^T R_e [v + R_e^{-1} G_e^T K x] \\ &\quad - \frac{1}{2} [u^T R_p u - v^T R_e v] \end{aligned}$$

将上式左右两端从 t_0 到 t_f 积分, 并注意到 $K(t_f) = I$, 得

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{1}{2} x^T(t_f) x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R_p(t) u(t) - v^T(t) R_e(t) v(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} x^T(t_0) K(t_0) x(t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u(t) + R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)]^T R_p(t) [u(t) + R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)] dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [v(t) + R_e^{-1}(t) G_e^T K(t) x(t)]^T R_e(t) [v(t) + R_e^{-1}(t) G_e^T K(t) x(t)] dt \quad (10-107) \end{aligned}$$

当 $v(t) = v^*(t) = -R_e^{-1}(t) G_e^T K(t) x(t)$ 时

$$\begin{aligned} J(u, v^*) &= \frac{1}{2} x^T(t_0) K(t_0) x(t_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u(t) + R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)]^T R_p(t) [u(t) + R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)] dt \end{aligned}$$

显然, 当 $u(t) = u^*(t) = -R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)$ 使上式达到极小, 故有

$$J(u^*, v^*) \leq J(u, v^*)$$

另一方面, 当 $u(t) = u^*(t) = -R_p^{-1}(t) G_p^T K(t) x(t)$ 时,

$$J(u^*, v) = \frac{1}{2} x^T(t_0) K(t_0) x(t_0)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [v(t) + R_e^{-1}(t)G_e^T K(t)x(t)]^T R_e(t)[v(t) + R_e^{-1}(t)G_e^T K(t)x(t)]dt$$

显然, 当 $v(t) = v^*(t) = -R_e^{-1}(t)G_e^T(t)K(t)x(t)$ 时, 上式达到极大, 故有

$$J(u^*, v) \leq J(u^*, v^*)$$

综合上面二种情况, 可知 (u^*, v^*) 满足鞍点条件, 而且最优策略 (u^*, v^*) 对应的性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(t_0)K(t_0)x(t_0) \quad (10-108)$$

例 10-5: 拦截目标的导引律

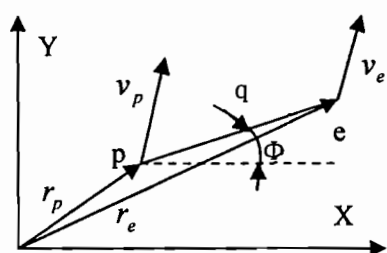


图 10-6 拦截问题运动示意图

用导弹(追逐者)拦截空中目标(逃逸者)时, 末制导段常用的经典导引律是比例导引。这里将用微分对策理论来推出比例导引律。

设导弹(p 方)与目标(e 方)的运动方程分别为

$$\begin{cases} \dot{r}_p = v_p \\ \dot{v}_p = f_p + a_p \end{cases} \quad (10-109)$$

$$\begin{cases} \dot{r}_e = v_e \\ \dot{v}_e = f_e + a_e \end{cases} \quad (10-110)$$

式中, r_p, r_e 分别为导弹与目标的位置向量; v_p, v_e 分别为导弹与目标的速度向量; a_p, a_e 分别为到导弹与目标的控制加速度向量; f_p, f_e 分别为导弹与目标的固有加速度, 它们是由重力和气动力引起的, 通常可认为 $f_p = f_e$ 。两维情况下导弹与目标的几何关系可用图 10-6 表示。图中 pe 连线称为视线, q 称为视线角。考虑性能指标

$$J(a_p, a_e) = \frac{k}{2} [r_p(t_f) - r_e(t_f)]^T [r_p(t_f) - r_e(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [c_p a_p^T(t) a_p(t) - c_e a_e^T(t) a_e(t)] dt \quad (10-111)$$

这是一个线性二次微分对策问题。利用本节的结果可求解为下:

因为我们仅对相对运动 $r_p(t) - r_e(t)$ 感兴趣, 故可忽略 f_p, f_e 。定义 $x_p = \begin{bmatrix} r_p \\ v_p \end{bmatrix}$,

$x_e = \begin{bmatrix} r_e \\ v_e \end{bmatrix}$, 由 (10-109)、(10-110) 可得出系统矩阵和控制矩阵为

$$\begin{aligned} A_p(t) &= A_e(t) = \begin{bmatrix} O_3 & I_3 \\ O_3 & O_3 \end{bmatrix} \\ B_p(t) &= B_e(t) = \begin{bmatrix} O_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-112)$$

于是

$$\Phi_p(t_f - t) = \Phi_e(t_f - t) = \begin{bmatrix} I_3 & (t_f - t)I_3 \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \quad (10-113)$$

因为性能指标 (10-108) 中

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2} [r_p(t_f) - r_e(t_f)]^T [r_p(t_f) - r_e(t_f)] \\ &= \frac{1}{2} [r_p(t_f) - r_e(t_f)]^T [\sqrt{k}I_3 \quad O_3] \begin{bmatrix} \sqrt{k}I_3 \\ O_3 \end{bmatrix} [r_p(t_f) - r_e(t_f)] \end{aligned}$$

故 (10-93) 式中的 $F^T = [\sqrt{k}I_3 \quad O_3]$ 。根据 (10-94) 式, 相对运动 $x(t)$ 可表示为

$$\begin{aligned} x(t) &= F(\Phi_p x_p - \Phi_e x_e) \\ &= [\sqrt{k}I_3 \quad O_3] \begin{bmatrix} I_3 & (t_f - t)I_3 \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_p(t) - r_e(t) \\ v_p(t) - v_e(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

记相对位置向量 \tilde{x} 和相对速度向量 \tilde{v} 为

$$\tilde{x}(t) = r_p(t) - r_e(t), \quad \tilde{v}(t) = v_p(t) - v_e(t)$$

于是

$$x(t) = [\sqrt{k}I_3 \quad O_3] \begin{bmatrix} I_3 & (t_f - t)I_3 \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{bmatrix} = \sqrt{k}[\tilde{x}(t) + \tilde{v}(t)(t_f - t)] \quad (10-114)$$

由 (10-97) 可得

$$G_p(t) = G_e(t) = [\sqrt{k}I_3 \quad O_3] \begin{bmatrix} I_3 & (t_f - t)I_3 \\ O_3 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ I_3 \end{bmatrix} = \sqrt{k}(t_f - t)I_3 \quad (10-115)$$

另由 (10-105), 可得

$$K(t) = \{I_3 + I_3 \int_t^{t_f} [\sqrt{k}(t_f - \tau) \frac{1}{c_p} \sqrt{k}(t_f - \tau) - \sqrt{k}(t_f - \tau) \frac{1}{c_e} \sqrt{k}(t_f - \tau)] d\tau\}^{-1}$$

$$= [1 + (\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_e}) \frac{k(t_f - t)^3}{3}]^{-1} I_3 \quad (10-116)$$

由 (10-106) 并利用 (10-114) ~ (10-116), 得

$$\begin{aligned} a_p(t) = u^*(t) &= -\frac{(t_f - t)[\tilde{x} + (t_f - t)\tilde{v}]}{c_p[\frac{1}{k} + \frac{(c_e - c_p)}{3c_p c_e}(t_f - t)^3]} \\ a_e(t) = v^*(t) &= -\frac{(t_f - t)[\tilde{x} + (t_f - t)\tilde{v}]}{c_e[\frac{1}{k} + \frac{(c_e - c_p)}{3c_p c_e}(t_f - t)^3]} \end{aligned} \quad (10-117)$$

下面讨论导弹 (p 方) 的最优控制 $u^*(t)$ 。从性能指标 (10-111) 式可见, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 应有 $\|\tilde{x}(t_f)\|_2 = \|r_p(t_f) - r_e(t_f)\|_2 = 0$, 即脱靶量为零。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 从 (117) 式得

$$u^*(t) = -\frac{3[\tilde{x} + (t_f - t)\tilde{v}]}{(1 - \frac{c_p}{c_e})(t_f - t)^2} \quad (10-118)$$

式中, t_f 取值不同将影响 $u^*(t)$ 。

若希望在 t 时刻的相对位置 $\tilde{x}(t)$ 由于相对速度 $\tilde{v}(t)$ 而逐渐变小, 经过 $(t_f - t)$ 后 \tilde{x} 变为零 (零脱靶量), 并假设 $\tilde{v}(t)$ 为常数 \tilde{v} , 则有

$$\tilde{x}(t) = -\tilde{v}(t_f - t) \quad (10-119)$$

于是

$$(t_f - t) = -\frac{\tilde{x}^T \tilde{x}}{\tilde{x}^T \tilde{v}} = -\frac{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle} \quad (10-120)$$

将上式代入 (10-118), 得

$$u^*(t) = -\frac{3[\tilde{x} - \tilde{v} \frac{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle}]}{(1 - \frac{c_p}{c_e}) \frac{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle^2}{\langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle^2}} = \frac{3[\tilde{v} \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle - \tilde{x} \langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle] \langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle}{(1 - \frac{c_p}{c_e}) \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle^2} \quad (10-121)$$

利用三维向量的多重积公式

$$(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a$$

有

$$\tilde{v} \times \tilde{x} = -\tilde{x} \times \tilde{v} = (\tilde{x} \times \tilde{v}) \times \tilde{x} \quad (10-122)$$

于是

$$u^*(t) = \frac{3(\tilde{x} \times \tilde{v}) \times \tilde{x}}{(1 - \frac{c_p}{c_e}) \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle} \frac{\langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle} \quad (10-123)$$

另一方面，由于相对速度 \tilde{v} ，引起相对位置 \tilde{x} （即视线）产生转动角速度 \dot{q} （即视线角速率）

$$\dot{q} = \frac{(\tilde{x} \times \tilde{v})}{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle} \quad (10-124)$$

将上式代入（10-123），得

$$u^*(t) = \frac{3 \langle \tilde{x}, \tilde{v} \rangle}{(1 - \frac{c_p}{c_e}) \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle} \dot{q} \times \tilde{x} \quad (10-125)$$

上式是一种比例导引律，它表示最优控制 $u^*(t) = a_p(t)$ 其大小正比于视线角速度 \dot{q} ，其方向与视线 \tilde{x} 垂直，且位于 \tilde{x} ， \tilde{v} 所在平面内。这是因为由（10-125）中

$$\dot{q} \times \tilde{x} = \frac{(\tilde{x} \times \tilde{v}) \times \tilde{x}}{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}$$

利用三维向量的多重积公式（10-122），可见上式的分子是 \tilde{x} 和 \tilde{v} 的线性组合。

即 $\dot{q} \times \tilde{x}$ 在 \tilde{v} ， \tilde{x} 所在的平面内。

$u^*(t)$ 的模可计算如下

$$|u^*| = \frac{3|\tilde{x}||\tilde{v}|\cos\delta}{\left|1 - \frac{c_p}{c_e}\right| |\tilde{x}|^2} |\dot{q}||\tilde{x}| = \frac{3\cos\delta}{\left|1 - \frac{c_p}{c_e}\right|} |\tilde{v}||\dot{q}| \quad (10-126)$$

式中， δ 为 \tilde{x} 和 \tilde{v} 间的夹角，而由（10-124）可见， \dot{q} 与 \tilde{x} 间的夹角为 90° ，故

$$|\dot{q} \times \tilde{x}| = |\dot{q}||\tilde{x}|\sin 90^\circ = |\dot{q}||\tilde{x}|。$$

（10-126）式可写成

$$|u^*| = K |\tilde{v}||\dot{q}|$$

式中, K 为比例导航的有效导航常数

$$K = \frac{3 \cos \delta}{\left| 1 - \frac{c_p}{c_e} \right|}$$

当 $\delta = 0^\circ$, $c_e = \infty$ 时, $K=3$, 这是经典的比例导航常数。由 (10-111) 可见 $c_e = \infty$ 对应 $a_e \rightarrow 0$, 即目标不作机动。

10.6 最优线性原理和贝尔曼—依萨柯方程

贝尔曼在动态规划中提出了最优控制原理; 对于微分对策, 依萨柯也提出了类似的最优性原理, 即最优微分对策过程的任何最后一段都是最优的, 而不管此段的初始状态是什么, 达到此初始状态的对策是什么。

在动态规划中, 我们得到了哈密顿—雅克比—贝尔曼方程式 (6-25), 把它重写于下:

$$-\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \left\{ F(x,u,t) + \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T f(x,u,t) \right\}$$

在微分对策中, 依萨柯也得出了与上式相似的公式, 称为贝尔曼—依萨柯方程, 有时又称为哈密顿—雅克比—依萨柯方程 (简称 HJI 方程)。下面为了简洁起见, 直接给出此公式。

设对策双方的状态方程为

$$\dot{x} = f(x,u,v), \quad x(t_0) = x_0$$

性能指标为

$$J(x,u,v) = \Phi[x(t_f), t_f] + \int_0^{t_f} F(x,u,v,t) dt$$

则最优性能指标满足下面的贝尔曼—依萨柯方程

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} + \min_v \max_u \left[F(x,u,v,t) + \left(\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} \right)^T f(x,u,v) \right] = 0$$

$$J(x(t_f), t_f) = \Phi[x(t_f), t_f]$$

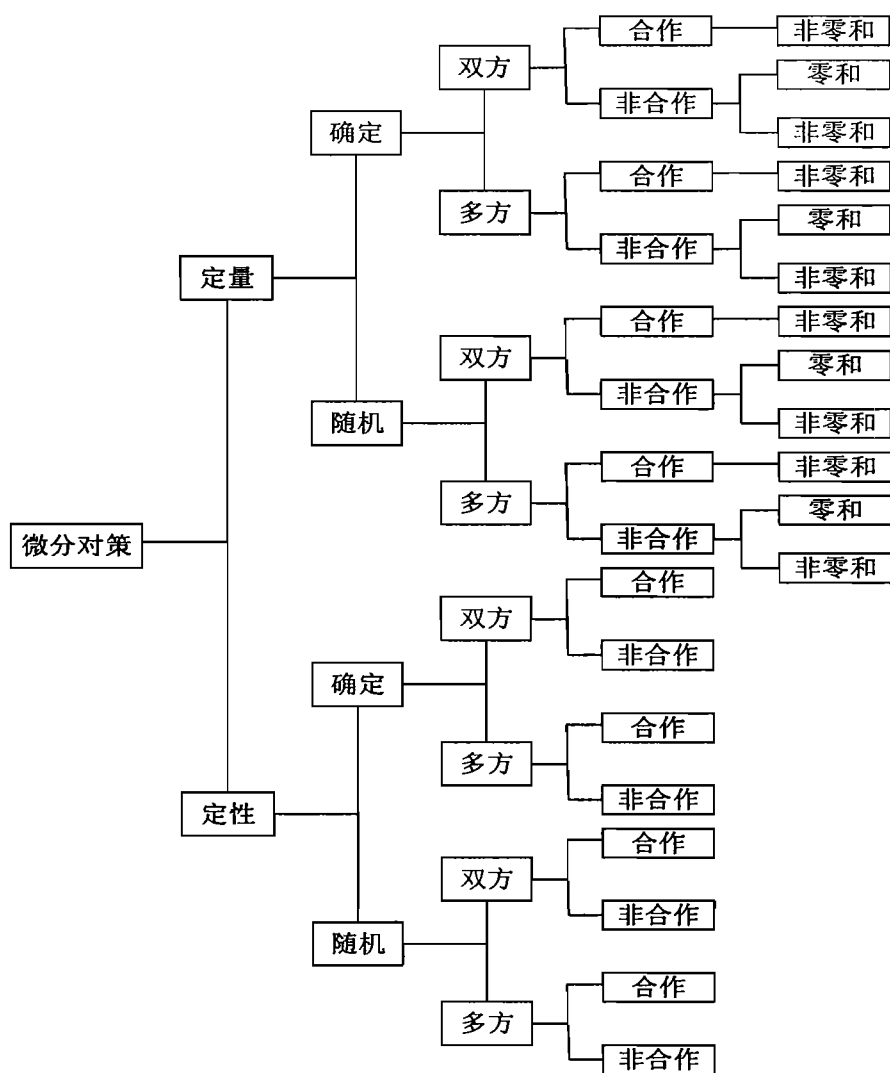
10.7 小结

1. 本章介绍了离散对策（又称矩阵对策）、连续对策和微分对策。本章介绍的都是零和对策，即一方的赢得为另一方的支付。由于对策的双方都力图使自己赢得最大，双方必然会从最坏的方案着手，去争取最好的结果，这也是一种稳妥的结果。若不论哪方先开局都存在

$$\max_v \min_u L_{ij} = \min_u \max_v L_{ij}$$

则称存在最优纯对策。当不存在纯对策时，可以将对策从不同的概率混合使用，得到最优混合策略解。

2. 连续对策问题的最优对策解满足所谓鞍点条件。给出了鞍点存在的必要条件和充分条件。
3. 定量微分对策问题可化为一个极大值控制，一个极小值控制问题。与单方极值控制不同的是哈密顿函数要满足对一方取极大对另一方取极小，故称双方极值原理或极大极小（极小极大）原理。
4. 线性二次型微分对策研究的是线性状态方程和二次型性能指标的对策问题，这时对策控制可写成状态的反馈形式，这点在实用中是很有意义的。
5. 与动态规划中的最优性原理类似，微分对策也满足最优性原理，并可导出最优策略满足贝尔曼—依萨柯方程。
6. 微分对策的内容很丰富。它的简单分类框如图 10-7 所示。本章仅研究了其中的定量—确定性—双方—非合作—零和对策问题。



10.8 习题

用火箭 P 追击目标 E ，设追击在平面上进行，则可用下面的方程来描述火箭 P 与目标 E 的运动：

$$\dot{y}_P = v_{yP}$$

$$\dot{v}_{xp} = F \sin u - K v_{xp}$$

$$\dot{v}_{yP} = F \cos u - K v_{yP}$$

$$\dot{x}_E = W \sin v$$

$$\dot{y}_E = W \cos v$$

其中, x_P, y_P 为火箭 P 在追击平面中的位置坐标, x_E, y_E 为目标 E 在追击平面中的位置坐标, v_{xP}, v_{yP} 为火箭 P 在追击平面中的速度分量, F 为火箭 P 的推力大小, 为常数, 推力方向与追击平面垂线方向夹角为 u , K 为空气阻力系数, 为常数, W 为目标 E 的速度大小, 为常数, 速度方向与追击平面垂线方向夹角为 v 。 u, v 分别是 P, E 的控制量, 由于推力和速度的方向可任意改变, 所以 u, v 均不受限制。

当 P, E 间的距离不大于 l 时, 即 $(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2 \leq l^2$, 就认为实现了捕获, 其中 l 为预先指定的常数。求微分对策问题: 对于火箭 P , 选择 u , 使得实现捕获的时间 T 最小; 对于目标 E , 选择 v , 使得实现捕获的时间 T 最大。

2. 消耗与攻击战问题。

设在时刻 t , 红、蓝两军的武器数量为 $x_2(t), x_1(t)$ 。红军把其武器的一部分 $u(t)x_2(t)$ 用于消耗蓝军的武器, 其中, $0 \leq u(t) \leq 1$, 同时, 把剩下的武器用于支援地面战场的攻击。蓝军采用类似的方案分配其武器。在整个战斗过程中, 红、蓝两军分别得到速率为 m_2, m_1 的武器补充。在初始时刻 t_0 , 红、蓝两军拥有武器的数量为 ξ_2, ξ_1 。两军武器数量变化情况可描述为下列微分方程组

$$\dot{x}_1 = m_1 - c_1 u x_2$$

$$\dot{x}_2 = m_2 - c_2 v x_1$$

$$x_1(0) = \xi_1, x_2(0) = \xi_2$$

其中, $0 \leq u(t) \leq 1, 0 \leq v(t) \leq 1, c_1, c_2, m_1, m_2$ 都是正常数, 且 $c_1 > c_2$ 。

红、蓝两军都希望在整个战斗过程中, 各自累计用于支援地面攻击的武器数量最大, 即争取获得最大的制空权, 所以把衡量战斗效果的标准选取为支付泛函 $J(u, v) = \int_0^T [(1-u)x_2 - (1-v)x_1] dt$, 红军选择 u 力图使 $J(u, v)$ 最大, 而蓝军选择 v 力

图使 $J(u, v)$ 最小。求解该微分对策问题。

3. 平面拦截问题。

设飞机 P, E 在一平面上做拦截对策，分别以前向常速度 v_p, v_e 做相向飞行。

P, E 的横向位置记做 x_p, x_e ，将由它们的横向速度 $v(t), u(t)$ 分别调节，于是，飞

机 P, E 的运动状态微分方程组为

$$\dot{x}_p = v$$

$$\dot{x}_e = u$$

$$x_p(t_0) = x_p^0, x_e(t_0) = x_e^0$$

记 $x(t) = x_e(t) - x_p(t)$ ，则上述方程组可写成

$$\dot{x} = u - v$$

$$x(t_0) = x_0 = x_e^0 - x_p^0$$

衡量拦截效果的指标选取为支付

$$J(u, v) = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\gamma_2 u^2 - \gamma_1 v^2) dt$$

其中， $t_f = \frac{L}{v_e + v_p}$ 是截击时间， γ_2, γ_1 是飞机 P, E 控制能量或努力程度的权

重， $\gamma_2 \geq 0, \gamma_1 \geq 0$ 。 $J(u, v)$ 是终端距离与控制能量加权之和，飞机 E 力图控制 $u(t)$

使支付 $J(u, v)$ 获得最大值，而飞机 P 力图控制 $v(t)$ 使支付 $J(u, v)$ 获得最小值。求

解该微分对策问题。

第十一章 鲁棒与最优控制

由前面几章可知,最优控制规律的设计,要求必须能够得到系统的精确数学模型,否则,所谓的最优设计全部都是徒劳的。正因为在实际工程中,被控系统不确定性的存在,导致了人们对这一问题的重新认识。由此,引出了如何设计一个合理的控制器,当存在不确定性因素的情况下,使系统仍保持良好鲁棒性的问题。鲁棒控制设计的主要思想是在使系统对不确定性的响应的最大值尽量小的前提下,以满足系统的性能指标。

11.1 数学基础知识

本节简要介绍本章内容所涉及到的数学基础知识。为简明起见,假定读者已经具备工科线性代数、矩阵理论和控制理论的基础知识。

在前面的线性代数和矩阵理论等数学课程中,我们已经知道了向量范数和矩阵范数的概念。实际上,矩阵可以看成是向量空间到向量空间的映射。从几何意义上讲,向量的范数表达的是向量的长度;而矩阵的范数则反映了在这种映射过程中,向量长度被放大或缩小的一种“增益”。

在控制系统中,经常要面临各种信号,这些信号通常可以表示为时域或者频域内的函数。而系统在这些信号激励下的响应,同样也可以表示为各种函数。因此,一个系统可以看成是从一个函数空间到另一个函数空间的映射,即算子。与向量和矩阵的情况类似,如果在函数空间引入范数的概念来表述信号在某种工程意义上的强度,以此来描述控制系统的性能,那么,系统作为算子时的范数就反映了系统在传递信号过程中的一种“增益”,它是描述系统性能的一个重要手段。

下面为了后面的知识做准备,首先简单介绍一下信号的范数和系统的范数。

11.1.1 信号的范数

1、时域信号

时域信号 $u(t)$ 可理解为从 $(-\infty, +\infty)$ 到实数 R 的一个函数, 设 $u(t)$ 是勒贝格可测函数, 下面给出关于函数空间的一些定义。

定义 11-1 对于正数 $p \in [1, +\infty)$, 元素 $u(\cdot)$ 为勒贝格可测函数, 且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^p dt < +\infty$$

的函数空间, 称为 $L_p(-\infty, +\infty)$ 空间。

其中 $L_p(-\infty, +\infty)$ 空间中, 我们常用的函数空间有

$$\begin{aligned} L_1(-\infty, +\infty): \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt < +\infty \\ L_2(-\infty, +\infty): \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt < +\infty \\ L_\infty(-\infty, +\infty): \quad & \text{ess sup}_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)| < +\infty \end{aligned}$$

其中, ess sup 表示真上确界。所谓函数在点集 Q 上的真上确界是指它在 Q 中除某个零测度集外的上确界。对于连续函数, 其上确界就是真上确界。

在 $L_p(-\infty, +\infty)$ 空间中, 所有对 $t < 0$ 除去在测度为零的集合上均为零的函数的全体所构成的集合记为 $L_p[0, +\infty)$ 。 $L_p[0, +\infty)$ 是 $L_p(-\infty, +\infty)$ 的一个闭空间。因为实际信号均满足 $t \geq 0$, 所以我们讨论的信号均属于 $L_p[0, +\infty)$ 空间。需要说明的是: 对于函数空间中的元素 $u(t)$ 可以是单个的函数, 也可以是向量函数。

对于时域信号 $u(t)$, 我们常用的范数有:

$$\begin{aligned} 1\text{-范数}: \quad & \|u\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt \\ 2\text{-范数}: \quad & \|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt \right)^{1/2} \\ \infty\text{-范数}: \quad & \|u\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in (-\infty, +\infty)} |u(t)| \end{aligned}$$

应当指出: 2-范数的平方实际上是对信号能量的一种度量, 而 ∞ -范数则是对信号幅值上界的度量。因此, $L_2[0, +\infty)$ 中的信号属能量有限信号, 如单位脉冲信号 (幅值不受限); 而 $L_\infty[0, +\infty)$ 中的信号则属于幅值有限信号, 如单位阶跃信号 (能量不受限)。可见, $L_2[0, +\infty)$ 和 $L_\infty[0, +\infty)$ 以及 $L_1[0, +\infty)$ 空间并不是完全等价的。

2、频域信号

频域信号 $u(j\omega)$ 可看成从 $jR \rightarrow C$ 的函数, 设 $u(j\omega)$ 为勒贝格可测函数, 则有如下定义。

定义 11-2 对于正数 $p \in [1, +\infty)$, 元素在 jR 上有定义, 取值于复数域 C 的 $u(\cdot)$ 为勒贝格可测函数, 且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(j\omega)|^p d\omega < +\infty$$

的空间, 称 L_p 空间。常用的 L_p 空间有

$$L_2: \int_{-\infty}^{+\infty} |u(j\omega)|^2 d\omega < +\infty$$

$$L_\infty: \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in R} |u(j\omega)| < +\infty$$

对于频域信号 $u(j\omega)$, 常用范数有

$$2\text{-范数:} \quad \|u\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(j\omega) u(j\omega) d\omega$$

其中 $u^*(j\omega)$ 是 $u(j\omega)$ 的共轭转置。

$$\infty\text{-范数:} \quad \|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in R} |u(j\omega)|$$

由于实际中常遇到的频域信号都是 $j\omega$ 的(真)实有理函数, 因此, 我们把 L_2 和 L_∞ 中实有理函数的全体给出专门的记号, 分别记作 RL_2 和 RL_∞ 。

即: $RL_2 = \{u \mid u \in L_2, u \text{ 为 } j\omega \text{ 的实有理函数 (向量)}\}$

$RL_\infty = \{u \mid u \in L_\infty, u \text{ 为 } j\omega \text{ 的实有理函数 (向量)}\}$

由定义可知, RL_∞ 是在虚轴上无极点的真实有理函数(向量)的全体。

11.1.2 系统的范数

本书中所讨论的系统, 若没有特别说明, 均是线性时不变有限维因果系统。我们知道, 对于一个系统的作用, 实际上可看成对信号进行某种变换。因此, 可以把系统看作为一种算子。关于算子, 也就是指定义在两个函数空间之间的某种

映射关系。这里我们主要把系统作为线性算子来处理。

对于线性算子 G 的范数 $\|G\|$ 可定义

$$\|G\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Gu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Gu\|$$

由该定义可知，系统的范数实际上是单变量增益（信号放大倍数）概念在多变量系统中的推广。

有了算子范数的概念，就可以把 L_∞ 和 H_∞ 扩展为有理函数矩阵空间，相应的实有理函数矩阵空间仍分别记为 RL_∞ 和 RH_∞ 。

11.2 LQR、LQG 问题与 H_2 最优控制问题

11.2.1 LQR 问题与 H_2 最优控制问题

一个反馈系统的性能可以用从扰动输入到参考输出之间的闭环增益来衡量。系统的 2-范数代表一个平均增益，可被用来作为一个最优控制问题的代价函数。当被控对象被近似给定以后，关于 LQR 的最优控制问题也就是使闭环系统的 2-范数取最小值的最优问题。把 LQR 问题明确地叙述为一个系统的 2-范数最优化问题可以从另一个角度考察 LQR 问题，并且可以比较容易得到公式来描述系统的频域特性。

H_2 最优控制问题将为下面的被控对象找到线性时不变控制器

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + [B_u \quad I] \begin{bmatrix} u(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m(t) \\ y_1(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

使得由被控对象组成的闭环系统稳定，并且使得系统的 2-范数最小。

$$J_2 = \left[\int_0^\infty \text{tr} \{ g_{cl}^T(t) g_{cl}(t) \} dt \right]^{1/2} = \|G_{cl}\|_2$$

式中 $g_{cl}(t)$ 是从扰动输入到参考输出之间的闭环系统的脉冲响应矩阵。上面所示系统的结构图将在下图中给出。符号 H_2 源自全局稳定线性时不变系统的 hardy 空间 (H)，下标 2 代表所应用的系统范数。

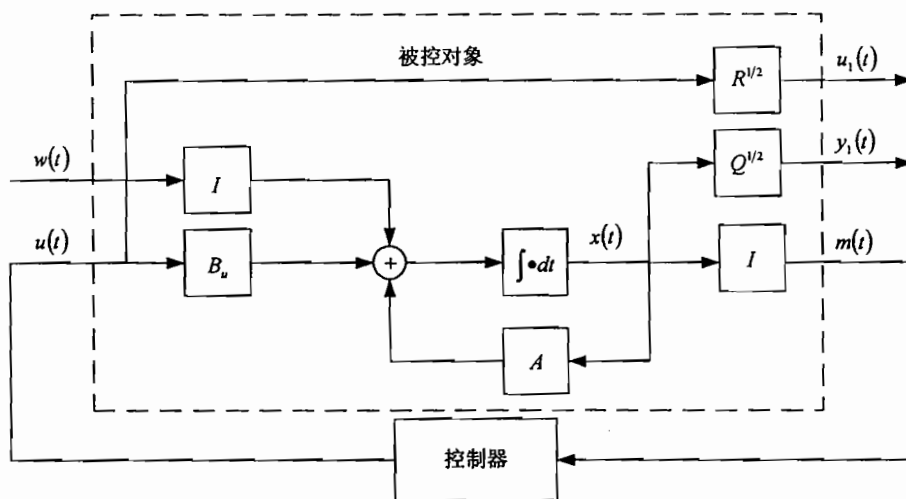


图 11-1 H_2 最优控制方框图

H_2 最优控制问题等价于稳态随机调节器。在这个情况下，最优反馈增益是时不变的，并使系统稳定。 H_2 最优控制问题和稳态随机调节器的等价性可以通过稳态参考输出的均方值得出。

$$E \left\{ \begin{bmatrix} y_1^T(\infty) & u_1^T(\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\infty) \\ u_1(\infty) \end{bmatrix} \right\} = E [x^T(\infty) Q x(\infty) + u^T(\infty) R u(\infty)]$$

上式就等于稳态随机调节器的指标函数。这个输出的均方值也能通过闭环系统的 2-范数来得到。

$$E \left\{ \begin{bmatrix} y_1^T(\infty) & u_1^T(\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\infty) \\ u_1(\infty) \end{bmatrix} \right\} = \|G_{cl}\|_2^2$$

通过这两个表达式，随机调节器的指标函数可以看作系统 2-范数的平方：

$$J_{SR} = J_2^2$$

假设谱密度矩阵是单位阵。由于平方运算是单调的，使 J_{SR} 最小的控制也使 J_2 取最小。这样， H_2 最优反馈控制就等于状态反馈控制，在这里，反馈增益是稳态随机调节器增益，或者等价为稳态 LQR 增益。

11.2.2 LQG 问题与 H_2 最优控制问题

The diagram shows a control system with a plant (被控对象) and a controller (控制器). The plant contains several blocks: $S_v^{1/2}$, $B_w S_w^{1/2}$, B_w , $Q^{1/2}$, C_m , and A . The controller is a separate block. The inputs to the plant are $v_i(t)$, $\omega_i(t)$, and $u(t)$. The outputs are $u_i(t)$, $y_i(t)$, and $m(t)$. The signal $x(t)$ is the state of the plant, and $m(t)$ is the control signal.

给出具有标称干扰输入和参考输出的被控对象:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y_1(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_m \\ Q^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_v^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 \\ R^{1/2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \omega_1(t) \\ \nu_1(t) \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \|G_{cl}\|_2$$
$$J = E[x^T(\infty)Qx(\infty) + u^T(\infty)Ru(\infty)] = E\left\{\begin{bmatrix} (Q^{1/2}x(\infty))^T & (R^{1/2}u(\infty))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{1/2}x(\infty) \\ R^{1/2}u(\infty) \end{bmatrix}\right\} = \|G_d\|_2^2$$

210

LQG 问题的 H_2 形式表明有可能通过不同的系统范数设计控制器。比如, 下面我们将要介绍的无穷范数。

11.3 H_∞ 控制理论

11.3.1 问题的提出

由于各种复杂因素的影响, 控制系统本身存在着不确定性。这种不确定性包括数学模型自身的不确定性和外界干扰的不确定性。反馈控制可以克服或减小不确定性的影响, 使系统达到要求的性能指标。但是, 当系统存在不确定性影响时, 所设计的反馈控制器能否使系统达到期望的指标要求, 这是一个需要回答的问题。

20 世纪 30 年代开始发展起来的经典控制理论, 利用幅频裕度和相频裕度的概念研究反馈系统, 使设计的系统在一定范围内变化时能满足所要求的性能。由于充分大的增益裕度和相位裕度, 使得系统在具有较大的对象模型摄动时, 仍能保证系统性能, 并具有抑制干扰的能力。因此, 经典反馈控制本质上是鲁棒的, 且方法简单、实用, 直至今日, 仍在工程设计中得到广泛应用。但是, 其不足之处是无法直接用于多输入多输出(MIMO)系统。

20 世纪 60 年代, 出现了现代控制理论, 提出了许多新的控制理论与方法。这些方法在实际控制系统的设计中并未得到广泛的应用, 主要原因是应用这些方法时忽略了对象的不确定性, 并对存在的干扰信号作出了苛刻的要求。如 LQG 设计方法中要求干扰为高斯分布的白噪声, 而在很多实际问题中, 干扰的统计特性很难确定; 此外, 它还要求对象有精确的数学模型。这样, 用 LQG 设计的系统, 当有模型扰动时, 就不能保证系统的鲁棒性。

针对现代控制理论存在的问题, 1981 年, Zames 提出了著名的 H_∞ 控制思想。他针对一个具有有限功率谱干扰的单输入单输出系统的设计问题, 引入了灵敏度函数的 H_∞ 范数作为目标函数, 使干扰对系统的影响降到最低限度。

采用范数作为性能指标有以下优点:

(1)可以处理 LQG 优化无法解决的变功率谱干扰下的系统控制问题;

(2) H_∞ 范数具有乘法性质 $\|PQ\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$, 这一性质对研究对象不确定影响下, 系统的鲁棒稳定性问题相当重要。

经过 20 多年的发展, H_∞ 理论取得了大量的研究成果, 并逐渐形成了完整的理论体系。由于它所表现出的固有特点, 在鲁棒控制理论中占有重要位置, 是一个十分活跃的研究领域。

11.3.2 H_∞ 标准问题

在基于 H_∞ 控制理论的控制系统设计中, 无论是鲁棒稳定还是干扰抑制问题, 都可以转化为求反馈控制器使闭环系统稳定且闭环传递函数阵的 H_∞ 范数最小或小于某一给定值。这种同一模式下的 H_∞ 优化问题, 即称之为 H_∞ 标准问题。下面我们就来介绍这种目前应用最广泛的 H_∞ 标准问题。

设线性定常系统如图 11-3 所示。其中, $z \in R^m$ 表示输出信号, 是应设计需要而定义的评价信号, $w \in R^p$ 表示外部干扰输入信号, 包括干扰、噪声、参考输入等, 是为了设计而定义的辅助信号, $u \in R^r$ 是控制输入信号, $y \in R^q$ 是测量信号, $P(s)$ 表示广义被控对象, 包括实际被控对象和为了描述设计指标而设定的加权函数, $K(s)$ 表示所设计的控制器。

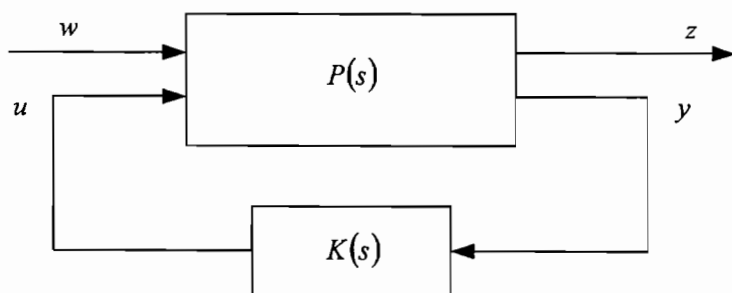


图 11-3 H_∞ 标准控制问题

广义被控对象 $P(s)$ 的状态方程描述为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\
z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\
y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u
\end{aligned} \tag{11-1}$$

其中 $x \in R^n$ 表示状态向量，传递函数的形式为

$$\begin{aligned}
P(s) &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 \quad B_2] \\
&= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{11-2}$$

输入输出描述为

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{11-3}$$

控制器表述为

$$u = Ky \tag{11-4}$$

将式(11-4)代入式(11-3)，消去 y ，得从 w 到 z 的闭环传递函数为

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \tag{11-5}$$

由此， H_∞ 标准问题可表述如下：

对于一个给定的广义被控对象 P ，求取一个反馈控制器 K ，使闭环系统内稳定，且使闭环传递函数 $F_l(P, K)$ 的 H_∞ 范数达到极小，即

$$\min_K \|F_l(P, K)\|_\infty \tag{11-6}$$

式(11-6)表示 H_∞ 最优控制问题。

其中，对应于图 11-3 中的闭环系统内稳定是指当 $t \rightarrow +\infty$ 时，闭环系统的状态(原开环系统和动态补偿器的状态)趋于零。

若给定 $\gamma > 0$ ，求取镇定反馈控制器 K ，使得

$$\|F_l(P, K)\|_{\infty} < \gamma \quad (11-7)$$

则表示 H_{∞} 次优控制问题。

11.3.3 不确定系统的 H_{∞} 控制问题

1、鲁棒稳定性问题

对于 H_{∞} 标准问题，基本框图如图 11-3 所示。但当被控对象 $P(s)$ 含有不确定性因素时，通过抽取不确定性部分 Δ 后，闭环系统有如图 11-4 所示结构，

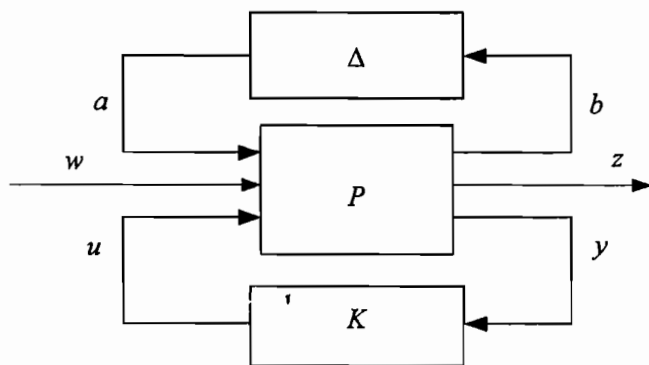


图 11-4 不确定性系统的 H_{∞} 控制

$$\begin{bmatrix} b \\ z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (11-8)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \quad (11-9)$$

$$a = \Delta b \quad (11-10)$$

$$u = Ky \quad (11-11)$$

(1) 考虑含加性不确定性，系统框图如图 11-5(a)所示，有

$$w = d$$

$$z = y = d + Wa + Gu$$

$$b = u$$

与图 11-4 对应, 则有

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \\ W & I & G \\ W & I & G \end{bmatrix}$$

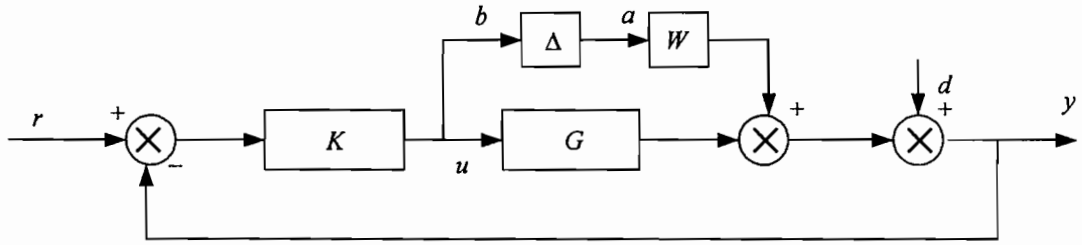


图 11-5(a)含加性不确定性和扰动的系统框图

(2) 考虑乘性不确定性, 如图 11-5(b)所示, 有

$$w = d$$

$$z = y = d + Wa + Gu$$

$$b = Gu$$

与图 11-4 对应, 则有

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ W & I & G \\ W & I & G \end{bmatrix}$$

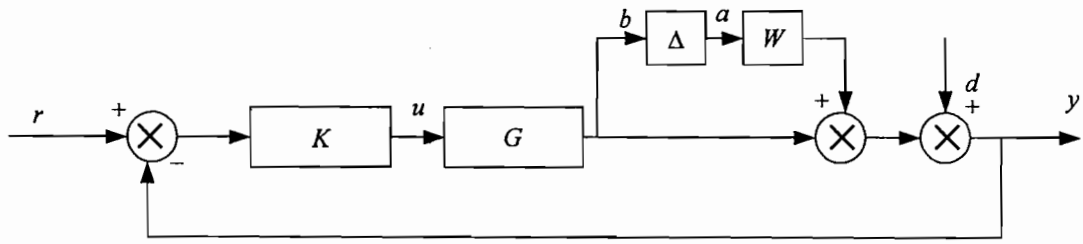


图 11-5(b)含乘性不确定性和扰动的系统框图;

(3) 考虑互质分解描述不确定性, 系统框图如图 11-5(c)所示, 有

$$w = d$$

$$z = y = d + M_1^{-1}Wa + N_1M_1^{-1}u$$

$$b_1 = M_1^{-1}Wa + N_1M_1^{-1}u = M_1^{-1}Wa + Gu$$

$$b_2 = u$$

与图 11-4 对应, 则有

$$P = \begin{bmatrix} M_1^{-1}W & 0 & G \\ 0 & 0 & I \\ M_1^{-1}W & I & G \end{bmatrix}$$

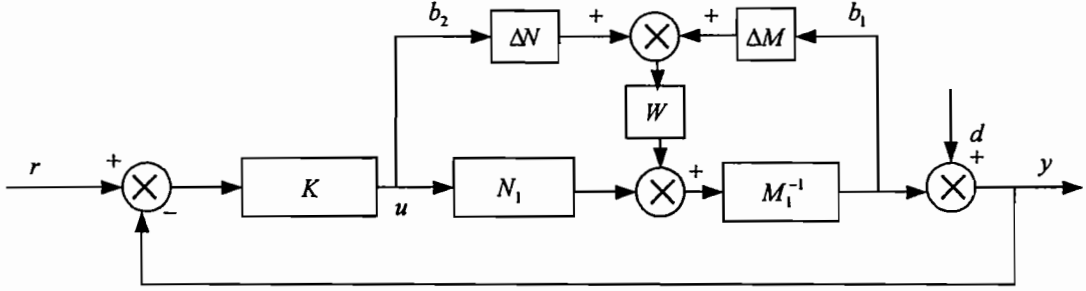


图 11-5(c)含基于互质分解描述不确定性和扰动的系统框图

综上所述, 图 11-5 所述的各类不确定性系统的控制问题可以用图 11-4 所示的方式统一描述, 从而转换成一般鲁棒控制问题。

结合式(11-8)~式(11-10), 有

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P_{\Delta} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (11-12)$$

$$P_{\Delta} = \begin{bmatrix} P_{\Delta 11} & P_{\Delta 12} \\ P_{\Delta 21} & P_{\Delta 22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} \Delta (I - P_{11} \Delta)^{-1} \begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \end{bmatrix} \quad (11-13)$$

将式(11-11)代入式(11-12), 得

$$z = T_{\Delta zw} w$$

其中

$$T_{\Delta zw} = P_{\Delta 11} + P_{\Delta 12} K (I - P_{\Delta 22} K)^{-1} P_{\Delta 21} = F_l(P_{\Delta}, K)$$

$P_{\Delta ij} (i, j = 1, 2)$ 由式(11-13)给出。 $\Delta \in RH_{\infty}, \|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ 。

不确定性系统的鲁棒稳定性问题, 就是寻找反馈控制器 K , 使得图 11-4 所示的闭环系统在任意有界稳定摄动 Δ 的作用下内稳定, 且满足

$$\|F_l(P_{\Delta}, K)\|_{\infty} < \gamma \quad (11-14)$$

其中 $\gamma > 0$ 是一给定常数。

下面举例说明这种鲁棒稳定设计问题可以通过设定 H_∞ 性能指标而实现。

设有如下一个人造卫星姿态控制的地面试验装置,该装置由于其太阳能电池板的柔韧性,无法将其作为刚体处理。对于该被控对象,设计如图 11-6 所示的反馈控制系统,进行卫星姿态控制。被控对象的数学模型为

$$P(s) = P_0(s) + \Delta P(s)$$

其中, $\Delta P(s)$ 是由于被控对象的柔性特性而产生的高频振动项。

在进行系统设计的时候,我们采用简化的数学模型 $P_0(s)$, 模型误差即为 $\Delta P(s)$, 假设 $\Delta P(s)$ 的频率特性上界已知, 即

$$|\Delta P(j\omega)| < |W(j\omega)| \quad \forall \omega \in [0, +\infty]$$

其中, $W(j\omega)$ 为已知的有理函数。

对于上述卫星姿态控制系统,如果只考虑对于简化模型 $P_0(s)$ 的系统稳定性,那么由于摄动项 $\Delta P(s)$ 的影响,实际系统将会出现溢振现象,无法抑制卫星太阳能电池板在移动过程中出现的振动现象。因此,基于鲁棒稳定性的控制律设计,应该在设计的时候就考虑模型误差,这对工程实际具有很重要的意义。

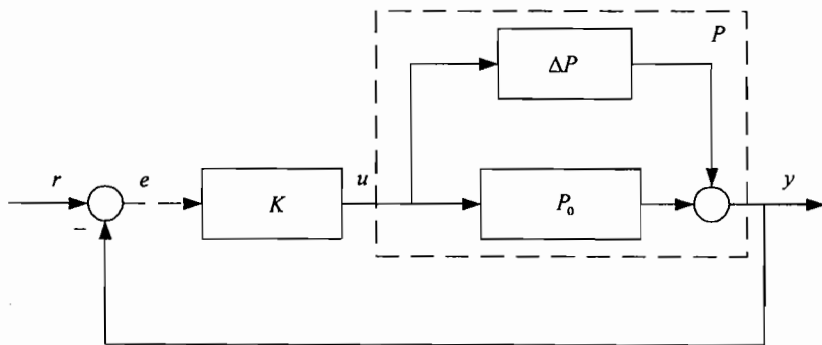


图 11-6 鲁棒控制系统

上面的系统可以等价的表示为图 11-7:

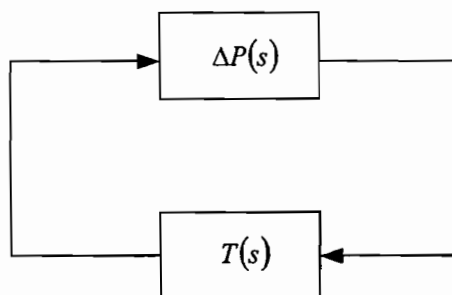


图 11-7 等价系统

其中, $T(s) = \frac{K(s)}{1 + P_0(s)K(s)}$

如果 $T(s)$ 是稳定的 (即在 s 右半平面解析), 那么根据 Nyquist 稳定判据可知, 闭环系统对任意 $\Delta P(s)$ 稳定的充分条件是

$$|\Delta P(j\omega)W(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega \in [0, +\infty]$$

即开环系统的 Nyquist 曲线位于单位圆内, 不围绕 -1 点。

因此, 如果设计控制器 $K(s)$ 使得 $T(s)$, 等价于原系统 $\Delta P(s) = 0$ 的标称系统稳定, 同时满足 $\|T(s)W(s)\|_\infty < 1$, 则系统鲁棒稳定。

所以, 上述卫星姿态控制问题就可以描述为, 对于标称模型 $P_0(s)$ 和 $W(s)$, 设计如图 11-8 所示的反馈控制器 $K(s)$, 使得闭环系统稳定, 同时满足 H_∞ 性能指标 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < 1$, 其中 $T_{zw}(s)$ 表示由 w 至 z 的闭环传递函数。

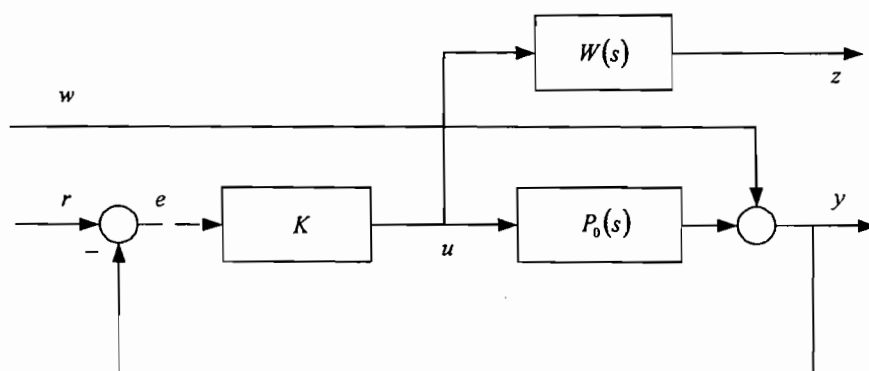


图 11-8 鲁棒稳定控制器设计

与鲁棒稳定性问题相对应的还有鲁棒性能问题。

2、鲁棒性能问题

对于鲁棒性能问题可以归结为一类特殊的鲁棒稳定性问题。

令对任意有界稳定摄动 Δ ，存在满足式(11-14)的控制器 K ，由式(11-8)~式(11-11)可得闭环控制系统为

$$\begin{bmatrix} b \\ z \end{bmatrix} = P_k \begin{bmatrix} a \\ w \end{bmatrix} \quad (11-15)$$

其中

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{k11} & P_{k12} \\ P_{k21} & P_{k22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \end{bmatrix} K (I - P_{33} K)^{-1} \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} \end{bmatrix} \quad (11-16)$$

此时，式(11-14)意味着图 11-6 所示闭环系统由 w 到 z 的传递关系对任意有界稳定摄动 Δ 都是稳定的。

在不确定系统鲁棒稳定性分析中，依据小增益定理，鲁棒性能问题可归结于选择控制器 K ，使闭环系统对 w 和 z 两端的任意有界稳定摄动 Δ' 都稳定。如图 11-9(a)所示。

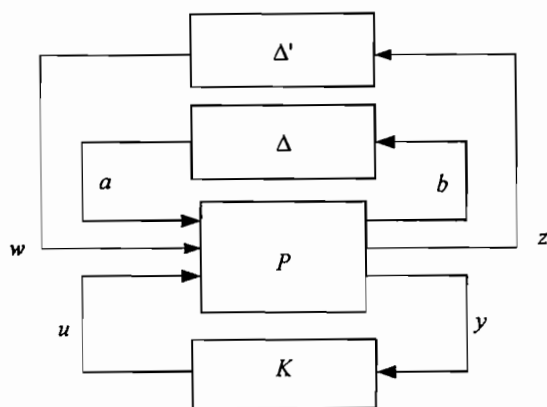


图 11-9 (a)鲁棒性能问题

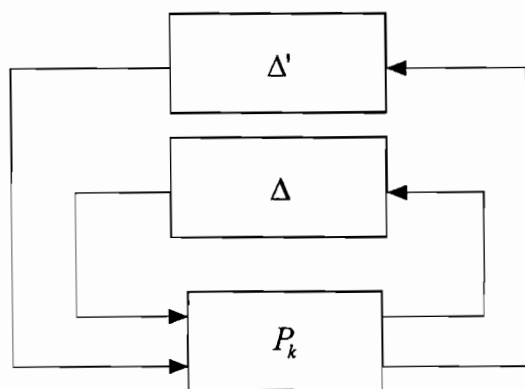


图 11-9 (b)鲁棒性能问题的等价结构

结合不确定性 Δ 和有界稳定摄动 Δ' ，则系统的鲁棒性能问题最终归结于选择控制器 K ，使该闭环系统对任意的 Δ 和 Δ' 皆稳定。

如图 11-9(b)所示，将 Δ 和 Δ' 合并，则有

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta' \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

根据小增益理论，选取

$$\|P_k\|_{\infty} < \gamma \quad (11-18)$$

其中 $\gamma > 0$ 是一给定常数。

则图 11-9 所示系统是内稳定的。

11.4 线性定常系统的 H_∞ 最优控制问题

为了更好的理解 H_∞ 最优控制的设计思想, 我们首先考察线性系统中的最优控制问题。

假设单输入线性系统状态方程如下:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad (11-19)$$

其中, $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u \in R$ 为控制输入, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^n$ 为定常矩阵。

对于被控对象, 设计状态反馈控制器:

$$u \in Kx \quad K \in R^{1 \times n}$$

使给定的二次型性能指标

$$J = \int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t) + ru^2(t)\}dt$$

达到最小, 同时, 使闭环系统渐进稳定, 其中 $Q \geq 0$ 为加权矩阵, $r > 0$ 为加权系数。

最优控制理论的结果表明, 通过解适当的代数 Riccati 方程, 可以得到使 J 为最小的控制器 K 。但是在这个设计问题中, 并没有考虑干扰的影响, 即性能指标的最优性只有在被控对象完全可以由式(11-19)精确描述时才能得到实现。由于实际系统中存在干扰等不确定性, 使得这种最优设计的结果在实际应用中效果不好。

为了克服这一点, 在被控对象的模型中, 加入干扰项, 并考虑干扰对系统响应特性的影响。下面我们将分别讨论线性定常系统的 H_∞ 最优控制和次优控制问题。

11.4.1 线性定常系统 H_∞ 最优控制问题的提出

考虑带外干扰的线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w\end{aligned}\tag{11-20}$$

其中 $x \in R^n$ 是状态, $u \in R^r$ 是控制输入信号, $w \in R^r$ 是外干扰输入信号 (辅助信号), $y \in R^m$ 是测量输出信号, $z \in R^{m_2}$ 是系统输出信号 (评价信号),

$A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$ 皆为适当维数的常数阵。

系统(11-20)的 H_∞ 最优控制问题是求控制量 u , 使得

(1) 闭环系统内稳定, 即当 $w = 0$ 时闭环系统

$$\dot{x} = Ax + B_2 u\tag{11-21}$$

是渐近稳定的;

(2) 对于 $\forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$, 控制量 u 使得系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u & x(0) &= 0 \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u\end{aligned}\tag{11-22}$$

的输出满足不等式

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \leq \ell_2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt\tag{11-23}$$

其中:

$$\ell_2 = \sup_{w(t) \in L_2[0, +\infty)} \frac{\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt}{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt}$$

不等式(11-23)是在所求控制量 u 作用下, 闭环系统对外干扰抑制能力的一种度量, ℓ_2 称为系统(11-20)的 L_2 -增益, 它反映了带外干扰的闭环系统的输出能量对外干扰信号能量的衰减程度。这里的控制量 u 可以是状态反馈(当全部状态可观测时)和观测输出的静态输出反馈, 也可以是状态量和观测输出量的动态反

馈。至于选择什么结构形式的控制器，要视系统的要求和实现的难易来选定。

在 H_∞ 控制器设计中，将寻求满足上述条件(1)和(2)的控制量 u 的问题称为“最优问题”，其中涉及到求 L_2 -增益 ℓ_2 的问题。虽然从理论上讲，在一定条件下，可证明系统(11-20)的 L_2 -增益存在，但实际上却很难求得它。

因此，从工程实现考虑，在用 H_∞ 控制方法求控制器时，常根据工程设计要求而采取给定增益 γ_0 的所谓“次优控制问题”。

H_∞ 控制设计的次优问题是指对于事先给定的 $0 < \gamma_0 < +\infty$ ，寻求控制量 u ，使得满足：

(1) 闭环系统内稳定，即当 $w = 0$ 时，闭环系统(11-21)是渐近稳定的。

(2) 对 $\forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$ ，控制量 u 使得系统(11-22)的系统输出具有如下性质：

$$\int_0^{\infty} z^T(t)z(t)dt \leq \gamma_0 \int_0^{\infty} w^T(t)w(t)dt$$

11.4.2 线性定常系统 H_∞ 最优控制问题的求解

考察如下线性定常系统：

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (11-24)$$

$$z = Cx$$

其中， $x \in R^n$ 是状态， $w \in R^r$ 是外干扰， $z \in R^m$ 是输出， A ， B ， C 为适当维数的常数阵。

这里的问题是：对于 $\forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$ ，求使

$$\int_0^{\infty} z^T(t)z(t)dt \leq \gamma_0 \int_0^{\infty} w^T(t)w(t)dt \quad (11-25)$$

成立的 A ， B ， C 应满足的关系，其中 $z(t)$ 是在初态为 $x(0) = 0$ 时对应于

$w(t) \in L_2[0, +\infty)$ 的系统(11-24)的输出。

令

$$J[w(\cdot)] = \int_0^{\infty} [z^T(t)z(t) - \gamma_0 w^T(t)w(t)]dt, w(t) \in L_2[0, +\infty)$$

有如下所谓“最优干扰问题”

$$\dot{x} = Ax + Bw$$

$$z = Cx$$

$$\max_{w(\cdot) \in L_2[0, +\infty)} J[w(\cdot)] = \max_{w(\cdot) \in L_2[0, +\infty)} \int_0^{+\infty} [z^T(t)z(t) - \gamma_0 w^T(t)w(t)] dt$$

利用使性能指标取极大值的哈密顿—雅可比—贝尔曼方程, 直接得 $J[w(\cdot)]$ 取极大值的 w 为

$$w^*(x) = \frac{1}{\gamma_0} B^T P x$$

而 P 满足如下 Riccati 代数方程:

$$PA + A^T P + C^T C + \frac{1}{\gamma_0} P B B^T P = 0 \quad (11-26)$$

定理 11-1 给定线性定常系统(11-24), 若 A, B, C 使 Riccati 代数方程(11-26)有正定对称解时, 则对事先给定的正数 γ_0 有

$$\int_0^{+\infty} z^T(t)z(t)dt \leq \gamma_0 \int_0^{+\infty} w^T(t)w(t)dt, \forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$$

其中 $z(t)$ 是在初态为 $x(0) = 0$ 时对应于 $w(t) \in L_2[0, +\infty)$ 的系统输出。

下面我们继续讨论线性定常系统 H_∞ 次优控制问题的求解。

为了简单起见, 在系统(11-20)中设 $D_{11} = 0, C_1^T D_{12} = 0, D_{12}^T D_{12} \stackrel{\Delta}{=} R_2 > 0$, 且 x 和 w 都可以观测。考虑此时系统(11-20)的 H_∞ 次优控制问题的解, 即对系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (11-27)$$

讨论其 H_∞ 次优问题的解。

给定正数 $\gamma_0 > 0$, 取性能指标为

$$\begin{aligned} J[u(\cdot), w(\cdot)] &= \int_0^{+\infty} [z^T(t)z(t) - \gamma_0 w^T(t)w(t)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} [x^T(t)C_1^T C_1 x(t) + u^T(t)R_2 u(t) - \gamma_0 w^T(t)w(t)] dt \end{aligned} \quad (11-28)$$

考察系统(11-27)以(11-28)为性能指标的微分对策问题, 即

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$\min_{u(\cdot)} \max_{w(\cdot)} J[u(\cdot), w(\cdot)] \quad (11-29)$$

利用哈密顿—雅可比—依萨柯方程（简称 HJI 方程），对于微分对策问题 (11-29)，可得下列函数

$$u^*(x) = R_2^{-1} B_2^T P x$$

$$w^*(x) = \frac{1}{\gamma_0} B_1^T P x$$

使(11-29)中的 $J[u(\cdot), w(\cdot)]$ 达到极大极小。

其中 P 满足如下 Riccati 代数方程：

$$PA + A^T P + C_1^T C_1 + \frac{1}{\gamma_0} P B_1 B_1^T P - P B_2 R_2^{-1} B_2^T P = 0 \quad (11-30)$$

定理 11-2 对于给定线性定常系统(11-27)，当 (A, C_1) 完全可观测时，其全状态信息情况下的 H_∞ 次优控制问题有解，即对给定的正数 γ_0 ，状态反馈

$u^*(x) = -R_2^{-1} B_2^T P^* x$ 使得系统具有如下性质：

(1) 当 $w = 0$ 时，闭环系统(11-27)渐近稳定。

(2) 对于给定的正数 γ_0 ， $\forall w(t) \in L_2[0, +\infty)$ 皆有

$$\int_0^\infty z^T(t) z(t) dt \leq \gamma_0 \int_0^\infty w^T(t) w(t) dt$$

其中 $z(t) = [C_1 - D_{12} R_2^{-1} B_2^T P^*] x(t)$ 是(11-27)的系统输出， P^* 是 Riccati 代数方程 (11-30) 的正定对称解。

11.5 小结

1、本章用了一定的篇幅介绍一些数学基础知识，旨在让读者了解 H_2 、 H_∞ 控制问题的提法、最基本结果及其与最优控制问题的联系。

2、本章介绍了 LQR、LQG 问题与 H_2 最优控制问题的关系，从另一个角度考察了

LQR、LQG 问题，并且可以比较容易得到公式来描述系统的频域特性。

3、本章介绍了 H_∞ 控制理论中 H_∞ 标准问题的提法，并简单介绍了鲁棒稳定问题和鲁棒性能问题与 H_∞ 标准问题的联系，以及如何将上述两个问题简化为 H_∞ 标准问题来求解。

4、本章介绍了线性定常系统的 H_∞ 最优和次优控制问题的解法及其解存在时系统方程应满足的条件。

11.6 习题

1. 给定系统

$$\dot{x}(t) = -3x(t) + 2w(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

试求该系统的 2-范数和 ∞ -范数。

2. 给定系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

试求该系统的 2-范数和 ∞ -范数。

3. 二自由度控制系统问题。

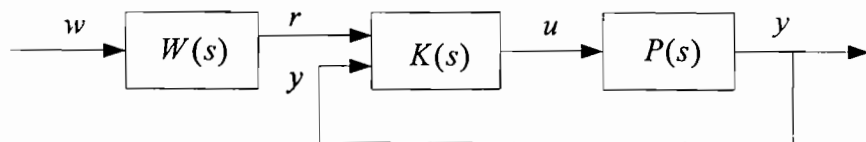


图 11-10 二自由度控制系统框图

一般二自由度控制系统的结构图如图 11-10 所示。二自由度控制系统的特点

是：通过将参考输入直接前馈到控制输入端来加快信号跟踪响应。图中 w 为干扰信号， r 为参考输入信号， y 为输出信号，且 r, y 可量测， w 为干扰信号， $P(s)$ 为被控对象， $K(s)$ 为二自由度控制器， u 为控制输入，且满足 $u = K(s) \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix}$ 。

现在的控制目的是尽量减小系统的跟踪误差，试通过合理的选择输入输出变量，将二自由度控制系统转化为 H_∞ 标准问题，使得系统可通过求解 H_∞ 标准问题得到理想的控制器 $K(s)$ 。

4. 鲁棒干扰抑制问题。

设被控对象由状态方程

$$\dot{x} = Ax + \Delta Ax + B_1 w + B_2 u$$

描述。其中， u 表示控制输入， w 表示有界干扰，且对于任意的 $T > 0$ 是平方可积的。假设不确定性函数向量 ΔA 属于某一给定的集合 Ω 。

试设计适当的反馈控制律 $u = Kx$ ，使得 $x = 0$ 是系统的渐进稳定平衡点；同时，当有干扰 w 作用时，尽可能减少由干扰引起的状态调节误差。

（提示：选择如下的性能准则：

$$\max_{\Delta A \in \Omega} \int_0^T [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(t) w(t) dt, \quad \forall w(t) \in L_2[0, T)$$

其中 $\gamma > 0$ 表示系统的干扰抑制能力， $Q > 0, R \geq 0$ 分别为加权阵，不难找到 M, N ，

使得 $Q = M^T M, R = N^T N$ ，定义性能评价信号 $z = \begin{bmatrix} Mx \\ Nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} u$ ，由此得

到性能准则：

$$\int_0^T z^T(t) z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(t) w(t) dt, \quad \forall w(t) \in L_2[0, T)$$

由此通过本章所介绍的线性定常系统 H_∞ 最优控制问题的求解方法进行求解。

第十二章 用 MATLAB 解最优控制问题及应用实例

MATLAB 是集数值运算、符号运算及图形处理等强大功能于一体的科学计算语言。作为强大的科学计算平台，它几乎能满足所有的计算需求。MATLAB 具有编程方便、操作简单、可视化界面、优良的仿真图形环境、丰富的多学科工具箱等优点，尤其是在自动控制领域中 MATLAB 显示出更为强大的功能。

最优控制是在一定的约束条件下，从已给定的初始状态出发，确定最优控制作用的函数式，使目标函数为极小或极大。在设计最优控制器的过程中，运用 MATLAB 最优控制设计工具，会大大减小设计的复杂性。

在前面的几章中，我们已经介绍了一些最优控制方法，在本章中我们将介绍一个最优控制问题的应用实例，讨论如何使用最优控制方法来设计自寻的制导导弹的最优导引律，并采用 MATLAB 工具实现最优导引律，通过仿真来验证最优导引律的有效性。

12.1 MATLAB 工具简介

1. 系统模型的建立

系统的状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

在 MATLAB 中只需要将各个系数按照常规矩阵的方式输入到工作空间即可

$$A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}]$$

$$B = [b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1p}; b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2p}; \dots; b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{np}]$$

$$C = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}; c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}; \dots; c_{q1}, c_{q2}, \dots, c_{qn}]$$

$$D = [d_{11}, d_{12}, \dots, d_{1p}; d_{21}, d_{22}, \dots, d_{2p}; \dots; d_{q1}, d_{q2}, \dots, d_{qp}]$$

$$\text{ss}(A, B, C, D)$$

传递函数的零极点模型为：

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

在 MATLAB 中可以采用如下语句将零极点模型输入到工作空间:

```
KGain = K;
Z = [z1; z2; ...; zm];
P = [p1; p2; ...; pn];

zpk(Z,P,KGain)
```

传递函数模型在更一般的情况下, 可以表示为复数变量 s 的有理函数形式:

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

在 MATLAB 中可以采用如下语句将以上的传递函数模型输入到工作空间:

```
num = [b1, b2, ..., bm, bm+1];
den = [1, a1, a2, ..., an-1, an];

G=tf(num,den);
```

2, 系统模型的转换

把其他形式转换成状态方程模型

```
G1=ss(G)
```

把其他形式转换成零极点模型

```
G1=zpk(G)
```

把其他形式转换成一般传递函数模型

```
G1=tf(G)
```

3, 系统稳定性判据

求出系统所有的极点, 并观察系统是否有实部大于 0 的极点。

系统由传递函数 (num,den) 描述

```
roots(den)
```

系统由状态方程 (A,B,C,D) 描述

```
eig(A)
```

4, 系统的可控性与可观测性分析

在 MATLAB 的控制系统工具箱中提供了 ctrb() 函数。该函数可以求出系统的可控阶梯变换, 该函数的调用格式为:

$$[Ac, Bc, Cc, Dc, Tc, Kc] = ctrbf(A, B, C)$$

在 MATLAB 的控制系统工具箱中提供了 obsvf() 函数。该函数可以求出系统的可观测阶梯变换，该函数的调用格式为：

$$[Ao, Bo, Co, Do, To, Ko] = obsvf(A, B, C)$$

5, 系统的时域分析

对于系统的阶跃响应，控制系统工具箱中给出了一个函数 step() 来直接求取系统的阶跃响应，该函数的可以有如下格式来调用：

$$y = \text{step}(G, t)$$

对于系统的脉冲响应，控制系统工具箱中给出了一个函数 impulse() 来直接求取系统的脉冲响应，该函数的可以有如下格式来调用：

$$y = \text{impulse}(G, t)$$

6, 系统的复域与频域分析

对于根轨迹的绘制，控制系统工具箱中给出了一个函数 rlocus() 函数来绘制系统的根轨迹，该函数的可以由如下格式来调用：

$$R = \text{rlocus}(G, k)$$

对于 Nyquist 曲线的绘制，控制系统工具箱中给出了一个函数 nyquist() 函数，该函数可以用来直接求解 Nyquist 阵列，绘制出 Nyquist 曲线，该函数的可以由如下格式来调用：

$$[rx, ry] = \text{nyquist}(G, w)$$

对于 Bode 图，MATLAB 控制工具箱中提供了 bode() 函数来求取、绘制系统的 Bode 图，该函数可以由下面的格式来调用

$$[mag, pha] = \text{bode}(G, w)$$

12.2 用 MATLAB 解线性二次型最优控制问题

一般情况的线性二次问题可表示如下：

设线性时变系统的方程为

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

$$Y(t) = C(t)X(t)$$

其中, $X(t)$ 为 n 维状态向量, $U(t)$ 为 m 维控制向量, $Y(t)$ 为 l 维输出向量。

寻找最优控制, 使下面的性能指标最小

$$J(u) = \frac{1}{2} e^T(t_f) P e(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) Q(t) e(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt$$

其中, P 是 $l \times l$ 对称半正定常数阵, $Q(t)$ 是 $l \times l$ 对称半正定阵, $R(t)$ 是 $m \times m$ 对称正定阵。

我们用最小值原理求解上述问题, 可以把上述问题归结为求解如下黎卡提 (Riccati) 矩阵微分方程:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t)$$

可以看出, 上述的黎卡提矩阵微分方程求解起来非常困难, 所以我们往往求出其稳态解。例如目标函数中指定终止时间可以设置成 $t_f \rightarrow \infty$, 这样可以保证系统状态渐进的趋近于零值, 这样可以得出矩阵 $K(t)$ 趋近于常值矩阵, 且 $\dot{K}(t) = 0$, 这样上述黎卡提矩阵微分方程可以简化成为:

$$-K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - Q(t) = 0$$

这个方程称为代数黎卡提方程。代数黎卡提方程的求解非常简单, 并且其求解只涉及到矩阵运算, 所以非常适合使用 MATLAB 来求解。

方法一:

求解代数黎卡提方程的算法有很多, 下面我们介绍一种简单的迭代算法来解该方程, 令 $\Phi_0 = 0$, 则可以写出下面的迭代公式

$$\Phi_{i+1} = E^T \Phi_i E - (E^T \Phi_i G + W) (G^T \Phi_i G + H)^{-1} (E^T \Phi_i G + W) + Q$$

$$E = (I - A)^{-1} (I + A),$$

$$G = 2(I - A)^{-1} B,$$

$$H = R + B^T (I - A^T)^{-1} Q (I - A)^{-1} B,$$

$$W = Q(I - A)^{-1} B$$

如果 Φ_{i+1} 收敛于一个常数矩阵, 即 $\|\Phi_{i+1} - \Phi_i\| < \varepsilon$, 则可以得出代数黎卡提方

程的解为：

$$P = 2(I - A^T)^{-1} \Phi_{i+1} (I - A)^{-1}$$

上面的迭代算法可以用 MATLAB 来实现：

```
%*****MATLAB 程序*****%
I=eye(size(A));
iA=inv(I-A);
E=iA*(I+A);
G=2*iA^2*B;
H=R+B'*iA'*Q*iA*B;
W=Q*iA*B;
P0=zeros(size(A));
i=0;
while(1),i=i+1;
    P=E'*P0*E-(E'*P0*G+W)*inv(G'*P0*G+H)*(E'*P0*G+W)'+Q;
    if(norm(P-P0)<eps),break;
    else,P0=P;
end
end
P=2*iA'*P*iA;
```

我们把这个文件命名为 mylq.m，方便我们以后调用来求解代数黎卡提方程。

方法二：

在 MATLAB 的控制系统工具箱中提供了求解代数黎卡提方程的函数 lqr()，其调用的格式为：

$$[K,P,E] = \text{lqr}(A,B,Q,R)$$

式中输入矩阵为 A,B,Q,R，其中(A,B)为给定的对象状态方程模型，(Q,R)分别为加权矩阵 Q 和 R；返回矩阵 K 为状态反馈矩阵，P 为代数黎卡提方程的解，E 为闭环系统的零极点。

这里的求解是建立在 MATLAB 的控制系统工具箱中给出的一个基于 Schur 变换的黎卡提方程求解函数 are()基础上的，该函数的调用格式为：

$$X = \text{are}(M, T, V)$$

其中, M, T, V 矩阵满足下列代数黎卡提方程, are 是 Algebraic Riccati Equation 的缩写。

$$MX + XM^T - XTX + V = 0$$

对比前面给出的黎卡提方程, 可以容易得出

$$M = -A$$

$$T = BR^{-1}B^T$$

$$V = -Q$$

方法三:

我们也可以采用 `care()` 函数对连续时间代数黎卡提方程求解, 其调用方法如下:

$$[P, E, K, RR] = \text{care}(A, B, Q, R, \text{zeros}(\text{size}(B)), \text{eye}(\text{size}(A)))$$

式中输入矩阵为 A, B, Q, R , 其中 (A, B) 为给定的对象状态方程模型, (Q, R) 分别为加权矩阵 Q 和 R ; 返回矩阵 P 为代数黎卡提方程的解, E 为闭环系统的零极点, K 为状态反馈矩阵, RR 是相应的留数矩阵 Res 的 Frobenius 范数 (其值为: $\sqrt{\text{sum}(\text{diag}(\text{Res}' * \text{Res}))}$), 或者用 $\text{Norm}(\text{Res}, 'fro')$ 计算)。

采用 `care` 函数的优点在于可以设置 P 的终值条件, 例如我们可以在下面的程序中设置 P 的终值条件为 $[0.2; 0.2]$ 。

$$[P, E, K, RR] = \text{care}(A, B, Q, R, [0.2; 0.2], \text{eye}(\text{size}(A)))$$

采用 `lqr()` 函数不能设置代数黎卡提方程的边界条件。

例 12-1 线性系统为: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$, 其目标函数是:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ x^T \begin{bmatrix} 500 & 200 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} x + u^T [1.6667] u \right\} dt$$

确定最优控制。

解:

方法一:

$$A = [0 \ 1; -5, -3];$$

```

B=[0;1];
Q=[500 200;200 100];
R=1.6667;
mylq
K=inv(R)*B'*P
P
E

```

运行结果:

```

K = 13.0276    6.7496
P = 67.9406    21.7131
    21.7131    11.2495
E = -0.1111    0.2222
    -1.1111   -0.7778

```

方法二:

```

A=[0 1;-5,-3];
B=[0;1];
Q=[500 200;200 100];
R=1.6667;
[K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)

```

运行结果:

```

K = 13.0276    6.7496
P = 67.9406    21.7131
    21.7131    11.2495
E = -7.2698
    -2.4798

```

方法三:

```

A=[0 1;-5,-3];
B=[0;1];

```

```
Q=[500 200;200 100];
```

```
R=1.6667;
```

```
[P,E,K,RR]=care(A,B,Q,R,zeros(size(B)),eye(size(A)))
```

运行结果:

```
P = 67.9406    21.7131
```

```
    21.7131    11.2495
```

```
E = -7.2698
```

```
    -2.4798
```

```
K =13.0276    6.7496
```

```
RR = 2.8458e-015
```

以上的三种方法的运行结果相同。我们可以得到，最优控制变量与状态变量之间的关系：

$$u^*(t) = -13.0276x_1(t) - 6.7496x_2(t)$$

在以上程序的基础上，可以得到在最优控制的作用下的最优控制曲线与最优状态曲线，其程序如下：

```
%*****MATLAB 程序*****%
```

```
figure('pos',[50,50,200,150],'color','w');
```

```
axes('pos',[0.15,0.14,0.72,0.72])
```

```
ap=[A-B*K];
```

```
bp=B;
```

```
C=[1,0];
```

```
D=0;
```

```
[ap,bp,cp,dp]=augstate(ap,bp,C,D);
```

```
cp=[cp;-K];
```

```
dp=[dp;0];
```

```
G=ss(ap,bp,cp,dp);
```

```
[y,t,x]=step(G);
```

```
plotyy(t,y(:,2:3),t,y(:,4))
```



```
[ax,h1,h2]=plotyy(t,y(:,2:3),t,y(:,4));
axis(ax(1),[0 2.5 0 0.1]),axis(ax(2),[0 2.5 -1 0])
```

运行结果:

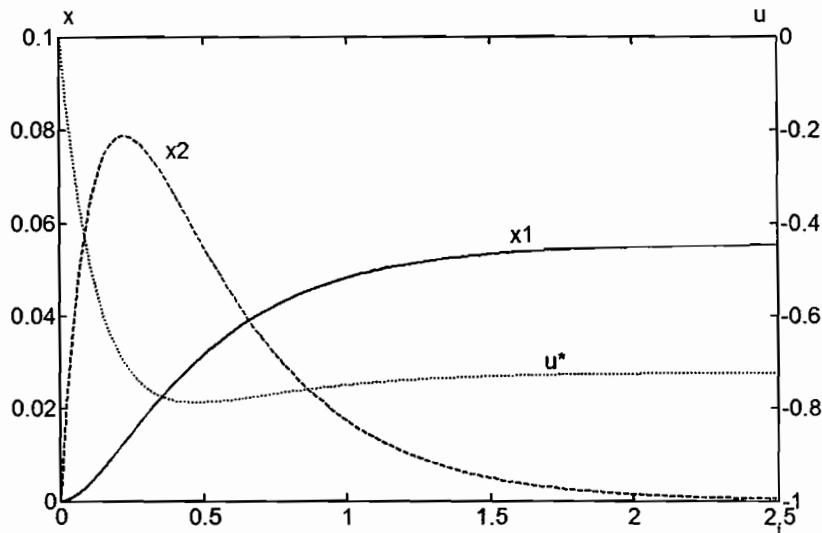


图 12-1 最优控制曲线与最优状态曲线

该程序采用 `augstate` 函数将状态变量作为输出变量，用于显示；输出项作为最优控制的输出。因此，阶跃响应输出 y 中， $y(1)$ 是系统输出， $y(2)$ 和 $y(3)$ 是状态变量输出， $y(4)$ 是系统控制变量输出。用 `plotyy` 函数进行双坐标显示，并设置相应的坐标范围。

以上三种方法中，第一种方法易于理解黎卡提方程的解法，其解法简单但是并不可靠。第二种方法比起另两种方法使用方便，不易出错，所以我们推荐使用这种方法。但是采用 `lqr()` 函数不能设置代数黎卡提方程的边界条件，所以，如果题目设置了 P 的终值条件，我们只能使用第三种方法来求解，例如设置 P 的终值条件为 $[0.2; 0.2]$ 。

程序如下：

```
%*****MATLAB 程序*****%
A=[0 1;-5,-3];
B=[0;1];
Q=[500 200;200 100];
R=1.6667;
```

[P,E,K,RR]=care(A,B,Q,R,[0.2;0.2],eye(size(A)))

运行结果:

P=67.7233 21.5685

21.5685 11.0961

E=-7.3052

-2.4723

K=13.0608 6.7775

RR=1.2847e-014

最优控制变量与状态变量之间的关系:

$$\dot{u}^*(t) = -13.0608x_1(t) - 6.7775x_2(t)$$

例 12-2 无人飞行器的最优高度控制，飞行器的控制方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} u(t)$$

$h(t)$ 是飞行器的高度； $u(t)$ 是油门输入；设计控制律使得如下指标最小

$$J[x(t), u(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [h(t), \dot{h}(t), \ddot{h}(t)] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \\ \ddot{h}(t) \end{bmatrix} + 2u^2(t) \right\} dt$$

初始状态 $[h(t), \dot{h}(t), \ddot{h}(t)] = [10, 0, 0]^T$ 。绘制系统状态与控制输入，对如下给定的 Q R 矩阵进行仿真分析。

$$\text{a). } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2000$$

$$b). Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2$$

$$c). Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 2$$

解：线性二次型最优控制指标如下：

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

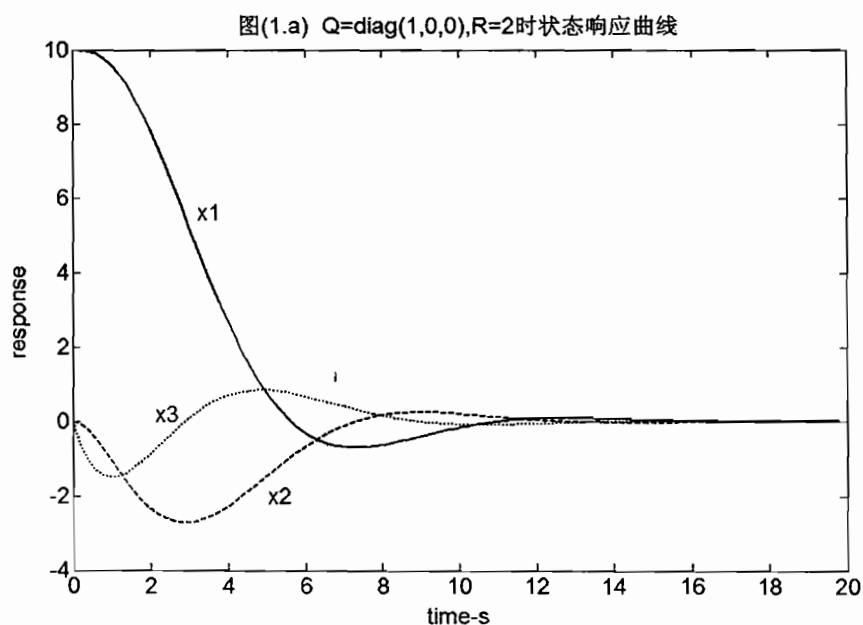
其中 Q 和 R 分别是对状态变量和控制量的加权矩阵，

线性二次型最优控制器设计如下：

1)、 $Q = \text{diag}(1, 0, 0)$, $R = 2$ 时，由 MATLAB 求得最优状态反馈矩阵为

$k1 = [0.7071 \quad 2.0772 \quad 2.0510]$, $\therefore u(t) = -k1 * x(t)$;

所画状态响应曲线及控制输入响应曲线如下图 12-2 所示：



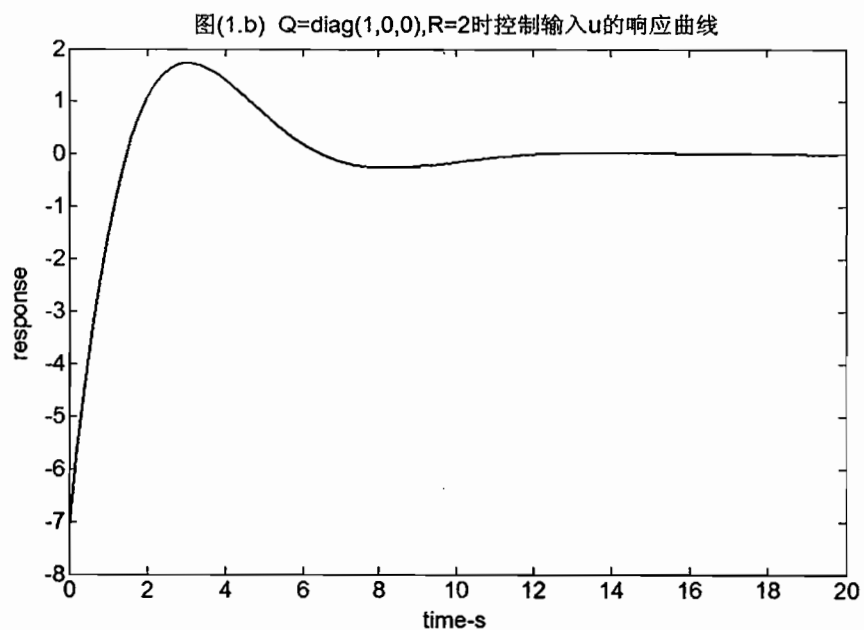
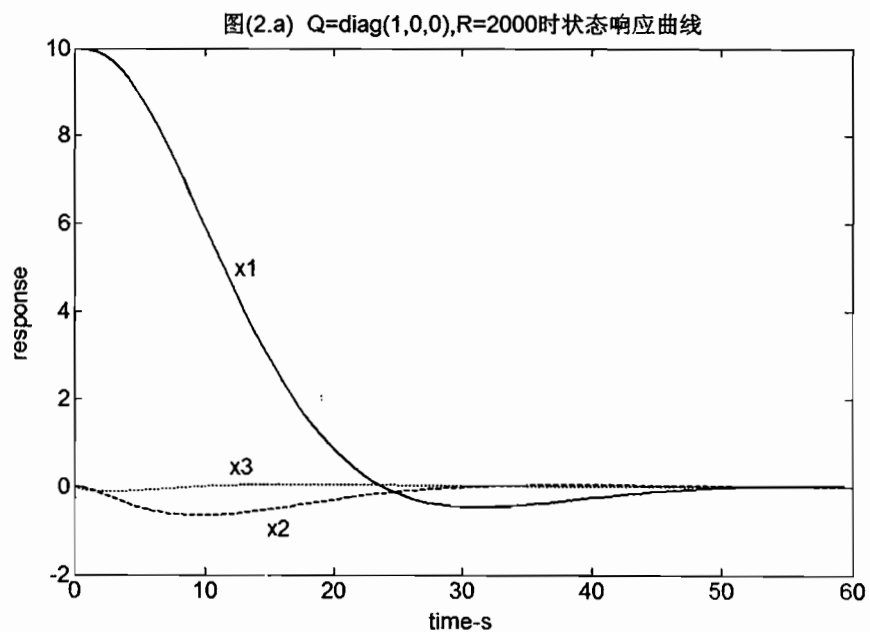


图 12-2 状态响应曲线及控制输入响应曲线

2)、 $Q=\text{diag}(1, 0, 0)$, $R=2000$ 时, 由 MATLAB 求得最优状态反馈矩阵为
 $k_2=[0.0224 \quad 0.2517 \quad 0.4166]$, $\dot{u}(t) = -k_2 \cdot x(t)$;

所画状态响应曲线及控制输入响应曲线如下图 12-3 所示:



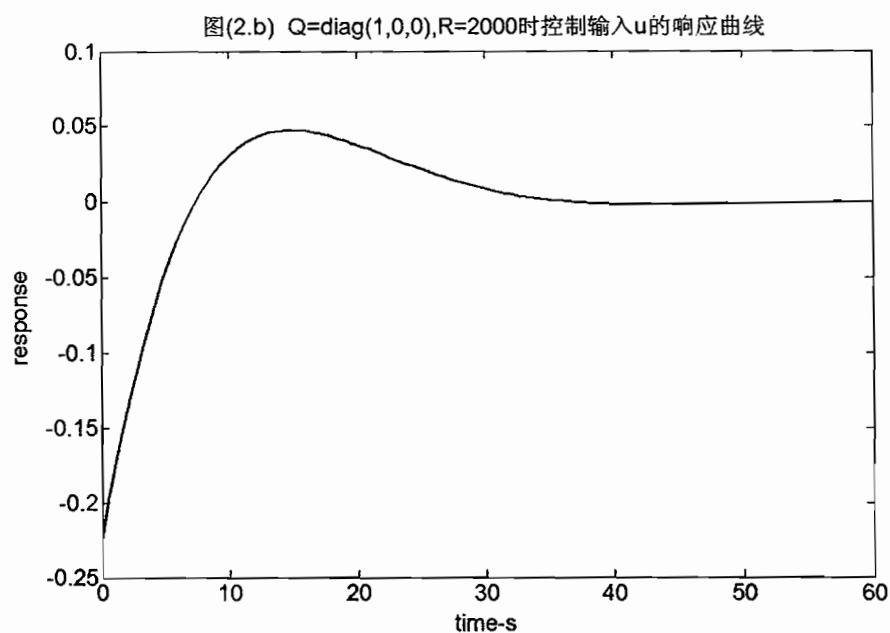
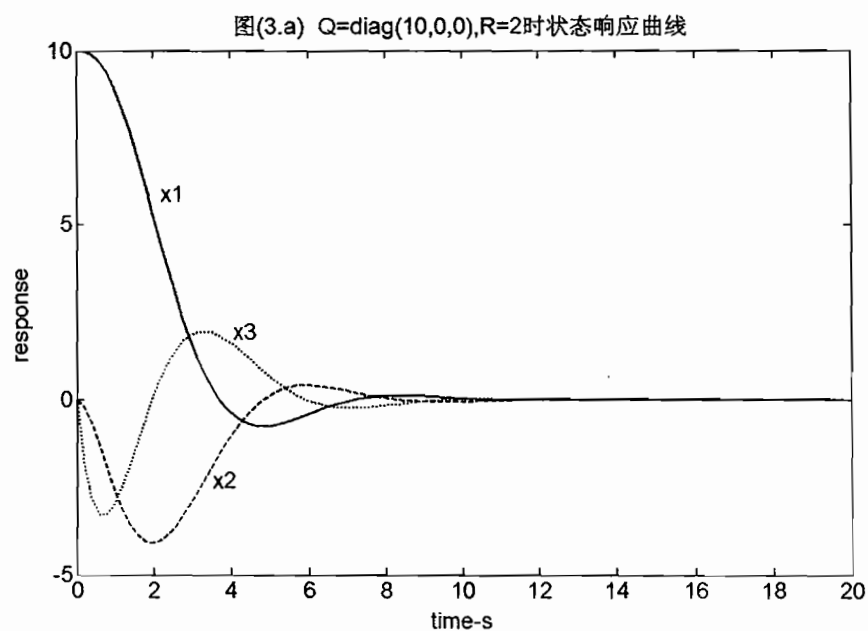


图 12-3 状态响应曲线及控制输入响应曲线

3)、 $Q=\text{diag}(10, 0, 0)$, $R=2$ 时, 由 MATLAB 求得最优状态反馈矩阵为 $k_3=[2.2361 \quad 4.3892 \quad 3.3077]$, $\therefore u(t) = -k_3 \cdot x(t)$;

所画状态响应曲线及控制输入响应曲线如下图 12-4 所示:



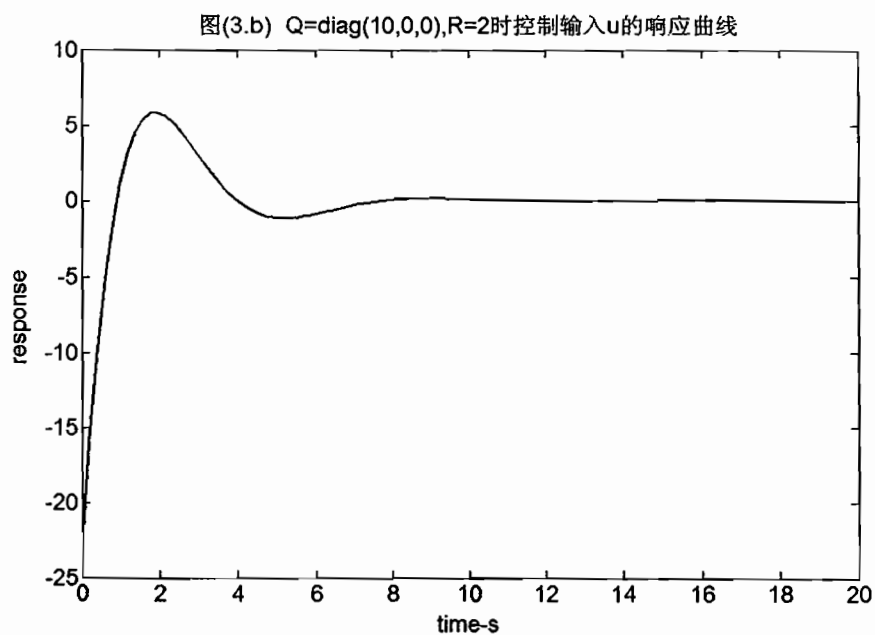
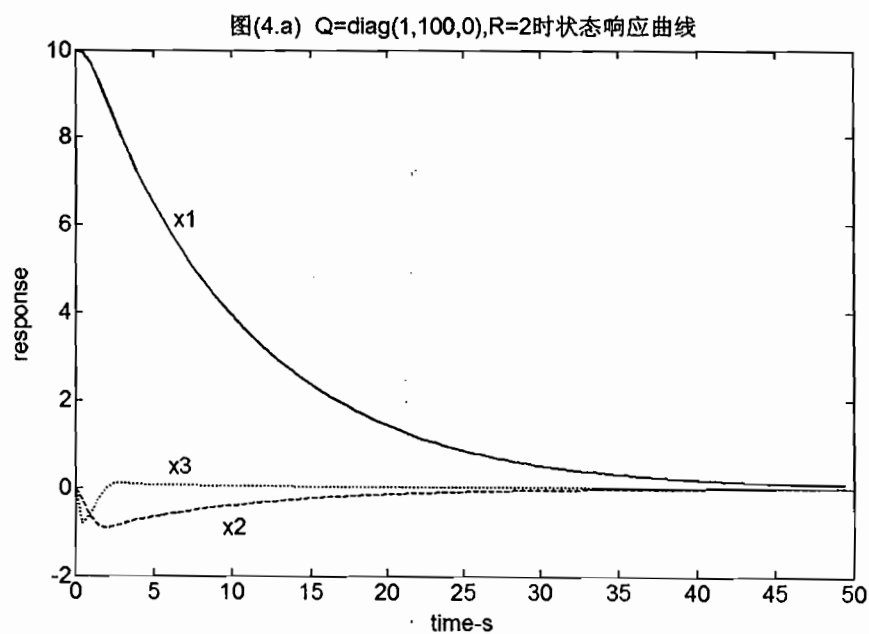


图 12-4 状态响应曲线及控制输入响应曲线

4)、 $Q=\text{diag}(1, 100, 0)$, $R=2$ 时, 由 MATLAB 求得最优状态反馈矩阵为 $k_4=[0.7071 \quad 7.6112 \quad 4.6076]$, $\therefore \dot{u}(t) = -k_4 \cdot x(t)$;

所画状态响应曲线及控制输入响应曲线如下图 12-5 所示:



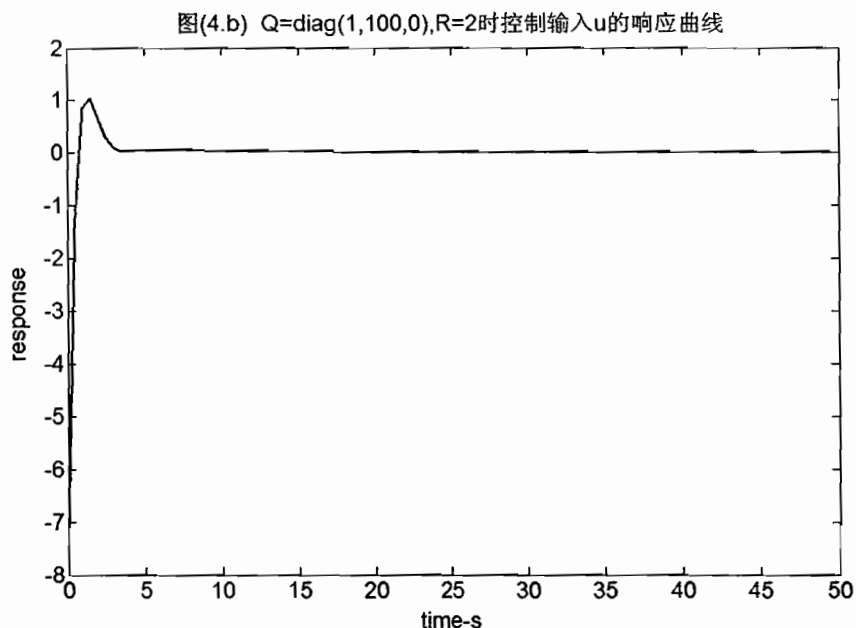


图 12-5 状态响应曲线及控制输入响应曲线

∴ 由 1), 2), 3), 4) 可分析如下:

图 12-3 与图 12-2 相比, 当 Q 不变, R 增大时, 各相应曲线达到稳态所需时间增长, 即响应变慢; 但波动幅值变小, 反馈矩阵变小;

图 12-4 与图 12-2 和图 12-3 相比, 当 Q 对角线上第 1 个元素增大时, 各相应曲线达到稳态所需时间变短, 即响应快; 但波动幅值变大, 反馈矩阵增大;

由图 12-5 可知, 当 Q 对角线上第 2 个元素增大时, 状态 x_1, x_2 曲线达到稳态所需时间较长, 即响应较慢, 平缓的趋于零; 状态 x_3 , 控制输入 u 达到稳态所需时间短, 即响应快; 状态 x_2, x_3 波动幅值较小, 比图 12-2 和图 12-4 小, 比图 12-3 稍大, 控制输入 u 波动幅值比图 12-2 和图 12-4 小, 比图 12-3 大; 反馈矩阵最大。

综上所述可得结论: $Q=\text{diag}(1, 0, 0)$, $R=2$ 时, 系统各方面响应较好。矩阵 Q 变大时, 反馈矩阵变大;

当 Q 的对角线上第 1 个元素变大时, 各曲线波动幅值变大, 达到稳态所需时间变短;

当 Q 的对角线上第 2 个元素变大时, 各曲线波动幅值变小; 达到稳态所需时间, 状态 x_1, x_2 增长, 状态 x_3 , 控制输入 u 变短;

当 R 变大时, 反馈矩阵变小; 各曲线波动幅值变小; 达到稳态所需时间变长。

所以根据实际的系统允许，我们应该适当选择 Q 和 R。

```
%*****MATLAB 程序*****%  
a=[0 1 0;0 0 1;0 0 -1/2];b=[0;0;1/2];c=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];d=[0;0;0];  
figure(1)  
q=[1 0 0;0 0 0;0 0 0];  
r=2;  
[k,p,e]=lqr(a,b,q,r)  
x0=[10;0;0];  
a1=a-b*k;  
[y,x]=initial(a1,b,c,d,x0,20);  
n=length(x(:,3));  
T=0:20/n:20-20/n;  
plot(T,x(:,1),'black',T,x(:,2),'red',T,x(:,3),'green');  
xlabel('time-s');ylabel('response');  
title('图(1.a) Q=diag(1,0,0),R=2 时状态响应曲线')  
grid,hold on  
for j=1:n  
    u(j,:)=-k*(x(j,:));  
end  
figure(2)  
plot(T,u);xlabel('time-s');ylabel('response');  
title('图(1.b) Q=diag(1,0,0),R=2 时控制输入 u 的响应曲线')  
grid,hold on  
%*****  
figure(3)  
qa=[1 0 0;0 0 0;0 0 0];  
ra=2000;  
[ka,pa,ea]=lqr(a,b,qa,ra)  
x0=[10;0;0];  
aa1=a-b*ka;
```



```

[ya,xa]=initial(aa1,b,c,d,x0,60);
na=length(xa(:,3));
Ta=0:60/na:60-60/na;
plot(Ta,xa(:,1),'black',Ta,xa(:,2),'red',Ta,xa(:,3),'green');
xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(2.a) Q=diag(1,0,0),R=2000 时状态响应曲线')
grid,hold on
for j=1:na
    ua(j,:)=-ka*(xa(j,:));
end
figure(4)
plot(Ta,ua);xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(2.b) Q=diag(1,0,0),R=2000 时控制输入 u 的响应曲线')
grid,hold on
%%%*****
figure(5)
qb=[1 0 0 0;0 0 0;0 0 0];
rb=2;
[kb,pb,eb]=lqr(a,b,qb,rb)
x0=[10;0;0];
ab1=a-b*kb;
[yb,xb]=initial(ab1,b,c,d,x0,20);
nb=length(xb(:,3));
Tb=0:20/nb:20-20/nb;
plot(Tb,xb(:,1),'black',Tb,xb(:,2),'red',Tb,xb(:,3),'green');
xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(3.a) Q=diag(10,0,0),R=2 时状态响应曲线')
grid,hold on
for j=1:nb
    ub(j,:)=-kb*(xb(j,:));

```

```

end

figure(6)
plot(Tb,ub);xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(3.b)  $Q=\text{diag}(10,0,0)$ ,  $R=2$  时控制输入  $u$  的响应曲线')
grid,hold on
%%%*****

figure(7)
qc=[1 0 0;0 100 0;0 0 0];
rc=2;
[kc,pc,ec]=lqr(a,b,qc,rc)
x0=[10;0;0];
ac1=a-b*kc;
[yc,xc]=initial(ac1,b,c,d,x0,50);
nc=length(xc(:,3));
Tc=0:50/nc:50-50/nc;
plot(Tc,xc(:,1),'black',Tc,xc(:,2),'red',Tc,xc(:,3),'green');
xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(4.a)  $Q=\text{diag}(1,100,0)$ ,  $R=2$  时状态响应曲线')
grid,hold on
for j=1:nc
    uc(j,:)=-kc*(xc(j,:))';
end

figure(8)
plot(Tc,uc);xlabel('time-s');ylabel('response');
title('图(4.b)  $Q=\text{diag}(1,100,0)$ ,  $R=2$  时控制输入  $u$  的响应曲线')
grid,hold on

```

12.3 用 MATLAB 解最优控制问题应用实例

在现有的自寻的导弹中，大都采用比例导引法。假设导弹和目标在同一平面内运动，按比例导引制导律，假设导弹的速度向量的旋转角速度 $\dot{\theta}$ 垂直于瞬时的弹目视线，并且正比于导弹与目标之间的视线角速率 \dot{q} ，假设目标的法向加速度为零，那么可得：

$$\dot{\theta} = N\dot{q} \quad (12-1)$$

其中， θ 为导弹的速度与基准方向的夹角， q 为导弹与目标连线与基准方向的夹角，称为视线角， \dot{q} 是视线角速率， N 是比例常数，称为导航比，通常为 3~6。比例导引的实质是使导弹向着 \dot{q} 减小的方向运动，抑制视线旋转，也就是使导弹的相对速度对准目标，保证导弹向着前置碰撞点飞行。

比例导引法是经典的导引方法。下面我们从最优控制理论的观点来研究自寻的导弹的最优导引规律问题。

12.3.1 导弹运动状态方程的建立

导弹与目标的运动关系是非线性的，如果把导弹与目标的运动方程相对于理想弹道线性化，可得导弹运动的线性状态方程。假设导弹和目标在同一平面内运动，如图 12-6 所示。选 oxy 为固定坐标。导弹速度向量 \vec{V}_M 与 oy 轴成 θ 角，目标速度向量为 \vec{V}_T 与 oy 轴成 θ_T 角。导弹与目标的连线 MT 与 oy 轴成 q 角。假定导弹以尾追的方式攻击目标。坐标轴 ox 和 oy 的方向可以任意选择，使 θ, θ_T 和 q 都比较小。再假定导弹和目标均匀速飞行，也就是说 V_M 和 V_T 均为恒值。使用相对坐标状态变量，设 x 为导弹与目标在 ox 轴方向上的距离偏差， y 为导弹与目标在 oy 轴方向上的距离偏差，即

$$\left. \begin{aligned} x &= x_T - x_M \\ y &= y_T - y_M \end{aligned} \right\} \quad (12-2)$$

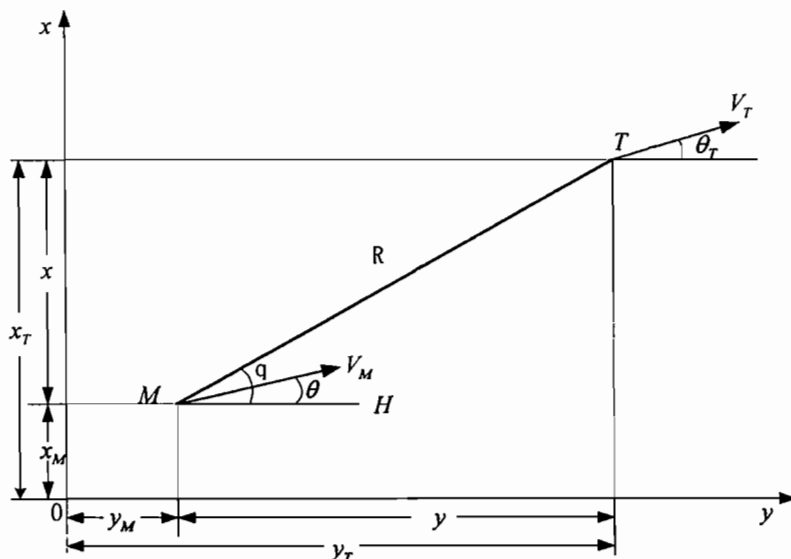


图 12-6 导弹和目标运动几何关系图

将上式对 t 求导，并根据导弹和目标的关系（如图 12-6 所示）可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_T - \dot{x}_M = V_T \sin \theta_T - V_M \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T \cos \theta_T - V_M \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (12-3)$$

假定 θ 和 θ_T 比较小，因此 $\sin \theta_T \approx \theta_T$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta_T \approx 1$, $\cos \theta \approx 1$ ，则

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_T - \dot{x}_M = V_T \theta_T - V_M \theta \\ \dot{y} &= \dot{y}_T - \dot{y}_M = V_T - V_M \end{aligned} \right\} \quad (12-4)$$

以 x_1 表示 x ， x_2 表示 \dot{x} （即 \dot{x}_1 ），则

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (12-5)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = V_T \dot{\theta}_T - V_M \dot{\theta} \quad (12-6)$$

式中 $V_T \dot{\theta}_T$ 表示目标的横向加速度， $V_M \dot{\theta}$ 表示导弹横向加速度，分别以 a_T 和 a_M 表示，那么

$$\dot{x}_2 = a_T - a_M \quad (12-7)$$

导弹的横向加速度 a_M 为一控制量。一般将控制信号加给舵机，舵面偏转后产生弹体攻角 α ，而后产生横向加速度 a_M 。如果忽略舵机和弹体的惯性，而且假设控制量的单位与加速度单位相同，则可用控制量 u 来表示 $-a_M$ ，也就是令

$$u = -a_M \quad (12-8)$$

所以(12-7)式为:

$$\dot{x}_2 = a_T + u \quad (12-9)$$

这样可得导弹运动状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (12-10)$$

$$\dot{x}_2 = u + a_T \quad (12-11)$$

可写成矩阵的形式:

$$\dot{X} = AX + Bu + Da_T \quad (12-12)$$

式中,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12-13)$$

如果不考虑目标的机动, 即 $a_T = 0$, 则在这种情况下, 式(12-12)变成:

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (12-14)$$

下面来考虑(12-4)式, 该式可写成

$$\dot{y} = -(V_M - V_T) \quad (12-15)$$

其中 $V_M - V_T = V_C$ 表示导弹相对目标的接近速度。由于 q, θ 和 θ_T 的值都比较小, y 可近似表示导弹与目标之间的距离。设 t_f 为导弹与目标的遭遇时刻(即导弹与目标相碰撞或两者之间的距离为最短的时刻), 则在某一瞬时 t , 导弹与目标的距离 y 可近似用下式表示:

$$y(t) = (V_M - V_T)(t_f - t) = V_C(t_f - t) \quad (12-16)$$

又考虑到对于导弹制导来说, 最基本的要求是脱靶量越小越好, 因此, 应该选择最优控制量 u , 使得下面的指标函数为最小。

$$J = [x_T(t_f) - x_M(t_f)]^2 + [y_T(t_f) - y_M(t_f)]^2 \quad (12-17)$$

然而, 当要求一个反馈形式的控制时, 按上式列出的问题很难求解。所以我们以 $t = t_f$ 时刻, 即 $y(t_f) = V_C(t_f - t_f) = 0$ 时的 $x_1(t_f)$ 值作为脱靶量, 要求 $x_1(t_f)$ 值越小越好。另外, 由于舵偏角受到限制, 导弹结构能够承受的最大载荷也受到限

制，所以控制信号 u 也应该受到限制。因此，我们选择以下形式的二次型指标函数：

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (12-18)$$

式中

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12-19)$$

即

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} R u^2 dt \quad (12-20)$$

给定初始条件 $X(t_0)$ ，应用最优控制理论，可以求出使 J 为最小的 u 。

由于系统是线性的，指标函数是二次型的，因此，求最优控制规律就可以认为是一个求解线性二次型的过程。

对于线性二次型问题，可采用变分法、极小值原理、动态规划或其他方法求得最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K X \quad (12-21)$$

式中 K 满足下列黎卡提矩阵微分方程

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - Q \quad (12-22)$$

K 的终端条件为

$$K(t_f) = C \quad (12-23)$$

因此求解线性二次型问题的关键是求解黎卡提矩阵微分方程。

12.3.2 最优导引律的求解与仿真实验验证

当不考虑弹体惯性时，而且假定目标不机动，即 $a_T = 0$ ，导弹运动状态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (12-24)$$

指标函数为

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) C X(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (X^T Q X + u^T R u) dt \quad (12-25)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

给出 $t = t_0$ 时刻, x_1 和 x_2 的初值 $x_1(t_0)$ 和 $x_2(t_0)$, 采用极小值原理可求得最优

控制 $u^*(t)$ 为

$$u^*(t) = \frac{\left(c_1(t_f - t) + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^2}{2R} \right) x_1 + \left(c_2 + c_1(t_f - t)^2 + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^3}{3R} \right) x_2}{R \left(1 + \frac{c_2(t_f - t)}{R} + \frac{c_1(t_f - t)^3}{3R} + \frac{c_1 c_2 (t_f - t)^4}{12R^2} \right)} \quad (12-26)$$

在指标函数中, 如不考虑导弹的相对运动速度 x_2 项, 则可令 $c_2 = 0$ 。 $u^*(t)$ 变成

$$u^*(t) = - \frac{c_1(t_f - t)x_1 + c_1(t_f - t)^2 x_2}{R \left(1 + \frac{c_1(t_f - t)^3}{3R} \right)} \quad (12-27)$$

以 c_1 除上式的分子和分母, 得

$$u^*(t) = - \frac{3(t_f - t)x_1 + 3(t_f - t)^2 x_2}{\frac{3R}{c_1} + (t_f - t)^3} \quad (12-28)$$

为了使脱靶量为最小, 应选取 $c_1 \rightarrow \infty$, 则

$$u^*(t) = -3 \left[\frac{x_1}{(t_f - t)^2} + \frac{x_2}{t_f - t} \right]. \quad (12-29)$$

根据图 12-6 可得

$$tgq = \frac{x_1}{y} = \frac{x_1}{V_c(t_f - t)}.$$

当 q 比较小时, $tgq = q$, 则

$$q = \frac{x_1}{V_c(t_f - t)}, \quad (12-30)$$

$$\dot{q} = \frac{x_1 + (t_f - t)\dot{x}_1}{V_c(t_f - t)^2} = \frac{1}{V_c} \left[\frac{x_1}{(t_f - t)^2} + \frac{x_2}{t_f - t} \right] \quad (12-31)$$

将上式代入(12-29)式, 可得

$$u^*(t) = -3V_c \dot{q} \quad (12-32)$$

在上式中, u 的单位是加速度的单位米/秒²。把 u 与导弹速度向量 \vec{V}_D 的旋转角速度 $\dot{\theta}$ 联系起来, 则有

$$\begin{aligned} u &= -V_M \dot{\theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{3V_c}{V_M} \dot{q} \end{aligned} \quad (12-33)$$

从(12-32)和(12-33)式可以看出, 当不考虑弹体惯性时, 最优导引规律就是比例导引, 其导航比为 $3V_c/V_M$ 。这证明了比例导引是一种很好的导引方法。最优导引规律的形成可用图 12-7 来表示。

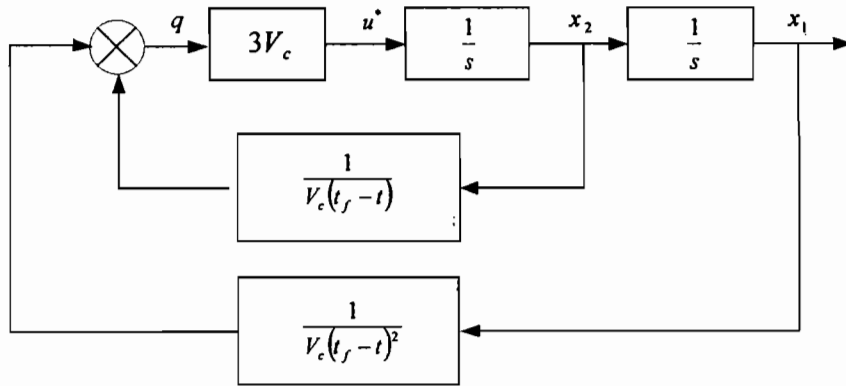


图 12-7 最优导引方框图

下面将对最优导引律进行 MATLAB 仿真, 并给出源代码和仿真结果。

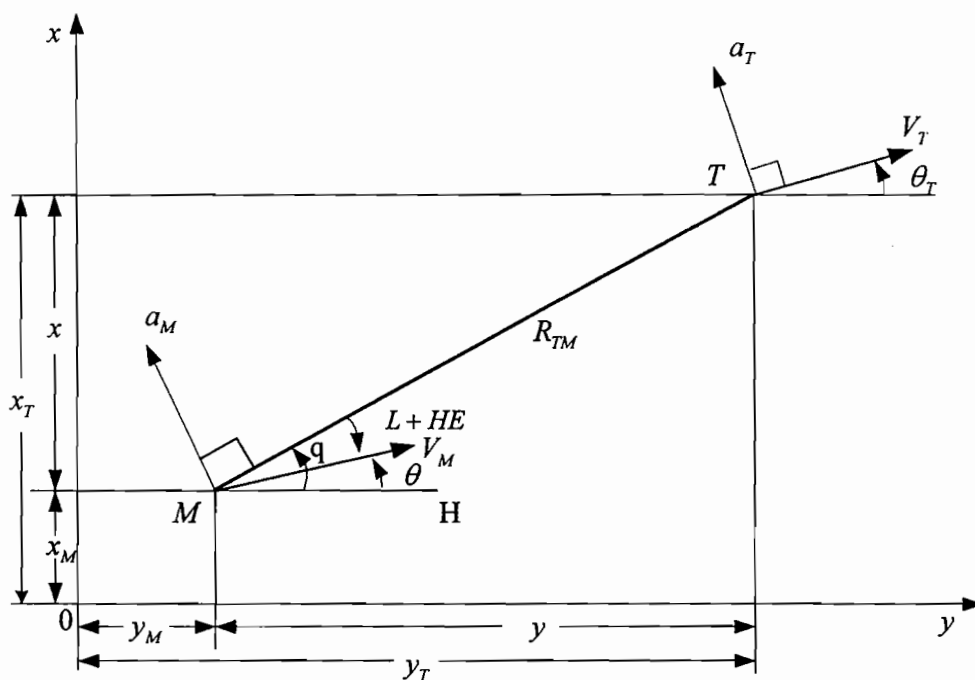


图 12-8 最优导引攻击几何平面

最优导引攻击几何关系如图 12-8 所示，在这里讨论的目标和导弹均认为是二维拦截几何平面上的质点，分别以速度 V_T 和 V_M 运动。导弹的初始位置为相对坐标系的参考点，导弹初始速度矢量指向目标的初始位置， a_M 为导弹的指令（垂直于视线）。

$$\text{其中: } \dot{\theta}_T = \frac{a_T}{V_T} \quad (12-34)$$

$$V_{Ty} = V_T \cos \theta_T \quad (12-35)$$

$$V_{Tx} = V_T \sin \theta_T \quad (12-36)$$

V_{Tx} , V_{Ty} 为目标速度在 x , y 轴上的分解， θ_T 是目标的角度。导弹和目标之间的接近速度为：

$$V_c = -\dot{R}_{TM} \quad (12-37)$$

目标的速度分量可由其位置变化得到：

$$\dot{R}_{Ty} = V_{Ty}, \dot{R}_{Tx} = V_{Tx} \quad (12-38)$$

同样地，我们可以得到导弹的位置和速度的微分方程：

$$\dot{V}_{Mx} = a_{Mx}, \quad \dot{V}_{My} = a_{My} \quad (12-39)$$

$$\dot{R}_{Mx} = V_{Mx}, \quad \dot{R}_{My} = V_{My} \quad (12-40)$$

上面几式中的下标 x, y 分别表示在 x 和 y 轴上的分量。 a_{Mx}, a_{My} 是导弹在地球坐标系的加速度分量。为了得到导弹的加速度分量, 我们必须得到弹目的相对位移:

$$R_{TMx} = R_{Tx} - R_{Mx} \quad (12-41)$$

$$R_{TMy} = R_{Ty} - R_{My} \quad (12-42)$$

从图 12-8 中, 根据三角关系我们可以得到视线角:

$$q = \tan^{-1} \frac{R_{TMx}}{R_{TMy}} \quad (12-43)$$

如果定义地球坐标系的速度分量为:

$$V_{TMx} = V_{Tx} - V_{Mx} \quad (12-44)$$

$$V_{TMy} = V_{Ty} - V_{My} \quad (12-45)$$

我们可以根据视线角的公式求导后得到视线角速率:

$$\dot{q} = \frac{R_{TMy} V_{TMx} - R_{TMx} V_{TMy}}{R_{TM}^2} \quad (12-46)$$

$$R_{TM} = (R_{TMx}^2 + R_{TMy}^2)^{1/2} \quad (12-47)$$

所以我们不难得出弹目的接近速度为:

$$V_c = -\dot{R}_{TM} = \frac{-(R_{TMx} V_{TMx} + R_{TMy} V_{TMy})}{R_{TM}} \quad (12-48)$$

根据最优导引制导律:

$$\dot{\theta} = 3 \frac{V_c}{V_M} \dot{q} \quad (12-49)$$

可得到导弹的加速的分量为:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{V_{Mx}}{V_{My}} \right) \quad (12-50)$$

$$a_{Mx} = V_M \dot{\theta} \cos q \quad (12-51)$$

$$a_{My} = -V_M \dot{\theta} \sin q \quad (12-52)$$

以上列出了两维的最优导引制导的必要方程，但是使用最优导引制导的导弹并不是直接向着目标发射的，而是向着一个能够导引导弹命中目标的方向发射，考虑了视线角之后可以得到导弹的指向角 L 。从图 12-8 中我们可以看出，如果导弹进入了碰撞三角区（如果目标和导弹同时保持匀速直线运动，导弹必定会命中目标），这时利用正弦公式可以得到指向角的表达式：

$$L = \sin^{-1} \frac{V_T \sin(q - \theta_T)}{V_M} \quad (12-53)$$

但是实际上导弹不可能确切地在碰撞三角区发射，所以不能精确地得到拦截点。因为我们不知道目标将会如何机动，所以拦截点位置只能大概地估计。事实上，这也是需要导航系统的原因！初始时刻导弹偏离碰撞三角的角度称之为指向角误差（Head-Error）。考虑了导弹初始时刻的指向角和指向角误差之后，导弹的初始速度分量可以表示为：

$$V_{My}(0) = V_M \cos(q - L + HeadError) \quad (12-54)$$

$$V_{Mx}(0) = V_M \sin(q - L + HeadError) \quad (12-55)$$

使用 MATLAB 编程，具体代码如下：

```
%*****MATLAB 程序*****%
%最优制导律仿真，初始化系统的参数
clear all; %清除所有内存变量
global SignVc;
pi=3.14159265;
Vm=1000;Vt=500;%导弹和目标的的速度
HeadError=0; %指向角误差
ThetaT=pi; %目标的速度方向
Rmx=0;Rmy=0; %导弹的位置
Rtx=5000;Rty=10000;%目标的位置
At=0;%目标法向加速度
Vtx=Vt*sin(ThetaT);%目标的速度分量
Vty=Vt*cos(ThetaT);
Rtmx=Rtx-Rmx; %弹目相对距离
Rtmy=Rty-Rmy;
AmMax=15*9.8;%导弹的最大机动能力为 15G
Rtm=sqrt(Rtmx^2+Rtmy^2);
```

```

SightAngle=atan(Rtmx/Rtmy); %视线角
LeadAngle=asin(Vt*sin(SightAngle-ThetaT)/Vm); %指向角
Vmx=Vm*sin(SightAngle-LeadAngle+HeadError); %导弹的速度分量
Vmy=Vm*cos(SightAngle-LeadAngle+HeadError);
Vtmx=Vtx-Vmx;
Vtmy=Vty-Vmy;
%弹目的相对运动速度
Vc=-(Rtmx*Vtmx+Rtmy*Vtmy)/Rtm;
SignVc=sign(Vc); %Vc 的符号
Time=0;TimeStep=0.1; %时间和时间步长
file=fopen('output.txt','w');%将数据写入文件
%循环
while(1)
%Vc 改变符号仿真结束
if(sign(Vc) ~= SignVc)
break;
else
if(Rtm<100)
TimeStep=0.005;
end
SignVc=sign(Vc); %Vc 的符号
%视线角速率
dSightAngle=(Rtmy*Vtmx-Rtmx*Vtmy)/(Rtm^2);
dTheta=3*Vc*dSightAngle/Vm;
Theta=atan(Vmx/Vmy);
%导弹加速度
Am=Vm*dTheta;
%限制机动能力
if(Am>AmMax)
Am=AmMax;
end
%加速度分量
Amx=Am*cos(SightAngle);
Amy=-Am*sin(SightAngle);
Time=Time+TimeStep;
%目标位置
Rtx=Rtx+TimeStep*Vtx;
Rty=Rty+TimeStep*Vty;
dThetaT=At/Vt;
ThetaT=ThetaT+TimeStep*dThetaT;
Vtx=Vt*sin(ThetaT);%目标的速度分量
Vty=Vt*cos(ThetaT);
%导弹位置
Rmx=Rmx+TimeStep*Vmx;

```

```

Rmy=Rmy+TimeStep*Vmy;
%导弹速度
Vmx=Vmx+TimeStep*Amx;
Vmy=Vmy+TimeStep*Amy;
Vm=sqrt(Vmx^2+Vmy^2);
%弹目相对位移
Rtmx=Rtx-Rmx;
Rtmy=Rty-Rmy;
%上一步的脱靶量
Rtm0=Rtm;
Rtm=sqrt(Rtmx^2+Rtmy^2);
SightAngle=atan(Rtmx/Rtmy); %视线角
%弹目相对速度
Vtmx=Vtx-Vmx;
Vtmy=Vty-Vmy;
Vc=-(Rtmx*Vtmx+Rtmy*Vtmy)/Rtm;
%数据写如文件
fprintf(file,'%f %f %f %f %f %f %f %f\n',Time,Rmx,Rmy,Rtx,Rty,sqrt(Amx^2+Amy^2), Rtm);
end
end
status=fclose(file);
仿真结果:

```

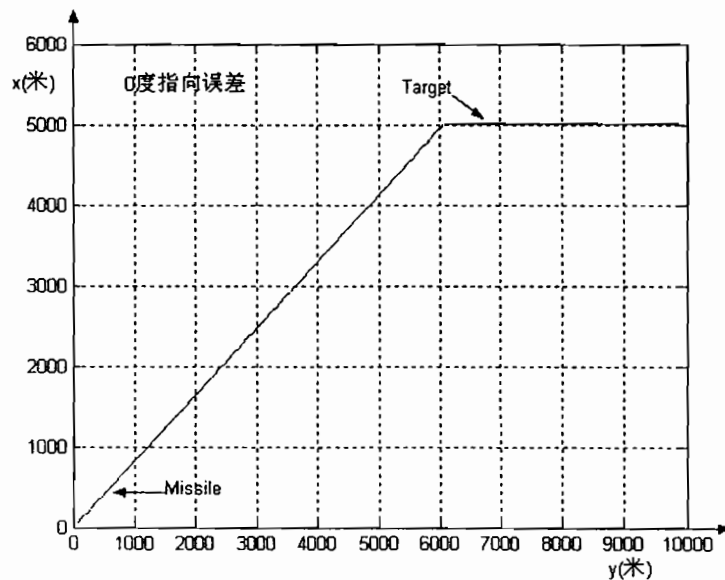


图 12-9 0°指向误差，目标不动的攻击情况

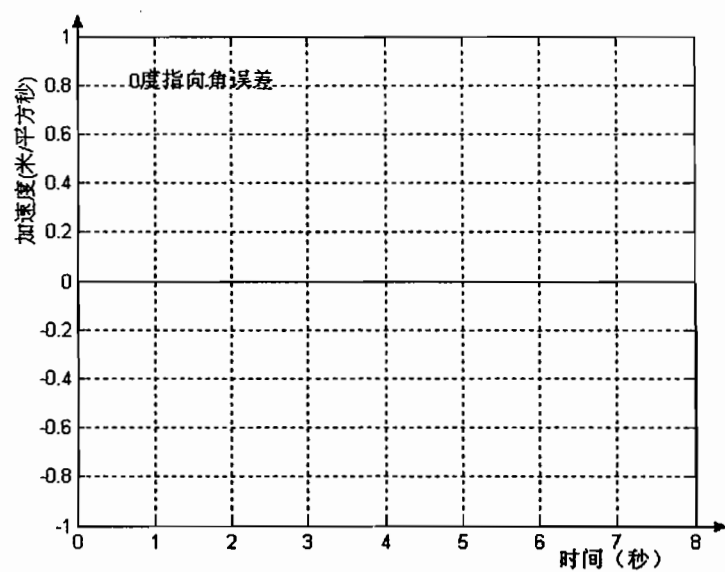


图 12-10 0° 指向误差，目标不机动时导弹的加速度

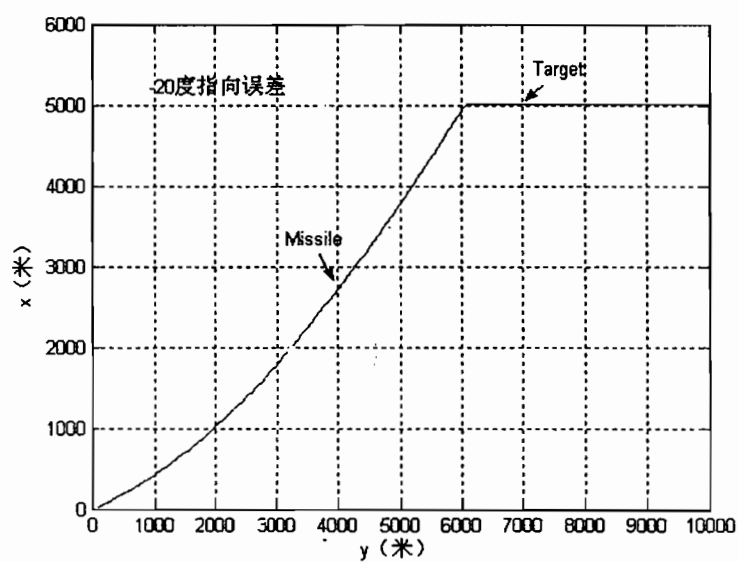


图 12-11 -20° 指向误差，目标不机动时攻击情况

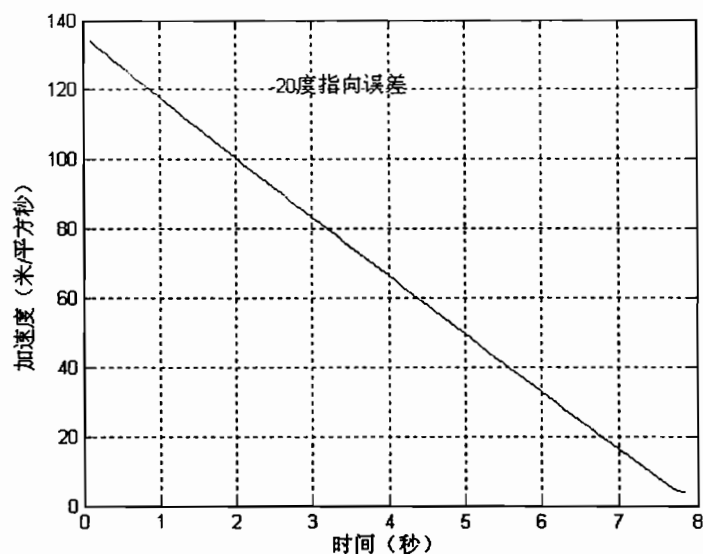


图 12-12 -20° 指向误差，目标不机动时导弹加速度

12.4 小结

本章首先简单介绍了一下 MATLAB 控制系统分析工具的使用，接着介绍了如何用 MATLAB 工具设计线性二次型最优控制器。线性二次型最优控制可以归结为求解黎卡提(Riccati)方程。最后，在此基础上，我们给出了两个运用 MATLAB 求解线性二次型最优控制问题的例子。

此外，本章还讨论了如何使用最优控制方法来设计自寻的制导导弹的最优导引律。通过最优二次型控制问题的求解，我们发现：当不考虑弹体惯性时，应用最优控制理论所得到的最优导引规律与目前广泛采用的比例导引法相一致。因此，从现代控制理论的观点来看，比例导引法是一种很好的导引方法。最后，我们还给出了最优导引律的仿真验证程序和仿真曲线。

12.5 习题

1, 系统模型为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.6 \\ 0 & 0 & -14.3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u$$

取 $Q=\text{diag}([1 \ 0 \ 0])$, $R=1$; 计算二次型调节器的状态反馈矩阵 K 和绘制最优控制的轨迹曲线。

2, 系统的模型为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.3 & 85.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33.3 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]x$$

取 $Q=\text{eye}(5)$; $R=1$; 设计最优二次型调节器, 确定状态反馈矩阵 K 和黎卡提方程的解, 绘制闭环的阶跃响应曲线和状态响应曲线。

3, 系统的模型为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x$$

比较加权矩阵 Q 、 R 在不同数值下对系统闭环特性的影响。

4, 系统的模型为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14.3 & 85.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33.3 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u$$

5, 取 $Q=\text{diag}([\rho, 0, 0, 0])$; $R=1$; 求解不同的 ρ 值下的黎卡提代数方程, 设计出状态反馈控制器并比较不同的状态反馈控制器下系统的闭环响应的动态性能。

参考文献

- [1] 韩京清, 何关钰, 许可康。线性系统理论代数基础。辽宁科学出版社, 1987
- [2] 宫锡芳。最优控制问题的计算方法。科学出版社, 1979
- [3] A. C. 庞特里雅金著, 陈祖浩等译。最佳过程的数学原理。上海科学技术出版社, 1965
- [4] 钱学森。工程控制论。北京: 科学出版社, 1958
- [5] W. M. 旺纳姆。线性多变量控制。北京: 科学出版社, 1984
- [6] 叶庆凯, 王肇明。优化与最优控制中的计算方法。科学出版社, 1986
- [7] 蔡尚峰。随机控制理论。北京: 清华大学出版社, 1987
- [8] 郭尚来。随机控制。北京: 清华大学出版社, 1999
- [9] 薛定宇。控制系统计算机辅助设计。北京: 清华大学出版社, 1996
- [10] 薛定宇。反馈控制系统设计与分析。北京: 清华大学出版社, 2000
- [11] 北京航空学院, 西北工业大学, 南京航空学院合编, 张洪钺主编。现代控制理论第三篇(最优估计理论)。北京: 北京航空学院出版社, 1985
- [12] 中国科学院数学研究所。离散时间系统滤波的数学方法。北京: 科学出版社, 1975
- [13] Ma Garty, T. P.。Stochastic Systems and State Estimation, Wiley. New York, 1974
- [14] 陈佳实。导弹制导和控制系统的分析和设计。北京: 宇航出版社, 1989
- [15] Jeffrey B. Burl. Linear optimal control: H_2 and H_∞ methods. Addison Wesley Longman, C1999.
- [16] 王朝珠, 秦化淑。最优控制理论。北京: 科学出版社, 2003
- [17] 申铁龙。 H_∞ 控制理论及应用。北京: 清华大学出版社, 1996
- [18] 周克敏, J. C. Doyle, K. Glover。鲁棒与最优控制。北京: 国防工业出版社, 2002
- [19] 解学书。最优控制理论与应用。北京: 清华大学出版社, 1986
- [20] D. J. 克莱门茨, B. D. O. 安德森。奇异最优控制线性二次问题。北京: 科学出版社, 1985

- [21] 王照林等编。现代控制理论基础。北京：国防工业出版社, 1981
- [22] 张仲俊, 王翼。控制理论在管理科学中的应用。长沙：湖南科学技术出版社, 1984
- [23] A. E. 布赖森, 何毓琦, 钱浩文, 张在良等译。应用最优控制—最优化、估计、控制。北京：国防工业出版社, 1982
- [24] Athans, M. and Falb, P. L. 。 Optimal Control: an Introduction to the Theory and its Applications. Mc Graw-Hill New York, 1966
- [25] 张盛开, 张亚东。对策论与决策方法。大连：东北财经大学出版社, 2000
- [26] 李登峰。微分对策及其应用。北京：国防工业出版社, 2000
- [27] 张嗣瀛。微分对策。北京：科学出版社, 1987