

高等学校教材

# 现代控制系统综合与设计

西南交通大学 肖 建 编著  
西南交通大学 李 治 主审

中国铁道出版社

2000年·北京

内 容 简 介

控制系统广泛应用于国民经济的各个领域。本书对现代控制系统的综合与设计方法作了全面系统、深入浅出地阐述。全书包括线性系统的分析与综合、最优控制、系统辨识和自适应控制等四篇,共十五章。取材注重基础性、代表性和新颖性,力求反映现代控制领域的最新成果,并着重介绍控制系统各种综合与设计方法的工程背景和物理概念。各篇后附有参考文献,各章后附有习题。

本书可作为高等学校电气信息类专业本科生和研究生的教材,也可供广大工程技术人员、科研人员和大专院校其它专业师生学习现代控制理论分析与设计方法时参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制系统综合与设计/ 肖建编著 .- 北京:中国铁道出版社,2000.2  
高等学校教材  
ISBN 7 113 03510 8

. 现... . 肖... . 自动控制系统 - 系统综合 - 高等学校 - 教材  
自动控制系统 - 系统设计 - 高等学校 - 教材 . TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61173 号

书 名:现代控制系统综合与设计  
著作责任者:西南交通大学 肖 建  
出版·发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)  
责任编辑:方 军  
封面设计:马 利  
印 刷:北京彩桥印刷厂  
开 本:787 × 1092 1/16 印张:21 字数:524 千  
版 本:2000 年 2 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷  
印 数:1—2000 册  
书 号:ISBN7-113-03510-8/ TP·403  
定 价:26.40 元

版权所有 盗印必究  
凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

# 前 言

自动控制技术对工农业生产、交通运输、国防建设和空间技术等各个领域都具有极其重要的作用。随着科学技术的发展,自动控制系统越来越趋向大型化、复杂化和综合化,同时对控制品质的要求也日益提高。经典控制理论日益难以满足这样的控制系统分析与设计的需要,从而现代控制理论应运而生。现代控制理论以严谨的数学结构和对设计指标的明确的描述方式,为控制工程实践提供了解析的设计手段。近年来蓬勃发展的自适应控制、鲁棒控制、 $H$ 控制和智能控制等新的控制方法,更加开辟了现代控制理论和技术的新纪元。

本书试图从工程实践角度出发,系统地介绍现代控制系统的分析、综合与设计方法,使读者对这些方法有较全面的了解和认识,并能正确地运用这些方法去解决工程中的实际问题。

全书共分四篇。第一篇介绍了线性系统的分析与综合的一些主要方法,包括线性系统运动特性和结构特性的分析;极点配置、状态观测器、解耦控制和渐近跟踪鲁棒调节器等控制系统综合方法;线性系统复频域分析与设计方法等。第二篇介绍最优控制的内容,包括变分法、最小值原理和动态规划等在最优控制系统综合与设计中的应用,重点介绍了二次型最优控制这一广泛采用的控制系统设计方法,并从工程实际出发,介绍了 $H$ 控制这一最新成果。系统辨识是第三篇的主题,在这里,我们介绍了非参数辨识方法、最小二乘类辨识方法和极大似然法,并重点介绍了系统辨识中的一些实际问题如实验设计、模型结构的选择和闭环系统辨识等。最后,第四篇介绍了参考模型自适应控制和自校正控制等两类自适应控制系统的设计方法。

本书为铁道部重点教材,是根据铁道部专业教学指导委员会拟定的教学计划,结合作者多年来从事现代控制系统综合与设计这一课程教学工作的经验和在这一领域的科研成果,参考大量文献资料并加以总结、提高编著而成。在编著的过程中力求反映现代控制理论和技术发展的水平,注重基础性内容的训练,以培养读者独立解决实际工作中控制系统综合与设计问题的能力,并了解现代控制系统分析与设计这一领域的学科前沿。

本书可以作为电气信息类专业高年级学生和研究生教材,也可以供广大工程技术人员和大专院校其他专业师生自学现代控制理论分析与设计方法的参考。

本书由西南交通大学肖建编著,西南交通大学李治主审。杜申华、王远波、温诚忠、唐磊、张友刚等为本书付出了辛勤的劳动。本书所涉及的作者部分科研成果,得到了国家自然科学基金和国家教委归国留学人员资助基金的资助。作者在此一并致以衷心的感谢。

限于水平,书中难免存在缺点和错误,敬请读者不吝指正。

作 者

1999 年 8 月

目 录

第一篇 线性系统的分析与综合

概 述..... 1

第一章 线性系统状态空间分析..... 2

    § 1.1 状态空间描述 ..... 2

    § 1.2 线性系统的运动分析 ..... 9

    § 1.3 离散时间系统..... 13

    § 1.4 线性系统的能控性和能观测性..... 19

    § 1.5 能控规范型和能观测规范型..... 26

    § 1.6 线性系统的结构分解..... 35

    § 1.7 线性系统的稳定性..... 44

    习 题 ..... 48

第二章 线性反馈系统的状态空间综合 ..... 51

    § 2.1 反馈控制结构及其对系统特性的影响..... 51

    § 2.2 单输入系统的极点配置..... 55

    § 2.3 多输入系统的极点配置..... 62

    § 2.4 镇定问题..... 69

    § 2.5 状态观测器..... 73

    § 2.6 带状态观测器的状态反馈控制系统的特性..... 80

    § 2.7 解耦控制..... 82

    § 2.8 渐近跟踪鲁棒调节器..... 91

    习 题..... 100

第三章 反馈控制系统的复频域分析与设计..... 103

    § 3.1 反馈控制系统的基本结构 ..... 103

    § 3.2 反馈控制系统的性能 ..... 107

    § 3.3 极点配置的复频域设计 ..... 111

    § 3.4 极点配置控制器的参数化 ..... 116

    § 3.5 传递函数矩阵的互质分解与稳定控制器的参数化表示 ..... 120

    习 题..... 126

参考文献..... 127

第二篇 最优控制

概 述..... 129

第四章 最优控制问题与变分法..... 130

    § 4.1 最优控制问题的数学描述 ..... 130

§ 4.2 泛函与变分 .....	133
§ 4.3 对控制变量无约束的最优控制问题 .....	139
习 题.....	149
第五章 最小值原理.....	151
§ 5.1 连续时间系统的最小值原理 .....	151
§ 5.2 离散时间系统的最小值原理 .....	157
§ 5.3 时间最优控制 .....	162
习 题.....	171
第六章 线性二次型的最优控制.....	173
§ 6.1 二次型性能指标 .....	173
§ 6.2 有限时间状态调节器问题 .....	175
§ 6.3 无限时间状态调节器问题 .....	180
§ 6.4 输出调节器问题 .....	184
§ 6.5 跟踪问题 .....	188
习 题.....	196
第七章 动态规划.....	198
§ 7.1 最优性原理 .....	198
§ 7.2 离散时间线性二次型问题 .....	204
§ 7.3 连续动态规划与哈密顿—雅可比方程 .....	207
§ 7.4 动态规划与变分法和最小值原理的关系 .....	209
习 题.....	212
第八章 $H$ 控制 .....	213
§ 8.1 数学基础 .....	213
§ 8.2 $H$ 性能指标 .....	222
§ 8.3 单输入单输出情况下 $H$ 问题的解 .....	227
§ 8.4 直接状态空间方法 .....	231
习 题.....	235
参考文献.....	235

### 第三篇 系统辨识

概 述.....	237
第九章 建模与系统辨识.....	238
§ 9.1 数学模型 .....	238
§ 9.2 辨识实验输入信号 .....	240
习 题.....	242
第十章 非参数辨识方法.....	244
§ 10.1 阶跃响应法.....	244
§ 10.2 相关分析法.....	246
习 题.....	249
第十一章 最小二乘辨识.....	250

§ 11.1	最小二乘估计的批处理算法.....	250
§ 11.2	最小二乘估计的统计特性.....	252
§ 11.3	递推最小二乘估计.....	254
§ 11.4	广义最小二乘法.....	259
§ 11.5	扩充最小二乘法.....	262
§ 11.6	辅助变量法.....	263
习 题.....		265
第十二章	极大似然估计.....	267
§ 12.1	极大似然估计原理.....	267
§ 12.2	极大似然估计算法.....	268
§ 12.3	预报误差法.....	272
习 题.....		274
第十三章	系统辨识中的实际问题.....	276
§ 13.1	辨识试验信号的设计.....	276
§ 13.2	采样周期和试验长度的选择.....	279
§ 13.3	数据的预处理.....	280
§ 13.4	模型结构的确定.....	281
§ 13.5	模型检验.....	285
§ 13.6	闭环系统辨识.....	286
习 题.....		288
参考文献.....		289

## 第四篇 自适应控制

概 述.....		291
第十四章	参考模型自适应控制系统.....	293
§ 14.1	基于局部参数最优化技术的设计方法.....	293
§ 14.2	基于李雅普诺夫稳定性理论的设计方法.....	298
§ 14.3	基于超稳定性理论的设计方法.....	302
习 题.....		307
第十五章	自校正控制.....	309
§ 15.1	最小方差自校正控制.....	309
§ 15.2	广义最小方差自校正控制.....	315
§ 15.3	极点配置自校正控制.....	320
习 题.....		323
参考文献.....		323
附录 向量与矩阵的导数.....		325

# 第一篇 线性系统的分析与综合

## 概 述

自本世纪初,特别是第二次世界大战以来,自动控制技术得到了迅速的发展。20 世纪 50 年代中期,古典控制论已经发展成熟和完备,并成功地应用在工程技术和军事等领域。古典控制论采用传递函数来描述单输入单输出系统,利用频率响应法来实现控制系统的分析与综合。但是,古典控制论具有明显的局限性,它只能处理单输入—单输出系统,并且难以揭示系统的更深刻的特性。

1960 年前后一段时间,现代控制理论开始蓬勃发展,其重要标志之一就是美国著名学者 R. E. Kalman 提出了控制系统的状态空间理论。与古典的传递函数法仅描述了系统的外部输入输出特性不同,状态空间法是系统的内部描述,从而使系统的分析和综合过程建立在严格的理论基础上,在很大程度上促进了控制理论与技术的发展。状态空间法可以同时适用于单输入—单输出系统和多输入—多输出系统,线性定常系统和线性时变系统等,并且使得我们可以直接在时间域内进行系统的分析和综合。计算机科学和技术的发展,又为这种分析和综合方法提供了强有力的工具。

自 20 世纪 70 年代以来,在状态空间法的基础上,又发展了采用复频域的系统描述和计算方法来分析与综合线性控制系统的多变量复频域方法。其中包括利用多项式矩阵分式或互质分解表示作为线性多变量系统的数学模型而建立起来的线性多变量系统的复频域分析与综合方法;和将多输入多输出系统化为一系列单输入单输出系统来处理,并把古典频率法的许多行之有效的设计技术和方法推广到多变量系统设计中的多变量频域设计方法。

目前,对于线性系统的分析和综合还在不断地向前发展,随着采用的数学工具和对系统的描述方法不同,已形成各种学派,并且得到了各自成体系和有价值的结论。

线性系统的分析与综合方法是自动控制理论中最为成熟和完善的一个组成部分,它是最优控制、最优估计、随机控制、自适应控制、鲁棒控制和非线性系统分析和综合等控制理论各分支的基础。

# 第一章 线性系统状态空间分析

## § 1.1 状态空间描述

为了分析和研究控制系统,首先必须建立系统的数学模型。描述控制系统的数学模型的形式不止一种,它们各有特长和最适用的场合,并且它们之间也有紧密的联系。通常由系统的一种数学描述可以推出它的另一种数学描述。

系统的数学模型或称为系统的数学描述通常可分为以下两种类型:一种称为系统的外部描述,即输入—输出描述,这种描述将系统看成是一个“黑箱”,只从系统的输入—输出的因果关系中获悉系统特性。古典控制论所采用的对系统的传递函数描述就是属于系统的外部描述。从传递函数本身无法了解系统的内部结构,两个内部结构完全不同的系统可以有相同的传递函数描述。另一种则称为系统的内部描述,它是系统的完全描述,完整地表征了系统的动力学特征。现代控制理论中普遍采用的状态空间描述就是属于这一类。

### 1.1.1 状态空间描述

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的。状态和状态空间概念早就在古典力学中就得到广泛的应用,但随着将它们引入到系统和控制理论中来,使之适合于描述系统的运动行为,才使这些概念有了更一般的含义。

状态和状态空间是这样来定义的。在描述系统运动的所有变量中,必定可以找到数目最少的一组变量,它们足以描述系统的全部运动。组成这个变量组的变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  称为系统的状态变量,其中  $t = t_0$ ,  $t_0$  为初始时刻。由状态变量构成的列向量

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad t = t_0$$

称为系统的状态向量,简称状态。状态向量取值的空间叫状态空间。系统在任一时刻的状态,都可以用状态空间中的一个点来表示。

在以上定义中,所谓足以描述系统的全部运动,是指:只要确定了这组变量在某一初始时刻  $t = t_0$  的值,并且确定了从这一初始时刻起( $t = t_0$ )的系统输入,则系统的全部变量在  $t = t_0$  时刻的运动行为也就随之完全确定了。而状态变量组的最小性体现在:状态变量  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是为完全表征系统行为所必须的系统变量的最少个数。减少变量数将破坏表征的完全性,而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的。

状态变量是一组数学变量,它并不一定是在物理上可测量的或可观察的量。不表示物理量的变量,以及不可测量或不可观察的物理量也可选作状态变量。对同一个系统,状态变量的选取并不是唯一的。选取状态变量的这种自由性是状态空间法的一个优点。但是,从实用上讲,我们应当尽可能地选取容易测量的量作为状态变量。



系统状态方程描述的结构图如图 1 .1 所示。输入引起状态的变化是一个动态过程。列写每个状态变量的一阶导数与所有状态变量和输入变量的数学方程称为状态方程。而描述状态与输入一起引起输出的变化是一个代数方程,称为输出方程。考虑最一般的情况,连续系统的状态方程描述为:

图 1 .1 系统状态空间描述的基本结构

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1( x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\&\dots \\x_n &= f_n( x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\y_1 &= g_1( x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \\&\dots \\y_p &= g_p( x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

引入向量及矩阵符号,令

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \begin{matrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} & \mathbf{u} &= \begin{matrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{matrix} & \mathbf{y} &= \begin{matrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{matrix}\end{aligned}$$

分别为状态向量,控制向量(输入向量)和输出向量,引入向量函数

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{matrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{matrix}, & \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{matrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \dots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{matrix}\end{aligned}$$

则可写出向量形式状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

若系统是线性的,状态空间描述可表为更加明显的一般形式

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

对于线性定常连续时间系统,以上状态空间描述中各系数矩阵均不是  $t$  的函数,即可写成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{1 .1}$$

其中  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{y}$ 分别是  $n$  维状态向量,  $m$  维输入向量和  $p$  维输出向量;  $\mathbf{A}$ 是 $(n \times n)$  矩阵,  $\mathbf{B}$ 是 $(n \times m)$  矩阵,  $\mathbf{C}$ 是 $(p \times n)$  矩阵,  $\mathbf{D}$ 为 $(p \times m)$  矩阵。为简单起见,式(1 .1) 所示的状态方程也可简记为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。

**【例 1 .1】** 在图 1 .2 所示的电路中,有  $u_{c1}$ ,  $u_{c2}$ ,  $i_1$  和  $i_2$  等四个内部变量。根据电路分析的知识我们知道,该电路可用 2 阶微分方程描述,因而状态变量的个数必定是 2。若选  $u_{c1}$  和  $u_{c2}$  为状态变量,则由  $u_{c1}$  即可确定  $i_1$ ,而根据  $u_{c1}$  和  $u_{c2}$  两者的电位差还可以由欧姆定律确定  $i_2$ ,

从而可确定系统的全部内部变量。如果令  $u_{c2}$  为输出, 根据电路定律, 立即可得到系统的状态方程为:

$$\begin{aligned} u_{c1} &= -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} u_{c1} + \frac{1}{C_1 R_2} u_{c2} + \frac{u}{C_1 R_1} \\ u_{c2} &= \frac{1}{C_2 R_2} u_{c1} - \frac{1}{C_2 R_2} u_{c2} \\ y &= u_{c2} \end{aligned}$$

写成矩阵形式得

图 1 .2 [例 1 .1] 的电路图

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_2 + R_1}{C_1 R_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ u_{c2} \end{bmatrix}$  为状态向量。

可以验证,  $u_{c1}$  和  $i_2$  也是一组状态变量, 因为若  $u_{c1}$  和  $i_2$  确定了, 则系统中其它的变量也就唯一确定了。如果令状态向量

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} u_{c1} \\ i_2 \end{bmatrix}$$

同样令  $u_{c2}$  为系统输出, 则也可以得出系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 1 \\ \frac{1}{C_1 R_1 R_2} & -\frac{C_2 + 1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_1 R_1 R_2} \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -R_2] \mathbf{z} \end{aligned}$$

在该例题中,  $i_1$  和  $u_{c1}$  不能选作状态变量, 因为在某一时刻, 仅根据  $i_1$  和  $u_{c1}$  的值, 不能确定系统其余的变量。

由以上例题中可以看出, 对同一系统, 若选不同的变量作为状态变量, 则系统的状态方程具有不同的形式。但是, 在今后的分析中我们可以知道, 系统的传递函数或传递函数矩阵却是不变的。

采用状态空间描述可以揭示处于系统内部的状态信息, 并加以利用, 而采用向量和矩阵形式表示, 当各种变量数目增加时, 并不增加数学表达式的复杂性, 从而可适用于单变量或多变量, 线性或非线性, 定常或时变, 确定性或随机性等各类系统的描述。最后, 一阶微分方程组比高阶微分方程更适宜于在计算机上求解。

### 1 .1 .2 由系统微分方程或传递函数建立状态方程

设单输入单输出线性定常连续时间系统可以由以下微分方程描述。

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y + a_0 y = b_{n-1} u^{(n-1)} + b_{n-2} u^{(n-2)} + \dots + b_1 u + b_0 u \tag{1 .2}$$

式中  $u, y$  分别为系统的输入, 输出变量。它的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{1 .3}$$

为了得到微分方程式(1 .2) 或传递函数式(1 .3) 所示系统的状态空间描述, 首先必须选择

适当的状态变量,以保证能得到式(1 .1) 形式的状态方程。在此过程中,必须注意,在  $n$  个状态方程表达式中,每个方程最多只能含有状态变量的一阶导数项,而不能含有更高阶的导数项,另外方程中不能含有输入变量的导数项。

**1 .能控标准型状态方程**

引入中间变量  $Z( s)$ , 将式(1 .3) 所示的  $G( s)$  分解成两部分,即令

$$Z( s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U( s) \tag{1 .4}$$

则由式(1 .3) 可知,成立

$$Y( s) = G( s) U( s) = ( b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 ) Z( s) \tag{1 .5}$$

根据拉氏变换的有关定理,若令  $z( t)$  为拉氏变换象函数  $Z( s)$  的原函数,则式(1 .4) 和式(1 .5) 对应的微分方程为:

$$z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_1 z + a_0 z = u \tag{1 .6}$$

$$y = b_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + b_1 z + b_0 z \tag{1 .7}$$

若选择状态变量

$$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \dots, x_n = z^{(n-1)}$$

则根据式(1 .6) 可得状态方程

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ &\dots \\ x_n &= \dot{z}^{(n-1)} = - a_0 z - a_1 \dot{z} - \dots - a_{n-1} z^{(n-1)} + u \\ &= - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u \end{aligned}$$

根据式(1 .7) 可得输出方程

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n$$

写成矩阵形式,可得

$$\mathbf{\dot{x}} = \mathbf{A_c} \mathbf{x} + \mathbf{b_c} u \tag{1 .8 a}$$

$$y = \mathbf{C_c} \mathbf{x} \tag{1 .8 b}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A_c} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} & \mathbf{b_c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{C_c} &= [ b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1} ] \end{aligned}$$

称具有以上形式的状态空间方程为能控标准型,  $\mathbf{A_c}$  形式的矩阵称为友矩阵。

**【例 1 2】** 给定系统的传递函数为

$$G( s) = \frac{160 s + 720}{s^3 + 16 s^2 + 194 s + 640}$$

利用式(1 .8) 立即可以得到它的状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -640 & -194 & -16 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = & [720 \quad 160 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

## 2 .能观测规范型

对于式(1 2) 形式的高阶微分方程所表示的系统,按以下规则选择状态变量:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i+1} + a_i y - b_i u \qquad i = 1, \dots, n - 1 \\ x_n &= y \end{aligned} \tag{1 .9}$$

将式(1 9) 展开可得

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= x_n + a_{n-1} y - b_{n-1} u = y + a_{n-1} y - b_{n-1} u \\ x_{n-2} &= x_{n-1} + a_{n-2} y - b_{n-2} u = \ddot{y} + a_{n-1} y - b_{n-1} u + a_{n-2} y - b_{n-2} u \\ &\dots \\ x_2 &= x_3 + a_2 y - b_2 u \\ &= y^{(n-2)} + a_{n-1} y^{(n-3)} - b_{n-1} u^{(n-3)} + a_{n-2} y^{(n-4)} - b_{n-2} u^{(n-4)} + \dots + a_2 y - b_2 u \\ x_1 &= x_2 + a_1 y - b_1 u \\ &= y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} - b_{n-1} u^{(n-2)} + a_{n-2} y^{(n-3)} - b_{n-2} u^{(n-3)} + \dots + a_1 y - b_1 u \end{aligned}$$

故有:

$$x_1 = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} - b_{n-1} u^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} - b_{n-2} u^{(n-2)} + \dots + a_1 y - b_1 u$$

与式(1 2) 相比较,得

$$x_1 = - a_0 y + b_0 u = - a_0 x_n + b_0 u$$

总结以上推导,可得状态方程为:

$$\begin{aligned} x_1 &= - a_0 x_n + b_0 u \\ x_2 &= x_1 - a_1 x_n + b_1 u \\ &\dots \dots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} - a_{n-2} x_n + b_{n-2} u \\ x_n &= x_{n-1} - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u \end{aligned}$$

输出方程为:

$$y = x_n$$

写成矩阵形式,可得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u & (1 .10 a) \\ y &= \mathbf{c}_0 \mathbf{x} & (1 .10 b) \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & - a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & - a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & - a_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & - a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

具有式(1.10)形式的状态空间方程称为能观测规范型。

**【例 1.3】** 设系统的传递函数与[例 1.2]相同,求系统的能观测规范型的状态空间方程。

显然,[例 1.2]传递函数  $G(s)$  所对应的高阶微分方程为:

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y + 640y = 160u + 720u$$

根据式(1.10),立即可以写出它的能观测规范形状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -640 \\ 1 & 0 & -194 \\ 0 & 1 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 720 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

以上我们所讨论的传递函数都是严格真的,即  $G(s)$  的分母多项式的阶次大于分子多项式的阶次。如果  $G(s)$  为真,但不是严格真,即当  $G(s)$  的分母多项式与分子多项式的阶次相等时,可以先用多项式除法,将  $G(s)$  化成一个严格真的有理函数与一个常数之和的形式,然后再利用前面的结论得到系统的状态空间方程,如下面[例 1.4]所示。

**【例 1.4】** 给定系统的高阶微分方程描述为:

$$y^{(3)} + 16y^{(2)} + 194y + 640y = 4u^{(3)} + 160u + 720u$$

它所对应的传递函数描述为

$$G(s) = \frac{4s^3 + 160s + 720}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640}$$

利用多项式除法可得:

$$G(s) = \frac{-64s^2 - 616s - 1840}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640} + 4$$

若令

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(s) &= \frac{-64s^2 - 616s - 1840}{s^3 + 16s^2 + 194s + 640} \\ \hat{\mathbf{Y}}(s) &= \hat{\mathbf{G}}(s) U(s) \end{aligned}$$

则由  $Y(s) = G(s) U(s) = (\hat{\mathbf{G}}(s) + 4) U(s) = \hat{\mathbf{Y}}(s) + 4U(s)$  可知,若求得关于系统  $\hat{\mathbf{Y}}(s) = \hat{\mathbf{G}}(s) U(s)$  的状态空间方程后,立即可得关于系统  $Y(s) = G(s) U(s)$  的状态空间方程。根据以上分析,可以得到关于  $G(s)$  所描述系统的状态空间方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -194 & -16 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [-1840 \quad -616 \quad -64] \mathbf{x} + 4u \end{aligned}$$

### 1.1.3 由状态空间描述导出传递函数矩阵

考虑式(1.1)所示的多输入多输出线性定常连续系统的状态空间方程,其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}$  是  $m$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  是  $p$  维输出向量。为简便起见,我们简记式(1.1)的状态空间方程为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。对式(1.1)两边取拉氏变换得:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

即

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.11)$$

以及

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \tag{1.12}$$

若初始条件  $\mathbf{x}(0) = 0$ , 则成立

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \tag{1.13}$$

仿照古典控制论中关于单输入单输出系统传递函数的定义, 我们定义

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{1.14}$$

为传递函数矩阵。在这里  $\mathbf{G}(s)$  是  $(p \times m)$  维有理函数矩阵。记  $\mathbf{G}(s)$  中的  $ij$  元素为  $g_{ij}(s)$ , 则  $g_{ij}(s)$  表示系统的第  $j$  个输入变量至第  $i$  个输出变量之间的传递函数。显然, 对于单输入单输出系统, 传递函数矩阵就是传递函数。

当  $\mathbf{G}(s)$  中所有元素的分子多项式的次数均大于或等于分母多项式的次数时, 称  $\mathbf{G}(s)$  为真; 特别是当  $\mathbf{G}(s)$  中所有元素的分子多项式次数均大于分母多项式次数时, 称  $\mathbf{G}(s)$  为严格真。可以证明, 若  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{G}(s)$  为严格真, 这时成立

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s) = \mathbf{0}$$

若  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{G}(s)$  为真, 这时成立

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{G}(s) = \mathbf{D}$$

【例 1.5】 已知系统状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

求系统的传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ 。

为利用式(1.14), 先求  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$

$$\begin{aligned} s\mathbf{I} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+4 & -3 \\ 1 & 1 & s+2 \end{bmatrix} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+2 & 3 \\ -3 & s(s+2) & 3s \\ -(s+4) & -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 3} \begin{bmatrix} s+2 & 3 \\ -(s+1) & s(s+4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然  $\mathbf{G}(s)$  为严格真。

### 1.1.4 坐标变换

前面我们已经指出, 描述系统内部运动的状态变量的选取不是唯一的。对同一个系统, 如

果选取不同的状态变量组构成状态向量,则最后所得到的状态空间方程也不一样。但是这些不同的状态向量之间,必定能通过一种叫做坐标变换的非奇异线性变换而互相联系。例如,若  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  均是描述同一系统的内部运动的不同状态向量,那么它们之间应通过非奇异坐标变换矩阵  $\mathbf{P}$  相联系,即

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z} \quad (1.15)$$

利用式(1.15)所示的坐标变换,还可以将系统的状态空间方程化成某些规范形式,以便能明显地揭示系统的某些重要特性,如能控性,能观测性和稳定性等。

设坐标变换前系统的状态空间方程为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  变换后系统的状态空间方程为  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 。下面我们来看看这两者之间的关系。

对式(1.15)两边求导,并考虑到式(1.1),有

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

即

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

因此,对变换前后的状态空间方程,成立

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D} \quad (1.16)$$

通过坐标变换,可以使状态空间方程具有某种规范型结构,并且保持系统的许多固有特性不变。

首先是变换前后系统的特征值不变,这是由于

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}s\mathbf{I}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \det[\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}] \\ &= \det\mathbf{P}^{-1}\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\det\mathbf{P} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

式(1.17)表明变换前后的系统特征多项式相同,因而特征值不变。

坐标变换前后,系统的传递函数矩阵不变,即

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{P}(s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}[\mathbf{P}^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P}]^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s) \end{aligned} \quad (1.18)$$

上式表明,虽然状态变量选取不同,但系统输入输出特性是相同的。由于这些原因,我们称坐标变换前后的两个系统是代数上等价的。

若取坐标变换  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 则与式(1.15)对照,成立:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}$ , 因此,式(1.16)可另写为:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D} \quad (1.19)$$

从状态空间的观点来看,坐标变换的实质就是状态空间的基底的变换。

## § 1.2 线性系统的运动分析

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \quad t = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

根据微分方程理论,若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为有界矩阵,则方程式(1.20)满足 Lipschitz 条件,对给定的初始

条件  $\mathbf{x}_0$  和分段连续的输入  $\mathbf{u}(t)$ , 方程式(1.20) 的解  $\mathbf{x}(t)$  是唯一确定的, 且连续地依赖于初始条件  $\mathbf{x}_0$ 。

### 1.2.1 齐次状态方程的解

为简单起见, 首先考虑外部输入  $\mathbf{u}(t) = 0$  时, 系统的自由运动, 这时对应的状态方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\qquad t \geq t_0 \tag{1.21}$$

称为齐次状态方程。

仿照标量情况下指数函数  $e^{at}$  的台劳展开式

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(at)^k$$

我们定义矩阵指数函数

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k \tag{1.22}$$

根据定义可以很容易证明  $e^{\mathbf{A}t}$  具有以下一些基本性质:

- (1)  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$
- (2)  $e^{\mathbf{A}(t+\tau)} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}\tau} \cdot e^{\mathbf{A}t}$
- (3)  $e^{\mathbf{A}t}$  为非奇异, 且  $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$
- (4)  $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$
- (5) 若  $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ , 则  $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{P}$

给定矩阵  $\mathbf{A}$ , 可以根据许多方法求出  $e^{\mathbf{A}t}$ , 下面我们仅介绍拉氏变换法。先求  $e^{\mathbf{A}t}$  的拉氏变换, 可得

$$\begin{aligned}L[e^{\mathbf{A}t}] &= L\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kL(t^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \frac{k!}{s^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}}\end{aligned}\tag{1.23}$$

用  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  左乘式(1.23) 可得:

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})L[e^{\mathbf{A}t}] &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{k+1}}{s^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

因此, 有:

$$L[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

并可得出计算  $e^{\mathbf{A}t}$  的拉氏变换法

$$e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \tag{1.24}$$

其中对有理矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  求拉氏反变换, 即为对它的各个元素分别求拉氏反变换。



根据矩阵指数函数  $e^{At}$  的定义与性质, 齐次状态方程式(1.21) 的解可以写成

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_0 \quad (1.25)$$

将式(1.25) 直接代入方程式(1.21), 并利用矩阵指数函数的性质(4), 可以证明式(1.25) 是方程式(1.21) 的解, 利用性质(1), 还可以证明式(1.25) 满足方程式(1.21) 的初始条件, 因此, 式(1.25) 是方程式(1.21) 的满足初始条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  的解。式(1.25) 还可以写成

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (1.26)$$

它反映了在无任何外部输入情况下, 系统从初始状态开始的转移。这一转移规律由矩阵指数函数  $e^{A(t-t_0)}$  所决定, 因而  $e^{A(t-t_0)}$  又称为系统的状态转移矩阵, 记为  $\Phi(t, t_0)$ 。于是, 系统在任何时刻的状态  $\mathbf{x}(t)$  可表为状态转移矩阵与初始状态的乘积, 即

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (1.27)$$

**【例 1.6】** 已知齐次状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求系统的自由运动  $\mathbf{x}(t)$ 。

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} e^{At} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入式(1.25), 可得系统的自由运动为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

## 1.2.2 非齐次状态方程的解

前面讨论了齐次状态方程的运动规律, 现在我们来考虑方程式(1.20) 所示的非齐次状态方程的解。将式(1.20) 中  $\mathbf{Ax}(t)$  移到等式左边, 并用  $e^{-A(t-t_0)}$  左乘方程式(1.20) 中各项得:

$$e^{-A(t-t_0)} \dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-A(t-t_0)} \mathbf{Ax}(t) = e^{-A(t-t_0)} \mathbf{Bu}(t) \quad (1.28)$$

上式左边是一个完全微分, 即

$$e^{-A(t-t_0)} \dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-A(t-t_0)} \mathbf{Ax}(t) = \frac{d}{dt} [e^{-A(t-t_0)} \mathbf{x}(t)] \quad (1.29)$$

代入式(1.28), 可得

$$\frac{d}{dt} [e^{-A(t-t_0)} \mathbf{x}(t)] = e^{-A(t-t_0)} \mathbf{Bu}(t) \quad (1.30)$$

在上式两边分别取由  $t_0$  到  $t$  的积分, 得

$$e^{-\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.31)$$

上式两边左乘  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ , 并移项得:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.32)$$

这就是状态方程式(1.20)的解。特别地, 若  $t_0 = 0$ , 则式(1.32)具有更为简洁的形式:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.33)$$

式(1.32)或式(1.33)的物理意义非常明确, 非齐次状态方程的解由两部分组成, 其中第一项是由初始条件引起的, 通常称之为零输入响应; 第二项是由于控制输入作用下产生的响应, 称之为零状态响应。也就是说, 非齐次状态方程的解是由零输入响应和零状态响应组成的。

由零输入响应的形式可知, 系统的初始状态  $\mathbf{x}_0$  对系统的状态轨迹的影响是固定不变的, 因此, 要使系统的状态按期望的方式运动, 以满足系统的设计目标, 必须要通过选择控制输入函数  $\mathbf{u}(t)$ , 通过零状态响应部分来实现。这就是今后我们对控制系统进行综合与设计的基本依据。

具体说来, 求解非齐次状态方程有两类方法, 其中时域法就是直接利用式(1.32)或式(1.33)。下面我们介绍一下频域法。为简单起见, 考虑  $t_0 = 0$  的情况, 对以下状态空间方程表示的系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.34)$$

两边取拉氏变换, 得

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (1.35)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.36)$$

由此, 可以得出状态向量和输出向量的拉氏变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)] + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \quad (1.38)$$

根据式(1.37)直接计算出状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的象函数  $\mathbf{X}(s)$  后, 再利用拉氏反变换, 即可求得  $\mathbf{x}(t)$ 。而根据式(1.38), 计算出输出向量  $\mathbf{y}(t)$  的象函数  $\mathbf{Y}(s)$  后, 也可以利用拉氏反变换求出  $\mathbf{y}(t)$ 。这就是利用频域法求解状态方程的过程。

**【例 1.7】** 考虑状态空间方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

求系统初始条件  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  和  $u(t)$  为单位阶跃输入下的响应。

首先用时域法求解本题, 在[例 1.6]中, 我们已求出对于本题中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

有:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

所以利用式(1.33),有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} & 1 \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

利用频域法解本题,可先求出

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

根据式(1.37),并注意到对于单位阶跃输入  $U(s) = \frac{1}{s}$  有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}U(s)] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{0}{1} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 + \frac{1}{s} \\ -(s+1) \end{bmatrix} = \frac{\frac{s^2+2s+1}{s(s+1)(s+2)}}{-\frac{1}{s+2}} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= L^{-1}[\mathbf{X}(s)] = L^{-1} \left[ \frac{s^2+2s+1}{s(s+1)(s+2)} \right] \\ &= L^{-1} \left[ -\frac{1}{s+2} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### § 1.3 离散时间系统

前面我们所讨论的都是连续时间系统,在这类系统中,系统的所有变量都是连续变化的,属于连续信号。离散时间系统是另一类动态系统。该类系统中某些物理量仅在一定的离散时刻被测量或传输,属于离散信号。这一测量或传输离散信号的时刻称为采样时刻,用 $\{t = kT, k = 0, 1, 2, \dots\}$ 表示。其中  $T$ 称为采样周期。显然,离散信号只有在采样时刻才能改变它的值。许多动态系统在本质上就是离散的,如经济系统,人口系统等。但是,更重要的一类离散时间系统是计算机控制系统。由于计算机只能处理离散信号,在计算机控制系统中不可避免地要通过采样等方式引入离散信号。

离散时间系统理论在很大程度上平行于连续系统理论,我们在这里只是针对离散时间系统与连续时间系统的不同之处进行介绍。

1.3.1 离散时间系统的数学描述

如同线性连续时间系统的输入输出关系可以用高阶微分方程描述那样,单输入单输出线性定常离散时间系统的输入输出关系通常可用如下的高阶差分方程表示:

$$\begin{aligned} &y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_0y(k) \\ &= b_{n-1}u(k+n-1) + b_{n-2}u(k+n-2) + \dots + b_0u(k) \end{aligned} \tag{1.39}$$

其中  $y(k)$  和  $u(k)$  本身的含义是  $y(kT)$  和  $u(kT)$ , 分别表示输出  $y$  和输入  $u$  在第  $k$  个采样时刻的值。

设初始条件为零,对式(1.39) 两边取  $z$  变换,可得

$$z^n Y(z) + \dots + a_0 Y(z) = b_{n-1} z^{n-1} U(z) + \dots + b_0 U(z) \tag{1.40}$$

其中  $z$  是象函数  $Y(z)$  和  $U(z)$  中的自变量,同时也可以看作是超前一个周期的算子,即

$$zy(k) = y(k+1) \tag{1.41}$$

仿照连续时间系统中传递函数的定义,我们称当初始条件为零时,系统输出的  $z$  变换与输入的  $z$  变换之比  $G(z) = Y(z)/U(z)$  为离散时间系统的脉冲传递函数。对于式(1.39) 所描述的系统,可以根据式(1.40) 立即得出它的脉冲传递函数为:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \tag{1.42}$$

对于离散时间系统,同样可以仿照 1.1 节中有关定义,确定系统的状态变量和状态向量,从而得到系统的状态空间方程描述。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \tag{1.43}$$

其中  $\mathbf{x}(k)$  是  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}(k)$  是  $m$  维输入向量;  $\mathbf{y}(k)$  是  $p$  维输出向量;  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  分别为  $(n \times n)$  维,  $(n \times m)$  维,  $(p \times n)$  维,  $(p \times m)$  维定常矩阵。

根据离散时间系统的高阶差分方程描述或脉冲传递函数描述得出它的状态方程描述的过程,与前面第 1.1 节中将连续时间系统的高阶微分方程描述或传递函数描述化为状态方程描述的步骤完全类似。对于式(1.39) 或式(1.42) 所描述的系统,定义中间变量

$$V(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} U(z)$$

则  $Y(z) = (b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_1 z + b_0) V(z)$

若取状态变量

$$x_1(k) = v(k), x_2(k) = v(k+1), \dots, x_n(k) = v(k+n-1)$$

则可得式(1.39) 或式(1.42) 所描述系统的能控规范型状态空间方程

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{matrix} \end{matrix} \mathbf{x}(k) + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} u(k)$$

$$y(k) = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \mathbf{x}(k)$$

(1.44)

另一方面,若定义状态变量

$$x_i(k) = x_{i+1}(k+1) + a_i y(k) - b_i u(k), i = 1, \dots, n-1$$

$$x_n(k) = y(k)$$

则又可得到式(1.39)或式(1.42)所描述系统的能观测规范状态空间方程

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -a_0 & b_0 \\ -a_1 & b_1 \\ -a_2 & b_2 \\ \dots & \dots \\ -a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} u(k) \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{y}(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathbf{x}(k)$$

对于以状态空间方程式(1.43)所描述的离散时间线性定常系统,也可以得出它的输入输出描述。为此,将式(1.43)两边取  $z$  变换,得

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (1.46)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \quad (1.47)$$

从而有

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (1.48)$$

它表明初始状态向量  $\mathbf{x}(0)$  至状态向量的传递关系由  $z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  确定,输入向量至状态向量的传递关系由  $(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  所确定。设初始条件为零,有

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \quad (1.49)$$

代入式(1.47),可得输入输出关系描述

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(z) \quad (1.50)$$

仿照单输入单输出情况时脉冲传递函数的定义,我们定义

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.51)$$

为式(1.43)所描述的系统的脉冲传递函数矩阵,它的  $ij$  元素  $g_{ij}(z)$ , ( $i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, m$ ) 表示由系统第  $j$  个输入变量至第  $i$  个输出变量之间的脉冲传递函数。

### 1.3.2 离散时间系统的运动分析

与连续时间系统的状态空间描述式(1.1)不同,对于离散时间系统的状态空间描述式(1.43),根据初始条件  $\mathbf{x}(0)$ ,总可以迭代地求出在各个采样时刻系统的状态向量  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 并且特别适宜于在计算机上进行计算,但是这样所得到的只是状态空间方程的开式解。为了对离散时间系统进行深入分析,我们往往需要状态空间方程式(1.43)的闭式解。与连续时间系统状态空间方程的求解方法一样,我们也可以用时域法或频域法求解离散时间系统的状态方程式(1.43)。

#### 1.时域法

采用迭代的方法求解状态方程式(1.43)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\ &\dots \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(i) \end{aligned} \quad (1.52)$$

由式(1.52)可见,与连续时间系统状态方程的解类似,离散时间系统状态方程的解也由两部分组成。其中第一项称为零输入响应,它代表了初始状态的转移。第二项代表了系统状态对输入的响应,称为零状态响应,它具有卷乘的形式。特别地,若  $\mathbf{u}(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ , 则对应齐次状态方程的解可写成

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \quad (1.53)$$

令  $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$  为离散时间系统式(1.43)的状态转移矩阵,利用  $\Phi(k)$ , 可以将式(1.52)重写为:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k) \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1) \mathbf{B} \mathbf{u}(i) \quad (1.54)$$

## 2. 频域法

对方程式(1.43)两边同取  $z$  变换,得

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \\ &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)] \end{aligned} \quad (1.55)$$

利用式(1.55)计算出  $\mathbf{X}(z)$  后,再取  $z$  反变换,即可求得状态向量  $\mathbf{x}(k)$ 。若要求输出向量  $\mathbf{y}(k)$ , 可利用输出方程

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \\ &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z)] + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \end{aligned} \quad (1.56)$$

计算出  $\mathbf{Y}(z)$  后,根据  $z$  反变换,就可求得  $\mathbf{y}(k)$ 。

若输入  $\mathbf{u}(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ , 则显然有  $\mathbf{U}(z) = 0$ , 代入式(1.55), 可得当外加输入为零时,式(1.43)对应的齐次状态方程的频域解为

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{x}(0) \quad (1.57)$$

求  $z$  反变换得:

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} [(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \mathbf{x}(0) \quad (1.58)$$

将式(1.58)与式(1.53)相比较,可以得到求状态转移矩阵  $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$  的公式:

$$\mathbf{A}^k = Z^{-1} [(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \quad (1.59)$$

**【例 1.8】** 已知离散时间系统状态方程

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试求系统在给定  $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , 以及单位阶跃输入  $u(k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots$ , 下的解。

为采用时域法求解,先求状态转移矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= Z^{-1} [(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z] \\ &= Z^{-1} \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z(z+1) & z \\ -0.16z & z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k - \frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k - \frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k + \frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入式(1.48),可得系统的解为:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} u(i) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^k - \frac{1}{3}(-0.8)^k & \frac{5}{3}(-0.2)^k - \frac{5}{3}(-0.8)^k \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^k + \frac{0.8}{3}(-0.8)^k & -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}(-0.2)^{k-i-1} - \frac{1}{3}(-0.8)^{k-i-1} & \frac{5}{3}(-0.2)^{k-i-1} - \frac{5}{3}(-0.8)^{k-i-1} \\ -\frac{0.8}{3}(-0.2)^{k-i-1} + \frac{0.8}{3}(-0.8)^{k-i-1} & -\frac{1}{3}(-0.2)^{k-i-1} + \frac{4}{3}(-0.8)^{k-i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

利用级数求和公式

$$1 + (-0.2) + (-0.2)^2 + \dots + (-0.2)^{k-1} = \frac{1 - (-0.2)^k}{1 - (-0.2)}$$

计算出以上求和号中的各项可得:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \\ \frac{0.2}{3}(-0.2)^k + \frac{3.2}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 3(0.2)^{k-i-1} - 2(-0.8)^{k-i-1} \\ -\frac{1.8}{3}(-0.2)^{k-i-1} + \frac{4.8}{3}(-0.8)^{k-i-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(-0.2)^k + \frac{4}{3}(-0.8)^k \\ \frac{0.2}{3}(-0.2)^k - \frac{3.2}{3}(-0.8)^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}(-0.2)^k + \frac{10}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{1}{2}(-0.2)^k + \frac{8}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3.4}{6}(-0.2)^k + \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \\ -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

采用频域法求解同一例题。注意到对于单位阶跃输入,  $U(z) = \frac{z}{z-1}$ , 先利用式(1.55)求得

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [z\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}U(z)] \\
&= \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z(z+1) & z \\ -0.16z & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z-1 \end{bmatrix} + \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}} \\
&= \frac{(z^2+2)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)} \\
&= \frac{(-z^2+1.84z)z}{(z+0.2)(z+0.8)(z-1)}
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= Z^{-1}[\mathbf{X}(z)] = \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k + \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 1.3.3 线性连续时间系统的离散化

由于计算机技术和自动控制技术的飞速发展, 计算机控制系统现在已成为自动控制系统的主流。由于计算机只能处理离散时间信号, 因此, 采用计算机作为控制器来控制连续时间的

受控系统时,会遇到一个把连续时间的受控系统化为等价的离散时间系统的问题。

图 1.3 所示的是一个典型的计算机控制系统的结构图。其中受控对象是一个连续时间系统,其输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  都是连续时间信号。控制器由数模(D/A)转换,数字计算机,模/数(A/D)转换等构成。数/模(D/A)转换的作用是将计算机输出的数字信号转换为以电压或电流形式表示的模拟信号,而模数(A/D)转换的作用是将以电压或电流等形式表示的模拟信号转换为数字信号送入计算机。

为了使图 1.3 中上面的连续时间系统部分和下面的离散时间系统部分能够连接起来,引入了采样器和保持器。采样器的作用是把连续时间变量  $y(t)$  转换

图 1.3 计算机控制系统

成离散时间变量  $y(k) = y(kT)$ ,即  $y(t)$  在  $kT$  时刻的值,而  $T$  是采样周期。保持器的作用是把离散时间信号  $u(k)$  变换成连续时间信号  $u(t)$ 。最常见的保持器是零阶保持器,它在整个采样周期  $T$  内,保持前一个采样时刻的值不变,即

$$u(t) = u(kT) = u(k), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (1.60)$$

这样,如果把保持器—连续时间系统—采样器看成一个整体,如图 1.3 的虚线所示,则它是一个以  $u(k)$  为输入,以  $y(k)$  为输出的离散时间系统,进一步定义离散时间状态变量  $x(k)$ ,则可以得到与原来连续时间系统对应的离散时间系统的状态空间模型。这一由连续时间系统模型得到它所对应的离散时间系统模型的过程,称为连续时间系统的离散化。

根据以上的讨论,我们知道,连续时间系统的离散化过程,实质上是求出这样一个离散时间系统模型,当该离散模型的输入  $u(k)$  等于连续时间系统输入  $u(t)$  在第  $k$  个采样时刻的值  $u(kT)$  时,则离散模型的输出  $y(k)$  等于连续时间系统输出  $y(t)$  在第  $k$  个采样时刻的值  $y(kT)$ 。

为简便起见,我们假定系统满足以下条件:(1) 采样器以常数周期  $T$  进行等周期采样。(2) 采样周期  $T$  满足香农采样定理,以保证能准确地复现原连续信号。(3) 采用零阶保持器。下面我们讨论在满足以上三个条件下连续时间状态空间方程的离散化。

考虑线性定常连续时间系统

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \quad (1.61)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.62)$$

由式(1.32),以上状态方程的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (1.63)$$

取  $t_0 = kT$ ,  $t = (k+1)T$ , 并且考虑零阶保持器的关系式(1.60), 有

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+\tau-kT)} B u(kT) d\tau \quad (1.64)$$

利用变量置换  $\tau = kT + T - \tau$ , 则上式进一步变成:

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\tau} B u(kT) d\tau \quad (1.65)$$



记  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT)$ ,  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(kT)$ ,  $\mathbf{F} = e^{\mathbf{A}T}$ ,  $\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}d} \mathbf{B}$ , 则上式可写成离散状态方程的形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{u}(k) \tag{1.66}$$

而利用式(1.63), 可得输出方程

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \tag{1.67}$$

式(1.66) 和式(1.67) 即为连续时间系统状态空间方程的离散化状态方程和输出方程。

**【例 1.9】** 设连续时间受控对象为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

求它的以  $T$  为采样周期的离散化状态方程和输出方程。因为:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= L^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= L^{-1} \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= e^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}d} \mathbf{B} = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-d} \\ 0 & e^{-d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dd = \begin{bmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据式(1.66) 和式(1.67) 立即可得对应的离散时间系统的状态空间表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1-e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T-1+e^{-T} \\ 1-e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ y(k) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

### § 1.4 线性系统的能控性和能观测性

能控性和能观测性是线性系统中的两个基本概念。这两个概念的提出, 对于控制理论和估计理论的研究与发展有着极其重要的意义。

能控性和能观测性是线性系统的两个结构特性, 揭示了系统内部的状态变量与系统输入输出之间的关系。直观地说, 能控性问题是研究系统的内部状态变量可否由控制输入完全影响的问题。如果系统的每一个状态变量的运动都可以通过输入来影响和控制, 由任意的起始点到达状态空间的原点, 则称系统是完全能控的。能观测性是研究系统的输入输出是否完全反映系统状态的问题。如果系统的所有状态变量的任意形式的运动均可通过输出完全反映出来, 则称系统是状态能观测的, 简称为能观测。

考查图 1.4 所示的电路, 系统的状态变量为电容两端的电压  $x(t)$ , 输入为电压源  $u(t)$ , 输出为电压  $y(t)$ 。由电路中可见, 若电容两端初始电压, 即初始状态  $x(t_0) = 0$ , 则无论输入  $u(t)$  怎样变化, 对所有  $t \geq t_0$ , 恒有  $x(t) = 0$ , 即  $x(t)$  不受

图 1.4 不能控且不能观测的电路

$u(t)$  的影响, 系统不能控。而另一方面, 如果输入  $u(t) = 0$ , 则无论电容两端电压  $x(t_0)$  是多少, 对所有  $t \geq t_0$ , 恒有  $y(t) = 0$ , 即  $y(t)$  不能反映  $x(t)$  的变化, 系统是不能观测的。

### 1.4.1 能控性和能观测性的定义

下面我们给出关于能控性和能观测性的严格定义, 以揭示能控性和能观测性的本质属性。  
能控性定义: 考虑线性定常连续时间系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{1.68}$$

或者线性定常离散时间系统状态方程。

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \tag{1.69}$$

如果对给定的初始时刻  $t_0$  ( $k_0$ ) 的一个非零初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  [ $\mathbf{x}(k_0)$ ], 存在一个有限时刻  $t_1$  ( $k_1$ ), 和无约束的容许控制  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ ; [ $\mathbf{u}(k)$ ,  $k_0 \leq k \leq k_1$ ], 使得系统在这个控制的作用下, 由  $\mathbf{x}(t_0)$  [ $\mathbf{x}(k_0)$ ] 转移到  $\mathbf{x}(t_1) = 0$  [ $\mathbf{x}(k_1) = 0$ ], 则称这一特定状态  $\mathbf{x}(t_0)$  [ $\mathbf{x}(k_0)$ ] 是能控的。如果系统式(1.68) [系统式(1.69)] 的所有状态都是能控的, 则称系统式(1.68) [系统式(1.69)] 为完全能控的。

在上述定义中, 只要求将状态转移到原点, 而对状态转移的轨迹不作任何规定, 因此, 能控性是表征系统状态运动的一个定性特性。定义中对控制  $\mathbf{u}(t)$  的每个分量的幅值并未给予限制, 它可取任意大的值。但是  $\mathbf{u}(t)$  的每个分量  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 必须均在时间区间  $[t_0, t_1]$  内均方可积, 即

$$\int_{t_0}^{t_1} |u_i(t)|^2 dt < \infty$$

能观测性表征系统的状态是否可由系统的输入和输出完全反映, 所以应同时考虑状态空间方程式(1.1) 或式(1.43) 中的状态方程和输出方程。下面, 我们以连续时间系统式(1.1) 为例, 讨论如何简化问题的讨论过程。

根据前面关于状态方程运动分析知道, 系统式(1.1) 的解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau \tag{1.70}$$

以及, 输出向量

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau + \mathbf{D}u(t) \tag{1.71}$$

在研究能观测性问题中, 输出  $\mathbf{y}(t)$  和输入  $\mathbf{u}(t)$  都已假定为已知, 只有内部变量, 即初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  是未知的。因此, 若定义

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}u(\tau) d\tau - \mathbf{D}u(t) \tag{1.72}$$

则式(1.72) 可简化为:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \tag{1.73}$$

上式表明, 所谓能观测性即是研究  $\mathbf{x}(t_0)$  能否由  $\tilde{\mathbf{y}}$  来完全估计。由于  $\tilde{\mathbf{y}}$  和  $\mathbf{x}(t_0)$  的任意性, 这又等价于  $\mathbf{u} = 0$  时由  $\tilde{\mathbf{y}}$  来估计  $\mathbf{x}(t_0)$  的可能性, 也就是说, 研究零输入方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.74}$$

的能观测性。类似地, 对离散时间系统, 我们也可以只考虑零输入方程

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), & \mathbf{x}(k_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (1.75)$$

的能观测性。

能观测性定义:对于线性定常连续时间系统式(1.74)/离散时间系统式(1.75),如果对某一个初始时刻  $t_1 > t_0$  ( $k_1 > k_0$ ),使得在时间区间  $[t_0, t_1]$  ( $\{k_0, k_0 + 1, \dots, k_1\}$ ) 上的输出  $\mathbf{y}(t)$  [ $\mathbf{y}(k)$ ],可以唯一地决定系统的初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  [ $\mathbf{x}(k_0)$ ],则称系统在  $[t_0, t_1]$  ( $\{k_0, k_0 + 1, \dots, k_1\}$ ) 内是完全能观测的。

我们指出,系统为不能控或不能观测是一种“奇异”的情况。换句话说,如果随机地选取矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  中各元素,则系统以概率 1 为完全能控;如果随机地选取矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{C}$  中各元素,则系统以概率 1 为完全能观测。

## 1.4.2 线性定常系统的能控性判据

下面我们讨论线性定常系统的能控性判据。首先给出最常用的秩判据。

秩判据:线性定常系统式(1.68)为完全能控的充要条件是

$$\text{rank}[\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (1.76)$$

其中  $n$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的维数,rank 表示矩阵的秩。称  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  为系统的能控性矩阵。

证:不失一般性,设  $t_0 = 0$ ,则  $t_1$  时刻的状态  $\mathbf{x}(t_1)$  满足

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

上式右乘  $e^{-\mathbf{A}t_1}$ ,并加以整理,得

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) = \int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.77)$$

根据矩阵指数的定义,有

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \mathbf{I} - \mathbf{A}\tau + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\tau^2 - \dots + (-1)^k \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\tau^k + \dots \quad (1.78)$$

根据 Caley - Hamilton 定理

$$\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = 0 \quad (1.79)$$

其中各系数是  $a_i$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式  $(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$  中的各对应系数,即成立

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I} \quad (1.80)$$

上式表明,  $\mathbf{A}^n$  可以表示为  $\{\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^{n-2}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{I}\}$  等的线性组合,类似可证对所有  $k > n$ ,  $\mathbf{A}^k$  都可以表示为  $\{\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^{n-2}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{I}\}$  的线性组合,这样,就可以把  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  写成有限项的矩阵之和:

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(\tau)\mathbf{A}^i \quad (1.81)$$

另一方面,若令

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_m] \quad (1.82)$$

其中,  $\mathbf{b}_j$  是  $\mathbf{B}$  的第  $j$  列,则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) &= [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_m] \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ \vdots \\ u_m(\tau) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j u_j(\tau) \end{aligned} \quad (1.83)$$

将式(1.81)和式(1.83)代入到式(1.77),可得

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) &= \int_0^{t_1} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} k_i(\tau) \mathbf{A}^i \right] \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j u_j(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \mathbf{A}^i \mathbf{b}_j \int_0^{t_1} k_i(\tau) u_j(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.84)$$

记

$$p_{ij} = \int_0^{t_1} k_i(\tau) u_j(\tau) d\tau \quad (1.85)$$

则式(1.84)可以进一步写成

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m p_{ij} \mathbf{A}^i \mathbf{b}_j \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \dots \\ p_{im} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \dots \\ \mathbf{p}_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.86)$$

其中  $\mathbf{p}_i \stackrel{\text{def}}{=} [p_{i1} \quad p_{i2} \quad \dots \quad p_{im}]^T, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

所谓状态完全能控,就是存在一个控制向量  $\mathbf{u}(\tau), 0 \leq \tau \leq t_1$ , 使系统从任意初态  $\mathbf{x}(0)$  转移到  $\mathbf{x}(t_1) = 0$ 。因为  $p_{ij}$  与  $u_j(\tau)$  之间满足关系式(1.85), 根据线性方程组的性质, 就式(1.86)而言, 这又等价于要求方程式(1.86)对任意  $\mathbf{x}(0)$  均有解, 即  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$  为行满秩, 因此, 式(1.76)成立是状态完全能控的充分必要条件。

【例 1.10】 考虑系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

的能控性。

根据秩判据

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{W}_c &= \text{rank} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B}] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

易见  $\mathbf{W}_c$  中的第二行和第三行线性相关,  $\text{rank } \mathbf{W}_c = 2 < 3$ , 故系统不能控。

**PBH** 判据: 线性定常系统式(1.68)是完全能控的充要条件是, 对  $\mathbf{A}$  的每个特征值  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 都有

$$\text{rank} [\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n \quad (1.87)$$

证: 首先采用反证法证明必要性。设对某个  $\lambda_i$  有  $\text{rank} [\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] < n$ , 则存在一个非零常数向量  $\mathbf{v}$ , 使得

$$\mathbf{v}^T [\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = 0$$

即

$${}^T\mathbf{A} = {}_i^T, \quad {}^T\mathbf{B} = 0 \tag{1.88}$$

利用式(1.88), 有:

$${}^T\mathbf{B} = 0 \quad {}^T\mathbf{AB} = {}_i^T\mathbf{B} = 0, \quad \dots \quad {}^T\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} = 0$$

于是, 进一步得到

$${}^T[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = 0$$

即  $\text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] < n$ , 与系统能控矛盾. 注意到  $[\mathbf{A} - s\mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  为多项式矩阵, 且对复数域  $C$  上除  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  以外任意的复数值  $s$ , 恒有  $\det(\mathbf{A} - s\mathbf{I}) \neq 0$ , 即  $\text{rank}[\mathbf{A} - s\mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n$ . 故只需对  $\mathbf{A}$  的特征值进行式(1.87) 形式的判定即可.

充分性: 同样采用反证法, 利用和上述证明相反的思路, 即可证明充分性.

PBH 判据主要用于理论分析中, 特别是线性系统的复频域分析中.

**【例 1.11】** 判定下列系统的能控性

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

构造矩阵

$$[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -1 - \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda_i & 0 \end{bmatrix}$$

显然  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ , 分别代入上式得

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} + \mathbf{I}, \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A} + 2\mathbf{I}, \mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

两种情况下, 都有  $\text{rank}[\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = 3$ , 因此, 系统能控.

以上讨论虽然只是对连续时间系统进行的, 但是关于秩判据和 PBH 判据的结论, 也适用于以状态方程式(1.69) 描述的离散时间系统的能控性的判定. 但这时, 若矩阵  $\mathbf{A}$  为非奇异, 则式(1.76) 或式(1.87) 是系统式(1.69) 为能控的充要条件, 而如果矩阵  $\mathbf{A}$  为奇异, 则式(1.76) 或式(1.87) 只是系统式(1.69) 为能控的充分条件, 而不是必要条件, 如以下例子所示.

**【例 1.12】** 考虑以下离散时间系统的能控性

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然有  $\text{rank } \mathbf{W}_c = 1 < 2$ . 但是对任意初始状态  $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \quad x_2(0)]^T$ , 若令  $u(0) = -[x_1(0) + x_2(0)]$  则有:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [-x_1(0) - x_2(0)] = 0$$

因此系统为完全能控。也就是说,对于本例,由于  $\mathbf{A}$  是奇异的,秩判据式(1.76)不再是系统能控的必要条件。

### 1.4.3 线性定常系统能观测性判据

系统能观测性是研究由系统的输出变量估计出状态变量的可能性。如前面所述,在讨论能观测性问题时,通常假定  $u = 0$ ,即考虑状态空间方程式(1.74)或式(1.75)所描述的系统。由于能观测性的论证和前面能控性的论证相似,所以这里在相关论证时尽可能地简化。

秩判据:线性定常连续时间系统式(1.74)或离散时间系统式(1.75)为完全能观测的充要条件是

$$\text{rank } \mathbf{W}_0 = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{1.89}$$

其中  $\mathbf{W}_0 = [ \mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T ]^T$  为能观测性矩阵。

证:对于连续时间系统式(1.74),本判据的证明与能控性秩判据的证明类似。我们这里仅给出对于离散时间系统式(1.75)的证明。根据式(1.75),容易得到

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{CA}\mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

用矩阵表示为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{bmatrix} \tag{1.90}$$

根据能观测性的定义,对于  $n$  阶的系统,观测其  $n$  个输出向量  $\mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n-1)$  能唯一确定其初始状态  $\mathbf{x}(0)$  的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{1.91}$$

根据式(1.80),  $\mathbf{A}^n$  可表示为  $\{ \mathbf{A}^{n-1}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{I} \}$  的线性组合。因此,对于  $n$  阶系统,若不能根据其  $n$  个时刻的输出向量  $\{ \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(n-1) \}$  唯一确定初始状态  $\mathbf{x}(0)$ ,则增加输出向量的观测值的个数,如取输出向量  $\{ \mathbf{y}(0), \dots, \mathbf{y}(N) \}$ ,其中  $N > n-1$ ,也不能唯一确定  $\mathbf{x}(0)$ 。从而式(1.89)是离散时间系统式(1.75)为能观测的充要条件。

**【例 1.13】** 分析以下系统的能观测性

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

构造

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & 1 \\ \mathbf{CA} & 0.632 & 1 \end{bmatrix}$$

显然  $\text{rank } \mathbf{W}_0 = 2$ , 系统能观测。

**PBH 判据:** 线性定常连续时间系统式(1.74) 或离散时间系统式(1.75) 为完全能观测的充要条件是对  $\mathbf{A}$  的每个特征值  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 都成立

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \quad (1.92)$$

证: 本判据的证明与关于能控性的 PBH 判据的证明类似, 从略。

PBH 判据特别适宜于当  $\mathbf{A}$  是约旦标准形的情况, 这时  $\mathbf{A}$  的特征值可以从矩阵中立即得出。

**【例 1.14】** 考虑以下系统的能观测性

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

显然  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \lambda_4 = 3$ , 因为

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - 2\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

不满足式(1.92), 系统不能观测。

## 1.4.4 对偶原理

线性系统的能控性和能观测性, 存在着一种对偶关系, 它反映了系统能控性和能观测性之间的内在联系, 并由之显示出系统控制问题和估计问题的对偶性。为了讨论对偶原理, 首先引入对偶系统。

已知线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (1.93)$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  是  $m$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  是  $p$  维输出向量。它的对偶系统为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= -\mathbf{A}^T \mathbf{w} + \mathbf{C}^T \mathbf{v} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{B}^T \mathbf{w} \end{aligned} \quad (1.94)$$

其中  $\mathbf{w}$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{v}$  是  $p$  维输入向量,  $\mathbf{z}$  是  $m$  维输出向量。

设  $\Phi(t, t_0)$  为系统式(1.93) 的状态转移矩阵,  $\Phi^*(t, t_0)$  为它的对偶系统式(1.94) 的状态转移矩阵, 则根据状态转移矩阵的定义式(1.26), 有

$$\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}, \quad \Phi^*(t, t_0) = e^{-\mathbf{A}^T(t-t_0)} \quad (1.95)$$

显然,系统式(1.93)的状态转移矩阵  $\Phi(t, t_0)$  和它的对偶系统式(1.94)的状态转移矩阵  $\Phi^T(t, t_0)$  之间,满足以下关系式:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi^T(t_0, t) \tag{1.96}$$

从另一个角度来看,系统(1.93)的能控性矩阵为

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \tag{1.97}$$

它的对偶系统式(1.94)的能观测性矩阵为

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T(-\mathbf{A}^T) \\ \dots \\ \mathbf{B}^T(-\mathbf{A}^T)^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.98}$$

因为矩阵转置后并不改变矩阵的秩,同时将矩阵的某些行或列同乘以 - 1 也不会改变矩阵的秩,所以成立  $\text{rank } \mathbf{W}_c = \text{rank } \mathbf{W}_0$ 。这就说明了系统式(1.93)的能控性等价于对偶系统式(1.94)的能观测性。考察系统式(1.93)的能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.99}$$

和系统式(1.94)的能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{C}^T \quad -\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T \quad \dots \quad (-\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T] \tag{1.100}$$

同样也可以得出结论,即系统式(1.93)的能观测性,等价于它的对偶系统式(1.94)的能控性。总结起来,我们得到以下对偶原理:

对偶原理:线性系统式(1.93)的能控性,等价于它的对偶系统式(1.94)的能观测性;系统式(1.93)的能观测性,等价于它的对偶系统式(1.94)的能控性。

## § 1.5 能控规范型和能观测规范型

对于完全能控或者完全能观测的线性定常系统,从能控或能观测这两个基本属性出发可以构造相应的坐标变换阵,将系统的状态空间方程化为只有能控系统或能观测系统才具有的标准形式,分别称为能控规范型或能观测规范型。这两种规范型在控制系统综合与设计中具有重要的作用。

### 1.5.1 单输入单输出系统的能控规范型

考虑完全能控的单输入单输出线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y &= \mathbf{cx} \end{aligned} \tag{1.101}$$

其中  $\mathbf{A}$  为  $n$  维方阵,  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{c}$  分别为  $n \times 1$  和  $1 \times n$  常数阵。设  $\mathbf{A}$  的特征多项式为:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \stackrel{\text{def}}{=} \phi(s) \tag{1.102}$$

因为系统完全能控,故有

$$\text{rank } \mathbf{W}_c = \text{rank}[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = n \tag{1.103}$$



由于  $\mathbf{b}$  是  $n$  维列向量,  $\mathbf{W}_c$  是  $n$  维非奇异方阵。定义坐标变换阵

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$$
$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ & a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}$$

(1.104)

则作坐标变换

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$$

(1.105)

可以将状态空间方程(1.101) 化成能控规范型

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \mathbf{z} + \mathbf{b}_c u$$
$$y = \mathbf{c}_c \mathbf{z}$$

(1.106)

其中

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ - a_0 & - a_1 & - a_2 & \dots & - a_{n-1} & \end{matrix}, \mathbf{b}_c = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

(1.107)

$\mathbf{c}_c = \mathbf{c} \mathbf{P}$  没有特殊形式。

对式(1.106) 所示的能控规范型, 立即可以根据  $\mathbf{A}_c$  的最后一行, 写出它的特征多项式如式(1.102) 所示。另外, 设  $c_i$  为  $\mathbf{c}_c$  的第  $i$  元素, 则通过计算可得出它的传递函数。

$$G(s) = \frac{c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

(1.108)

【例 1.15】 写出以下线性定常系统的能控规范型

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x}$$

构造能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

显然,  $\mathbf{W}_c$  非奇异。根据秩判据, 系统完全能控。系统的特征多项式

$$\chi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - 2)(s - 4)^2 = s^3 - 10s^2 + 32s - 32$$

坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 32 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

它的能控规范型为

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -32 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_c = [14 \quad -7 \quad 1]$$

它的传递函数为:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}_c = \frac{s^2 - 7 + 14}{s^3 - 10s^2 + 32s - 32}$$

1.5.2 多变量系统的能控规范型

下面我们来讨论多输入多输出系统的能控规范型。考虑多输入多输出系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.109}$$

其中  $\mathbf{A}$  为  $(n \times n)$  维矩阵,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{C}$  分别为  $(n \times m)$  和  $(p \times n)$  维矩阵。设系统为完全能控的, 即

$$\text{rank } \mathbf{W}_c = \text{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \tag{1.110}$$

这样在  $(n \times mn)$  维能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  中, 有且仅有  $n$  个线性无关的列, 因此, 为了能确定能控规范型, 首先要在  $\mathbf{W}_c$  中找出  $n$  个线性无关的列, 然后按此来构成相应的坐标变换阵。当然, 随选取的坐标变换阵不同, 多输入多输出的能控标准型将有不同形式。

1. 搜索线性无关列的两种方案

为了从  $\mathbf{W}_c$  中找出  $n$  个线性无关的列, 通常用格栅图来进行, 可以有两种方案。

方案一(列搜索): 对给定的矩阵  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , 按图 1.5 构成格栅图。在图中我们假定  $n = 6, m = 4$ 。设  $\mathbf{b}_1$  为  $\mathbf{B}$  的第  $i$  列, 首先选定非零列向量  $\mathbf{b}_1$ , 并在表征它的  $\mathbf{A}^0 \mathbf{b}_1$  格内记上“ ”。此后, 再看  $\mathbf{A}\mathbf{b}_1$ , 若  $\mathbf{A}\mathbf{b}_1$  与  $\mathbf{b}_1$  线性无关, 则在表征乘积  $\mathbf{A}\mathbf{b}_1$  的格上记上“ ”。如此按格栅图关于  $\mathbf{B}$  的第 1 列  $\mathbf{b}_1$  继续选下去, 直到发现向量  $\mathbf{A}^{v_1} \mathbf{b}_1$  与先前的向量组  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{v_1-1} \mathbf{b}_1\}$  为线性相关, 则中止按  $\mathbf{b}_1$  方向的选择, 并在  $\mathbf{A}^{v_1} \mathbf{b}_1$  的格内记上“0”(图 1.5 中  $v_1 = 3$ )。如果  $v_1 < n$ , 则继续对第 2 列  $\mathbf{b}_2$  进行类似搜索, 若  $\mathbf{b}_2$  与  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{v_1-1} \mathbf{b}_1\}$  线性无关, 则取定  $\mathbf{b}_2$ , 并在  $\mathbf{A}^0 \mathbf{b}_2$  的格内画上“ ”。按  $\mathbf{b}_2$  继续向下搜索, 直至  $\mathbf{A}^{v_2} \mathbf{b}_2$  先前取定的所有向量为线性相关, 并在格内记以“0”。按如此步骤继续进行, 直至取到第  $l$  列, 并有  $v_1 + v_2 + \dots + v_l = n$  时结束。这样,  $\mathbf{W}_c$  中的  $n$  个线性无关的列向量, 即格栅图中用“ ”表示的那  $n$  个向量, 并可得到指数集  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 。

方案二(行搜索): 同样, 先构成图 1.6 所示的格栅图。然后按格栅图的行挑选相应的列向量。如果所选择的列向量与前面已挑选好的列向量构成的向量组性无关, 则该列被挑上, 并在相应的格内画上“ ”。反之若与前面所选好的列线性相关, 则在相应的格上画“0”。与方案一不同的是, 每行都应挑选到最后一格, 再进行下一行的挑选。若同一列中的上一行所对应的格已画有“0”, 则本行不必挑选该格, 让它空着。这是因为若某格已记上“0”, 则它所在列中以下的向量也必定与已选定的所有向量是线性相关的。如此进行, 直到挑出  $n$  个线性无关的列为止, 同样也可以得到一个指数集  $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ , 在图 1.6 中  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \mu_4 = 0$ 。

一般来说, 以上两种方案所得到的  $\mathbf{W}_c$  中  $n$  个线性无关的列构成的向量组和两个指数集是不相同的。

图 1 5 列搜索格栅图

图 1 6 行搜索格栅图

2 Luenberger(龙伯格) 第二能控规范型

对完全能控的多变量系统(1 .109), 若  $\text{rank } \mathbf{B} = r$ , 则前面按行搜索所确定的指数集,  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$  称为 Kronecker(克罗内克尔) 不变量, 或称为能控性指数集, 它在坐标变换下不变。其中最大的一个  $\mu_j = \max \mu_i$  称为能控性指数。

将按行搜索从  $\mathbf{W}_c$  中挑选的  $n$  个列向量排成如下的非奇异矩阵。

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{h} \quad \mathbf{A}\mathbf{h} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\mu_r-1}\mathbf{h}]$$

并令  $\mathbf{h}$  表示  $\mathbf{Q}$  的逆矩阵  $\mathbf{Q}^{-1}$  的第  $\mu_j$  行, 然后构成坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{h} \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{h} \mathbf{A}^{\mu_1-1} \\ \dots \\ \mathbf{h} \\ \mathbf{h} \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{h} \mathbf{A}^{\mu_r-1} \end{bmatrix} \tag{1 .111}$$

可以证明  $\mathbf{P}$  是非奇异阵。定义坐标变换  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , 可以导出系统的龙伯格第二能控规范型为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_{c2} \mathbf{z} + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{c2} \mathbf{z} \end{aligned} \tag{1 .112}$$

其中

$$\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1r} \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{A}_{r1} & \dots & \mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{ii} &= \begin{array}{c|ccc} 0 & & & 1 \\ \cdots & & W & \\ 0 & & & 1 \\ \hline * & * & \cdots & * \end{array}, i = 1, 2, \dots, r \\
 &\quad \mu_i \times \mu_i \\
 \mathbf{A}_{ij} &= \begin{array}{ccc} \cdots & & \cdots \\ 0 & & 0 \\ \hline * & \cdots & * \end{array}, i \neq j \\
 &\quad \mu_i \times \mu_j
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_1$$

$$\mathbf{B}_{c2} = \mathbf{PB} = \dots$$

$$\mathbf{B}_r \quad n \times m$$

$$\begin{aligned}
 &\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \end{array} \quad \mu_i \times m \\
 \mathbf{B}_i &=
 \end{aligned}$$

以上各式中的“\*”号表示是可能的非零元素。规范型的系数矩阵  $\mathbf{C}_{c2} = \mathbf{CP}^{-1}$  无特殊形式。

【例 1.16】 考虑以下多变量系统

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -22 & -11 & -4 & 0 \\ -23 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
 \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

试求该系统的龙伯格第二能控规范型。

系统的能控性矩阵

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -18 & 25 & 75 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & 13 & 39 & -56 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & -11 & -97 \\ 1 & 3 & -6 & -18 & 25 & 75 & -90 & -270 \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2]
 \end{aligned}$$

根据行搜索方案,在  $\mathbf{W}_c$  中由左向右选取线性无关的列向量,它们是第 1, 2, 3, 5 列,相应的指标集为  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1$  即选择了  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1$  把它们重新按次序排列得

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 25 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 28 & 11 & -3 & 1 \\ 13 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

选取  $\mathbf{Q}^{-1}$  的第  $\mu_1 = 3$  行和第  $\mu_1 + \mu_2 = 4$  行, 得

$$\mathbf{h} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad \mathbf{h}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

构造坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{h}_1 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

经过计算可得规范型为:

$$\mathbf{A}_{c2} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ \hline -11 & 0 & 0 & -4 \end{array} \quad \mathbf{B}_{c2} = \begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 3 \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\mathbf{C}_{c2} = \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

### 1.5.3 单输入单输出系统的能观测规范型

由于能控性和能观测性的对偶性质, 可以很容易地得出能观测规范型。首先, 仍考虑式 (1.101) 所示的单输入单输出系统。设  $\mathbf{A}$  的特征多项式仍如式 (1.102) 所定义。因为系统完全能观测, 能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \dots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

为非奇异矩阵。定义坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 & \mathbf{c} \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 & \mathbf{cA} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{cA}^{n-2} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.113)$$

作坐标变换

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$$

则可将式 (1.101) 化成能观测规范型。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{z} + \mathbf{h}_0 u \\ y &= \mathbf{c}_0 \mathbf{z} \end{aligned} \quad (1.114)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 = \mathbf{PAP}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_0 = \mathbf{cP}^{-1} &= [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \end{aligned}$$

而  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{Pb}$  没有特殊形式。

与能控规范型类似, 同样地, 根据式(1.114) 中  $\mathbf{A}_0$  的最后一列, 立即可以得出它的特征多项式如式(1.102) 所示。另外, 记  $b_i$  为  $\mathbf{b}_0$  的第  $i$  元素, 通过计算也可以立即得到系统的传递函数

$$G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_0(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}_0 = \frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

【例 1.17】 写出下列系统的能观测规范型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

计算能观测性矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_0 = \mathbf{CA} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{CA}^2 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{W}_0$  非奇异, 系统完全能观测, 系统的特征多项式

$$(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 - 5s + 4$$

计算坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

并计算出

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{Pb} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 1 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

能观测规范型为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{z} \end{aligned}$$

1.5.4 多变量系统能观测规范型

根据对偶原理, 龙伯格第二能观测规范型可以由龙伯格第二能控规范型式(1.106) 对偶

写出。对能观测性矩阵  $\mathbf{W}_0$  的各行按行搜索方案从上往下进行搜索,可得出  $n$  个线性无关的行,并得到一组指标  $\{d_1, \dots, d_q\}$  (设  $\text{rank } \mathbf{C} = q$ ) 称为能观测性指数集。其中最大的一个  $d_j = \max_i d_i$  称为能观测性指数。将这样从  $\mathbf{W}_0$  中挑选出来的  $n$  个行向量,排成如下的非奇异矩阵

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1^{d_1-1} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_q \\ \mathbf{C}_q \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_q^{d_q-1} \mathbf{A} \end{bmatrix} \tag{1.115}$$

并令  $\mathbf{l}_i$  表示  $\mathbf{Q}$  的逆矩阵  $\mathbf{Q}^{-1}$  中的第  $d_j$  列,利用  $\mathbf{l}_i$  构成坐标变换阵。

$$\mathbf{P} = [\mathbf{l}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{l}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{d_1-1}\mathbf{l}_1 \quad \dots \quad \mathbf{l}_q \quad \mathbf{A}\mathbf{l}_q \quad \dots \quad \mathbf{A}^{d_q-1}\mathbf{l}_q] \tag{1.116}$$

则令坐标变换  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}$ , 可以导出龙伯格第二能观测规范型:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_{o2}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{o2}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{o2}\bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{1.117}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{o2} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \dots & \mathbf{A}_{qq} \end{bmatrix}_{n \times n} \\ \mathbf{A}_{ii} &= \begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & * \\ \hline 1 & & & * \\ & \mathbf{W} & & \vdots \\ & & 1 & * \end{array}, \quad i = 1, \dots, q \\ \mathbf{A}_{ij} &= \begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{array}, \quad i \neq j \\ &\hspace{10em} d_i \times d_j \\ \mathbf{C}_{o2} &= \mathbf{C} \mathbf{P} = [\mathbf{C}_1 \quad \dots \quad \mathbf{C}_q] \\ \mathbf{C}_i &= \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & * \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{第 } i \text{ 行} \\ i = 1, \dots, q \end{array} \end{aligned}$$

$\mathbf{B}_{o2} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}$  没有特殊形式。上面各式中“ $*$ ”表示可能的非零元。

【例 1.18】 求下列系统的能观测规范型

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

构造能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^4 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^4 \end{bmatrix}$$

按行搜索方案, 在  $\mathbf{W}_0$  中由上往下逐行选出 5 个线性无关行, 即 1, 2, 3, 4, 5 行, 相应能观测性指数集为  $d_1 = 3, d_2 = 2$ 。将所挑选的各行排成式 (1.115) 的形式, 并求逆得

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \times & \times & -1 & \times & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 \\ \times & \times & 0 & \times & 1 \\ \times & \times & 0 & \times & 1 \\ \times & \times & 0 & \times & 0 \end{bmatrix}$$

其中 “ $\times$ ” 表示  $\mathbf{Q}^{-1}$  中我们不关心的元素。根据式 (1.116) 构造变换矩阵

$$\mathbf{P} = [\mathbf{l}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{l}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{l}_1 \quad \mathbf{l}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{l}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

写出龙伯格第二能观测规范型

$$\mathbf{A}_{o2} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{o2} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{o2} &= \mathbf{C} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最后, 我们指出, 虽然我们只讨论了线性定常连续时间系统的能控和能观测规范型。由于这一通过坐标变换将系统状态空间方程化成相应规范型的过程, 只与矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  的代数结构有关, 本节中所有的结论都完全适合于线性定常离散时间系统。

## § 1.6 线性系统的结构分解

现在我们来讨论不完全能控和不完全能观测的系统。对于这类系统, 通过结构分解, 可以将系统分解成能控能观测, 能控不能观测, 不能控能观测和不能控不能观测等四个部分。研究系统的结构分解, 有助于深入了解系统的结构特性, 也有助于深入揭示状态空间描述和输入输出描述之间的本质区别。

### 1.6.1 能控性和能观测性在坐标变换下的不变性

对系统进行结构分解是通过引入适当的坐标变换进行的。我们有必要首先对系统的能控性和能观测性在坐标变换下的属性进行一些讨论。

首先来看能控性, 设系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是对系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  进行坐标变换后的结果, 即两者之间满足关系:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \quad \mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{B} \quad \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \quad (1.118)$$

其中  $\mathbf{P}$  为非奇异的坐标变换阵。

对于系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 它的能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

而对于进行坐标变换后的系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 它的能控性矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c &= [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \\ &= [\mathbf{P}\mathbf{B} \quad \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{P}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}] \\ &= [\mathbf{P}\mathbf{B} \quad \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{P}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{P}\mathbf{W}_c \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{P}$  是非奇异矩阵, 显然有  $\text{rank } \mathbf{W}_c = \text{rank } \mathbf{W}_c$ 。这就表明坐标变换不改变系统的能控性。再看能观测性在坐标变换下的属性, 为此, 考虑系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

和坐标变换后系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能观测性矩阵:

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CP}^{-1} \\ \mathbf{CP}^{-1} \mathbf{PAP}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{CP}^{-1} \mathbf{PA}^{n-1} \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

显然, 同样成立  $\text{rank } \mathbf{W}_0 = \text{rank } \mathbf{W}_0$ , 因此, 坐标变换也不改变系统的能观测性。

总结以上的讨论, 可见, 对线性系统进行坐标变换既不改变系统的能控性和能观测性, 也不改变它的不完全能控或不完全能观测的程度。这样, 我们就可以采用坐标变换来对系统进行结构分解。

## 1.6.2 线性定常系统按能控性的结构分解

考虑线性多变量定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.119)$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $m$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  为  $p$  维输出向量。系统的能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

假定系统不完全能控, 故有  $\text{rank } \mathbf{W}_c = k < n$ 。在  $\mathbf{W}_c$  中任意选取  $k$  个线性无关的列, 记为  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ , 则  $\mathbf{W}_c$  中任何列都可以由向量组  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  线性表示, 又因为

$$\mathbf{AW}_c = [\mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^n\mathbf{B}]$$

根据式(1.80),  $\mathbf{A}^n$  可以由  $\{\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^{n-2}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{I}\}$  线性表示, 所以  $\mathbf{AW}_c$  中的各列, 均可以由  $\mathbf{W}_c$  中的列线性表示, 特别地, 有  $\mathbf{Aw}_i, i = 1, \dots, k$ , 可以由  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  线性表示。在  $n$  维向量空间中再任意选择  $n - k$  个向量,  $\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ , 使得  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n\}$  为线性无关向量组。构成变换矩阵。

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_k \quad \mathbf{w}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{w}_n] \quad (1.120)$$

并记

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

则由  $\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I}$ , 可以导出

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{w}_j = 0 \quad " i \neq j \quad (1.122)$$

因为若  $j \leq k$ ,  $\mathbf{Aw}_j$  是  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$  的线性组合, 所以由式(1.122)可得到

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{Aw}_j = 0 \quad i = k+1, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k \quad (1.123)$$

若取坐标变换  $\mathbf{z} = \mathbf{Px}$ , 并注意到  $\mathbf{P}^{-1}$  前面  $k$  列中必然包含  $\mathbf{B}$  中各列, 根据式(1.122), 则经坐标变换后的系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  满足:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{PAP}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \mathbf{Aw}_1 & \dots & \mathbf{p}_1^T \mathbf{Aw}_k & \mathbf{p}_1^T \mathbf{Aw}_{k+1} & \dots & \mathbf{p}_1^T \mathbf{Aw}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_k^T \mathbf{Aw}_1 & \dots & \mathbf{p}_k^T \mathbf{Aw}_k & \mathbf{p}_k^T \mathbf{Aw}_{k+1} & \dots & \mathbf{p}_k^T \mathbf{Aw}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{Aw}_1 & \dots & \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{Aw}_k & \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{Aw}_{k+1} & \dots & \mathbf{p}_{k+1}^T \mathbf{Aw}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \mathbf{Aw}_1 & \dots & \mathbf{p}_n^T \mathbf{Aw}_k & \mathbf{p}_n^T \mathbf{Aw}_{k+1} & \dots & \mathbf{p}_n^T \mathbf{Aw}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{np} \end{bmatrix} \quad (1.124)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_k^T \mathbf{B} & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{P}_{k+1}^T \mathbf{B} & \vdots \\ \vdots & 0 \\ \mathbf{P}_n^T \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (1.125)$$

而  $\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P} = [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_{np}]$  没有特殊形式。

根据  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的结构, 可得到按能控性分解的规范形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{C}_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{np} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.126)$$

其中  $\mathbf{x}_c$  为  $k$  维能控分状态向量,  $\mathbf{x}_{np}$  为  $(n - k)$  维不能控分状态向量。式(1.126)表明, 在按能控性结构分解规范下, 系统被分成了  $k$  维子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_{np} + \mathbf{B}_c \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c \end{aligned} \quad (1.127)$$

和  $(n - k)$  维子系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{np} &= \mathbf{A}_{np} \mathbf{x}_{np} \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}_{np} \mathbf{x}_{np} \end{aligned} \quad (1.128)$$

而  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ 。图 1.7 显示了能控性规范分解的结构图。因为:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_c \\ 0 & \mathbf{A}_{np} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以对系统式(1.126) 的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  成立

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c & \dots & \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

因为  $\mathbf{A}_c$  是  $(k \times k)$  维方阵, 根据 Cayley - Hamilton 定理,  $\mathbf{A}_c^k \mathbf{B}_c, \mathbf{A}_c^{k+1} \mathbf{B}_c, \dots, \mathbf{A}_c^{n-1} \mathbf{B}_c$  均可表为  $\{\mathbf{B}_c, \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c, \dots, \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{B}_c\}$  的线性组合, 又因为坐标变换不改变系统的能控性, 故有  $\text{rank } \mathbf{W}_c = \text{rank } \mathbf{W}_c = k$ , 由式(1.129) 可以导出

$$\begin{aligned} k &= \text{rank } \mathbf{W}_c \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c & \dots & \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} [\mathbf{B}_c \quad \mathbf{A}_c \mathbf{B}_c \quad \dots \quad \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{B}_c] \end{aligned} \quad (1.130)$$

可见, 由  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$  组成的子系统是完全能控的。这就是我们称  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$  为能控子系统, 称  $\mathbf{x}_c$  为能控分状态向量的原因。而另一方面由式(1.128) 可见, 关于  $\mathbf{x}_{np}$  的  $(n - k)$  维子系统与系统式(1.119) 输入  $\mathbf{u}(t)$  无关, 当然是不能控的, 所以  $\mathbf{x}_{np}$  是系统的不能控分状态向量。由图

1.7 可见,不能控子系统不能由外部作用所影响,它仅通过  $\mathbf{A}_{12}$  影响能控子系统。这样整个系统的分析等价于两个低维系统的分析。

下面讨论系统式(1.126) 的传递函数矩阵。根据分块矩阵求逆公式

图 1.7 能控性规范分解的结构图

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c & -\mathbf{A}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nc} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{A}_{12}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nc})^{-1} \\ 0 & (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nc})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.131}$$

立即可以得到

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c \tag{1.132}$$

上式说明式(1.119) 所表示的整个系统的传递函数矩阵,等于它的能控子系统的传递函数矩阵。因此,如果仅仅是从外部特性来观察系统式(1.119) 时,可通过分析它的能控子系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  来代替,而后者的维数降低了。另一方面,

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c & -\mathbf{A}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nc} \end{bmatrix} \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{nc}) \end{aligned} \tag{1.133}$$

上式表明,不完全能控的系统式(1.119) 的特征值由两部分组成:一部分为  $\mathbf{A}_c$  的  $k$  个特征值,称为系统的能控因子或能控振型;另一部分是  $\mathbf{A}_{nc}$  的  $(n - k)$  个特征值,称为系统的不能控因子或不能控振型。在后面的第二章中,我们将会看到,外部输入  $\mathbf{u}$  的引入只能改变能控振型在复平面上的位置,而不能改变不能控振型的位置。

**【例 1.19】** 给定线性系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y &= [1 \ 0 \ 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

求它的按能控性结构分解。

根据秩判据

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

可见系统不完全能控。在能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  中选取线性无关的列向量。

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

再补充向量

$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

便构成非奇异矩阵

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求逆得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

可以计算出

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{CP}^{-1} = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 2 \quad 1] \end{aligned}$$

系统的能控性规范分解为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{nc} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y &= [0 \quad 2 \mid 1] \begin{bmatrix} x_c \\ x_{nc} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1 .6 .3 线性定常系统按能观测性的结构分解

系统按能观测性的结构分解的所有结论,都对偶于系统按能控性的结构分解的结果。仍然考虑式(1 .119) 所示的线性多变量系统,系统的能观测性矩阵为

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

假定系统为不完全能观测, 因此有  $\text{rank } \mathbf{W}_0 = l < n$ 。在  $\mathbf{W}_0$  中任意选取  $l$  个线性无关的行向量  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_l$ , 此外再取  $n - l$  个与之线性无关的行向量  $\mathbf{h}_{l+1}, \dots, \mathbf{h}_n$ 。构成非奇异的坐标变换阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_l \\ \mathbf{h}_{l+1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n \end{bmatrix} \tag{1.134}$$

利用  $\mathbf{T}$  对系统式(1.119) 进行坐标变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ , 可得系统按能观测性的结构分解。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_o &= \mathbf{A}_o \mathbf{z}_o + \mathbf{B}_o \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{z}}_{no} &= \mathbf{A}_{21} \mathbf{z}_o + \mathbf{A}_{no} \mathbf{z}_{no} + \mathbf{B}_{no} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_o \mathbf{z}_o \end{aligned} \tag{1.135}$$

其中  $\mathbf{z}_o$  为  $l$  维能观测分状态向量,  $\mathbf{z}_{no}$  为  $n - l$  维不能观测分状态向量。并且类似前面按能控性结构分解中所采用的办法, 可以证明

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o \\ \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \\ \vdots \\ \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o^{l-1} \end{bmatrix} = l \tag{1.136}$$

以及系统的传递函数矩阵。

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1} \mathbf{B}_o \tag{1.137}$$

由式(1.135), 可以分别写出两个系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_o &= \mathbf{A}_o \mathbf{z}_o + \mathbf{B}_o \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_o \mathbf{z}_o \end{aligned} \tag{1.138}$$

$$\dot{\mathbf{z}}_{no} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{z}_o + \mathbf{A}_{no} \mathbf{z}_{no} + \mathbf{B}_{no} \mathbf{u} \tag{1.139}$$

按能观测性的结构分解结构图如图 1.8 所示。

系统(1.135) 的输出为:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{z}_o \\ \mathbf{z}_{no} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_o \mathbf{z}_o \\ &= \mathbf{C}_o e^{\mathbf{A}_o(t-t_0)} \mathbf{z}_o(t_0) + \mathbf{C}_o \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_o(t-\tau)} \mathbf{B}_o \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

图 1.8 能观测性规范分解结构图

它表明, 系统的输出就是能观测子系统  $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o)$  在相同输入  $\mathbf{u}(t)$  和初始状态  $\mathbf{z}_o(t_0)$  条件下的输出, 与不能观测的状态  $\mathbf{z}_{no}$  的初值无关。

### 1.6.4 线性定常系统结构的规范分解

综合前面所论述的按能控性分解和按能观测性分解, 可以得到线性定常系统结构的规范

分解。考虑式(1.119)所示的多变量系统。假定系统是不完全能控和不完全能观测的。先将系统按能控性分解得到如式(1.126)所示的能控规范分解形式,再分别将所导出的能控部分式(1.127),和不能控部分式(1.128)进行按能观测性分解,可以得到系统结构的规范分解。

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{coo} \\ \dot{x}_{cno} \\ \dot{x}_{cnoo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{co} & 0 \\ A_{21} & A_{coo} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{coo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & A_{24} \\ A_{33} & 0 \\ A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{cno} \\ x_{cnoo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{coo} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
 &y = \begin{bmatrix} C_{co} & 0 & C_{cno} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{coo} \\ x_{cno} \\ x_{cnoo} \end{bmatrix} \tag{1.140}
 \end{aligned}$$

其中, $x_{co}$ 是能控且能观测分状态,即  $(A_{co}, B_{co}, C_{co})$  既完全能控又完全能观测; $x_{coo}$ 是能控但不能观测分状态,即  $(A_{co}, B_{co})$  完全能控; $x_{cno}$ 是不能控但能观测分状态,即  $(A_{cno}, C_{cno})$  完全能观测; $x_{cnoo}$ 是不能控且不能观测分状态。

对不完全能控又不完全能观测的线性定常系统式(1.119),它的传递函数矩阵只能反映系统中能控且能观测的那一部分,即

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C_{co}(sI - A_{co})^{-1}B_{co} \tag{1.141}$$

显然,一般的输入输出描述,如传递函数矩阵,只是对系统结构的一种不完全描述。只有对完全能控且完全能观测的系统,输入输出描述才是完全的。

**【例 1 20】** 考虑线性定常系统

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
 y &= [0 \quad 1 \quad -2] \mathbf{x}
 \end{aligned}$$

的规范分解。

首先将系统按能控性分解,为此,先构造能控性矩阵。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_c &= [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \mathbf{W}_c = 2
 \end{aligned}$$

系统不能控。选取  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}$ , 并选  $\mathbf{w}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ , 构成非奇异阵

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{w}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

按能控性分解的规范形式中各矩阵为:

$$\mathbf{A} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{Pb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{cP}^{-1} = [1 \quad -1 \quad -2]$$

故能控性分解规范型为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_c \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.142)$$

其中能控子系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} u \\ y_1 &= [1 \quad -1] x_c \end{aligned}$$

的能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } \mathbf{W}_0 = 1$$

所以能控子系统是不完全能观测的, 在  $\mathbf{W}_0$  中选择第一行  $\mathbf{c}$ , 并令  $\mathbf{h} = [0 \quad 1]$ , 则构成非奇异矩阵

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另一方面一维不能控子系统显然是能观测的, 可令其变换阵  $T_2 = 1$ 。将  $\mathbf{T}_1$  和  $T_2$  构成分块对角阵。

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

引入坐标变换  $\bar{x} = \mathbf{T}_{12}x$ , 对系统(1.142) 进行按能观测性分解得:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \mathbf{T}_{12} \mathbf{A} \mathbf{T}_{12}^{-1} \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} &= \mathbf{T}_{12} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{y} &= \mathbf{c} \mathbf{T}_{12}^{-1} \bar{x} = [1 \quad 0 \quad -2] \bar{x} \end{aligned}$$

故系统结构分解规范形式为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \bar{y} &= [\bar{x}_{co} \quad \bar{x}_{no}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

其中  $x_1$  为能控且能观测的状态;  $x_2$  为能控不能观测的状态;  $x_3$  为不能控但能观测的状态。

### 1.6.5 能控性能观测性与传递函数

在前面的讨论中我们知道,对于单输入单输出系统,如果系统不是完全能控或不完全能观测,则整个系统的传递函数与它的既能控又能观测子系统的传递函数一致,即式(1.141)成立。由于后者的阶次显然小于前者,因此,这说明了在系统传递函数的计算过程中分子和分母具有相同的因子,产生了零点和极点对消的情况,我们称这种情况为零极对消。

考虑单输入单输出系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.143}$$

根据前面关于结构分解与传递函数的关系,立即可以得到以下结论:

单输入单输出线性定常系统式(1.143)为完全能控且完全能观测的充要条件是它的传递函数  $G(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$  中没有零极相消。

如果  $G(s)$  中产生了零极相消,则系统为不完全能控或(与)不完全能观测。具体说来,可以有:

- 1.如果在  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  中产生零极相消,则对应的振型(即被消去的极点)必是既不能控又不能观测的。
- 2.如果在  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$  中产生零极相消,则对应的振型(即被消去的极点)必是不能控的,而相应的零点称为输入解耦零点。
- 3.如果在  $\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  中产生零极相消,则对应的振型(即被消去的极点)是不能观测的,而相应的零点称为输出解耦零点。

**【例 1.21】** 考虑单输入单输出系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

系统的能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

的秩为 1,系统不完全能控。计算可得

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} &= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} (s+2) & 0 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+4)} \begin{bmatrix} -2(s+2) \\ s+2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

显然  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$  产生了零极相消,消去了极点  $-2$ ,  $s = -2$  对应于不能控振型。

以上仅是考虑单输入单输出系统的情况,对于多输入多输出系统,相应的情况要复杂得多。本书不打算就此进行深入讨论,感兴趣的读者请参考有关文献。

另一方面,对于传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  表示的系统,我们也可以得到它的状态空间描述  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , 并称  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  为  $\mathbf{G}(s)$  的实现。若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  在  $\mathbf{G}(s)$  的所有

实现中具有最小的维数,则称它为  $G(s)$  的最小实现。显然,如果  $(A, B, C, D)$  是完全能控且完全能观测的,则它必定是  $G(s)$  的最小实现。

## § 1.7 线性系统的稳定性

在反馈控制系统的分析与设计中,系统的稳定性是首先需要考虑的问题之一,它关系到系统能否正常工作。在古典控制理论中,以大量的篇幅讨论了单输入单输出系统的稳定性,给出一系列关于系统稳定性的判据,并据此发展了相应的系统设计方法。

根据系统设计中的不同要求,有不同的稳定性概念,其中最重要的是有界输入有界输出稳定性和运动稳定性概念。我们在本节中将讨论这两类稳定性问题。

### 1.7.1 运动稳定性

在研究运动稳定性时,常限于研究没有外输入作用的系统,通常称这类系统为自治系统。线性定常自治系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1.144}$$

在自治系统(1.144)中,如果存在对所有时间  $t$  都满足  $\dot{\mathbf{x}} = 0$  的状态  $\mathbf{x}_e$ ,则  $\mathbf{x}_e$  称为系统的平衡状态,简称平衡态。对于系统式(1.144),平衡态  $\mathbf{x}_e$  是方程

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0 \tag{1.145}$$

的解。显然  $\mathbf{x}_e = 0$  是系统式(1.144)的平衡态,若  $\mathbf{A}$  为非奇异,则它还是唯一的平衡态。今后,不失一般性,我们都考虑在平衡态  $\mathbf{x}_e = 0$  附近系统的运动稳定性。

运动稳定性就是考虑在没有外部作用下的自治系统式(1.144)的平衡态的稳定性,也即偏离平衡态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构因素而返回到平衡态,或者限制在它的一个有限邻域内。

在考察系统式(1.144)的运动关于平衡态  $\mathbf{x}_e = 0$  的稳定性时,可以取运动  $\mathbf{x}(t)$  和该平衡态的距离作为衡量指标,在赋范空间中,这一距离可表示为范数  $\|\mathbf{x}(t)\|$ 。按此范数是无界,有界或趋于零,分别定义平衡态为不稳定,稳定或渐近稳定。

李雅普诺夫意义下稳定:对于式(1.144)所示系统,如果对于任一有限初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$ ,系统的状态轨线  $\mathbf{x}(t)$  都是有界的,即

$$\|\mathbf{x}(t)\| < M \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.146}$$

其中  $M$  为一有界常数,则称系统的平衡态  $\mathbf{x}_e = 0$  是在李雅普诺夫意义下稳定的。

渐近稳定:如果系统式(1.144)是在李雅普诺夫意义下稳定,且当  $t \rightarrow \infty$  时能够收敛于平衡态  $\mathbf{x}_e = 0$ ,即式(1.146)成立,且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0 \tag{1.147}$$

则称系统的平衡态  $\mathbf{x}_e = 0$  是渐近稳定的。

如果系统式(1.144)既非渐近稳定的,又非在李雅普诺夫意义下稳定的,这就意味着必存在某一初态  $\mathbf{x}(t_0)$ ,使系统的状态向量  $\mathbf{x}(t)$  中某些分量随着时间  $t$  而无限增长,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty \tag{1.148}$$

这样的系统称为不稳定系统。在实际系统中,由于物理元件的限制(如输出电压只能在零和电源电压之间变化),不稳定系统的状态变量不可能趋向无穷大,而是达到某一值之后就不再增

加了。但是, 既使这样, 已阻碍了控制系统的正常工作, 在某些场合, 还会产生严重的生产事故。因此, 不稳定的系统是不能正常工作的。图 1.9 给出了二维空间中稳定, 渐近稳定和 unstable 系统的典型状态轨线。

(a) 李雅普诺夫意义下稳定      (b) 渐近稳定      (c) 不稳定  
图 1.9 系统稳定性

系统式(1.144) 的解为:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \tag{1.149}$$

其中, 矩阵指数函数

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= L^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= L^{-1} \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \end{aligned} \tag{1.150}$$

设  $\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  则特征多项式

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) \tag{1.151}$$

根据拉氏变换性质可知,  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  中各元素都是以  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  为分母的有理函数。通过部分分式分解, 它们可表示为  $\frac{1}{s - \lambda_i}$  的线性组合。由于  $L^{-1} \frac{1}{s - \lambda_i} = e^{\lambda_i t}$ , 根据式(1.150) 与式(1.149),  $\mathbf{x}(t)$  的第  $i$  分量可表示为  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  的线性组合, 即

$$x_i(t) = c_{i1} e^{\lambda_1(t-t_0)} + \dots + c_{in} e^{\lambda_n(t-t_0)} \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.152}$$

根据指数函数  $e^{\lambda t}$  的性质, 我们知道线性定常系统式(1.144) 为渐近稳定的充要条件是: 矩阵  $\mathbf{A}$  的全部特征值都具有负实部, 或者说,  $\mathbf{A}$  的全部特征值都在复平面上的左半平面(不包括  $j\omega$  轴)。

以上的推导是示意性的, 并没有考虑  $\mathbf{A}$  有重特征值的情况。但是, 如果  $\mathbf{A}$  有重特征值, 即  $\mathbf{A}$  的特征方程式有重根, 我们也可以得到同样的结论。

如果  $\mathbf{A}$  除具有负实部的特征值以外, 还有实部为零的特征值, 只要这些实部为零的特征值是  $\mathbf{A}$  的最小多项式的单根, 则系统是在李雅普诺夫意义下稳定的。

李雅普诺夫第二方法是检验系统稳定性的重要工具之一, 它的基本思想是: 考虑没有外力作用的自治系统, 假定  $\mathbf{x}_e = 0$  是系统的平衡态, 对于该系统, 首先定义一个相应于系统总能量的某个函数, 这个函数在原点处为零, 而在其它各处都大于零。进一步假定, 原来处于平衡态的系统受到微小的扰动而进入一个非零初始状态。如果系统的动力学特性使得这个能量函数不随时间增长而增加, 则系统的能量就不会超过其初始值, 这足以说明系统是李雅普诺夫意义下稳定的。如果该能量函数随着时间的增长而单调衰减, 且最终趋于零, 则可以得出系统的平衡态是渐近稳定的结论。这一能量函数称为李雅普诺夫函数。

李雅普诺夫第二方法不仅适用于线性系统, 而且也适用于非线性系统。但是, 我们在此仅

将它用于线性定常系统的稳定性分析。

对于线性定常系统式(1.144), 我们定义一个状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的正定二次型标量函数

$$V[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (1.153)$$

其中  $\mathbf{P}$  是  $n \times n$  维对称正定阵。显然,  $V[\mathbf{x}(t)]$  满足  $V(0) = 0, V[\mathbf{x}(t)] > 0, \forall \mathbf{x}(t) \neq 0$ , 符合能量函数的要求。为考察能量函数  $V[\mathbf{x}(t)]$  随时间的变化情况, 我们来看  $V[\mathbf{x}(t)]$  关于时间的导数

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V[\mathbf{x}(t)] &= \frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t)] = \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t) \\ &= [\mathbf{A} \mathbf{x}(t)]^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} [\mathbf{A} \mathbf{x}(t)] \\ &= \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1.154)$$

由上式可见, 若  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$  是一个负定阵, 则  $\frac{d}{dt} V[\mathbf{x}(t)] < 0$ , 即随着时间的增加,  $V[\mathbf{x}(t)]$  将单调衰减, 系统为渐近稳定。因此, 在检验线性定常系统的稳定性时, 可以首先指定一个正定矩阵  $\mathbf{Q}$  (例如取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ), 然后由李雅普诺夫方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

中解出  $\mathbf{P}$ , 并检验  $\mathbf{P}$  是否是正定矩阵, 若  $\mathbf{P}$  是正定阵, 则系统式(1.144) 必是渐近稳定的。

### 1.7.2 有界输入有界输出稳定性

前面所介绍的运动稳定性, 考虑的是没有外加输入的自治系统, 它所关心的是系统内部状态的自由运动, 因此, 它属于内部稳定性。下面我们考虑有外部输入的系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.155)$$

一般来说, 我们希望当系统的输入是有界时, 系统的输出也是有界的, (英文简称为 BIBO), 下面, 我们首先给出这方面的定义。

**有界输入有界输出(BIBO) 稳定性:** 对线性因果系统, 如果在零初始条件下, 对于任何一个有界的输入  $\mathbf{u}(t)$ , 即对满足条件

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq k_1, \quad t_0 \leq t < \infty \quad (1.156)$$

的输入  $\mathbf{u}(t)$ , 所产生系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  也是有界的, 即成立

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq k_2, \quad t_0 \leq t < \infty \quad (1.157)$$

则称该系统是有界输入有界输出稳定, 简称为 BIBO 稳定。

必须指出, 在以上定义中, 我们假定了系统的初始条件为零, 只有在这一基本假设下, 系统的输入输出描述才是唯一的。下面给出基于系统传递函数矩阵的判据。

**BIBO 稳定性判据:** 对于零初始条件的线性定常系统式(1.155), 若它的传递函数矩阵

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (1.158)$$

中每一个元素的极点(即分母多项式的根) 都具有负实部, 则系统为 BIBO 稳定。

对于式(1.155) 所示的线性定常系统, 它的渐近稳定性要求  $\mathbf{A}$  的所有特征值具有负实部, 而它的 BIBO 稳定性则要求式(1.158) 所定义的  $\mathbf{G}(s)$  中各元素的极点具有负实部。这样, 我们立即可以得到以下结论:

线性定常系统如果是渐近稳定的, 则它必是 BIBO 稳定的。

反过来, 如果线性定常系统是 BIBO 稳定的, 则系统不一定是渐近稳定的。这是因为如果系统式(1.155) 是不完全能控或(与) 不完全能观测的, 则系统的传递函数矩阵只与系统的能

控且能观测的子系统有关,系统的其余三个部分的运动状态不能反映出来。BIBO 稳定只能意味着能控且能观测的子系统是渐近稳定的,而若其余的子系统,例如不能控的子系统,是不稳定的,则在 BIBO 稳定性中并不能体现出来。因此, BIBO 稳定并不意味着渐近稳定。

### 1.7.3 离散时间系统的稳定性

考虑线性定常离散时间系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{1.159}$$

在零输入下,可以得到关于状态向量  $\mathbf{x}(k)$  的齐次状态方程

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \tag{1.160}$$

对式(1.160)所示自治系统,同样可以定义满足  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_e = 0$  的解是它的平衡态,显然,  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  是它的一个平衡态,若  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$  奇异,它还可能其它的平衡态,不失一般性,今后我们只考虑在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  这一平衡态的运动稳定性。

相应于零平衡态,如同在前面连续时间系统式(1.144)中所讨论的一样,可以定义离散时间系统式(1.160)的在李雅普诺夫意义下的稳定性和渐近稳定性,只是将式(1.146)和式(1.147)中  $\mathbf{x}(t)$  换成  $\mathbf{x}(k)$ ,并将式(1.147)中极限换成  $k \rightarrow \infty$  即可。下面我们考虑式(1.160)所示的自治系统的渐近稳定性和李雅普诺夫意义下的稳定性。方程式(1.160)的解为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) \tag{1.161}$$

注意到  $\mathbf{A}^k = \mathcal{Z}^{-1}\{(\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{z}\}$ ,类似在连续时间系统中的推导过程,设  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  是  $\mathbf{A}$  的特征值,可得  $\mathbf{x}(k)$  的第  $i$  分量  $x_i(k)$  满足

$$x_i(k) = \lambda_{i1}^k + \dots + \lambda_{in}^k \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.162}$$

由之可得离散时间系统式(1.160)的稳定性判据:

离散时间系统式(1.160)为渐近稳定的充要条件是  $\mathbf{A}$  的所有特征值的模均小于 1,即

$$|\lambda_i| < 1 \quad i = 1, \dots, n \tag{1.163}$$

或者说,  $\mathbf{A}$  的所有特征值都位于复平面上的单位圆内。另一方面,系统式(1.160)为在李雅普诺夫意义下稳定的充要条件是  $\mathbf{A}$  的所有特征值的模均小于或等于 1,并且  $\mathbf{A}$  的模为 1 的特征值必须是它的最小多项式的单根。

类似连续时间系统,也可以定义离散时间系统式(1.159)的有界输入有界输出稳定性。离散时间系统式(1.159)为有界输入有界输出(BIBO)稳定的充要条件是它的脉冲传递函数矩阵

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C}(\mathbf{z}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \tag{1.164}$$

中所有元素的极点的模均小于 1。同样系统式(1.159)的渐近稳定性保证了它的 BIBO 稳定性。但是,反过来,系统(1.159)的 BIBO 稳定并不意味着它的渐近稳定。其原因还是系统的不能控或(与)不能观测的子系统在它的脉冲传递函数矩阵中没有得到反映。

根据离散时间的李雅普诺夫定理,我们还可以证明,若离散时间李雅普诺夫方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \tag{1.165}$$

其中  $\mathbf{Q}$  为正定对称阵,有唯一解,并且解  $\mathbf{P}$  是一正定对称阵,则系统式(1.159)为渐近稳定。

## 习 题

1.1 RLC 电路如图 1.10 所示, 电路的输入为电压  $u_r(t)$ , 输出为电压  $u_c(t)$ , 试确定系统的状态空间描述。

1.2 描述系统的微分方程式如下, 试写出系统的状态空间描述。

$$(1) y^{(3)} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} + 7y = 6u$$

$$(2) 2y^{(3)} - 3\ddot{y} = \ddot{u} - 2u$$

$$(3) y^{(3)} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160u + 640\dot{u}$$

图 1.10 题 1.1 的图

$$(4) y^{(3)} + 2\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = u^{(3)} + 2\ddot{u} + 3\dot{u} + u$$

1.3 描述系统的传递函数如下, 试写出它的状态空间描述。

$$(1) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$(2) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 3s + 5}{s^3 + 7s + 2}$$

$$(3) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 5}{s^3 + 7s^2 + 8s + 9}$$

1.4 设系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned}$$

试求系统的传递函数矩阵。

1.5 已知系统的状态空间描述:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 3] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(1) 系统的传递函数描述

(2) 若取坐标变换

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

试求变换后的系统的状态空间描述和传递函数描述, 并与原系统进行比较。

1.6 试求下列用状态空间方程描述的系统的解。

$$(1) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u = e^{-t} \quad t \geq 0$$

1.7 已知系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  的状态转移矩阵为:

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

试确定系数矩阵 **A**。

1.8 已知系统的状态空间描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

试求在  $u(t) = 1(t)$  [即  $u(t)$  为单位阶跃输入] 下系统的输出  $y(t)$ 。

1.9 已知离散时间系统的状态空间描述

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.16 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试求系统在单位阶跃输入序列 [即  $u(k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots$ ] 作用下的状态响应  $\mathbf{x}(k)$ 。

1.10 已知连续时间状态空间方程为：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 1] \mathbf{x}$$

设保持器是零阶的, 并取采样周期  $T = 1$ , 试求它的离散化系统的状态空间方程。

1.11 判断以下系统 (**A**, **B**, **C**) 的能控性和能观测性

(1)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$

(2)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1 \quad 1]$

1.12 将下列系统 (**A**, **B**, **C**) 化成能控规范型并求出相应的坐标变换阵。

(1)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$

(2)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$

(3)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$

(4)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.13 将下列系统 (**A**, **B**, **C**) 化成能观测规范型, 并求出相应坐标换阵。

(1)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad 0]$

(2)  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

#### 1.14 对单输入的离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为标量输入,  $\mathbf{A}$  为非奇异定常阵。试证明, 当系统为完全能控时, 若控制序列具有以下形式:

$$\begin{aligned} & u(0) \\ & u(1) \\ & \dots \\ & u(n-1) \end{aligned} = - [\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^{-2}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{-n}\mathbf{b}]^{-1} \mathbf{x}(0)$$

可保证在  $n$  步内将任意状态  $\mathbf{x}(0)$  转移到原点。

#### 1.15 对下列线性定常系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = & [1 \quad -1 \quad 1] \mathbf{x} \end{aligned}$$

分别按能控性和能观测性结构分解, 并分别找出它的不能控子系统和不能观测子系统。

#### 1.16 对线性定常系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = & [3 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

分别找出它的能控且能观测, 能控不能观测, 不能控能观测, 不能控不能观测子系统, 并写出系统的传递函数。

#### 1.17 考虑连续时间系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -k & 0 & -1 & k \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

试求出为保证系统的渐近稳定性, 参数  $k$  的取值范围, 并确定这时的系统是否也为 BIBO 稳定。

#### 1.18 给定离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

试判定系统的渐近稳定性。



## 第二章 线性反馈系统的状态空间综合

任何一个系统都有特定的任务或性能要求,当一个系统不能满足期望的性能或不能完成所规定的任务时,就需要寻找并确定适当的控制规律对系统进行干预、调节或控制来改变原有系统,使改变后的系统满足所规定的任务或性能要求。这一过程称为控制系统的综合与设计。

控制律的选取有两大类,即开环控制律与反馈控制律。开环控制律不利用系统中变量的信息,在形式上表现为关于时间的特定的一元函数,当系统模型具有不确定性或当系统环境变化时,将会极大地影响开环控制系统的控制效果。反馈控制律将受控对象的输入即控制信号,设计为系统状态(或输出)与参考输入信号的函数,它能“敏感”系统变量的变化,实现相应的调节,因而具有对系统模型的不确定性和系统扰动的抗御能力,得到了广泛的应用。

控制系统综合与设计的要求,通常以性能指标的形式表示,它是希望系统所具有的性能和任务要求的确切描述。性能指标分为优化型指标与非优化型指标两大类。性能指标的不同决定了控制系统综合与设计问题的不同。优化型指标是一类极值型指标,综合的目的是要选择控制规律,使得性能指标取极值。我们将在最优控制篇内介绍这类控制系统的综合与设计问题。非优化指标通常是一类不等式形式的指标,即只要系统性能值达到或好于性能指标就算实现了综合目标。非优化指标注重的是反馈控制系统的某种性能,而与动态优化无关,例如本章中所要介绍的极点配置问题,以一组希望的闭环极点为目标,反映了对系统的稳定性和动态响应的快速性的要求,把闭环极点组配置到所希望的位置,实际上就是使综合所得到的系统的动态性能达到期望的要求。

在一个实际系统的综合中,可能对控制系统提出各种各样的要求,换句话说,控制系统综合过程通常是一个多目标的综合问题。对这类问题目前采用的主要方法是在保证闭环系统渐近稳定性的前提下,逐步予以解决。下一章中,我们将看到这一问题的一类解决方案。

虽然在许多场合下,控制系统综合与控制系统设计这两个名词可以混淆使用。但是严格来说,两者还是有区别的。一般说来,控制系统综合是根据受控对象的结构与参数以及期望的系统性能,在理论上确定施加于受控对象上的控制规律与参数。而控制系统设计则主要解决采用何种方式和什么样的器件实现这一控制规律,使系统满足性能指标的要求。在控制系统设计中还要考虑抗干扰问题、经济问题、物理可实现问题等一系列工程问题。

### § 2.1 反馈控制结构及其对系统特性的影响

反馈控制就是将作为控制结果的系统某些变量的检测值送回到系统的输入端,作为修改控制量的依据。若控制结果是满意的,就保持控制量不变,否则,则对控制量作适当的修正以使系统的控制结果达到期望的状态。反馈控制大大地改善了系统的品质,无论在经典控制理论还是在现代控制理论中,反馈控制都是控制系统的主要方式。古典控制论中通常只能取系统输出量作为反馈量,而现代控制理论中可以采用状态反馈和输出反馈两种控制方式。

2 .1 .1 状态反馈和输出反馈

状态反馈是一线性反馈控制律,构成状态反馈的前提是受控对象的状态可以直接量测到。考虑  $n$  维线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2 .1}$$

其中  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$  分别为  $n$  维状态向量,  $m$  维输入向量和  $p$  维输出向量。对于式(2 .1) 所示系统,状态反馈具有以下形式:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{2 .2}$$

式中  $\mathbf{v}$  是  $m$  维系统参考输入向量,  $\mathbf{K}$  是  $(m \times n)$  维定常矩阵,称为反馈增益阵。状态反馈控制系统的方块图如图 2 .1 所示。

将式(2 .2) 代入式(2 .1),可得到采用状态反馈后闭环系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2 .3}$$

图 2 .1 状态反馈控制系统

可见状态反馈将开环系统状态方程式(2 .1) 中的系数矩阵  $\mathbf{A}$ , 变成了闭环系统状态方程式(2 .3) 中的  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ , 从而改变了系统的动态响应速度。由式(2 .3) 知系统输出方程没有变化。闭环系统(2 .3) 的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_K(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B} \tag{2 .4}$$

系统的状态变量属于系统的内部变量,它们通常不能全部测量到。而在一般情况下,能直接测量的只是系统的输出变量,为此,通常采用的反馈控制方法是输出反馈:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{y} \tag{2 .5}$$

其中  $(m \times p)$  维定常实矩阵  $\mathbf{F}$  称为输出反馈增益矩阵,  $\mathbf{v}$  是  $m$  维系统参考输入向量。

式(2 .5) 所示的输出反馈中,控制量  $\mathbf{u}$  是输出量  $\mathbf{y}$  的线性组合,因此又称为输出静态反馈,以别于今后要介绍的输出动态反馈。加入输出反馈后,系统的结构图如图 2 .2 所示。

图 2 .2 输出反馈控制系统

由式(2 .5) 可导出输出反馈闭环控制系统的状态空间描述:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BFC})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2 .6}$$

它的传递函数矩阵为:

$$\mathbf{G}_F(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BFC})^{-1} \mathbf{B} \tag{2 .7}$$

虽然输出反馈和状态反馈一样,都可以改变闭环系统状态方程的系数矩阵,但二者的控制效果则不尽相同。由于系统状态向量可以完整地表征系统的动态行为,在状态反馈控制中,关于系统的信息量是完整的,所以状态反馈控制律通常可取得较满意的控制效果,例如实现闭环系统极点的任意配置等。而输出反馈仅利用了系统的输出,而系统输出通常并不是系统动态行为的完整表征,因此,输出反馈所利用的关于系统的信息是不完整的,这就使得它有时不能达到令人满意的控制效果。事实上,由控制律式(2 .2) 和式(2 .5) 可以看出,当满足等式:

$$\mathbf{K} = \mathbf{FC} \tag{2 .8}$$

时,输出反馈控制就与状态反馈控制一致。因此,凡是通过  $\mathbf{F}$  的输出反馈所能达到的效果,只要取  $\mathbf{K} = \mathbf{FC}$  的状态反馈就可以达到。但是反过来,给定  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{C}$ ,在式(2.8)中不一定能解出  $\mathbf{F}$  来,因此状态反馈能实现的功能,输出反馈则不一定能达到。由于实际系统中有些状态变量不能测量或者不便于测量,为了能实现状态反馈,可以采用状态重构的概念,即引入状态观测器,利用系统的可测量的输出  $\mathbf{y}$  和输入  $\mathbf{u}$  来重构系统状态  $\mathbf{x}$ ,并据此实现状态反馈。在本章中我们将介绍这一方法。

### 2.1.2 输出动态反馈

前面所介绍的输出反馈式(2.5),在反馈控制系统中不含动态补偿器,因此又称为输出静态反馈。如果在反馈控制系统中引入动态补偿器,则构成输出动态反馈

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{Rz} + \mathbf{Sy} + \mathbf{Tv} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{Lz} + \mathbf{My} + \mathbf{Nv} \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中  $\mathbf{z}$  为  $q$  维动态补偿器的状态向量,  $q$  称为动态补偿器的阶次;  $\mathbf{v}$  是  $m$  维外部参考输入。 $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{M}$  和  $\mathbf{N}$  为适当阶次的参数矩阵。特别地,当维数  $q = 0$  时,输出动态反馈控制律式(2.9)就变成输出静态反馈控制律式(2.5)。

定义增广状态向量  $\mathbf{x}_e = [\mathbf{x}^T, \mathbf{z}^T]^T$ , 可以写出将输出动态反馈控制律式(2.9)施加于系统式(2.1)后所得到的闭环系统状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_e \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e \end{aligned} \tag{2.10}$$

其中

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BMC} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{SC} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{BN} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \tag{2.11}$$

它的结构图如图 2.3 所示。

图 2.3 输出动态反馈控制系统

定义

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

其中  $\mathbf{u}_e$  和  $\mathbf{y}_e$  均为  $q$  维列向量。并引入矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{R} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

则线性定常系统式(2.1) 在输出动态反馈式(2.9) 下的控制作用, 等价于增广系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{A} \mathbf{x}_e + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_e &= \mathbf{C} \mathbf{x}_e \end{aligned} \quad (2.14)$$

在输出静态反馈

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{K} \mathbf{y}_e + \mathbf{G} \mathbf{v} \quad (2.15)$$

下的控制作用。这是因为, 根据各增广向量和矩阵的定义, 可将系统式(2.14) 和控制律式(2.15) 写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{u}_e \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{z} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{R} \mathbf{y}_2 + \mathbf{S} \mathbf{y} + \mathbf{T} \mathbf{v} \\ \mathbf{u}_e &= \mathbf{L} \mathbf{y}_2 + \mathbf{M} \mathbf{y} + \mathbf{N} \mathbf{v} \end{aligned}$$

化简后, 它显然与线性定常系统式(2.1) 和输出动态反馈律式(2.9) 完全一致。

根据式(2.14) 和式(2.15), 由于动态补偿器的引入, 使系统的输出向量得到了有效的扩充(扩充的输出变量个数等于动态补偿器的维数), 从而使得输出反馈中所包含的信息量得到了扩充, 提高了系统的控制能力。从另一个角度来看, 输出反馈增益阵  $\mathbf{K}$  中待设计参数的增加, 也提高了设计的灵活度, 有可能达到原输出静态反馈控制器所不能实现的控制性能。

根据前面的推导, 一个系统的输出动态反馈控制器的设计问题可以转化为一个增广系统的输出静态反馈控制器的设计问题。我们今后将集中讨论输出静态反馈和状态反馈的问题。

### 2.1.3 反馈控制对能控性和能观测性的影响

反馈的引入, 改变了状态方程中的系数矩阵, 将有可能影响系统的结构特性, 我们先讨论反馈对能控性和能观测性的影响。

采用PBH判据, 对于式(2.2) 所示的状态反馈, 闭环系统状态空间描述式(2.3) 的能控性, 等价于对任意复数  $s$ , 矩阵  $[\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{I} \quad \mathbf{B}]$  的秩均为  $n$ 。同时我们还知道, 使得该矩阵的秩小于  $n$  的复数  $s$ , 即对应着  $\mathbf{A}$  的不能控振型。由于矩阵的基本列变换不改变矩阵的秩, 我们有

$$\text{rank}[\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = \text{rank}[\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \quad (2.16)$$

而后者是判定系统式(2.1) 能控性的 PBH 判据中所采用的矩阵。根据式(2.16) 及 PBH 判据, 我们可以得出结论: 式(2.2) 所示的状态反馈, 不改变系统的能控性。进一步, 还可以知道, 状态反馈不改变系统的不能控的振型。

但是状态反馈不一定能保持系统的能观测性。我们看下面一个例子。

**【例 2.1】** 考察系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 1] \mathbf{x}$$

由于它的能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

易知  $\text{rank } \mathbf{W}_0 = 2$ , 系统能观测。若引入状态反馈

$$\mathbf{u} = -[0 \quad 4] \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

则系统状态反馈后的闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} + \mathbf{Bv} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

它的能观测性矩阵

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然有  $\text{rank } \mathbf{W}_0 = 1 < 2$ , 系统不完全能观测。

根据[例 2.1], 如果选择状态反馈, 造成闭环系统的传递函数中有零极相消, 则有可能造成原来能观测的系统在状态反馈后不能观测。因此, 状态反馈有可能改变系统的能观测性。

对输出反馈, 我们也可以利用 PBH 判据进行类似的讨论。根据列或行基本变换不改变矩阵的秩这一原理, 有

$$\text{rank} [\mathbf{A} - \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = \text{rank} [\mathbf{A} - \mathbf{I} - \mathbf{BFC} \quad \mathbf{B}] \tag{2.17}$$

以及

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{I} - \mathbf{BFC} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

再根据系统能控性和能观测性的 PBH 判据, 我们立即可以得到以下结论:

输出反馈控制律式(2.5) 不改变系统的能控性和能观测性。

## § 2.2 单输入系统的极点配置

根据对线性定常系统的分析可知, 经状态或输出反馈后的闭环系统的特征值或称闭环极点决定了系统的稳定性。换句话说, 线性定常连续时间系统为渐近稳定的, 当且仅当它的所有极点都位于复平面上的开左半平面。进一步分析还可知道, 系统动态响应的过渡过程时间, 也在很大程度上依赖于闭环系统极点的位置。如果受控对象是完全能控的, 采用状态反馈的方法, 可以任意配置系统的闭环极点, 从而可以使得原来不稳定的受控对象为闭环稳定, 或者使得原动态过程十分缓慢的系统加速响应。因此极点配置方法是控制系统综合的重要方法之一。本节中, 我们先考虑单输入系统的极点配置问题。

考虑单输入线性定常受控对象的状态空间描述

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{bu}(t) \tag{2.19}$$

它的特征多项式为

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \tag{2.20}$$

我们希望采用状态反馈来改变这个系统, 以便得到一个具有任意指定闭环极点的新系统。设采用的状态反馈控制律为:

$$\mathbf{u} = v - \mathbf{k}\mathbf{x} \quad (2.21)$$

其中  $v$  为系统外部参考输入,  $\mathbf{k}$  是  $1 \times n$  维待求的状态反馈增益阵;  $\mathbf{k} = [k_0 \ \dots \ k_{n-1}]$ 。

其中  $k_i, i = 0, \dots, n-1$  是待求的  $n$  个未知数。假定待配置的闭环极点集合为  $\{p_1, \dots, p_n\}$  其中  $p_i$  可以是实数, 也可以是以共轭形式成对出现的复数。

令

$$\begin{aligned} \phi^*(s) &= (s - p_1) \dots (s - p_n) \\ &= s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

由于  $p_i$  是实数或按共轭对出现的复数, 因此  $\phi^*(s)$  为实系数多项式。

### 2.2.1 解联立方程式求状态反馈增益阵

根据状态反馈律(2.21) 可以得出闭环系统的特征多项式为:

$$\phi_k(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) = \phi_k(s, k_0, \dots, k_{n-1}) \quad (2.23)$$

它是一个关于  $s$  的多项式, 其  $s$  各次幂的系数是  $\mathbf{k}$  中的元素  $k_0, \dots, k_{n-1}$  的函数。欲通过状态反馈将闭环系统的极点配置到  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , 则由式(2.22) 和式(2.23) 知, 必须成立

$$\phi_k(s, k_0, \dots, k_{n-1}) = \phi^*(s) \quad (2.24)$$

利用两个多项式  $s$  的同次幂所对应系数相等, 可以得到  $n$  个联立的代数方程组, 解这个代数方程组求得  $k_0, \dots, k_{n-1}$  即可得出反馈增益阵  $\mathbf{k}$ 。

这一求极点配置反馈增益阵  $\mathbf{k}$  的方法简单直观。

### 2.2.2 利用能控规范形的极点配置算法

受控对象式(2.19) 在状态反馈控制式(2.21) 的作用下的闭环系统是  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}, \mathbf{b})$ 。我们综合的目标是如何选择状态反馈增益阵  $\mathbf{k}$ , 将  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$  的极点配置在理想的位置上。对于一般的受控对象  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , 很难看出如何选择  $\mathbf{k}$  阵, 但若将  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  经坐标变换阵  $\mathbf{P}$  化成能控规范型  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{b}_c)$  后, 则可以很容易求出使得  $\mathbf{A}_c - \mathbf{b}_c\mathbf{k}$  具有理想极点的状态反馈增益阵  $\mathbf{k}_c$ , 然后再通过坐标变换的关系即可求得原来待求的  $\mathbf{k}$ 。具体方法如下:

设受控对象式(2.19) 是完全能控的, 能控性矩阵  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$  非奇异, 定义非奇异的坐标变换阵:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{b} \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \quad (2.25)$$

其中  $a_i, i = 1, \dots, n-1$  为式(2.20) 所示的矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式的系数, 利用坐标变换  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ , 可以将受控对象(2.19) 变成能控规范型。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}u \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (2.26)$$

引入状态反馈

u = v - kx = v - kP^{-1}v - k\_{\tilde{c}}x\_{\tilde{c}} \tag{2.27}

其中  $k_{\tilde{c}} = [\tilde{c}_0 \ \tilde{c}_1 \ \dots \ \tilde{c}_{n-1}] = kP$  是相对于能控规范型式(2.26)的状态反馈增益阵,采用式(2.27)所示的状态反馈后,闭环系统状态方程的系数矩阵为:

A\_c - b\_k k\_{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a\_0 & -a\_1 & -a\_2 & \dots & -a\_{n-1} & 1 \\ 0 & & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - [\tilde{c}\_0 \ \tilde{c}\_1 \ \dots \ \tilde{c}\_{n-1}] \tag{2.28}

对于式(2.28)这种特殊形式闭环系统系数矩阵,根据前面1.5.1节中的结论,很容易写出它的特征方程式:

det[sI - (A\_c - b\_k k\_{\tilde{c}})] = s^n + (a\_{n-1} + \tilde{c}\_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a\_1 + \tilde{c}\_1)s + (a\_0 + \tilde{c}\_0) \tag{2.29}

由之可见,它的 n 个系数,可以通过  $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{n-1}$  来独立地设置。特别地,针对理想的特征多项式(2.22),可以选择:

a\_i + \tilde{c}\_i = \tilde{a}\_i \quad i = 0, 1, \dots, n - 1

即

\tilde{c}\_i = \tilde{a}\_i - a\_i \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \tag{2.30}

则闭环系统的特征多项式(2.29) 就与理想的特征多项式(2.22) 一致,从而实现了极点配置。最后,根据  $k_{\tilde{c}}$  和式(2.27)所示的  $k_{\tilde{c}}$  与  $k$  的关系,立即可求得对原受控对象实施极点配置的状态反馈增益阵  $k = k_{\tilde{c}}P^{-1}$ 。

如果受控对象式(2.19) 不完全能控,则它不能化成能控规范型式(2.26)。这时,根据前面的式(2.16) 及状态反馈对能控性影响的讨论,可以知道,系统的不能控的振型不可能通过状态反馈而改变。因此,对不完全能控系统,状态反馈不能实现任意极点配置。

根据上面的推导,我们提出基于能控规范型的极点配置算法。

利用能控规范型的极点配置算法

条件: 给定式(2.19) 所示的单输入受控对象和一组期望的闭环极点值  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , 要求确定状态反馈增益阵  $k$  使得经式(2.2) 所示的状态反馈以后,闭环系统的系数矩阵  $(A - bk)$  的特征值为  $\{s_1, \dots, s_n\}$ 。

(1) 计算能控性矩阵  $W_c = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$ , 判定受控对象式(2.19) 的能控性。若系统不完全能控,则不能实现任意极点配置。

(2) 计算  $A$  的特征多项式

(s) = det(sI - A) = s^n + a\_{n-1}s^{n-1} + \dots + a\_1s + a\_0 \tag{2.31}

(3) 计算期望极点  $\{s_1, \dots, s_n\}$  所对应的期望特征多项式

\*(s) = (s - s\_1) \dots (s - s\_n) = s^n + \tilde{a}\_{n-1}s^{n-1} + \dots + \tilde{a}\_1s + \tilde{a}\_0 \tag{2.32}

(4) 计算

$$\mathbf{k}_c = [0 \quad -a_0 \quad \dots \quad -a_{n-1}] \quad (2.33)$$

(5) 计算坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

(6) 计算实现极点配置的状态反馈增益阵

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_c \mathbf{P}^{-1} \quad (2.35)$$

根据能控规范型导出的实现单输入系统极点配置的方法也称为 Bass-Gura 公式。它也可以不通过能控规范型的推导,直接从闭环系统的特征多项式与受控对象的特征多项式之间的关系中得出。

### 2.2.3 极点配置的 Ackermann 公式

在前面计算状态反馈阵  $\mathbf{k}$  的公式 (2.35) 中,必须求整个坐标变换阵  $\mathbf{P}$  的逆。下面的 Ackermann 公式避免了这一过程。

设  $\mathbf{q}^T$  为受控对象式 (2.19) 的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  的逆  $\mathbf{W}_c^{-1}$  中的最后一行,即

$$\mathbf{q}^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{W}_c^{-1} \quad (2.36)$$

令:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

则经坐标变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}$  同样也可以将受控对象式 (2.19) 化成式 (2.26) 所示的能控规范型。因为将式 (2.19) 化成能控规范型的坐标变换阵唯一,可以得出  $\mathbf{T}$  与式 (2.25) 所定义的坐标变换阵  $\mathbf{P}$  之间满足关系式:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{P} \quad (2.38)$$

根据前面的计算,实现极点配置的状态反馈增益阵  $\mathbf{k}$  的计算公式 (2.35), 和  $\mathbf{P}$  与  $\mathbf{T}$  之间的关系式 (2.38), 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_c \mathbf{T} = [0 \quad -a_0 \quad \dots \quad -a_{n-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{q}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}^T (0\mathbf{I} + \dots + -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}) - \mathbf{q}^T (a_0\mathbf{I} + \dots + -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}) \\ &= \mathbf{q}^T (0\mathbf{I} + \dots + -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}) + \mathbf{q}^T \mathbf{A}^n \\ &= \mathbf{q}^{T*}(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

在上面第三个等式中,我们利用了 Cayley-Hamilton 定理式 (1.79)。式 (2.39) 称为 Ackermann



公式, 其中  $\phi^*(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_0\mathbf{I}$  是将式(2.32)所示的期望特征多项式  $\phi^*(s)$  中的变元  $s$  以矩阵  $\mathbf{A}$  代入所得到的矩阵多项式。

与 Bass-Grura 公式相比, Ackermann 公式中无需计算  $\mathbf{A}$  的开环特征多项式  $\phi(s)$  中的各系数  $a_i, i = 0, \dots, n - 1$ , 并且在求逆时只需计算  $\mathbf{W}_c$  的逆中的最后一行。但是在公式中计算  $\phi^*(\mathbf{A})$  时增加了矩阵  $\mathbf{A}$  的自乘运算。当  $n$  较大时, 它的计算工作量比 Bass-Grura 公式更为节省。

利用 Ackermann 公式的极点配置算法

已知条件同基于能控规范型的极点配置算法。

(1) 计算能控性矩阵  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$ , 判定系统的能控性。若系统完全能控, 求出  $\mathbf{W}_c^{-1}$  的最后一行  $\mathbf{q}^T$ , 即求出

$$\mathbf{q}^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{W}_c^{-1}$$

(2) 根据期望的闭环极点  $\{s_1, \dots, s_n\}$  求出期望极点多项式  $\phi^*(s)$  如式(2.32)所示。

(3) 计算矩阵多项式

$$\phi^*(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I}$$

(4) 计算实现极点配置的状态反馈阵

$$\mathbf{k} = \mathbf{q}^T \phi^*(\mathbf{A})$$

【例 2 2】 设受控对象的状态方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

要求状态反馈  $u = -\mathbf{k}\mathbf{x}$ , 使得闭环极点为  $\{-5, -2 + j2, -2 - j2\}$ 。

【解】 (1) 判断受控对象能控性

该系统的能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩为 3, 因此系统为完全能控的。

(2) 确定闭环系统的期望特征多项式

$$\phi^*(s) = (s + 5)(s + 2 - j2)(s + 2 + j2) = s^3 + 9s^2 + 28s + 40$$

(3) 确定状态反馈阵  $\mathbf{k}$

方法一:(解联立方程式法) 设状态反馈阵为

$$\mathbf{k} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

$$\begin{aligned} \phi_k(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}) \\ &= \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 10k_1 & 10k_2 & 10k_3 \end{bmatrix} \\ &= s^3 + (10k_3 - 1)s^2 + (10k_2 - 10k_3 - 2)s + (10k_1 + 10k_2 - 20k_3) \end{aligned}$$

比较  $\phi^*(s)$  与  $\phi_k(s)$  的同次幂系数, 得到以下联立方程

$$\begin{aligned} 10 k_3 - 1 &= 9 \\ 10 k_2 - 10 k_3 - 2 &= 28 \\ 10 k_1 + 10 k_2 - 20 k_3 &= 40 \end{aligned}$$

解得  $k_3 = 1, k_2 = 4, k_1 = 2$

从而  $\mathbf{k} = [2 \ 4 \ 1]$

方法二:(利用能控规范型的方法)

计算  $\mathbf{A}$  的开环特征多项式为

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s-2 & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \\ &= s(s+1)(s-2) = s^3 - s^2 - 2s \end{aligned}$$

求得

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= [0 - a_0 \quad 1 - a_1 \quad 2 - a_2] \\ &= [40 - 0 \quad 28 + 2 \quad 9 + 1] = [40 \ 30 \ 10] \end{aligned}$$

坐标变换阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ -20 & -10 & 10 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_c \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ 4 \ 1] \end{aligned}$$

方法三:(利用 Ackermann 公式)

首先求得:

$$\begin{aligned} \Delta^*(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^3 + 9\mathbf{A}^2 + 28\mathbf{A} + 40 = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 0 & 140 & 50 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

再求出

$$\mathbf{q}^T = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{W}_c^{-1} = [0.1 \ 0 \ 0]$$

直接代入 Ackermann 公式(2.39)

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{q}^T \Delta^*(\mathbf{A}) = [0.1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 20 & 40 & 10 \\ 0 & 140 & 50 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ 4 \ 1] \end{aligned}$$

以上关于极点配置的讨论,虽然只是针对连续时间系统进行的,但是它完全适合于离散时间系统。

待配置的  $n$  个闭环极点的位置的选择是一个确定控制系统综合目标的问题, 这是一个复杂的工程实践与理论相结合的问题, 我们只能给出一些指导性的意见:

(1) 对  $n$  维受控对象式(2.19), 应当指定并且只能指定  $n$  个待配置的期望极点, 这些期望极点可以是实数, 也可以是以共轭复数形式出相的复数极点对。

(2) 为保证闭环系统的稳定, 对连续系统来说, 所有待配置的闭环极点都应当位于复平面上的左半平面内。而对离散时间系统来说, 所有待配置的闭环极点都应当位于复平面上的单位圆内。具体位置的选择需要综合考虑闭环系统的极点和零点的分布, 从工程实际出发加以解决。

(3) 可以采用一些最优化的算法来选择待配置的闭环极点位置, 使某种性能指标取极值。

**【例 2.3】** 设受控对象的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

试利用状态反馈实现闭环系统的极点配置, 使得闭环系统满足以下动态指标

- (1) 输出超调量  $\sigma\%$
  - (2) 峰值时间  $t_p = 0.5s$
- 该系统的开环传递函数

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{s(s+6)(s+12)}$$

没有开环零点, 所以闭环系统的动态性能完全由闭环极点所决定。可以这样选择期望的闭环极点, 选择一对主导极点  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ , 其中  $\zeta$  和  $\omega_n$  分别是二阶系统的阻尼系数和无阻尼自振角频率。并将另一个极点定于主导极点左边较远的地方, 使得该极点对闭环系统的动态性能影响很小, 这样就可以把系统看成是只有主导极点的二阶系统。利用二阶模型的超调量和峰值计算公式

$$\begin{aligned} \sigma\% &= e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \\ t_p &= \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.5 \end{aligned}$$

可以确定  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 9$ 。取  $\zeta = 0.707$ ,  $\omega_n = 10$ , 则主导极点  $s_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$ , 选择极点  $s_3$  为 10 倍远, 即  $s_3 = -100$ , 则期望闭环特征多项式

$$\begin{aligned} \Phi^*(s) &= (s+100)(s^2 + 14.1s + 100) \\ &= s^3 + 114.1s^2 + 1510s + 10000 \end{aligned}$$

开环系统受控对象的特征多项式

$$\Phi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 18s^2 + 72s$$

由之计算出

$$\mathbf{k} = [k_0 \ -k_1 \ k_2] = [10000 \ 1438 \ 96.1]$$

化受控对象为能控规范型的坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -18 & 18 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & 1 \\ 1 & -6 & 36 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后求得状态反馈增益阵

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 10000 & 1438 & 96.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10000 & 284.8 & 96.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为坐标变换不改变系统的传递函数,通过对受控对象的能控规范型和系统经状态反馈后的闭环系统的能控规范型二者分别求传递函数可以得出结论:状态反馈可以改变受控对象的极点,但是不会改变受控对象的零点,除非故意制造极点和零点的相消。

### § 2.3 多输入系统的极点配置

考虑多输入受控对象的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{2.40}$$

其中  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  分别是  $n$  维状态向量和  $m$  维输入向量。引入状态反馈控制律  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{K}$  为  $m \times n$  维反馈增益阵,则闭环系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{2.41}$$

在前面所讨论的单输入系统的极点配置中,实现一组期望极点配置所需的状态反馈增益向量  $\mathbf{k}$  是唯一的,这一点从单输入系统极点配置的几个算法中都看得很清楚。但对于多输入系统来说,则实现一组期望极点配置所需的状态反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$  通常不是唯一的。这是因为  $\mathbf{K}$  是一个  $m \times n$  维矩阵,它有  $mn$  个元素待定,而闭环特征多项式只有  $n$  个系数待调整。 $\mathbf{K}$  阵的选择非唯一,导致了闭环系统传递函数矩阵的非唯一,系统的动态响应特征并不相同。常用的多输入系统极点配置方法主要有两种,其一是人为地对  $\mathbf{K}$  阵的结构加以限制,如取  $\text{rank } \mathbf{K} = 1$ ,将多输入系统的极点配置问题化为等价的单输入系统问题来求解。另一种则是利用多变量系统的龙伯格能控规范型的方法来求解。

#### 2.3.1 利用单输入系统极点配置的方法

这一方法分成两步进行,首先通过特定的状态反馈矩阵,将多输入系统化成由单个输入(比如说由第一个输入分量  $u_1$ ) 完全能控。然后对已化成单输入量的完全能控系统,按单输入系统极点配置的方法选择状态反馈阵。最后将这样两步所选择的两个状态反馈阵加以适当的组合,即可得到完成极点配置任务的原多输入系统的状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ 。

考虑多输入系统式(2.40), 设  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_m]$ , 若系统式(2.40) 完全能控,则可以找到一状态反馈控制律

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}_i\mathbf{x} \tag{2.42}$$

其中  $\mathbf{K}_i$  为  $m \times n$  维定常实矩阵,使得闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{2.43}$$

可以单独由第  $i$  个输入  $r_i$  完全能控,或者说单输入系统  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_i, \mathbf{b}_i)$  完全能控。不失一般性,取  $i = 1$ , 并设  $\mathbf{b}_1 \neq 0$ 。因为系统完全能控,  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  的秩为  $n$ 。在  $\mathbf{W}_c$  中按列搜索方法,得到  $n$  个线性无关的列向量和指数集  $\{v_1, \dots, v_p\}$ , 构成一个  $n \times n$  维非奇异方阵

$$\mathbf{W} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{v_1-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{v_2-1}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_p \quad \dots \quad \mathbf{A}^{v_p-1}\mathbf{b}_p] \quad (2.44)$$

再定义一  $m \times n$  维矩阵

$$\mathbf{M} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \mathbf{e}_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \mathbf{e}_3 \quad \dots \quad \mathbf{e}_{v_p} \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (2.45)$$

其中  $\mathbf{e}$  表示第  $i$  个元素为 1, 其余元素全为零的列向量。在以上定义的矩阵  $\mathbf{M}$  中,  $\mathbf{e}_2, \dots,$

$\mathbf{e}_{v_p}$  分别位于第  $v_1$  列,  $\dots$ , 第  $v_k$  列。令

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{M}\mathbf{W}^{-1} \quad (2.46)$$

则可以证明  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1, \mathbf{b})$  完全能控。

利用上一节所介绍的单输入系统的极点配置方法, 确定状态反馈控制律

$$r_1(t) = -\mathbf{F}_1 \mathbf{x}(t) + v_1(t) \quad (2.47)$$

实现  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 - \mathbf{b}\mathbf{F}_1)$  的特征值的任意配置, 令

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & v_1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

则成立

$$(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 - \mathbf{b}\mathbf{F}_1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 - \mathbf{BF}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{F}) \quad (2.49)$$

令

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{F} \quad (2.50)$$

则相应的闭环系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (2.51)$$

总结可得多输入系统极点配置算法。

给定系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  及一组所期望的闭环极点  $\{s_1, \dots, s_n\}$ 。

1. 计算由  $\{s_1, \dots, s_n\}$  所对应的期望闭环特征多项式, 即

$$\chi^*(s) = (s - s_1) \dots (s - s_n)$$

2. 求出系统能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$ , 判定系统能控性, 若系统能控, 根据  $\mathbf{W}_c$  分别按式(2.44) 和式(2.45) 构造  $\mathbf{W}$  及  $\mathbf{M}$ 。并根据式(2.46) 求得  $\mathbf{K}_1$ 。

3. 利用上节所介绍单输入系统的极点配置方法, 求得  $\mathbf{F}_1$ , 使得  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 - \mathbf{b}\mathbf{F}_1)$  的闭环极点为  $\{s_1, \dots, s_n\}$ 。

4. 由式(2.48) 确定  $\mathbf{F}$ , 令  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{F}$  即为所求的状态反馈增益矩阵。

【例 2.4】 给定受控对象的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

试求状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 将使得通过式(2.42) 所示的状态反馈, 将闭环系统极点配置在  $s_1 = -1, s_2 = -2$  上。

计算可得期望闭环特征多项式

$$\chi^*(s) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统完全能控。按列搜索方案在  $\mathbf{W}_c$  中找到线性独立的两列,并得到  $v_1 = v_2 = 1$ , 由之构成

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由之定义出

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(2.46),可得将原系统化为由单输入完全能控的状态反馈阵

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{MW}^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这样,在闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_1)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

中,只考虑第一个分量  $r_1$  的单输入系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r_1$$

是完全能控的。

利用行列式方法,设  $\mathbf{F}_1 = [f_1 \quad f_2]$ ,则以上单输入系统在状态反馈律式(2.47)下的闭环系统特征多项式

$$\begin{aligned} k(s) &= \det(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{0} [f_1 \quad f_2]) \\ &= s^2 + (f_1 - 2)s + (1 + f_2) \end{aligned}$$

由等式  $k(s) = \bar{k}^*(s)$  中,比较  $\bar{k}^*(s)$  和  $k(s)$  中  $s$  同次幂的系数,得线性方程组

$$\begin{aligned} f_1 - 2 &= 3 \\ f_2 + 1 &= 2 \end{aligned}$$

解得  $\mathbf{F}_1 = [5 \quad 1]$

根据式(2.48)和式(2.50)计算出

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}_1 + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可以验证  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  的特征值为  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 。

### 2.3.2 利用龙伯格能控规范型的极点配置算法

根据前面第1.5节可知,能控的多输入多输出系统可通过坐标变换化为龙伯格能控规范型  $(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{B}_{c2}, \mathbf{C}_{c2})$ ,如式(1.112)所示,其中  $\mathbf{A}_{c2}$  的位于对角线上的子块均是维数由能控性指数集确定的友矩阵,根据  $\mathbf{B}_{c2}$  的结构,当引入状态反馈  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}_{c2}\mathbf{x}$  后,闭环系统矩阵  $(\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_{c2}\mathbf{K}_{c2})$  仍是结构相同的龙伯格能控规范型。若将期望的闭环极点按该规范型对角线上分块矩

阵的维数进行分组,分别确定各组的多项式,并根据  $\mathbf{A}_{c2}$  的分块结构,构造出仅含对角线上友矩阵的分块对角矩阵  $\mathbf{A}^*$ ,作为期望的闭环系统系数矩阵,将  $\mathbf{A}^*$  与  $(\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{K}_c)$  相比较确定  $\mathbf{K}_c$  的各元素,最后利用  $\mathbf{K}_c$  与  $\mathbf{K}$  的关系确定  $\mathbf{K}$ 。具体算法步骤为:

- 1.按行搜索方案从开环受控对象式(2.40) 的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  中选出  $n$  个线性独立的列,和能控性指数集  $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ 。据此,按式(1.111) 构造坐标变换阵  $\mathbf{P}$ ,作坐标变换  $\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ,则状态方程式(2.40) 化成龙伯格第二能控规范型  $(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{B}_{c2}, \mathbf{C}_{c2})$ ,其中  $\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{PAP}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}_{c2} = \mathbf{PB}$ ,  $\mathbf{C}_{c2} = \mathbf{CP}^{-1}$ 。
- 2.根据能控规范型的分块结构将给定的期望闭环极点  $\{p_1, \dots, p_n\}$  分成  $r$  个组,每个组的极点个数为  $\mu_i$ ,且以共轭复数对出现的极点应分在同一组。根据  $\mathbf{A}_{c2}$  的分块结构,构造一个分块对角阵  $\mathbf{A}^*$ ,它的  $r$  个对角线上的子矩阵分别是以上面相应组的极点为特征值的友矩阵。
- 3.由  $\mathbf{A}_{c2} + \mathbf{B}_{c2} \mathbf{K}_c = \mathbf{A}^*$ ,确定  $\mathbf{K}_c$  中的各元素。
- 4.所求的状态反馈增益矩阵即为  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{P}$ 。

**【例 2.5】** 考虑一个 3 维输入的 9 阶系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 。

先求得其能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^8 \mathbf{B}]$$

并利用行搜索方案求得  $n = 9$  个线性无关的列及能控性指标集  $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ , 设本例中  $\mu_1 = 3$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\mu_3 = 4$ 。利用所得到的 9 个线性无关的列构造非奇异矩阵

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{Ab}_1 \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{Ab}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{Ab}_3 \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{A}^3 \mathbf{b}_3]$$

设  $\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \mathbf{h}_3^T$  分别表示  $\mathbf{Q}$  的逆矩阵  $\mathbf{Q}^{-1}$  中的第 3、5、9 行,构造坐标变换阵

$$\mathbf{P} = [\mathbf{h}_1 \quad \mathbf{A}^T \mathbf{h}_1 \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{h}_1 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{A}^T \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_3 \quad \mathbf{A}^T \mathbf{h}_3 \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{h}_3 \quad (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{h}_3]^T$$

则可以得到  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  的龙伯格第二能控规范型:  $(\mathbf{A}_{c2}, \mathbf{B}_{c2})$ 。假定  $\mathbf{A}_{c2}$  和  $\mathbf{B}_{c2}$  具有以下形式:

$\mathbf{A}_{c2} = \mathbf{PAP}^{-1} =$

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
- a <sub>10</sub>	- a <sub>11</sub>	- a <sub>12</sub>	14	15	16	17	18	19	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
21	22	23	- a <sub>20</sub>	- a <sub>21</sub>	26	27	28	29	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
31	32	33	34	35	- a <sub>30</sub>	- a <sub>31</sub>	- a <sub>32</sub>	a <sub>33</sub>	

$\mathbf{B}_{c2} = \mathbf{PB} =$

0	0	0
0	0	0
1	r	0
0	0	0
0	1	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	1

将期望的闭环特征值 $\{ \mu_1, \dots, \mu_9 \}$ 按  $\mathbf{A}_{c2}$  的结构 (即能控性指标集 $\{ \mu_1 = 3, \mu_2 = 2, \mu_3 = 4 \}$ ) 分成三组, 并相应的计算出

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(s) &= (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3) = s^3 + a_{12}^* s^2 + a_{11}^* s + a_{10}^* \\ \varphi_2^*(s) &= (s - \mu_4)(s - \mu_5) = s^2 + a_{21}^* s + a_{20}^* \\ \varphi_3^*(s) &= (s - \mu_6)(s - \mu_7)(s - \mu_8)(s - \mu_9) = s^4 + a_{33}^* s^3 + a_{32}^* s^2 + a_{31}^* s + a_{30}^* \end{aligned}$$

根据  $\mathbf{A}_{c2}$  的分块结构, 构造出期望的闭环系统系数矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_{10}^* & -a_{11}^* & -a_{12}^* \end{array} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -a_{20}^* & -a_{21}^* \end{array} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{30}^* & -a_{31}^* & -a_{32}^* & -a_{33}^* \end{array} \end{array}$$

显然  $\mathbf{A}^*$  的特征多项式即为期望特征多项式:

$$\varphi^*(s) = \varphi_1^*(s) \varphi_2^*(s) \varphi_3^*(s)$$

记  $k_{ij}$  为  $\mathbf{K}_c$  的  $ij$  元素, 根据  $\mathbf{A}_{c2}$  和  $\mathbf{B}_2$ , 得出闭环系统系数矩阵  $\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{K}_c$  为

$$\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{K}_c = \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ -a_{10}^* - k_{11} - rk_{21} & -a_{11}^* - k_{12} - rk_{22} & -a_{12}^* - k_{13} - rk_{23} & & 14 - k_{14} - rk_{24} & 15 - k_{15} - rk_{25} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 21 - k_{21} & 22 - k_{22} & 23 - k_{23} & & -a_{20}^* - k_{24} & -a_{21}^* - k_{25} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 31 - k_{31} & 32 - k_{32} & 33 - k_{33} & & 34 - k_{34} & 35 - k_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 - k_{16} - rk_{26} & 17 - k_{17} - rk_{27} & 18 - k_{18} - rk_{28} & 19 - k_{19} - rk_{29} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 26 - k_{26} & 27 - k_{27} & 28 - k_{28} & 29 - k_{29} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ -a_{30}^* - k_{36} & -a_{31}^* - k_{37} & -a_{32}^* - k_{38} & -a_{33}^* - k_{39} & & \end{array}$$

根据  $\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_{c2} \mathbf{K}_c = \mathbf{A}^*$  两个矩阵对应元素相等的原理, 得出关于  $k_{ij}$  的线性方程组, 并由之解出:

$$\mathbf{K}_c = \begin{array}{ccccc} -a_{10}^* - 10 - r_{21} & -a_{11}^* - 11 - r_{22} & -a_{12}^* - 12 - r_{23} & 14 - r(-a_{20}^* - 20) & 15 - r(-a_{21}^* - 21) \\ 21 & 22 & 23 & -a_{20}^* - 20 & -a_{21}^* - 21 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{array}$$



$$\begin{array}{cccc} 16 & = & r_{26} & 17 & = & r_{27} & 18 & = & r_{28} & 19 & = & r_{29} \\ & & 26 & & 27 & & 28 & & 29 & & & \\ & & * & & * & & * & & * & & & \\ 30 & = & 30 & 31 & = & 31 & 32 & = & 32 & 33 & = & 33 \end{array}$$

最后得出所求的状态反馈增益阵为:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_c P}$$

下面再看一个具体的例子。

**【例 2.6】** 考虑多变量线性定常系统

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

给定期望的闭环极点为  $p_1 = -1, p_{2,3} = -1 \pm j1, p_4 = -2$

能控性矩阵

$$\mathbf{W_c} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B} \quad \mathbf{A^3B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -10 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 4 & 13 & 13 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

由之可判定系统是完全能控的,在  $\mathbf{W_c}$  中按行搜索方案得出 4 个线性无关的列,它们分别是第 1, 2, 4, 6 列,可求得  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3$ , 构成非奇异阵  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据  $\mu_1, \mu_2$  分别选择  $\mathbf{Q}^{-1}$  的第 1 行和第 4 行为  $\mathbf{h}_1^T$  和  $\mathbf{h}_2^T$ , 构成坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{A} \\ \mathbf{h}_2^T \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

作坐标变换  $\mathbf{z} = \mathbf{Px}$  可得龙伯格能控规范型  $(\mathbf{A_{c2}}, \mathbf{B_{c2}})$ , 其中

$$\mathbf{A_{c2}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \quad \mathbf{B_{c2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将期望极点分成两组:  $\{-2\}, \{-1, -1 \pm j1\}$

$$\begin{aligned} \star_1(s) &= s + 2 \\ \star_2(s) &= (s + 1)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 \end{aligned}$$

构造期望的闭环系统系数矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{array}{c|ccc} -2 & \mathbf{0} & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \\ & -2 & -4 & -3 \end{array}$$

令

$$\mathbf{K}_c = \begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{array}$$

则闭环系统系数矩阵  $\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_c$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_c &= \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ -k_{11} & 1-k_{12} & -k_{13} & -k_{14} & & & & \end{array} \\ &= \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-k_{21} & 1-k_{22} & -3-k_{23} & 4-k_{24} & & & & \end{array} \end{aligned}$$

与  $\mathbf{A}^*$  比较后, 根据对应元素相等的原则, 立即可确定

$$\mathbf{K}_c = \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

故

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{P} = \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \end{array} = \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

如果将期望闭环极点分成一组, 即令

$$s_1^*(s) = (s+2)(s+1)(s+1-j)(s+1+j) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$$

则期望的闭环系统系数矩阵

$$\mathbf{A}_1^* = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -10 & -10 & -5 \end{array}$$

由  $\mathbf{A}_{c2} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K}_{c1} = \mathbf{A}_1^*$ , 可求得

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{c1} &= \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 7 & 9 \end{array} \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{K}_{c1} \mathbf{P} = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 5 & 9 & 1 \end{array} \end{aligned}$$

由[例 2.6] 中可以看出, 多输入系统极点配置的主要计算工作量为将系统化为龙伯格能控规范型。在选择期望闭环系统系数矩阵  $\mathbf{A}^*$  时, 可以选择  $\mathbf{A}^*$  具有与  $\mathbf{A}_{c2}$  一样的分块结构, 也可以选择  $\mathbf{A}^*$  具有友矩阵的结构如例中的  $\mathbf{A}_1^*$ , 但是比较两种情况下所得到的状态反馈增益阵可以知道, 当选择具有与  $\mathbf{A}_{c2}$  一样的分块结构的  $\mathbf{A}^*$  时所得到的  $\mathbf{K}$  中各元的值, 要小于具有友矩阵结构的  $\mathbf{A}_1^*$  时所得到的  $\mathbf{K}_1$ 。从另一个角度来看,  $\mathbf{A}_1^*$  所对应的状态反馈增益阵  $\mathbf{K}_1$  的秩为 1, 它与用第 2.3.1 节中所介绍的利用单输入系统极点配置方法所得到的状态反馈增益阵一

致。由此我们还可以得到另一个普遍性的结论：利用龙伯格能控规范型方法所得到的极点配置状态反馈增益阵中各元的值，一般要小于利用单输入系统极点配置方法所得到的状态反馈增益阵中各元的值。

多输入多输出系统由状态反馈实现闭环极点配置时，它的闭环系统传递函数矩阵中各个元素的零点有可能会改变。但是，如果定义传递函数矩阵中各元素的公共零点为系统的零点，则状态反馈将不会改变系统的零点。最后，我们指出，在传递函数矩阵每个元素中，分母多项式和分子多项式的  $s$  幂次之差在引入状态反馈前后是一个不变量。

## § 2.4 镇定问题

受控系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  通过状态反馈(或者输出反馈)，使得闭环系统为渐近稳定，这样的问题称为镇定问题。并称能通过反馈控制而渐近稳定的系统是能镇定的。与前面所讨论的极点配置问题不同，镇定只要求闭环极点位于复平面的开左半平面之内(对离散时间系统只要求闭环极点位于复平面上的开单位圆内)，不必配置在具体的位置。镇定问题的重要性主要体现在三个方面：首先，稳定性往往是控制系统能够正常工作的必要条件，是对控制系统的最基本的要求。其次，许多实际的控制系统是以渐近稳定作为最终设计目标。最后，稳定性往往还是确保控制系统具有其它性能的前提和条件，如渐近跟踪控制问题等。

前面我们讨论了极点配置问题，在那里，我们知道，只要系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是完全能控的，则可以通过状态反馈任意配置闭环系统的极点。显然，如果将所有的极点配置到复平面的左半平面之内，就能保证闭环系统的渐近稳定性。因此，完全能控的系统必定是能镇定的。

对于不完全能控的系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ，可以利用在第 1.6 节中所介绍的方法进行按能控性的结构分解，即取坐标变换  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  后，可以得到按能控性分解的规范表达式

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{\text{nc}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_{\text{nc}}] \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{2.52}$$

其中  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  是它的能控子系统， $(\mathbf{A}_{\text{nc}}, 0, \mathbf{C}_{\text{nc}})$  是不能控子系统。若取状态反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{v} - [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_c \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\text{nc}} \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

其中  $\tilde{\mathbf{x}}_c$  对应着能控分状态向量， $\tilde{\mathbf{x}}_{\text{nc}}$  对应着不能控分状态向量，则闭环系统状态方程为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_{\text{nc}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \tag{2.54}$$

由式(2.54)可见，闭环系统的特征多项式为：

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{K}_1 & -\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_c \mathbf{K}_2 \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{nc}} \end{bmatrix} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{K}_1) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{nc}}) \tag{2.55}$$

由于  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  完全能控，我们可以通过极点配置的方法选择  $\mathbf{K}_1$ ，使得  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{K}_1)$  的根都具有负实部。但是相应于不能控子系统  $(\mathbf{A}_{\text{nc}}, 0, \mathbf{C}_{\text{nc}})$ ，它的系数矩阵  $\mathbf{A}_{\text{nc}}$  是不能通过状态反馈而改变的，换句话说，系统的不能控的振型，即  $\mathbf{A}_{\text{nc}}$  的特征值，在状态反馈下不变。

因此,系统(2.52)为能镇定,当且仅当它的不能控部分  $A_{cc}$  的极点具有负实部。我们由之给出结论:

**定理 2.1:**线性定常系统  $(A, B, C)$  可以通过状态反馈而镇定的充分必要条件是它的不能控部分(不能控的振型)是渐近稳定的。

因为坐标变换不改变系统的能控性,对通过坐标变换而联系的代数等价系统,有:

**定理 2.2:**相互代数等价的系统有相同的能镇定性。

根据以上的定理,当给定一个系统,要判定它的状态反馈的镇定性时,需要对它进行能控性结构分解,求出它的不能控振型,然后通过检验不能控振型的渐近稳定性来判定系统的能镇定性。

下面考虑系统  $(A, B, C)$  通过输出反馈的能镇定性。根据第1.6节的结论,对于不完全能控和不完全能观测的系统,可以通过坐标变换,得到系统结构的规范分解  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ ,即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{cc} \\ \dot{x}_{ob} \\ \dot{x}_{oo} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{co} & 0 \\ A_{c1} & A_{cc} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & A_{24} \\ A_{3b} & 0 \\ A_{43} & A_{4b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ob} \\ x_{oo} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{cc} \\ B_{ob} \\ B_{oo} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_{co} & 0 & C_{ob} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{cc} \\ x_{ob} \\ x_{oo} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.56}$$

$+$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{cc} \\ x_{ob} \\ x_{oo} \end{bmatrix}$$

- 其中  $(\bar{A}_{co}, \bar{B}_{co}, \bar{C}_{co})$  是它的能控且能观测部分;
- $(\bar{A}_{c1}, \bar{B}_{c1}, 0)$  是它的能控但不能观测部分;
- $(\bar{A}_{3b}, 0, \bar{C}_{3b})$  是它的不能控但能观测部分;
- $(\bar{A}_{43}, 0, 0)$  是它的不能控又不能观测部分。

若取输出反馈

$$u = v - Fy \tag{2.57}$$

则闭环系统的系数矩阵为:

$$\bar{A} - \bar{B}F\bar{C} = \begin{bmatrix} A_{co} - B_{co}F_{co} & 0 \\ A_{c1} - B_{c1}F_{co} & A_{cc} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13} - B_{co}F_{3b} & 0 \\ A_{23} - B_{c1}F_{3b} & A_{24} \\ A_{3b} & 0 \\ A_{43} & A_{4b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ob} \\ x_{oo} \end{bmatrix}$$

$\tag{2.58}$

$$\begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{cc} \\ x_{ob} \\ x_{oo} \end{bmatrix}$$

它的特征多项式为:

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \det(sI - \bar{A} + \bar{B}F\bar{C}) \\ &= \det(sI - A_{co} + B_{co}F_{co}) \det(sI - A_{cc}) \det(sI - A_{3b}) \det(sI - A_{43}) \end{aligned} \tag{2.59}$$

因为坐标变换不改变系统的能控性和能观测性,不改变系统的不能控振型和不能观测振型,我们可以得到以下结论:

**定理 2.3:**线性定常系统  $(A, B, C)$  通过输出反馈式(2.57)能镇定的充分必要条件是:

(1) 系统的不能控,不能观测和既不能控又不能观测这三个部分的所有振型(即  $\lambda_{cc}$ ,  $\lambda_{co}$  和  $\lambda_{oo}$  的特征值)都是渐近稳定的。

(2) 系统的能控且能观测部分( $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ )是可通过输出反馈镇定的。

在以上定理 2.3 中,为判定系统的经由输出反馈的能镇定性,必须判定一个能控且能观测的子系统 ( $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ ) 的能镇定性。如果采用的是式(2.57)所示的静态输出反馈控制律,则因为它一般不能任意配置系统 ( $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ ,  $\lambda_{co}$ ) 的闭环极点,所以即使是系统能控且能观测,也不能保证系统的通过输出静态反馈的能镇定性。判定能控且能观测的系统经由式(2.5)所示的输出静态反馈控制律的能镇定性不是一件容易的工作,至今还是一个活跃的研究领域,感兴趣的读者可参阅有关的文献<sup>[16]</sup>。而另一方面,可以证明,如果采用式(2.9)所示的输出动态反馈控制律,且动态补偿器的维数为足够高,则它一定可以镇定能控且能观测的受控对象。

对于能由状态反馈镇定的系统,我们可以先将系统进行能控性结构分解,保留系统的不能控振型(这一部分振型必须是渐近稳定的),然后选择状态反馈增益阵,将系统能控部分的极点配置到复平面的左半平面内,实现系统的镇定。

**【例 2.7】** 考虑线性定常系统 (**A**, **B**, **C**), 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -6 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

的镇定问题。

通过计算系统的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^5 \mathbf{B}]$ , 可知,  $\text{rank } \mathbf{W}_c = 5 < 6$ , 系统不完全能控。将系统作能控性典范分解, 选择坐标变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则经坐标变换  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ , 可以将系统变成按能控性分解的规范形式 (**A**, **B**, **C**), 其中

$$\mathbf{A} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{oo} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{B}_c}{0}$$

由于只考虑状态反馈的镇定问题,与  $\mathbf{C}$  无关,我们没有计算  $\mathbf{C}$ 。注意到,能控子系统  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$  已经是龙伯格能控规范型,相应的能控性指标集为  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2$ 。又因为  $\mathbf{A}_{\text{聊}} = -1$ ,不能控的振型是渐近稳定的,系统是能镇定的。选取能控系统的闭环极点为  $\lambda_1 = -0.1, \lambda_2 = -0.2, \lambda_{3,4} = -1 \pm j, \lambda_5 = -2$ ,即闭环特征多项式为:

$$\begin{aligned} \chi_k(s) &= (s + 0.1)(s + 0.2)(s^2 + 2s + 2)(s + 2) \\ &= s^5 + 4.3s^4 + 7.22s^3 + 5.88s^2 + 1.32s + 0.08 \end{aligned}$$

选取能控子系统的期望闭环系统系数矩阵

$$\mathbf{A}_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.08 & -1.32 & -5.88 & -7.22 & -4.3 \end{bmatrix}$$

与经状态反馈后的闭环系统矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{K}_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - k_{11} - 2k_{21} & -2 - k_{12} - 2k_{22} & -k_{13} - 2k_{23} & -2 - k_{14} - 2k_{24} & -k_{15} - 2k_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{21} & -k_{22} & 3 - k_{23} & -4 - k_{24} & -1 - k_{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

比较,可得出

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} -1.16 & -0.64 & -17.76 & -9.44 & -6.6 \\ 0.08 & 1.32 & 8.88 & 3.22 & 3.3 \end{bmatrix}$$

根据第2.3节的结论,使得系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  为镇定的状态反馈增益阵可通过在  $\mathbf{K}_c$  后面加上一列全为零的列,并右乘坐标变换阵得到:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -7.76 & -0.64 & -1.16 & -9.44 & -18.4 & 0 \\ 3.38 & 1.32 & 0.08 & 3.22 & 10.2 & 0 \end{bmatrix}$$

下面再看一个通过输出反馈实现镇定的例子。

**【例 2.8】** 考虑线性定常系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

通过输出反馈的能镇定性。

通过对  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  和能观测性矩阵  $\mathbf{W}_o$  的分析,并利用秩判据可知,  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  是完全能控且完全能观测的。系统的特征多项式为

$$\chi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 + 3s^2 + s - 5$$

显然系统不是渐近稳定的。采用输出反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{F}y$$

设输出反馈增益阵  $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2]^T$ , 则闭环系统的系数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{BFC} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5+2f_1 & & \\ & 1 & 0 & -f_1+2f_2 & -1 \\ & 0 & 1 & -f_2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5+2f_1 & & \\ & 1 & 0 & -f_1+2f_2 & -1 \\ & 0 & 1 & -f_2 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} F(s) &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}) \\ &= s^3 + (3 + f_2)s^2 + (1 + f_1 - 2f_2)s + (-2f_1 - 5) \end{aligned}$$

利用劳斯判据, 可以得出为保证  $F(s)$  的所有根都具有负实部, 参数  $f_1$  及  $f_2$  的取值范围。在本例中, 若取  $f_1 = -3, f_2 = -2$ , 则闭环特征多项式

$$F(s) = s^3 + s^2 + 2s + 1$$

的根位于  $s_1 = -0.57, s_{2,3} = -0.22 \pm j1.3$ , 因此闭环系统是渐近稳定的。从而系统可通过输出反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} y$$

而镇定。如果考虑单输入单输出系统  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$ , 其中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_1 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

则在输出反馈  $\mathbf{u} = \mathbf{v} - fy$  中,  $f$  是一标量, 类似前面的推导, 可以求得, 这时闭环系统的特征多项式为:

$$f(s) = s^3 + 3s^2 + (1 + f)s + (-2f - 5)$$

显然不可能找到合适的  $f$ , 使得  $1 + f$  和  $-2f - 5$  同时为正数, 根据劳斯判据, 闭环系统不可能渐近稳定, 因此系统  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$  不可能通过输出静态反馈而镇定。

## § 2.5 状态观测器

在利用系统的状态空间描述实现控制系统综合过程中, 状态反馈是一个十分重要的手段。前面我们介绍了采用状态反馈实现闭环系统的极点配置, 后面将要介绍的解耦控制、无静差跟踪控制以及在二次型性能指标下的最优控制等都是采用状态反馈。为实现状态反馈, 系统的所有状态必须是可直接测量的。而在实际系统中, 通常由于各种原因, 或者是系统的某些状态变量不能直接测量, 或者是由于测量设备在经济上和使用上的限制, 不可能直接量测到系统的全部状态变量, 从而造成了状态反馈物理实现上的困难。为了克服这个困难, 提出了状态重构的问题。

具体地说, 状态重构问题的核心, 就是重新人为地构造一个系统, 利用原系统中可以直接量测的变量如输入向量和输出向量作为它的输入信号, 而使该系统的输出信号  $\mathbf{x}(t)$  在一定的

衡量指标下与原系统的状态向量  $\mathbf{x}(t)$  等价。通常把  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  叫做  $\mathbf{x}(t)$  的重构状态或估计状态，而把实现这一状态重构的系统称为观测器。通常采用渐近指标作为  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  和  $\mathbf{x}(t)$  之间的等价性衡量，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] = 0 \tag{2.60}$$

其中  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  称为观测误差。

观测器按功能的不同可分为状态观测器和函数观测器。以式 (2.60) 为性能指标综合得到的观测器，使得观测器的输出  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  渐近等价于原系统的状态  $\mathbf{x}(t)$ ，因此，称为状态观测器。若观测器的输出  $\mathbf{w}(t)$  渐近地等价于原系统状态的一个线性函数  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ ，即以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t)] = 0 \tag{2.61}$$

为性能指标构成的观测器，称为函数观测器。

### 2.5.1 全维状态观测器

考虑  $n$  维线性定常受控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, & t &\geq 0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.62}$$

其中  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{y}$  分别是  $n$  维状态向量， $m$  维输入向量和  $p$  维输出向量。假定系统是完全能观测的， $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{y}$  都可以直接量测。所谓系统式 (2.62) 的全维状态观测器，就是以  $\mathbf{y}$  和  $\mathbf{u}$  为输入的一个  $n$  维动态系统，不论该系统与原系统式 (2.62) 之间的初始状态的关系如何，该系统的输出  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  和原系统式 (2.62) 的状态  $\mathbf{x}(t)$  之间总成立：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \tag{2.63}$$

为构造状态观测器，我们首先构成一个如图 2.4 所示的系统。

图 2.4 开环形式的状态观测器

相应的状态观测器为：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u, \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad t \geq 0 \tag{2.64}$$

其输出  $\hat{\mathbf{x}}$  与  $\mathbf{x}$  的误差  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  满足

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}(0) &= \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0) \end{aligned} \tag{2.65}$$



由式(2.65),可得误差  $\tilde{x}$  的解为:

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}_0 = e^{At}(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0) \quad (2.66)$$

若原系统式(2.62)的初值  $\mathbf{x}_0$  与  $\hat{\mathbf{x}}_0$  相等的话,则  $\tilde{x}(t) = 0$ ,即实现了状态  $\mathbf{x}$  的重构,但实际上做不到这一点。一般情况下,若系统  $\mathbf{A}$  是稳定的,则成立  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ ,即也可实现  $\hat{\mathbf{x}}$  渐近地趋向于  $\mathbf{x}$ 。但若  $\mathbf{A}$  不稳定,则即使  $\mathbf{x}_0$  与  $\hat{\mathbf{x}}_0$  之间偏差很小,也会随着  $t$  的增加导致误差  $\tilde{x}$  的增大。这种状态观测器我们称之为开环状态观测器,它一般没有什么实用价值。实用的观测器都是闭环形式的。即利用原系统的输出  $\mathbf{y}$  和观测器的相应变量  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  之间的差值信号作为反馈信号送入观测器中积分器的输入端,以消除状态变量的观测误差  $\tilde{x}(t)$ ,观测器的结构如图 2.5 所示。

图 2.5 状态观测器

从图 2.5 可导出全维状态观测器的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{x}}(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

其中  $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$  是反馈修正项,它的作用是用  $\tilde{\mathbf{y}}(t)$  来消除  $\tilde{x}(t)$ ,其中  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$  为原系统输出和状态观测器所重构的原系统输出之间的误差,由式(2.62)和式(2.67)可导出  $\tilde{x}$  所应满足的状态方程为

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (2.68)$$

它表明,不管初始误差  $\tilde{x}_0$  有多大,只要适当选择  $\mathbf{L}$ ,使得  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  的所有特征值均具有负实部,则式(2.60)成立。即式(2.67)实现了状态的渐近重构。而在实际中只要  $t$  足够大以后,就可认为  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  和  $\mathbf{x}(t)$  很接近了。我们也称式(2.67)描述的观测器为渐近状态观测器。

由式(2.67)和式(2.68)可见,  $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$  的特征值分布决定了观测器的稳定性和重构状态趋近于真实状态的速度。由前面第 2.4 节中我们知道,如果  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  是完全能控的,则  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  的特征值可以任意配置。根据第 1.4.4 节中所介绍的对偶原理,如果系统式(2.62)是完全能观测的,则它的对偶系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{C}^T u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}^T \mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.69)$$

是完全能控的。根据第 2.4 节中所介绍的方法, 可选择状态反馈矩阵  $\mathbf{K}$ , 使得闭环系统  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{K})$  具有任意指定的极点。若令

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{K} \quad (2.70)$$

则  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T)$  具有任意指定的极点。由于  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T)$  的转置矩阵  $(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T \mathbf{L}^T)^T = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$ , 与它有相同的特征值,  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})$  也具有任意指定的极点。

如何选择状态观测器的极点是一个颇费周折的问题, 很难给出一个系统性的方法。一般说来, 希望观测器的误差衰减得快一些, 即将观测器的极点选择得在复平面上位于虚轴左边较远的地方。但是这样做有可能使得  $\mathbf{L}$  的增益过大, 从而将系统的观测噪声放大。一般认为, 应选择观测器的极点位于复平面上比被观测系统的极点离虚轴左边稍微更远一点的地方。

根据以上的推导过程, 可以归纳出全维状态观测器的综合算法如下:

全维状态观测器综合方法:

- (1) 由给定的受控系统式(2.62), 导出对偶系统  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$ 。
- (2) 根据实际应用要求, 确定所期望的观测器特征值集合  $\{s_1, \dots, s_n\}$ 。
- (3) 利用极点配置方法, 对系统  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$ , 确定状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 使得  $(\mathbf{A} - \mathbf{C}^T \mathbf{K})$  的特征值为  $\{s_1, \dots, s_n\}$ 。
- (4) 取  $\mathbf{L} = \mathbf{K}^T$
- (5) 构造全维状态观测器

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}$  即为  $\mathbf{x}$  的重构状态。

【例 2.9】 考虑受控系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

试求它的全维状态观测器。

导出对偶系统  $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$ , 分别由以上各矩阵转置而得。设期望的观测器极点为  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -4$ ,  $s_3 = -5$ , 则期望的观测器特征多项式:

$$\phi^*(s) = (s+3)(s+4)(s+5) = s^3 + 12s^2 + 47s + 60$$

$(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  的能控性矩阵  $\mathbf{W}_c$  (即  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的能观测性矩阵  $\mathbf{W}_0$  的转置) 为:

$$\mathbf{W}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{B}^T)$  的开环特征多项式为  $\phi(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) = s^3 - 3s + 2$

坐标变换阵:

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}_c \begin{bmatrix} a_1 & a^2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_c &= [\quad 0 \quad -a_0 \quad \quad 1 \quad -a_1 \quad \quad 2 \quad -a_2] \\ &= [60 \quad -2 \quad 47+3 \quad 12] \\ &= [58 \quad 50 \quad 12]\end{aligned}$$

所以状态反馈增益阵

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{K}_c \mathbf{P}^{-1} = [58 \quad 50 \quad 12] \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = [20 \quad 25 \quad 12] \\ \mathbf{L} &= \mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

所求的全维状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20 \\ 3 & -1 & -24 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix} \mathbf{y}\end{aligned}$$

## 2.5.2 降维状态观测器

式(2.62)所示的  $m$  输入  $p$  输出系统中有  $p$  个输出变量(它们构成输出向量  $\mathbf{y}$ )总是可由传感器直接测量的。我们假定这  $p$  个输出变量是相互独立的,这时,对应输出矩阵  $\mathbf{C}$  中的  $p$  个行向量线性无关。如果系统不满足这一假设,即  $p$  个输出变量中有某些变量可以由其它变量线性表示,则可以将这些变量由输出向量  $\mathbf{y}$  中剔除,并在  $\mathbf{C}$  中剔除相应的行向量,这样就保证了  $\mathbf{C}$  中的行向量是彼此线性无关的(即  $\mathbf{C}$  为行满秩)。

如果  $p$  个输出变量能作为测得的状态,该部分的状态便可直接加以利用而无需状态观测器重构。这样由状态观测器估计的状态数目可以降低,我们称这类状态观测器为降维观测器。降维观测器的最小维数为  $(n - p)$ ,这样就只需较少的积分器,简化了状态观测器的结构,在工程应用上具有重要的意义。

通常输出变量是受控对象中状态变量的线性组合,并不是用于状态反馈所需要的状态变量。为此,将状态向量按照输出作坐标变换,使状态向量的前  $p$  个分量等于输出,即取坐标变换

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{Cx}}{\mathbf{Gx}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{G}} \mathbf{x} = \mathbf{Px} \quad (2.71)$$

在坐标变换阵  $\mathbf{P}$  中前  $p$  行为输出矩阵  $\mathbf{C}$ ,后  $(n - p)$  行可以任意选择,只要保证  $\mathbf{P}$  为非奇异即可。将  $\mathbf{P}$  的逆矩阵类似分块为

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{Q}_2] \quad (2.72)$$

则由

$$\mathbf{I} = \mathbf{PQ} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{G}} [\mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{Q}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{CQ}_1 & \mathbf{CQ}_2 \\ \mathbf{GQ}_1 & \mathbf{GQ}_2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

可得出  $\mathbf{CQ}_1 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{CQ}_2 = 0$ 。

经坐标变换式(2.71)后,状态空间描述式(2.62)变成:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{PAP}^{-1}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{PBu} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{CP}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{CQ}_1 \quad \mathbf{CQ}_2]\bar{\mathbf{x}} = [\mathbf{I} \quad 0]\bar{\mathbf{x}}\end{aligned} \quad (2.74)$$

令  $\bar{x}_1$  和  $\bar{x}_2$  分别为  $\bar{x}$  的  $p$  和  $(n - p)$  维分状态, 则可将式(2.74) 进一步表示为:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [I \ 0] \bar{x} = \bar{x}_1 \end{aligned} \quad (2.75)$$

由式(2.75) 可以看出, 变换后的分状态  $\bar{x}_1$  ( $\bar{x}$  的前  $p$  个分量) 即为系统输出  $y$ , 我们可以直接利用它而无需对其重构, 因而仅需重构  $(n - p)$  维分状态  $\bar{x}_2$ 。

为了重构  $\bar{x}_2$ , 根据式(2.75), 将包含  $\bar{x}_2$  的子系统的状态空间描述写为:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= A_{22} \bar{x}_2 + (A_{21} y + B_2 u) \\ y - A_{11} y - B_1 u &= A_{12} \bar{x}_2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

在这个  $(n - p)$  维子系统中重新定义输入  $\bar{u} = (A_{21} y + B_2 u)$  和输出  $\bar{y} = y - A_{11} y - B_1 u$ , 可以将式(2.76) 表示为状态空间描述的标准形式

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= A_{22} \bar{x}_2 + \bar{u} \\ \bar{y} &= A_{12} \bar{x}_2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

因为坐标变换不改变系统的能观测性, 根据系统式(2.62) 的能观测性, 可以确定系统式(2.75) 的能观测性。在式(2.75) 中, 分状态  $\bar{x}_1$  就是输出量  $y$ , 由于系统的能观测性, 分状态  $\bar{x}_1$  的全部信息必然包含在输出量  $y$  即  $\bar{x}_1$  中, 观察式(2.75) 中关于分状态  $\bar{x}_1$  的状态方程可以知道,  $\bar{x}_2$  的全部信息是通过  $A_{12} \bar{x}_2$  项传递到  $\bar{x}_1$  中的 (即在  $\bar{x}_1$  的状态方程中, 只有  $A_{12} \bar{x}_2$  这一项与  $\bar{x}_2$  有关), 所以  $A_{12} \bar{x}_2$  必包含分状态  $\bar{x}_2$  的全部信息, 也就是说, 系统式(2.77) 是完全能观测的。根据前面全维状态观测器的结论, 构造关于  $\bar{x}_2$  的  $(n - p)$  维状态观测器:

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (A_{22} - LA_{12}) \hat{\bar{x}}_2 + L + \bar{u} \quad (2.78)$$

由于系统式(2.77) 完全能观测, 可以选择  $L$  任意配置  $(A_{22} - LA_{12})$  的所有特征值。将  $\bar{u}$  和  $\bar{y}$  的定义代入式(2.78), 可得:

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (A_{22} - LA_{12}) \hat{\bar{x}}_2 + L(y - A_{11} y - B_1 u) + (A_{21} y + B_2 u) \quad (2.79)$$

但是在式(2.79) 中有输出量的导数项  $\dot{y}$  出现在方程的右端, 虽然可以通过微分由  $y$  得出  $\dot{y}$ , 但是这将把输出量  $y$  中的高频噪声加强, 严重时观测器式(2.79) 将不能正常工作, 这是我们所不希望的, 为此引入变换:

$$z = \hat{\bar{x}}_2 - Ly \quad (2.80)$$

代入式(2.79) 并整理, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{\hat{\bar{x}}}_2 - Ly \\ &= (A_{22} - LA_{12}) \hat{\bar{x}}_2 + (A_{21} - LA_{11}) y + (B_2 - LB_1) u \\ &= (A_{22} - LA_{12}) z + [(A_{22} - LA_{12}) L + (A_{21} - LA_{11})] y + (B_2 - LB_1) u \end{aligned} \quad (2.81)$$

式(2.81) 是系统式(2.75) 的降维观测器的动态方程, 它是一个以  $u$  和  $y$  为输入的  $(n - p)$  维动态系统, 适当选择  $L$ , 可以任意配置  $(A_{22} - LA_{12})$  的特征值。 $\bar{x}_1 = y$ , 而  $\bar{x}_2$  的状态重构值,  $\hat{\bar{x}}_2 = z + Ly$ , 即整个系统的状态重构值  $\hat{\bar{x}}$  为:

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z + Ly \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

考虑到式(2.71)所示的坐标变换,原系统式(2.62)的状态  $\mathbf{x}$  的重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_1\mathbf{y} + \mathbf{Q}_2(\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{y})\end{aligned}\tag{2.83}$$

综上所述,可以得到降维观测器的设计算法。

### 降维观测器设计算法

条件:给定完全能观测的系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ ,其中  $\mathbf{C}$  为行满秩,且秩为  $p$ 。

1.构造坐标变换阵  $\mathbf{P}$ ,其中  $\mathbf{P}$  的前  $p$  行即  $\mathbf{C}$ ,并添上后  $(n - p)$  行  $\mathbf{G}$ ,使得  $\mathbf{P}$  为非奇异,如式(2.71)所示。

$$\text{令 } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$$

2.利用坐标变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ,将系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  化成系统  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$  如式(2.74)和式(2.75)所示。

3.选择  $(n - p) \times p$  维矩阵  $\mathbf{L}$ ,使得矩阵  $(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})$  具有预先指定的特征值。

4.构造式(2.81)所示的降维状态观测器,以获得变量  $\mathbf{z}$ 。

5.根据式(2.83)构造出  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  的重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$ 。

**【例 2.10】** 设计线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -11 & -12 & -12 \\ 13 & 14 & 13 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

的降维观测器。

构造坐标变换阵

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{Q} &= \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

利用坐标变换  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ,可以将以上系统变成  $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}})$ ,其中

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} &= \left[ \begin{array}{c|cc} 6 & 0 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \\ 13 & 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1} &= [1 \mid 0 \quad 0]\end{aligned}$$

选择  $(n - p) = 2$  维的降维观测器极点为  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$ ,则期望的观测器特征多项式为

$$\chi^*(s) = (s + 3)(s + 4) = s^2 + 7s + 12$$

设  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ,则降维观测器系数矩阵的特征多项式为:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22} + \mathbf{L}\mathbf{A}_{12}) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \frac{l_1}{l_2} [0 \quad -1]$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{vmatrix} s+1 & 1-l_1 \\ -1 & s-l_2 \end{vmatrix} \\
 &= s^2 + (1-l_2)s + (1-l_1-l_2)
 \end{aligned}$$

与  $\Delta^*(s)$  的  $s$  同次幂系数比较可得

$$\begin{aligned}
 1-l_2 &= 7 \\
 1-l_1-l_2 &= 12
 \end{aligned}$$

解得  $l_1 = -5, l_2 = -6$

将以上各相应矩阵代入降维观测器方程

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}} &= (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{z} + [(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{12})\mathbf{L} + (\mathbf{A}_{21} - \mathbf{L}\mathbf{A}_{11})]\mathbf{y} + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{L}\mathbf{B}_1)\mathbf{u} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}_1\mathbf{y} + \mathbf{Q}_2(\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{y}) = \mathbf{Q}_2\mathbf{z} + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2\mathbf{L})\mathbf{y}
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 60 \\ 54 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}
 \end{aligned}$$

降维观测器只需  $(n-p)$  个积分器, 具有较为简单的结构, 便于工程实现。但是由式(2.83)可见, 在降维观测器中系统输出  $\mathbf{y}$  通过增益阵  $\mathbf{Q}$  直接传递到重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  中, 如果  $\mathbf{y}$  中包含了严重的观测噪声, 则它们将全部出现于  $\hat{\mathbf{x}}$  中。而在全维状态观测器式(2.67)中,  $\mathbf{y}$  需经积分器滤波后才传送到输入端, 从而使  $\hat{\mathbf{x}}$  中所包含的观测噪声大大减小。因此, 在工程应用中, 应当根据具体情况决定是采用降维观测器还是采用全维观测器。

## § 2.6 带状态观测器的状态反馈控制系统的特性

状态观测器的建立解决了受控对象中不能直接测量的状态的重构问题。当系统的状态不能直接测量时, 利用重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  代替真实状态  $\mathbf{x}$ , 使得状态反馈的工程实现成为可能。但是, 状态反馈控制器通常是相应于受控系统的真实状态进行综合的。人们不禁要问, 利用重构的状态  $\hat{\mathbf{x}}$  进行反馈和利用真实状态  $\mathbf{x}$  进行反馈之间究竟有无差别? 本节中就将这一问题进行讨论。

对于带全维状态观测器的状态反馈控制系统, 由于系统方程为  $n$  维, 而状态观测器也为  $n$  维, 所以整个闭环控制系统为  $2n$  维。它的结构如图 2.6 所示。

整个闭环系统的状态方程可写成:

图 2.6 带观测器的状态反馈系统

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

写成矩阵形式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} - \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

显然它是一个  $2n$  维的复合系统。为了讨论系统式(2.85)的极点分布,我们对其作坐标变换:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$  相应  $n$  维观测误差向量。

相应于这一坐标变换可得到变换后系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} - \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.87)$$

由式(2.87)可见,  $n$  维观测误差向量  $\hat{\mathbf{x}}$  是由  $\mathbf{v}$  不能控的。因此,无论外部输入  $\mathbf{v}$  是如何变化,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  都能按预先指定的速度趋向于零。

利用矩阵论的有关知识,我们知道,若分块矩阵

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

中  $\mathbf{R}$  与  $\mathbf{T}$  均非奇异,则  $\mathbf{W}$  非奇异且

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

利用式(2.88)可得出系统中  $\mathbf{v}$  到  $\mathbf{y}$  的传递函数矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BK}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \\ \mathbf{0} & (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.89)$$

由之可见,由  $\mathbf{v}$  到  $\mathbf{y}$  的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  与用真实的  $\mathbf{x}$  作为状态反馈时的闭环传递函数矩阵完全一致。这显然是由于状态观测器这一不能控系统的动态被排除在闭环系统传递函数矩阵之外的缘故。因此,根据观测器给出的状态  $\hat{\mathbf{x}}$  的重构状态  $\hat{\mathbf{x}}$  作为状态反馈并不影响复合系统的输入输出特性。另外,由于闭环系统的特征多项式满足

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{bmatrix} \\ &= \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) \end{aligned} \quad (2.90)$$

可见在整个闭环系统中,控制器的动态特性与观测器的动态特性是相互独立的。即观测器的引入,不影响由状态反馈阵  $\mathbf{K}$  所配置的系统特征多项式  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$  及相应的特征值;反

过来, 状态反馈的引入, 也不影响已设计好的观测器的特征多项式  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC})$  及相应的特征值。这个性质称为分离原理。分离原理给控制系统的设计带来了极大的方便。根据这一原理, 我们可以将状态反馈控制律的设计和状态观测器的设计独立地分开进行。即在设计状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$  时, 假定真实状态  $\mathbf{x}$  是可直接量测的, 不去考虑状态观测器的设计。而在设计状态观测器时, 也无须考虑状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$  为何值。只是在最后实现整个控制系统时才将它们如图 2.6 那样连接起来。这就为控制系统的设计提供了很大的方便。

## § 2.7 解 耦 控 制

考虑线性定常  $m$  输入  $m$  输出的受控对象

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{2.91}$$

其中  $\text{rank } \mathbf{B} = \text{rank } \mathbf{C} = m$ , 设  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , 则系统的输入输出描述为

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)\tag{2.92}$$

令  $y_i(s)$ ,  $u_i(s)$  分别表示  $\mathbf{Y}(s)$  及  $\mathbf{U}(s)$  的第  $i$  元素,  $g_{ij}(s)$  表示  $\mathbf{G}(s)$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素, 则式(2.92)可展开成

$$\begin{aligned}y_1(s) &= g_{11}(s) u_1(s) + g_{12}(s) u_2(s) + \dots + g_{1m}(s) u_m(s) \\ y_2(s) &= g_{21}(s) u_1(s) + g_{22}(s) u_2(s) + \dots + g_{2m}(s) u_m(s) \\ &\dots\dots\dots \\ y_m(s) &= g_{m1}(s) u_1(s) + g_{m2}(s) u_2(s) + \dots + g_{mm}(s) u_m(s)\end{aligned}\tag{2.93}$$

由式(2.93)可见, 一般说来, 对于多变量系统, 系统的一个输入将影响多个输出, 或者说是系统的每一个输出被多个输入所影响。这一现象通常称为耦合现象。这种耦合现象在有些情况下是我们所不希望的, 例如有时我们希望在系统其它输出都不改变的情况下去调整某个输出, 这在具有耦合现象的多变量系统中是很难实现的。在这种情况下, 我们可以构造一补偿器, 使得耦合的多变量系统变成解耦的系统。即使得每一个输入只影响一个输出, 或者说每一个输出只受一个输入控制。显然, 一个解耦的多变量系统的传递函数矩阵应当是对角形的且为非奇异的。解耦系统可看成是一组相互无关的单变量系统所组成。

本节我们考虑采用形如

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{Kx} + \mathbf{Lv}\tag{2.94}$$

的线性状态反馈使式(2.17)所示的多变量系统的解耦问题。其中  $\mathbf{K}$  为  $m \times n$  维矩阵;  $\mathbf{L}$  为  $m \times m$  维非奇异阵, 称为输入变换阵;  $\mathbf{v}$  为  $m$  维的参考输入。将式(2.94)代入式(2.91)即得闭环系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} + \mathbf{BLv} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{2.95}$$

闭环系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{BL}\tag{2.96}$$

它是一个  $m \times m$  的有理分式矩阵。如果能找到输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ , 使得式(2.96)所示的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{G}_{KL}(s)$  是一个非奇异对角形式有理分式阵, 即



$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_{mm}(s) \end{bmatrix}, \quad g_{ii}(s) \neq 0 \quad (2.97)$$

则称系统式(2.91)通过状态反馈实现了动态解耦。当系统实现了动态解耦以后,它的闭环系统的输出变量和参考输入变量之间满足关系式

$$y_i(s) = g_{ii}(s) v_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.98)$$

这样一个  $m$  输入  $m$  输出的多变量系统化成了  $m$  个相互独立的单输入单输出系统。

动态解耦要求闭环系统传递函数矩阵  $\mathbf{G}_{KL}(s)$  是如式(2.97)所示的对角阵,这对许多系统来说是不可能实现的。在这种情况下,我们可以退一步只要求系统的输入和输出在系统达到稳态后是解耦的。具体说来,可以将输入输出静态解耦问题描述为:

寻找输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ , 使得在状态反馈控制律式 (2.94) 作用下的闭环系统式 (2.95) 是渐近稳定的, 且闭环传递函数矩阵  $\mathbf{G}_{KL}(s)$  在  $s=0$  时为非奇异对角矩阵, 即

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{W}, \quad g_{ii}(0) = 0 \quad (2.99)$$

则称系统式(2.91)在状态反馈作用下实现了静态解耦。

静态解耦只适用于参考输入  $\mathbf{v}$  中各分量都是阶跃输入的情况。这时  $\mathbf{v}(t)$  的拉氏变换  $\mathbf{V}(s)$  可以表示为:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{matrix} & 1 \\ & \vdots \\ & m \end{matrix} \frac{1}{s} \quad (2.100)$$

其中  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$  为非零常数。利用拉氏变换的终值定理,在渐近稳定的前提下,有:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{y}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{G}_{KL}(s) \dots \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) \dots = \dots \end{aligned} \quad (2.101)$$

式(2.101)表明,当系统实现静态解耦时,对于各个分量均为阶跃信号的参考输入,则在静态情况下,每个输出只受同序号的一个输入的完全控制。但在过渡过程中,系统输出和输入之间的交叉耦合关系并不能消除。这也是动态解耦和静态解耦之间的区别。

### 2.7.1 静态解耦

静态解耦的综合要解决两个问题,一个是确立受控系统的可解耦性,另一个是在受控系统满足可解耦性时如何确立输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ ,实现静态解耦。

首先,为保证式(2.95)所示的闭环系统是渐近稳定的,必须要求受控系统式(2.91)是能镇定的。这时为实现静态解耦,应当选择  $\mathbf{K}$  使  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  所有特征值均具有负实部,因此,  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  是非奇异的,即  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}$  存在。由于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} & (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

以及

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

所以成立

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

显然,如果受控系统(2.91)中的各矩阵满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + m \quad (2.105)$$

就可保证

$$\text{rank}[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] = m \quad (2.106)$$

即  $m \times m$  维方阵  $\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$  非奇异, 取

$$\mathbf{L} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{F} \quad (2.107)$$

其中对角矩阵

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{mm} \end{bmatrix}, \quad f_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.108)$$

则根据式(2.96), 有

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}_{KL}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL} \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \cdot \{-[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{F}\} \\ &= \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2.109)$$

即系统实现了静态解耦。

根据以上的推导, 我们得出受控系统能静态解耦的条件:

**定理 2.4:** 存在输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ , 使得受控系统式(2.91)在状态反馈律式(2.94)下实现静态解耦的充分必要条件是

- (1) 受控系统是能镇定的
- (2) 受控系统满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + m$$

证明: 充分性已在前面推导中得出, 下面证明必要性。

由于静态解耦要求  $\mathbf{G}_{KL}(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{BL}$  为非奇异对角阵, 由于  $\mathbf{L}$  非奇异, 故  $\mathbf{G}_{KL}(0)$  的非奇异性等价于  $\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$  的非奇异性, 根据式(2.104) ~ 式(2.106), 后者即等价于条件(2)成立。另一方面, 静态解耦要求闭环系统为渐近稳定, 即要求条件(1)成立。

应当指出, 一般系统都能满足静态解耦的条件。我们下面给出静态解耦控制器的设计算法。

## 静态解耦控制器设计算法

- (1) 判定受控系统是否满足定理 2.4 的可静态解耦条件。
- (2) 确定状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 使  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  的特征值均具有负实部。
- (3) 按照静态解耦后各个单输入单输出系统稳态增益的要求确定  $f_{ii}, i = 1, \dots, m$ ; 然后按式(2.108) 构造  $\mathbf{F}$ 。
- (4) 确定输入变换阵  $\mathbf{L} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{F}$ 。

## 2.7.2 动态解耦

实现动态解耦方法有时域方法和频域方法等。我们在这里仅讨论用逆系统方法来实现解耦问题, 它是时域方法的一种。

令  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  为系统式(2.91) 的传递函数矩阵, 我们首先定义两个特征量。

首先定义  $\mathbf{G}(s)$  的第一个特征量  $d_i, i = 1, \dots, m$ , 称为解耦阶常数:

$$d_i + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} \mathbf{G}_i(s) \quad (2.110)$$

其中  $\mathbf{G}_i(s)$  表示  $\mathbf{G}(s)$  的第  $i$  行中各元素分母的次数和分子次数之差的最小值。并令第二个特征量, 即  $1 \times m$  维行向量  $\mathbf{E}_i, i = 1, \dots, m$ , 为:

$$\mathbf{E}_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} \mathbf{G}_i(s) \quad (2.111)$$

其中  $\mathbf{G}_i(s)$  表示  $\mathbf{G}(s)$  的第  $i$  行。若令  $\mathbf{C}_i$  表示  $\mathbf{C}$  的第  $i$  行, 则有

$$\mathbf{G}_i(s) = \mathbf{C}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

定义矩阵:

$$\begin{aligned} \text{由于 } (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{R}(s)}{\Delta(s)} \\ &= \frac{1}{\Delta(s)} (\mathbf{R}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{R}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \mathbf{R}_1s + \mathbf{R}_0) \end{aligned} \quad (2.114)$$

其中

$$\Delta(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

是  $\mathbf{A}$  的特征多项式,

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{R}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \mathbf{R}_1s + \mathbf{R}_0 \quad (2.115)$$

为  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 。通过将式  $\Delta(s)\mathbf{I} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{R}(s)$ , 两边分别展开, 并根据  $s$  的同幂次系数相等的条件, 可得出

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n-1} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_{n-2} &= \mathbf{A} + \alpha_{n-1}\mathbf{I} \\ \mathbf{R}_{n-3} &= \mathbf{A}^2 + \alpha_{n-1}\mathbf{A} + \alpha_{n-2}\mathbf{I} \\ &\dots\dots \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{A}^{n-1} + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.116)$$

将式(2.114) 代入式(2.112) 可得

$$\mathbf{G}_i(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \mathbf{C}_i [\mathbf{R}_{n-1}s^{n-1} + \mathbf{R}_{n-2}s^{n-2} + \dots + \mathbf{R}_1s + \mathbf{R}_0] \mathbf{B}$$

$$= \frac{1}{(s)} (\mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{B} s^{n-1} + \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-2} \mathbf{B} s^{n-2} + \dots + \mathbf{C}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{B}) \quad (2.117)$$

由于  $\mathbf{G}_i(s)$  各元素中分子多项式的最高阶数为  $n - d_i - 1$ , 因此不存在有  $s^{n-d_i}, \dots, s^{n-1}$  等阶次的项, 即成立

$$\mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-2} \mathbf{B} = \dots = \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-d_i} \mathbf{B} = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-d_i-1} \mathbf{B} \neq 0 \quad (2.118)$$

因此, 根据式(2.116)和式(2.118), 成立

$$\mathbf{C}_i \mathbf{B} = \mathbf{C}_i \mathbf{A} \mathbf{B} = \dots = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i-1} \mathbf{B} = 0 \quad \text{及} \quad \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0 \quad (2.119)$$

也就是说  $d_i$  是使得  $\mathbf{C}_i \mathbf{A}^k \mathbf{B} \neq 0$  的最小正整数  $k$ 。这样我们也可以直接由系统的状态方程表达式(2.91)来求得  $d_i$ 。另外, 根据式(2.116), 还可以得出

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} \mathbf{G}_i(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{d_i+1} \cdot \frac{\mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-d_i-1} \mathbf{B} s^{n-d_i-1} + \dots + \mathbf{C}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{B}}{(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-d_i-1} \mathbf{B} s^n + \dots + \mathbf{C}_i \mathbf{R}_0 \mathbf{B} s^{d_i+1}}{s^n + s^{n-1} + \dots + s + 0} \\ &= \mathbf{C}_i \mathbf{R}_{n-d_i-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.120)$$

这样  $\mathbf{E}_i$  也可以直接由状态空间描述式(2.91)得出。

对式(2.96)所定义的闭环传递矩阵  $\mathbf{G}_{KL}(s)$  类似定义特征量  $\lambda_i$  和  $E_i$ 。并采用与前面类似的分析方法立即可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{B} \mathbf{L} &= \mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{B} \mathbf{L} = \dots = \mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i-1} \mathbf{B} \mathbf{L} = 0; \\ \mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{L} \quad (2.122)$$

由式(2.119), 可以很容易得到

$$\mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^j = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^j \quad j = 0, 1, \dots, d_i \quad (2.123)$$

亦即:

$$\mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^j \mathbf{B} \mathbf{L} = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^j \mathbf{B} \mathbf{L} \quad j = 0, 1, \dots, d_i \quad (2.124)$$

注意到  $\mathbf{L}$  非奇异, 有:  $\mathbf{C}_i (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^j \mathbf{B} \mathbf{L} = 0$  当且仅当  $\mathbf{C}_i \mathbf{A}^j \mathbf{B} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, d_i$ , 因此, 成立

$$\lambda_i = d_i, \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{E} \mathbf{L} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.125)$$

式(2.125)表明  $d_i, i = 1, \dots, m$  是在式(2.94)所示的状态反馈控制规律下的不变量。

用逆系统法解动态解耦问题的思想是在受控系统  $\mathbf{G}(s)$  的前面串联加入一个原系统的逆系统  $\mathbf{G}^{-1}(s)$ , 使得串联后的系统的总传递函数矩阵变成单位矩阵, 达到了解耦的目的。但  $\mathbf{G}^{-1}(s)$  通常不是真有理分式矩阵, 从而不可物理实现。为此, 引入对角形式的传递函数矩阵

$$\mathbf{G}_L^*(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_m+1}} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

作为期望的闭环传递函数矩阵, 也就是说, 要求经式(2.94)所示的状态反馈后, 闭环系统式(2.95)的输入量  $\mathbf{v}$  和输出量  $\mathbf{y}$  之间满足关系:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_L^*(s) \mathbf{V}(s) \quad (2.127)$$

令  $v_i$  表示  $\mathbf{v}$  的第  $i$  分量, 则式(2.127) 也可写成:

$$v_i = y_i^{(d_i+1)} \quad i = 1, \dots, m$$

既实现了输入量输出量的解耦, 又使得输出分量  $y_i(t)$  是对参考输入分量  $v_i(t)$  的  $(d_i + 1)$  重对时间的积分。我们下面通过用输出方程求导的方式, 获得输入  $\mathbf{v}$  的表达式, 并从中解出控制律式(2.94)。

受控系统式(2.91) 输出方程中的第  $i$  个方程为

$$y_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x}$$

其中  $y_i$  是  $\mathbf{y}$  的第  $i$  分量,  $\mathbf{C}_i$  是  $\mathbf{C}$  的第  $i$  行。将式(2.129) 两边求导, 并将状态方程  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$  代入, 有:

$$\dot{y}_i = \mathbf{C}_i \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_i \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}_i \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.128)$$

将式(2.119) 代入, 可得

$$\dot{y}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.129)$$

继续以上过程, 求得

$$y_i^{(j)} = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^j \mathbf{x} \quad j = 1, 2, \dots, d_i \quad (2.130)$$

$$y_i^{(d_i+1)} = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i+1} \mathbf{x} + \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.131)$$

根据式(2.119),  $\mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \neq 0$ 。对  $i = 1, \dots, m$  重复以上过程, 并写成向量形式

$$\begin{aligned} y_1^{(d_1+1)} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \mathbf{x} + \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1} \mathbf{B} \mathbf{u} \\ y_2^{(d_2+1)} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2+1} \mathbf{x} + \mathbf{C}_2 \mathbf{A}^{d_2} \mathbf{B} \mathbf{u} \\ &\dots \\ y_m^{(d_m+1)} &= \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m+1} \mathbf{x} + \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m} \mathbf{B} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.132)$$

令

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} \\ \dots \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m+1} \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

并注意到式(2.128) 和关于矩阵  $\mathbf{E}$  的定义式(2.113) 以及它的第  $i$  行  $\mathbf{E}_i$  的计算式(2.120), 可以将式(2.132) 写成:

$$\mathbf{v} = \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{E} \mathbf{u} \quad (2.134)$$

如果  $\mathbf{E}$  非奇异, 则可以求得

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (2.135)$$

与式(2.94) 的状态反馈律相比较, 立即可以得出

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.136)$$

采用式(2.94) 和式(2.136) 所示的状态反馈律以后, 式(2.96) 所定义的闭环系统传递函数矩阵

$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{G}_L^*(s) \quad (2.137)$$

实现了动态解耦。因为这样解耦后每个单输入单输出闭环控制系统的传递函数均具有多重积分器的特性, 常称这类形式的解耦为积分型解耦。

综上所述, 可得出受控系统的能动态解耦的条件。

**定理 2.5** 系统式(2.91) 可通过式(2.94) 所示的状态反馈律实现动态解耦的充分必要

条件是式(2.111)和式(2.113)所定义的矩阵  $\mathbf{E}$  是非奇异的。

根据定理2.5,受控系统式(2.91)能否通过式(2.94)所示的状态反馈律实现解耦,唯一地取决于它的传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的两个特征量,  $d_i$  和  $\mathbf{E}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ 。从表面上看系统的能控性或能镇定性在此无关紧要。但是定理2.5实现的只是积分型解耦,这种解耦系统的动态性能显然不能令人满意,故本身并无实际价值,它仅是解耦控制的一个中间步骤。为保证解耦的系统能正常运行并具有良好的动态性能,必须要进一步镇定积分型解耦系统。因此,要求受控系统是能控的,至少必须是能镇定的。

由式(2.137),经状态反馈式(2.135)以后闭环系统传递函数矩阵  $\mathbf{G}_L^*(s)$  为对角矩阵,它对应一个维数为  $\sum_{i=1}^m (d_i + 1)$  的系统,因为状态反馈不增加闭环系统的维数,所以成立:

$$\sum_{i=1}^m (d_i + 1) = n \quad (2.138)$$

式(2.91)所示的受控系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ , 经式(2.135)所示的状态反馈后,即得到闭环系统  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}, \mathbf{C})$ 。因为状态反馈不改变系统的能控性,且  $\mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}$  与  $\mathbf{B}$  有相同的秩,若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控,则  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}, \mathbf{C})$  一定能控。若  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控,且  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  和  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}, \mathbf{C})$  都是完全能观测,则在式(2.138)中等号成立。这时,闭环系统由  $m$  个单输入单输出的子系统构成,每个子系统的维数是  $q_i = d_i + 1$ 。当  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  能控,但  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  或  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}, \mathbf{C})$  不能观测时,式(2.138)中严格不等号成立,这时闭环系统各子系统的维数  $q_i > d_i + 1$ 。 $q_i$  的具体值可根据  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}, \mathbf{C})$  的能观测性指数集来确定。

积分型解耦系统可以看成由  $m$  个单输入单输出的子系统构成,它的第  $i$  个子系统的输出  $y_i$  和参考输入的第  $i$  分量之间满足式(2.128)。用拉氏算子表示,即为:

$$Y_i(s) = \frac{1}{s^{d_i+1}} V_i(s) \quad (2.139)$$

显然它不能满足对闭环系统的动态要求。我们可以通过分别配置每个子系统的极点,来使得整个解耦后的系统的动态满足控制要求。为此,设第  $i$  个子系统的期望闭环传递函数为:

$$Y_i(s) = \frac{1}{s^{d_i+1} + \alpha_{id_i}s^{d_i} + \dots + \alpha_{i1}s + \alpha_{i0}} V_i(s) \quad (2.140)$$

也就是说,参考输入与输出的第  $i$  个分量之间满足关系式

$$v_i = y_i^{(d_i+1)} + \alpha_{id_i}y_i^{(d_i)} + \dots + \alpha_{i1}y_i + \alpha_{i0}y_i \quad (2.141)$$

将式(2.130)和式(2.131)代入式(2.141),可得

$$v_i = \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i+1} \mathbf{x} + \alpha_{id_i} \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{x} + \dots + \alpha_{i1} \mathbf{C}_i \mathbf{A} \mathbf{x} + \alpha_{i0} \mathbf{C}_i \mathbf{x} + \mathbf{C}_i \mathbf{A}^{d_i} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.142)$$

令

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} + \alpha_{1d_1} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1} + \dots + \alpha_{11} \mathbf{C}_1 \mathbf{A} + \alpha_{10} \mathbf{C}_1 \\ \dots \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m+1} + \alpha_{md_i} \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_i} + \dots + \alpha_{m1} \mathbf{C}_m \mathbf{A} + \alpha_{m0} \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

则仿照式(2.134)中对  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{E}$  的定义,写成向量形式:

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{u} \quad (2.144)$$

由之立即解出对每个子系统  $i$ , 实现式 (2 .140) 形式的输入输出关系的状态反馈控制律

$$\mathbf{u} = - \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{x} + \mathbf{E}^{-1} \mathbf{u} \tag{2 .145}$$

显然, 根据这一步骤可配置的闭环系统的极点个数为:

$$\prod_{i=1}^m (d_i + 1) = n \tag{2 .146}$$

总结以上的推导, 可以得出实现动态解耦的状态反馈控制器的设计方法。

动态解耦控制器综合算法

条件: 给定受控系统状态空间描述式 (2 .91)

(1) 分别根据式 (2 .110) 或式 (2 .119) 计算  $\{d_i, i = 1, \dots, m\}$ , 根据式 (2 .111) 或式 (2 .120) 计算  $\{\mathbf{E}_i, i = 1, \dots, m\}$ 。

判定  $\mathbf{E} = [\mathbf{E}_1^T \dots \mathbf{E}_m^T]^T$  是否非奇异。若是, 则该系统可实现动态解耦, 若不是则无法实现动态解耦, 退出计算。

(2) 对  $i = 1, \dots, m$ , 确定解耦后第  $i$  个子系统的  $(d_i + 1)$  个期望闭环极点  $\{p_{i1}, \dots, p_{i, d_i+1}\}$ , 并构造期望的特征多项式

$$\begin{aligned} p_i(s) &= (s - p_{i1}) \dots (s - p_{i, d_i+1}) \\ &= s^{d_i+1} + p_{id_i} s^{d_i} + \dots + p_{i1} s + p_{i0} \end{aligned}$$

(3) 计算

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1+1} + p_{1d_1} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{d_1} + \dots + p_{11} \mathbf{C}_1 \mathbf{A} + p_{10} \mathbf{C}_1 \\ \dots \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m+1} + p_{md_i} \mathbf{C}_m \mathbf{A}^{d_m} + \dots + p_{m1} \mathbf{C}_m \mathbf{A} + p_{m0} \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 计算

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1}$$

则  $\mathbf{u} = \mathbf{L} \mathbf{v} - \mathbf{K} \mathbf{x}$  为待求的状态反馈控制律。

【例 2 .11】 给定双输入双输出定常系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

求它的动态解耦控制律。

可以判定系统是能控且能观测的。通过计算

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{B} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0] \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以得出  $d_1 = 1, d_2 = 1, \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

所以

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异, 系统能解耦。

确定第 1 个子系统的闭环极点为  $p_{11} = -2, p_{12} = -4$ , 第 2 个子系统的闭环极点为  $p_{21} = -2 + j, p_{22} = -2 - j$ , 计算:

$$p_1(s) = (s + 2)(s + 4) = s^2 + 6s + 8$$

$$p_2(s) = (s + 2 - j)(s + 2 + j) = s^2 + 4s + 5$$

由之构造

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^2 + 6 \mathbf{C}_1 \mathbf{A} + 8 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^2 + 4 \mathbf{C}_2 \mathbf{A} + 5 \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

计算

$$\mathbf{L} = \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

所以待求的实现动态解耦的控制律为

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \begin{bmatrix} 11 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

这时闭环系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} + \mathbf{BLv} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

闭环传递函数矩阵为:

$$\mathbf{G}_{KL}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{BL} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 6s + 8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + 4s + 5} \end{bmatrix}$$



## § 2.8 渐近跟踪鲁棒调节器

在自动火炮、导弹控制和许多工业过程的控制系统设计中,通常要求闭环系统的输出以给定的精度跟踪参考输入信号。这类控制问题称为跟踪问题,它是控制系统综合与设计的重要内容。

在前面讨论线性定常系统综合时都没有考虑系统的外部扰动,而在实际控制系统中,外部扰动是在所难免的,因此有必要讨论控制系统存在外部扰动时的综合问题。

从性质上来看,外部扰动信号可以分为随机性扰动和确定性扰动两大类。随机性扰动具有随机的形式,通常我们只能知道它的一些统计性质,如均值、方差等。我们在此暂不予以讨论。这里所指的外部扰动,是指确定性扰动,它有确定的函数形式,如阶跃函数、斜坡函数、正弦函数等。许多系统都存在着确定性扰动,如阵风对雷达天线的扰动,轨道对行驶中的列车的纵摇或横摇等扰动等。这些扰动都具有确定的函数形式,可以通过分析或辨识的手段来获得它的函数形式。

为了讨论在有确定性扰动作用下的受控系统的跟踪问题,我们考虑以下同时作用有参考信号  $\mathbf{r}(t)$  和扰动信号  $\mathbf{w}(t)$  的线性定常受控系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{w}\end{aligned}\quad (2.147)$$

式中  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $m$  维控制向量,  $\mathbf{y}$  为  $q$  维输出向量,  $\mathbf{w}$  为  $p$  维扰动向量。假定系统是完全能控和完全能观测的。我们的目的是设计控制器以实现控制规律  $\mathbf{u}$ , 使输出向量  $\mathbf{y}$  跟踪  $q$  维的参考输入信号  $\mathbf{r}$ 。定义跟踪误差

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (2.148)$$

由于物理可实现的限制,要找到对于所有的时间  $t$ , 均有  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t)$  的控制  $\mathbf{u}(t)$  是不可能的。实际上一般只能做到使跟踪误差在稳定时为零

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)] = 0 \quad (2.149)$$

即实现了渐近跟踪。因为受控系统是线性的,且是在参考输入信号  $\mathbf{r}(t)$  和扰动信号  $\mathbf{w}(t)$  的共同作用下,根据叠加原理,式(2.149)意味着,对于  $\mathbf{w}(t) = 0$ , 成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t) \quad (2.150)$$

以及对于  $\mathbf{r}(t) = 0$ , 相应于任意  $\mathbf{w}(t)$  成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0 \quad (2.151)$$

通常称式(2.150)成立的情况为渐近跟踪,式(2.151)成立的情况称为外扰抑制。而式(2.150)和(2.151)同时成立则意味着同时实现渐近跟踪及外扰抑制。

另外,在前面我们所涉及的控制器设计问题中,都是假定受控系统的精确模型为已知。而对实际系统来说,由于受控系统数学模型存在有建模误差,同时由于环境变化、元件老化和受控系统非线性等诸多原因,使得实际的受控系统与控制器设计时所依赖的模型(称为标称模型)之间存在有较大的差异。我们将这种差异归纳为受控系统数学模型中的不确定性。这种受控系统数学模型的不确定性,有可能给闭环系统的控制品质带来十分严重的后果,甚至有可能造成闭环系统的不稳定。如何适当设计控制系统,使得即使当实际受控对象与它的标称模型之间有较大差异时,闭环系统仍然能有较好的控制品质,称为鲁棒(robust)控制问题,相应的控

制系统则称为具有较好的鲁棒性。

事实上,由于实际系统不可能完全与其数学模型一致,没有一点鲁棒性的控制系统是不能正常工作的。前面所讨论的极点配置控制器,当实际受控系统与其标称模型不一致时,实际闭环系统的极点组不再是期望的极点组,但是,当受控系统与其标称模型相差不大时,实际闭环系统的极点一般还是位于期望的极点附近,因此,闭环系统仍然会具有较好的动态品质和渐近稳定性。这说明极点配置控制具有较好的鲁棒性。

对于渐近跟踪和外扰抑制控制,如果在描述受控系统的状态空间模型式(2.147)中各矩阵参数发生波动的情况下(反映了实际受控系统与模型的不一致),闭环系统仍然保持渐近跟踪和外扰抑制的性质,则称闭环系统对抗动的抑制和渐近跟踪具有鲁棒性,相应的控制器称为鲁棒调节器。本节的目标就是要构造这样的一类鲁棒调节器。

2.8.1 阶跃参考输入和外扰下的鲁棒调节器

在传统的控制理论中,对于阶跃形式的参考输入  $r$  和扰动  $w$ ,为使闭环系统做到静态无差,常采用 PI 调节器,在系统的参考输入作用点至扰动信号作用点之间设置一个积分器,对误差  $e$  实行比例积分控制。

这种思想用于多输入多输出系统之上,可以让  $q$  维误差向量  $\mathbf{e}$  的每一分量后面都串入积分器,在保证产生用于抵消阶跃形式扰动的常值静态控制作用  $\mathbf{u}(\infty)$ ,同时让误差的静态值  $\mathbf{e}(\infty)$  的每一个分量都为零。

为简便起见,将受控系统状态空间描述式(2.147)简化为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.152}$$

其中  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 \cdot 1(t)$ , 参考输入  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cdot 1(t)$ ,  $1(t)$  表示单位阶跃输入,  $\mathbf{w}_0$  和  $\mathbf{r}_0$  为未知常向量。对式(2.148)所定义的跟踪误差  $\mathbf{e}$  进行积分,得

$$\mathbf{e}(t) = \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau = \int_0^t [\mathbf{r}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)] d\tau\tag{2.153}$$

显然有  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}$ 。将积分器与受控系统相串联,  $\mathbf{e}$  作为附加的状态向量,可构成增广的受控系统状态空间方程

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.154}$$

增广系统的能控性矩阵

$$\begin{aligned}W_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n+q-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{CB} & -\mathbf{CAB} & \cdots & -\mathbf{CA}^{n+q-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &> \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AW}_1 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{CW}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_1 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.155}$$

$$\text{式中 } \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n+q-2}\mathbf{B} \end{bmatrix}\tag{2.156}$$

当原系统式(2.152)能控时,有

$$\text{rank } \mathbf{W}_1 = \text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n$$

从而有

$$\text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + q \quad (2.157)$$

在此条件下, 增广系统式(2.154) 完全能控的充分必要条件是

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathbf{W}_e &= \text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_1 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \text{rank } \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = n + q \end{aligned} \quad (2.158)$$

换句话说, 增广系统式(2.154) 完全能控的充分必要条件是原受控系统式(2.152) 完全能控, 并且式(2.158) 成立。

在增广系统完全能控的前提下, 可以引入状态反馈

$$\mathbf{u} = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} - \mathbf{K}_2 \quad (2.159)$$

实现闭环极点的任意配置。这时闭环系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & -\mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_e \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}_e \mathbf{x} \quad (2.161)$$

根据期望的闭环特征多项式, 即可确定状态反馈增益阵  $\mathbf{K}_1$  与  $\mathbf{K}_2$ 。当受控系统的状态不能直接测量时, 可以由它的重构状态替代。

可以用拉氏变换的终值定理来计算在阶跃作用下的稳态误差  $\mathbf{e}(\infty)$ , 以校验闭环系统的渐近跟踪特性。对式(2.160) 两边取拉氏变换得

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= - (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)^{-1} \mathbf{BK}_2 \mathbf{X}(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)^{-1} \mathbf{W}(s) \\ s \mathbf{X}(s) &= \mathbf{R}(s) - \mathbf{CX}(s) \\ \mathbf{E}(s) &= s \mathbf{X}(s) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(s) &= [s\mathbf{I} - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)^{-1} \mathbf{BK}_2]^{-1} s \mathbf{R}(s) - [s\mathbf{I} - \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{BK}_1)^{-1} \mathbf{BK}_2]^{-1} \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}_1)^{-1} s \mathbf{W}(s) \end{aligned} \quad (2.162)$$

对于阶跃形式的扰动和参考输入, 有  $\mathbf{W}(s) = \frac{\mathbf{w}_0}{s}$  和  $\mathbf{R}(s) = \frac{\mathbf{r}_0}{s}$ , 代入式(2.162), 并利用终值定理得

$$\mathbf{E}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{E}(s) = 0 \quad (2.163)$$

以上推导表明, 由于积分器式(2.153) 的存在, 导致  $\mathbf{E}(s)$  的表达式中含有因子  $s$ , 它与  $\mathbf{W}(s)$  和  $\mathbf{R}(s)$  的因子  $\frac{1}{s}$  构成了对消, 也就是说, 积分器的极点取消了  $\mathbf{W}(s)$  和  $\mathbf{R}(s)$  的极点, 才保证获得了闭环系统无静差的特性。这个对应于外部阶跃信号的积分器, 称为内模。它保证了, 不管受控系统各参数  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  等如何波动, 只要闭环系统式(2.161) 是渐近稳定的, 即有

$E(s) = 0$ , 渐近跟踪就可实现。所以闭环系统对扰动的抑制和渐近跟踪具有鲁棒性。

**【例 2 .12】** 给定受控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.164}$$

设参考输入  $r(t)$  和扰动  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  都是阶跃信号, 要求设计渐近跟踪鲁棒调节器。  
显然受控系统是完全能控的, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n + q \tag{2.165}$$

存在有渐近跟踪鲁棒调节器。令  $e(t) = r(t) - y(t)$ , 得增广系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & w_1 \\ -2 & 1 & 0 & x_2 & 1 & u + w_2 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & r \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

假定期望的闭环特征多项式为

$$\chi^*(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

它对应的闭环极点是  $s_{1,2} = -1 \pm j$ ,  $s_3 = -2$ 。采用状态反馈

$$u = -\mathbf{k} \mathbf{x} - k_2 e = -k_{11} x_1 - k_{12} x_2 - k_2 e$$

则闭环系统特征多项式为

$$\begin{aligned} \chi_k(s) &= \det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{k} - k_2 \\ &= \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 2 + k_{11} & s - 1 + k_{12} & k_3 \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix} \\ &= s^3 + (k_{12} - 1)s^2 + (2 + k_{11})s - k_3 \end{aligned}$$

与期望闭环特征多项式比较, 可解得

$$k_{11} = 4, k_{12} = 5, k_3 = -4$$

所求的控制器为

$$\begin{aligned} e &= r - y \\ u &= -4x_1 - 5x_2 + 4e \end{aligned}$$

### 2 .8 .2 鲁棒调节器的一般构造

前面已介绍的积分器也称为伺服补偿器, 它根据扰动和参考输入等外部作用来构造, 以实现扰动抑制和渐近跟踪。在扰动和参考输入均为阶跃信号情况下, 伺服补偿器即  $q$  重的积分器, 分别位于  $q$  个误差通道中, 它实现了伺服补偿器的极点和外部作用信号的极点的对消, 以保证  $e(s) = 0$ 。我们现在讨论在一般形式的参考输入和扰动信号下的渐近跟踪问题。

在实际工程问题中, 典型的参考、扰动信号等外作用信号通常是一个时间的幂函数或正弦

函数,当  $t \rightarrow \infty$  时,它们通常不为零。如果存在着形如  $e^{-at}$  ( $a > 0$ ) 一类的外作用信号,它们的极点位于复平面上的左半平面,这类信号当  $t \rightarrow \infty$  时自然趋于零,只要系统渐近稳定,则式(2.149)自然成立,没有必要在跟踪问题中考虑此类的极点。为此,我们今后只考虑极点位于复平面右半平面和虚轴上的那些外作用信号。

一般情况下,我们将参考输入  $\mathbf{r}(t)$  和扰动  $\mathbf{w}(t)$  看作是信号值未知,但信号的函数结构为已知。例如,参考输入  $\mathbf{r}(t)$  可看成是在初始状态  $\mathbf{x}_r(0)$  未知情况下,由下列状态方程:

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r, \quad \mathbf{r} = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r \tag{2.166}$$

来生成。而扰动信号  $\mathbf{w}(t)$  则可看成是在初始状态  $\mathbf{x}_w(0)$  未知的情况下,由下列状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \mathbf{A}_w \mathbf{x}_w, \quad \mathbf{w} = \mathbf{C}_w \mathbf{x}_w \tag{2.167}$$

来生成。

设  $\chi_r(s)$  是  $\mathbf{A}_r$  的特征多项式,  $\chi_w(s)$  是  $\mathbf{A}_w$  的特征多项式。设  $\chi_r(s)$  中相应于闭右半  $s$  平面上的根的因式为  $\chi_{r+}(s)$ ,  $\chi_w(s)$  中相应于闭右半  $s$  平面上的根的因式为  $\chi_{w+}(s)$ 。令  $\chi(s)$  为  $\chi_r(s)$  和  $\chi_w(s)$  的最小公倍式,并可写成

$$\chi(s) = s^l + \chi_{l-1} s^{l-1} + \dots + \chi_1 s + \chi_0 \tag{2.168}$$

与前面所介绍的相应于阶跃信号的外部作用下的渐近跟踪控制系统一样,对于式(2.166)和式(2.167)所描述的参考输入信号  $\mathbf{r}(t)$  和扰动信号  $\mathbf{w}(t)$ , 渐近跟踪鲁棒调节器,也由伺服补偿器和镇定补偿器两部分所构成,如图 2.7 所示。

图 2.7 渐近跟踪鲁棒调节器的结构

伺服补偿器以跟踪误差  $\mathbf{e}$  作为它的输入,在系统中构造一个参考输入  $\mathbf{r}(t)$  和扰动  $\mathbf{w}(t)$  的不稳定信号模型,以抵消外部作用信号的不稳定极点,保证实现扰动抑制和渐近跟踪。镇定补偿器的作用是将受控系统和伺服补偿器串联在一起的广义受控对象镇定,以保证闭环系统的渐近稳定。为简单起见,我们在本节中采用的是状态反馈,如果状态不能直接量测,也可采用状态观测器。

对于  $q$  维误差向量  $\mathbf{e}$ , 伺服补偿器由  $q$  个相互独立的系统构成,第  $i$  个子系统的状态空间描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{e}_i \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, q \tag{2.169}$$

式中  $\mathbf{x}_i$  为第  $i$  个子系统的  $l$  维子状态向量,  $\mathbf{e}_i$  为  $\mathbf{e}$  的第  $i$  分量,  $\mathbf{y}_i$  为子系统输出。要求选择  $\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i$ , 使得式(2.169)的传递函数为  $1/\chi(s)$ 。为简便起见,可选择能控规范型实现:

即伺服补偿器的第  $i$  个子系统的输入为误差向量  $\mathbf{e}$  的第  $i$  分量  $e_i$ , 输出为系统状态向量  $\mathbf{x}_i$  的第 1 分量  $x_{i1}$ 。利用分块对角形式, 将式 (2.169) 所示的各子系统的模型集合起来, 可以得到整个伺服补偿器状态空间描述为:

其中

这样伺服补偿器中  $\mathbf{A}_c$  的维数是  $ql \times ql$ ,  $\mathbf{B}_c$  的维数是  $ql \times q$ ,  $\mathbf{C}_c$  的维数是  $q \times ql$ 。因为各子系统都是取能控规范型实现, 各子系统显然能控, 故整个伺服补偿器式(2.171)也完全能控。

显然伺服补偿器就是参考输入和扰动中不稳定部分的  $q$  重模型, 我们通常称它为内模。它的功能就是对扰动作用和参考输入进行静态补偿, 以实现闭环系统的静态无差。

将受控对象式(2.147) 和伺服补偿器式(2.171) 串联在一起, 构成广义受控对象状态空间模型:

镇定补偿器的目的就是使得由式(2.173)所描述的广义受控对象稳定。可以用各种方式构造镇定补偿器,如采用状态反馈和输出动态反馈等。为简便起见,我们在此采用状态反馈控制器

为了实现极点配置,系统式(2.173)必须为完全可控。根据能控性的 PBH 判据,也就是要求对任意复数  $s$ , 成立

由于系统式(2.147)能控,即对任意复数  $s$  均有

并且对所有不是  $\mathbf{A}_c$  的特征根, 即不是  $(s)$  的根的  $s$  成立

$$\text{rank}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) = lq \quad (2.177)$$

这表明,对所有不是  $(s)$  的根的  $s$  成立

$$\text{rank } \mathbf{V}(s) = n + lq \quad (2.178)$$

将  $\mathbf{V}(s)$  表为:

$$\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_c & -(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) & -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{lq} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

因为系统式(2.171)完全能控,显然对任意复数  $s$ , 成立

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_c & -(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \end{bmatrix} = n + lq \quad (2.180)$$

另方面,我们有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{lq} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} + lq \quad (2.181)$$

假定对  $(s)$  的所有根, 成立

$$\text{rank} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = n + q \quad (2.182)$$

Sylvester 不等式指出:

$$\text{rank } \mathbf{R} + \text{rank } \mathbf{T} - r \leq \text{rank}(\mathbf{RT}) \leq \min\{\text{rank } \mathbf{R}, \text{rank } \mathbf{T}\} \quad (2.183)$$

其中  $\mathbf{R}$  为  $l \times r$  阵,  $\mathbf{T}$  为  $r \times k$  阵; 由式(2.179) 和式(2.183) 可知, 对  $(s)$  的所有根成立:

$$n + lq \leq \text{rank } \mathbf{V}(s) \leq n + lq$$

也就是说, 根据式(2.183) 在式(2.182) 成立的前提下, 对所有复数  $s$  成立:

$$\text{rank } \mathbf{V}(s) = n + lq \quad (2.184)$$

即广义受控对象式(2.173) 为完全能控,

因为伺服补偿器的状态可以直接测量, 为保证状态反馈的物理实现, 在受控系统式(2.147) 的状态不能直接量测时需要采用状态观测器来重构状态, 在这种情况下, 要求受控系统式(2.147) 完全能观测。

我们可以采用式(2.174) 所示的状态反馈, 实现系统式(2.173) 的极点配置, 从而使得如图 2.7 所示的包括伺服补偿器, 受控对象和镇定补偿器在内的闭环系统为渐近稳定。特别地成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)] = 0 \quad (2.185)$$

也即实现了渐近跟踪和扰动抑制。

在以上的推导中, 条件式(2.182) 起了一个关键性的作用。因为  $\mathbf{B}$  是  $(n \times m)$  维阵,  $\mathbf{D}$  是  $(q \times m)$  维阵, 式(2.182) 成立的一个必要条件是  $m \geq q$ 。即输入  $\mathbf{u}$  的维数不能少于输出  $\mathbf{y}$  的维数。

总结以上的推导, 我们得到以下的结论:

**定理 2.6:** 受控对象式(2.147) 可按图 2.7 所示的控制结构实现渐近跟踪和扰动抑制的充分必要条件为:

(1) 受控对象式(2.147) 完全能控, 完全能观测。

$$(2) \quad m = q \quad (2.186)$$

(3) 对  $(s)$  的每一个根  $s_i, i = 1, \dots, l$ , 成立:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = n + q \quad (2.187)$$

与前面所学习控制系统不同的是, 渐近跟踪控制器中同时包含有伺服补偿器和镇定补偿器两个部分。前者即为参考输入和扰动输入信号的不稳定模态的内模。这种利用在控制器内部构造一个相应于外部作用的内模, 以实现渐近跟踪和扰动控制的原理, 称为内模原理, 它可以看成是古典控制中的积分控制的自然推广。

图 2.7 所示的渐近跟踪控制器, 还有一个重要的优点, 就是除了伺服补偿器的部分以外, 受控对象的模型(如  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  等)和镇定补偿器(如  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_c$ )等可以在一定范围内变动, 只要这时相应的整个闭环系统是渐近稳定的, 则恒有式(2.185)成立, 即能保证渐近跟踪和扰动抑制。这种特性即为鲁棒特性, 因此, 相应的控制器称为鲁棒调节器。它保证了即使当实际受控对象的数学模型精确度欠佳时, 也能完成既定的控制目标。但是整个闭环系统的渐近跟踪和扰动抑制特性对于伺服补偿器的变动, 包括阶次和各参数的变动则是敏感的。从物理意义上来看, 内模原理的实质即是依赖内模产生控制作用与  $\mathbf{r}(t)$  和  $\mathbf{w}(t)$  的不稳定振型实现精确的对消来实现渐近跟踪和扰动抑制。内模的不精确, 将直接影响这种对消。在实际的工程问题中, 因为一方面对许多工业过程, 我们通常具有关于其参考输入和干扰的先验知识, 由之不难构造出内模。另方面, 内模的不精确通常只是导致有限的稳定误差, 而  $\mathbf{y}(t)$  还是能较好地跟踪  $\mathbf{r}(t)$ , 所以, 本节所述的渐近跟踪控制器的综合方法通常能取得较好的效果。

根据以上的分析, 我们得到渐近跟踪和扰动抑制鲁棒调节器的综合方法如下:

渐近跟踪鲁棒调节器设计算法

已知: 受控对象模型式(2.147), 参考输入模型式(2.166)和扰动信号的模型式(2.167)。

- (1) 根据  $\mathbf{A}_r$  和  $\mathbf{A}_w$  的位于右半闭  $s$  平面上的特征值, 构造  $(s)$ ;
- (2) 根据  $(s)$ , 利用能控实现, 构造式(2.171)形式的伺服补偿器;
- (3) 根据定理 2.6, 检验系统是否满足式(2.186)和式(2.187);
- (4) 设计状态反馈控制器式(2.174), 实现闭环极点配置, 保证整个闭环系统为渐近稳定。

如果受控对象的状态不能直接测量, 则可以先利用状态观测器重构受控对象的状态, 再利用重构状态实现状态反馈。

**【例 2.13】** 考虑线性时不变受控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ y &= [-1 \quad 0] \mathbf{x} + [0 \quad -1 \quad 2] \mathbf{w} \end{aligned}$$

参考输入  $r(t)$  为阶跃信号, 扰动信号  $\mathbf{w}(t)$  满足模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_w &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathbf{A}_w \mathbf{w} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{x}_w \end{aligned}$$

设计它的渐近跟踪鲁棒调节器, 使闭环极点的实部均小于  $-1/2$ 。

计算可得, 相应参考输入模型的特征多项式

$$r(s) = s$$



相应于扰动信号模型的特征多项式

$$w(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_w) = s^3 + s$$

所以外部作用模型中所有不稳定极点所对应的特征多项式

$$(s) = s^3 + s$$

根据式(2.171), 构造伺服补偿器

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e$$

显然, 对于 (s) 的根  $s_1 = 0, s_{2,3} = \pm j$ , 均有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

系统能实现渐近跟踪。受控对象和伺服补偿器串联而成的广义受控对象为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{C} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{F} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned}$$

选择期望的闭环极点  $s_1 = -1, s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j, s_{4,5} = -2 \pm j$ , 则期望的闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} \phi^*(s) &= (s+1)(s^2+s+\frac{5}{4})(s^2+4s+5) \\ &= s^5 + 6s^4 + \frac{61}{4}s^3 + \frac{81}{4}s^2 + \frac{65}{4}s + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

取状态反馈控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \mathbf{x} - \mathbf{K}_c$$

其中

$$\mathbf{K}_1 = [k_1 \quad k_2] \quad \mathbf{K}_c = [k_3 \quad k_4 \quad k_5]$$

则闭环系统的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK}_1 & -\mathbf{BK}_2 \\ -\mathbf{B}_c\mathbf{C} + \mathbf{B}_c\mathbf{DK}_1 & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{DK}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-k_1 & 1-k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征多项式为:

$$\phi_k(s) = s^5 - (1-k_2)s^4 + k_1s^3 - (1-k_1-k_2)s^2 - (1-k_1+k_5)s + k_3$$

由  $\phi_k(s) = \phi^*(s)$  的  $s$  同次幂的对应系数相等, 可得出关于  $k_i$  的线性方程组, 解之可得

$$k_1 = \frac{61}{4}, k_2 = 7, k_3 = \frac{25}{4}, k_4 = 2, k_5 = \frac{57}{4}$$

即

$$\mathbf{K}_1 = \frac{61}{4} \quad 7 \qquad \mathbf{K}_2 = \frac{25}{4} \quad 2 \quad \frac{57}{4}$$

如果受控对象的状态  $\mathbf{x}$  不能直接量测, 可以利用状态观测器以重构状态  $\mathbf{x}$ 。选择观测器的极点为  $s_{1,2} = -2 \pm 3j$ , 则观测器期望极点多项式:

$$L(s) = (s + 2 - 3j)(s + 2 + 3j) = s^2 + 4s + 13$$

令  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ , 则观测器的系数矩阵

$$[\mathbf{A} - \mathbf{LC}] = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ 1 - l_2 & 1 \end{bmatrix}$$

的特征多项式

$$L(s) = s^2 + (l_1 - 1)s + (l_2 - l_1 - 1)$$

将  $L(s)$  和  $L(s)$  比较可确定

$$\mathbf{L} = [5 \quad 19]^T$$

则状态观测器为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ly} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -18 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ 19 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

这时对应的状态反馈控制律为

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_c$$

## 习 题

2.1 为什么说对单输入完全能控的受控系统, 实现它的期望极点配置的状态反馈增益阵是唯一的?

2.2 给定线性定常受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 使得闭环极点为  $s_1 = -2, s_2 = -3$ 。

2.3 给定线性定常受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试分别通过解联立方程式, Bass-Gura 公式和 Ackermann 公式求出状态反馈增益阵  $\mathbf{K}$ , 使得闭环极点为  $s_1 = -2, s_{2,3} = -1 \pm j2$ 。

2.4 给定受控系统为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

试分别采用两种方法确定状态反馈增益阵  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$ , 使得闭环系统极点为  $p_{1,2} = -2 \pm j3$ ,  $p_{3,4} = -5 \pm j6$ 。

2.5 判断如下系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  是否可以通过状态反馈实现镇定：

$$\begin{aligned} (1) \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ (2) \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.6 考虑单输入双输出系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 证明系统是完全能控和完全能观测的。

(2) 证明采用输出静态反馈  $u = -[f_1 \quad f_2] \mathbf{y}$ , 则不论  $f_1$  和  $f_2$  是何值, 都不能使闭环系统为渐近稳定, 即系统不能通过输出反馈而镇定。

2.7 设控制系统的状态空间方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(1) 检验系统的能观测性。

(2) 试设计它的全维状态观测器, 并使观测器的极点  $p_1 = p_2 = p_3 = -3$ 。

2.8 设受控系统的状态空间方程为：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 2] \mathbf{x} \end{aligned}$$

试确定它的一个降维观测器。

2.9 给定线性定常受控系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

(1) 确定它的全维状态观测器, 并使观测器的极点为  $p_1 = p_2 = -3$ ,  $p_3 = -4$ 。

(2) 在前面所求得的状态观测器的基础上, 设计一个观测器—状态反馈控制系统, 使期望的闭环极点为  $p_1 = p_2 = -1$ ,  $p_3 = -2$ , 并画出系统的组成结构图。

2.10 设受控系统的状态空间方程是

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- (1) 判定系统能否采用状态反馈控制律  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{L}v$  实现静态解耦。
- (2) 如果能静态解耦, 定出实现静态解耦所需的输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ 。

2.11 对于题 2.10 所示的受控系统

- (1) 判定系统能否采用状态反馈控制律  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{L}v$  实现动态解耦。
- (2) 如果系统能动态解耦, 判断闭环系统的每个子系统可以任意配置几个极点?
- (3) 求解动态解耦所需的输入变换阵  $\mathbf{L}$  和状态反馈阵  $\mathbf{K}$ , 将每个子系统的极点都配置在  $-1$  上。

2.12 给定受控系统的状态空间描述:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 2] \mathbf{x} + w$$

当参考输入信号  $r(t)$  为正弦信号, 扰动信号  $w(t)$  为阶跃信号时, 试求系统的渐近跟踪鲁棒调节器。并验证当系统状态空间描述变为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 2.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = [1.1 \quad 2] \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

这一调节器是否仍能实现渐近跟踪?

# 第三章 反馈控制系统的复频域分析与设计

前面我们集中讨论了基于系统状态空间描述的控制系统综合与设计的方法。它是基于时域的分析与设计方法,能够有效地解决线性多变量系统的分析与综合问题。但是时域的分析与设计方法完全依赖于受控对象的精确的数学模型,用这种方法设计的系统通常只对数学模型保证预期的性能指标,而在实际受控对象上能否得到预期的性能,取决于数学模型的精度。另外,这种方法设计出来的控制器结构比较复杂,物理概念也没有经典频域法直观清晰。70年代初,正当状态空间理论蓬勃发展之际,罗森布洛克(H.H.Rosenbrock)和沃罗维奇(W.A.Wolovich)等人的开创性的研究,奠定了现代频域法的基础。他们将单变量系统传递函数的概念自然地推广到多变量系统。提出了线性系统的矩阵分式,互质分解和系统矩阵等新的描述方法,并力图将传递函数矩阵与状态空间法相结合,来分析系统的内部结构特性,为线性多变量系统的分析提供了一种新的有效手段。在其后的20多年中,不管是在理论分析、系统综合还是在工程应用方面,线性系统的复频域分析与综合方法都有了很大的发展,形成了比较完整和成熟的体系。

## § 3.1 反馈控制系统的基本结构

为了能更深刻地了解现代频域方法与古典控制论之间的区别,我们先从单输入单输出系统入手,讨论控制系统的分析和设计的问题。

考虑图 3.1 所示的单输入单输出反馈控制系统。

图 3.1 反馈控制系统

其中  $G(s)$  是受控对象的传递函数,  $K(s)$  是反馈控制器的传递函数,  $P(s)$  是前置滤波器,  $U(s)$  和  $Y(s)$  分别是受控对象的输入和输出信号,  $R(s)$  是参考输入信号,  $D(s)$  和  $M(s)$  是干扰信号,其中  $D(s)$  是过程干扰信号,  $M(s)$  是量测噪声,它是由于对输出信号的测量误差所引起的。我们的目标是选择  $K(s)$  和  $P(s)$ ,使得闭环系统满足控制目标。

对于不具图 3.1 所示的结构控制系统,通常我们可以采用结构图变换的方法,将它变成

具有图 3.1 所示结构的形式。

由图 3.1 知, 闭环系统输出满足

$$Y(s) = D(s) + G(s) K(s) [P(s) R(s) - M(s) - Y(s)] \quad (3.1)$$

即

$$[1 + G(s) K(s)] Y(s) = D(s) + G(s) K(s) [P(s) R(s) - M(s)] \quad (3.2)$$

定义回差

$$F(s) = 1 + G(s) K(s) \quad (3.3)$$

以及灵敏度函数

$$S(s) = F^{-1}(s) \quad (3.4)$$

可以将式(3.2) 写成

$$Y(s) = S(s) D(s) + G_c(s) R(s) - T(s) M(s) \quad (3.5)$$

式中

$$T(s) \stackrel{\text{def}}{=} S(s) G(s) K(s), \quad G_c(s) \stackrel{\text{def}}{=} T(s) P(s) \quad (3.6)$$

称  $T(s)$  为闭环传递函数。

由前面可以看到,  $S(s)$  和  $T(s)$  仅依赖于反馈环内的各环节的传递函数, 与  $P(s)$  无关。 $P(s)$  仅与  $G_c(s)$  有关。因此, 在控制系统设计时, 可以先设计  $K(s)$ , 以得到理想的  $T(s)$  和  $S(s)$ , 然后选择  $P(s)$  以得到合适的  $G_c(s)$ , 后者也可以看成是开环串联补偿问题。这类控制系统的设计问题, 称为两自由度控制系统设计问题。

然而, 在许多控制系统设计问题中, 前置滤波器  $P(s)$  是固定的, 例如为 1。在这种情况下,  $G_c(s)$  和  $T(s)$  不可能独立地进行选择, 在  $P(s)$  为 1 时, 它们二者还是一致的。这类控制系统设计问题称为单自由度设计问题, 即只选择反馈控制器  $K(s)$ , 满足对控制系统的要求。在本书中, 今后也基本上只考虑单自由度控制系统的综合与设计问题。

根据式(3.5), 如果要同时削弱过程干扰信号  $D(s)$  和量测噪声  $M(s)$  对输出的影响, 我们需要  $S(s)$  和  $T(s)$  在某种意义下尽可能地小。但是由式(3.4) 和式(3.6) 知

$$S(s) + T(s) = S(s)(1 + G(s) K(s)) = 1 \quad (3.7)$$

显然, 如果选择了某一  $K(s)$  使得  $S(s)$  近似为零, 则  $T(s)$  将近似为 1, 反之亦然。因此, 在控制系统设计中, 我们不得不在削弱干扰信号  $D(s)$  对系统输出的影响和克服量测噪声  $M(s)$  对输出的影响这两个相互矛盾的目标之间作出某种折衷。这也是控制系统设计的困难所在。由于式(3.7), 我们也称闭环传递函数  $T(s)$  为补灵敏度函数, 以区别于其它的闭环传递函数。

在工业过程控制中, 受控对象的时间常数往往很大, 我们可以通过滤波技术, 有效地消除量测误差, 使得  $M(s)$  可以忽略不计。在这种场合下, 设计控制系统时, 似乎是没有必要进行前面所提及的在使得  $T(s)$  还是  $S(s)$  在某种意义下较小这两个目标之间的折衷了。但是, 实际情况并不是如此。在过程控制中, 我们通常都希望控制信号不要太大, 而这一要求, 同样也是归结为  $T(s)$  应当较小。

由图 3.1, 控制变量

$$U(s) = K(s) [P(s) R(s) - M(s) - D(s) - G(s) U(s)] \quad (3.8)$$

化简后即得

$$U(s) = F^{-1}(s) K(s) [P(s) R(s) - M(s) - D(s)] \quad (3.9)$$

假定闭环系统是渐近稳定的, 并且干扰信号只是在某一段时间内存在, 则控制信号的大小可以通过指标

$$\int_0^\infty u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |U(j\omega)|^2 d\omega \quad (3.10)$$

来衡量,其中控制信号  $u(t)$  是  $U(s)$  的原函数。在式(3.10)中我们应用了著名的巴塞伐尔(Parseval)定理。可见使控制信号不要太大,等价于  $|U(j\omega)|$  不要太大。如果干扰信号的能量频谱在一个较宽的频率范围内均有较大的值,则由式(3.9)可见,使得  $U(j\omega)$  较小的唯一方法是在这一频率范围内使得  $F^{-1}(j\omega)K(j\omega)$  较小,根据  $T(s)$  的定义式(3.6)

$$F^{-1}(j\omega)K(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 + K(j\omega)G(j\omega)} = \frac{T(j\omega)}{G(j\omega)} \quad (3.11)$$

显然,这又等价于要求在  $|G(j\omega)|$  不是太大的频率范围内应保证  $|T(j\omega)|$  较小。

在工程实践中,使得  $S(s)$  和  $T(s)$  都较小这一矛盾,可通过使得  $T(s)$  和  $S(s)$  各自在不同的频率下较小来解决。通常情况下,参考输入信号的频谱都处于低频范围内,而量测噪声的频谱则处于一个较宽的范围内。为此,通常选择  $|S(j\omega)|$  在低频( $0 < \omega < \omega_0$ )内较小,而  $|T(j\omega)|$  在高频( $\omega > \omega_b$ )内较小。即使在没有量测噪声的情况下,为保证控制信号不至于过大,  $|T(j\omega)|$  也应当在控制信号可能具有较大频谱值的频率范围内保持较小的值。

根据式(3.4),使得  $S(s)$  小,等价于使得  $|1 + G(s)K(s)|$  大,即  $|G(s)K(s)|$  大。而另一方面,使得  $T(s)$  小,等价于使得  $S(s)$  接近于1,即使得  $|G(s)K(s)|$  接近于零。一般来说,受控对象的传递函数都具有性质:当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ 。因此一般说来在选择  $K(j\omega)$  时,只要求在高频段  $|K(j\omega)|$  不再增长就行了。但是如果  $|G(j\omega)|$  在高频段的衰减速度不够的话,则  $|K(j\omega)|$  必须在高频区内提供足够的衰减。

一般情况下,过程干扰信号的频谱都是在某一个频率(例如  $\omega_0$ )以下具有较大的值。为此,可以要求

$$|S(j\omega)| < \epsilon \quad 0 < \omega < \omega_0 \quad (3.12)$$

这就意味着,近似成立以下不等式

$$|K(j\omega)G(j\omega)| > \frac{1}{\epsilon} \quad 0 < \omega < \omega_0 \quad (3.13)$$

为了保证闭环系统能在稳态无静差地跟踪阶跃形式的参考输入信号,我们通常还要求  $|K(0)G(0)| = \infty$ 。图3.2显示了开环增益  $|K(j\omega)G(j\omega)|$  的典型频谱图。

由于  $T(s) = 1 - S(s)$ ,相应于以上对  $S(s)$  的要求,近似成立:

$$|T(j\omega)| = |1 - S(j\omega)| \approx 1 \quad 0 < \omega < \omega_0, \text{ 若 } n \geq 1, \quad (3.14)$$

以及  $|T(0)| = 1$ 。综合以上关于  $S(s)$  和  $T(s)$  的要求,  $|S(j\omega)|$  和  $|T(j\omega)|$  的典型频谱图如图3.3所示。

图 3.2  $|K(j\omega)G(j\omega)|$  的典型频谱图

图 3.3 灵敏度函数  $S(s)$  和补灵敏度函数  $T(s)$  的典型频谱图

图 3.3 中的  $b$  通常称为反馈环的带宽, 定义为

$$|T(j\omega_b)| = \frac{|T(0)|}{2} \quad (3.15)$$

显然, 如果  $b$  越小, 则  $|T(j\omega)|$  下降得越快。通常说来, 反馈环的带宽  $b$  与系统对参考输入和扰动的响应速度成反比。 $b$  越小, 则系统的响应速度就越慢。若定义系统的增益交界频率  $\omega_c$  为开环增益  $|G(j\omega_c)K(j\omega)| = 1$  时的频率。则可以证明, 对典型的控制系统  $b$  与  $\omega_c$  之间近似满足

$$\omega_c \approx 2b \quad (3.16)$$

对于两自由度控制系统的设计, 我们还可以选择前置滤波器以进一步改善控制系统的性能, 这时, 必须区别两类带宽的定义, 反馈环带宽和传输带宽。前者是指

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (3.17)$$

的带宽, 它反映了系统消除干扰的速度。而后者是指

$$G_c(s) = \frac{P(s)G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (3.18)$$

它反映了系统对参考输入信号的跟踪速度。在这种情况下, 我们通常选择  $P(s)$  以增加传输带宽, 使之大于反馈环带宽。但是这也同时要求系统有较大的控制能量。

综上所述, 我们可以得到控制系统的两类设计方法, 称为“闭环”设计方法和“开环”设计方法。

闭环设计方法是根据前面所述的对  $S(s)$  和  $T(s)$  的要求, 选择好  $S(s)$  和  $T(s)$ , 也即是确定了  $F(s)$  和  $T(s)$ , 再根据式(3.6), 立即可得到控制器

$$K(s) = G^{-1}(s)F(s)T(s) \quad (3.19)$$

这种设计方法的主要缺点是设计者有时不得不从无数多个同样满足控制目标的  $F(s)$  (或  $T(s)$ ) 中, 挑选一个合适的  $F(s)$  (或  $T(s)$ )。如果任意挑选一个, 则有可能产生其它的问题。例如, 在所有的满足控制目标的  $F(s)$  中间, 有某一些  $F(s)$ , 使得由式(3.19)所计算得到的  $K(s)$  是渐近稳定的, 而另一些则是使得  $K(s)$  是不稳定的。但是如果是采用某种优化的方法确定  $F(s)$  的话, 这个问题就不存在了。因此, 这一方法经常应用采用最优控制的设计中。这一方法的另一个缺点是由式(3.19)所计算得到的  $K(s)$  有可能会是非真的传递函数, 即它的分子多项式的阶次大于分母多项式的阶次, 同时还有可能造成  $K(s)$  和  $G(s)$  的不稳定的零点和极点相消的问题。非真的传递函数通常是不能物理实现的, 而控制器  $K(s)$  和  $G(s)$  的不稳定的零极相消则会造成实际控制系统的闭环不稳定, 因此, 这两者都是应该避免的。为了克服这一缺点, Youla 等人提出了为保证  $K(s)$  为真, 并且  $K(s)$  和  $G(s)$  不存在不稳定的零极相消,  $F(s)$  所必须满足的条件, 使得闭环设计方法成为了一个真正实用的设计方法<sup>[30]</sup>。

另外一个广泛应用的反馈控制器设计方法——开环设计法, 则直接根据开环传递函数  $G(s)K(s)$  来设计控制系统。对典型的控制系统,  $|G(j\omega)K(j\omega)|$  的频谱图如图 3.2 所示。具体说来, 对开环传递函数  $G(s)K(s)$  可能有如下一些要求。

- (1)  $|G(j\omega)K(j\omega)| > L m - 1 \quad 0 < \dots < 1$
- (2)  $|G(j\omega)K(j\omega)| < n - 1 \quad > h$
- (3) 增益裕量不小于  $\mu$ , 相位裕量不小于  $\dots$  等。

当然, 视控制目标和受控对象的不同, 以上要求也可能不一样。例如, 在跟踪问题中, 为实现无稳态误差, 根据内模原理, 对于阶跃形式的参考输入, 应满足  $|G(0)K(0)| = \dots$ , 而对斜



坡输入,则应满足 $\lim_0 \quad / G(j) K(j) / = \quad$ 等。

开环设计法最大优点是容易看出如何选择  $K(s)$  以满足对  $G(s) K(s)$  的要求。同时,对  $K(s)$  的设计还可以分频率段进行,将  $K(s)$  看成几项因子的乘积,而每次因子可根据某一个频段的要求而选择。例如可选择因子  $K_1(s)$  满足在高频段对开环传递函数的要求;选择因子  $K_2(s)$  满足对增益裕量和相位裕量的要求;选择  $K_3(s)$  满足在低频段对开环传递函数的要求。当然,以上每个阶段相互之间都有联系,因此,当得到  $K(s) = K_1(s) K_2(s) K_3(s)$  后还必须对开环传递函数的每个要求复核,如果某个要求没有被满足,则必须进行适当的修正,最终完成设计任务。这一设计过程可以利用 Bode 图、Nyquist 图或 Nichols 图等方法进行。

### § 3.2 反馈控制系统的性能

在开环设计法中,我们是选择  $K(s)$  满足对开环传递函数  $G(j) K(j)$  的要求,主要是对  $/ G(j) K(j) /$  的要求。但是由于开环传递函数的幅频特性和相频特性相互之间密切相关,为保证闭环系统的稳定性,有时我们不可能得到满足对  $/ G(j) K(j) /$  要求的控制器  $K(s)$ 。

假定  $Q(s)$  是最小相位的传递函数,即  $Q(s)$  的所有极点和零点都在复平面上开的左半平面内,并且  $Q(0) > 0$ 。对于这类传递函数,Bode 在 1945 年提出了一个近似关系式:如果在 Bode 图上,  $Q(s)$  的增益下降速度保持为 20dB/十倍频程,则在这段频率范围内其相位约为  $-\frac{\pi}{2}$  rad,如果增益下降速度为 40dB/十倍频程,则其相位为  $-\pi$  rad,余可类推。如果  $Q(s)$  具有位于右半平面的零点,则其相位比以上所指出的还要负得更多。

前面我们已经指出,典型的对控制器的要求是开环传递函数在某一个低频段保持为高增益,然后开环增益尽可能快地下降。如果仅从幅频特性考虑,我们完全可以选择  $K(s)$  满足任意对于开环增益的苛刻要求。但是,我们必须保证闭环系统的稳定性。根据 Nyquist 稳定性定理,在增益交界频率  $\omega_c$  上  $K(j) G(j)$  的相位滞后不能超过  $\pi$  rad。而从前面的分析我们知道,如果增益以 20dB/十倍频程的速度下降的话,则至少有  $\frac{\pi}{2}$  rad 的相位滞后。

因此,对开环稳定的最小相位系统,在增益交界频率附近的区域内,开环增益  $/ G(j) K(j) /$  的下降速率不能超过 40dB/十倍频程。当然,以上这些分析是粗糙的和近似的。但是根据它,我们立即可以对所面临的控制系统设计问题进行定性分析,即得出待设计的控制系统的复杂程度和是否可以实现等方面的结论。

如果受控对象  $G(s)$  是开环渐近稳定的,但是有一个位于  $s = a$  的右半平面零点,则在以下的分析中我们可以看出,在这种情况下,闭环系统所能得到的控制性能是有限的。具体说来,若开环增益满足

$$/ K(j) G(j) / > 1 \quad 0 \quad 0 \quad (3.20)$$

则开环增益—带宽乘积  $\omega_0$  为有限的,同时对  $\omega_0$  的上限约束约为  $\omega_0 = a$ 。下面我们具体分析这一结论。

将  $G(s)$  改写成

$$G(s) = G_0(s) A(s) \quad (3.21)$$

其中  $A(s) = \frac{(s - a)}{(s + a)}$  是一个全通函数 即  $\left| \frac{(j - a)}{(j + a)} \right| = 1, "$ 。图 3.4 显示了  $A(j)$  的 Nyquist 图。

如果选择增益交界频率  $\omega_c = a$ , 则由图 3.4 有

$$\arg A(ja) - \arg(j0) = -\frac{1}{2}$$

根据 Nyquist 稳定性定理, 为了保证闭环系统的稳定性, 我们只能容许  $G(j\omega)K(j\omega)$  在  $0$

$a$  区间内变化不超过  $-\frac{1}{2}$  rad。根据前面所提及的关于幅频特性和相频特性之间的对应关系可知, 以上对于  $\arg[G(j\omega)K(j\omega)]$  的要求就意味着  $|G(j\omega)K(j\omega)|$  在  $\omega = a$  附近区域的下降速度不能超过 20dB/十倍频程。图 3.5 显示了一种可能的设计选择。由图可见, 在  $\frac{a}{10} < \omega < a$  区域内, 增益—带宽乘积近似满足

$$\omega_0 \approx a \tag{3.22}$$

图 3.4 全通函数  $A(j\omega)$  的 Nyquist 图

图 3.5 当  $G(s)$  在右半平面有一零点  $a$  时  $|K(j\omega)G_0(j\omega)|$  的幅频特性的可能形式

当然, 如果进一步要求系统应具有一定的相位裕量  $\gamma > 0$  (对实际控制系统来说, 相位裕量是必不可少的), 则增益—带宽乘积将比式 (3.22) 所示的更小。

如果增益交界频率减少到  $\omega_c = \frac{a}{2}$ , 则  $A(s)$  在该点只有  $53^\circ$  的相位滞后, 使得  $K(j\omega)G_0(j\omega)$  在该点可以有  $127^\circ$  的相位滞后, 从而在该点附近  $|K(j\omega)G_0(j\omega)|$  的下降速度可以为 28dB/十倍频程左右。因此, 增益—带宽乘积可以近似达到  $\omega_0 \approx 1.25a$ 。

如果要求增益交界频率  $\omega_c = 2a$ , 则  $A(j\omega_c)$  在  $\omega_c$  处产生  $127^\circ$  的相位滞后。使得  $\arg[K(j\omega)G_0(j\omega)]$  只能有  $53^\circ$  的相位滞后, 即使在相位裕量为零的情况下, 也只能容许  $|K(j\omega)G_0(j\omega)|$  在  $\omega_c$  附近的下降速度为 12dB/十倍频程。这时, 增益—带宽乘积, 仅为  $\omega_0 \approx 0.4a$ 。

若进一步要求系统具有一定的相位裕量, 则以上的对  $|K(j\omega)G_0(j\omega)|$  在  $\omega_c$  附近的下降速度的限制将更加严格, 同时增益—带宽乘积将更小。表 3.1 显示了当要求系统具有  $40^\circ$  的相位裕量时, 随着  $\omega_c$  取不同值时, 对  $K(j\omega)G_0(j\omega)$  的限制。由此可见,  $\omega_c$  基本上限制在  $\omega_c$  的范围内。

表 3.1 位于  $a > 0$  的零点对  $K(j\omega)G(j\omega)$  的限制

$\omega_c$	$\arg A(0) - \arg A(j\omega_c)$	$-\arg K(j\omega_c)G(j\omega_c)$	$\frac{d}{d\omega}  KG_0 $	$(\omega_0)_{\max}$
$\frac{1}{2}a$	$53^\circ$	$87^\circ$	- 19dB/十倍频程	$0.93a$
$a$	$90^\circ$	$50^\circ$	- 11dB/十倍频程	$0.36a$
$2a$	$127^\circ$	$13^\circ$	- 2.9dB/十倍频程	$0.14a$
$4a$	$152^\circ$	不可能	—	—

对于有多个在右半平面零点的受控对象  $G(s)$ , 也可以进行类似分析, 同样可以知道这时系统的增益交界频率也受到与以上类似的限制。

前面我们已经指出, 对于最小相位系统, 反馈环带宽  $\omega_b$  通常与增益交界频率  $\omega_c$  十分接近, 它们之间满足式(3.16)。但是, 如果受控对象是非最小相位系统时, 这一关系并不一定成立。因此, 以上对  $\omega_c$  的限制不一定直接影响反馈环带宽  $\omega_b$ 。

**【例 3.1】 考虑非最小相位受控对象**

$$G(s) = \frac{s - 1}{s + 2}$$

若选择控制器

$$K(s) = \frac{-20(s + 2)}{s(s + 41)}$$

则可以验证它的开环传递函数  $G(s)K(s)$  的增益交界频率  $\omega_c$  约为  $0.7 \text{ rad/s}$ 。闭环传递函数  $T(s)$  为

$$T(s) = \frac{20(1 - s)}{(s + 20)(1 + s)}$$

它的幅频特性为

$$|T(j\omega)| = \left| \frac{20}{j\omega + 20} \right|$$

由之可得出反馈环带宽  $\omega_b = 20 \text{ rad/s}$ 。系统的灵敏度函数为

$$S(s) = \frac{s(s + 41)}{(s + 1)(s + 20)}$$

即当  $\omega > 0.35 \text{ rad/s}$  后有  $|S(j\omega)| > 1$ 。这样, 所选择的控制系统在  $0.35 \sim 20 \text{ rad/s}$  频率范围内在放大了过程干扰的同时对量测噪声没有任何衰减作用, 从而是一个非常差的控制系统。如果能采用两自由度的控制系统, 可以首先设计  $K(s)$  将反馈环带宽  $\omega_b$  限制在  $1 \text{ rad/s}$  左右, 然后在必要的情况下, 选择前置滤波器, 将与参考输入信号有关的传输带宽扩充到  $20 \text{ rad/s}$ 。这样可以得到一个较为理想的控制系统。

另一方面, 如果受控对象具有不稳定的(位于复平面右半平面)的极点, 则它将对增益穿越频率  $\omega_c$  的下限进行限制。例如, 若  $G(s)$  有一位于  $s = a > 0$  的极点, 则将传递函数  $G(s)$  写成

$$G(s) = G_0(s) A^{-1}(s) \tag{3.23}$$

其中全通函数  $A(s)$  由式(3.21)所定义, 它的 Niquist 图如图 3.4 所示。由于  $G_0(s)$  是真有理函数, 且它所有的极点都位于开环的左半平面, 根据 Nyquist 稳定性定理, 为保证闭环系统的稳定性, 开环传递函数  $G(s)K(s)$  的 Niquist 轨迹必须逆时针包围  $-1 + j0$  点一次, 如果我们假定  $|G(j\omega)|$ , 也即  $|G_0(j\omega)|$  当  $\omega$  增大时为单调下降。则  $\arg G_0(j\omega) - \arg G_0(0)$  必为负。图 3.6 显示了一类可能的开环传递函数  $G(s)K(s)$  的 Nyquist 轨迹, 其中  $\phi_m$  为系统的相位裕量,  $\omega_c$  是增益交界频率。

由图 3.6 可见, 成立

$$\arg[G(j\omega_c)K(j\omega_c)] - \arg[G(0)K(0)] = \tag{3.24}$$

另一方面, 有

$$\arg[G(j\omega)K(j\omega)] = \arg[G_0(j\omega)K(j\omega)] + \arg[A^{-1}(j\omega)] \quad (3.25)$$

代入式(3.24) 可得

$$\begin{aligned} &= \arg[G(j\omega_c)K(j\omega_c)] - \arg[G(0)K(0)] \\ &= \arg[G_0(j\omega_c)K(j\omega_c)] - \arg[G_0(0)K(0)] + \arg A^{-1}(j\omega_c) - \arg A^{-1}(0) \\ &< \arg A^{-1}(j\omega_c) - \end{aligned} \quad (3.26)$$

即

$$\arg A^{-1}(j\omega_c) > \quad + \quad (3.27)$$

参考图 3.4, 显然若  $\omega_c = \frac{a}{4}$  则意味着必有  $\omega_c > \frac{a}{2}$  (近似关系);  $\omega_c = \frac{a}{2}$  则意味着必有  $\omega_c > a$ ; 如此类推。

根据以上分析, 我们知道, 若象通常那样要求  $[G(j\omega)K(j\omega)]$  为单调下降的话, 则闭环系统的带宽必定至少近似为  $a$ 。若开环传递函数中还存在有其它的不稳定极点的话, 则这一关于带宽的下限还要增加。

最后我们来看一看灵敏度函数  $S(s)$ 。为了有效地衰减噪声, 我们应使得  $|S(j\omega)| < 1$ 。但由图 3.3 可见, 对典型的灵敏度函数, 它的幅频特性中总存在有一段频率范围, 在该范围内  $|S(j\omega)| > 1$ 。换句话说, 在这段频率范围内噪声被放大了。是否可以避免这一现象的发生呢 Bode 指出, 这是不可能的。Freudenberg 等进一步给出了以下结论<sup>[27]</sup>;

图 3.6 相位裕量为  $\gamma$  的开环不稳定系统的 Nyquist 图

**定理 3.1** 假定  $G(s)K(s)$  具有位于右半平面的极点  $\{p_i, i = 1, \dots, N\}$  (包括重数), 且

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\substack{|s| > R \\ \operatorname{Re}(s) > 0}} |G(s)K(s)| = 0 \quad (3.28)$$

令  $S(s) = [1 + G(s)K(s)]^{-1}$  为灵敏度函数, 并且闭环系统是渐近稳定的, 则成立

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = -\sum_{i=1}^N \operatorname{Re}(p_i) \quad (3.29)$$

以上定理表明:

(1) 对于开环稳定的系统, 由于成立

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (3.30)$$

即  $|S(j\omega)|$  有多少衰减, 就会有多少增加, 以保证式 (3.30) 成立。换句话说, 如果画出  $|S(j\omega)|$  的幅频关系曲线, 则在纵坐标 1 下面的面积等于在 1 上面的面积。

(2) 对开环不稳定的系统, 根据式 (3.29)  $|S(j\omega)|$  在纵坐标 1 上面的面积将大于在 1 下面的面积, 从而情况变得更糟。并且, 如果开环极点位于离虚轴越右边的地方, 情况就越糟。从物理概念来说, 可以这样理解, 即这时反馈控制的大部分作用都用来将开环不稳定的极点移到稳定区域, 只有一小部分作用来降低灵敏度。这一点也说明了为什么我们喜欢采用开环稳定的控制器。

(3) 如果我们在低频时使得  $|S(j\omega)|$  较小的话, 则会有可能在某一较高的频率范围内

$/S(j\omega)/$  产生一些较高的尖峰。

以上讨论虽然只是针对单输入单输出系统来说的,但是对多变量系统,也同样成立这些结论,读者可参考文献[24], [28], [29] 等。

### § 3.3 极点配置的复频域设计

前面我们已经介绍了当系统是由状态方程表示时,采用极点配置技术,配置闭环系统的特征值,使得系统具有较好的动态性能。在本节中,我们将借助受控对象的传递函数研究类似的问题。

称有理函数为真,若它的分子多项式阶次不大于分母多项式的阶次,特别地,若有理函数分子多项式的阶次严格小于分母多项式的阶次,则称有理函数为严格真。

首先讨论图 3.7 所示的单输入单输出单位反馈控制系统,其中  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  为受控对象的传递函数,  $G(s)$  是真有理函数,且  $d(s)$  和  $n(s)$  是互质的多项式;

$K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$  是控制器的传递函数。

图 3.7 单位反馈控制系统

$r(s)$  为参考输入;  $(s)$  为干扰输入;  $y(s)$  为系统输出。图 3.7 所示单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{e(s)}{y(s)} &= \frac{\frac{1}{1 + G(s)K(s)}}{\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}} = \frac{1 - G(s)}{1 + G(s)K(s)} \frac{r(s)}{(s)} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{H}(s) \frac{r(s)}{(s)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

称以上单位反馈系统为渐近稳定的,当且仅当式(3.31)所定义的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  中每一个元素均是渐近稳定的。可以证明,若由  $r(s)$  到  $y(s)$  的传递函数

$$H_{ry}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \tag{3.32}$$

是渐近稳定的,就可保证整个单位反馈系统是渐近稳定的。

根据前面两节的结论,我们知道,为了使闭环系统对通常具有较高频率的噪声信号有较好的衰减作用,系统的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  应当具有低通的特性,即当  $\omega$  大于某一频率后,  $\mathbf{H}(s)$  中各元的幅频特性应大大小于 1。特别是当  $\omega$  趋向无穷大时,闭环传递函数应趋近于零。显然,这就等价于闭环传递函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  中各元必须为真有理函数。同样,为了使控制器是可以物理实现的,控制器的传递函数  $K(s)$  也必须是真有理函数。

根据以上考虑,我们可以得出关于图 3.7 所示单位反馈系统极点配置控制器的设计要求如下:

设计控制器  $K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ , 满足

- (1) 由式(3.32)所定义的从  $r(s)$  到  $y(s)$  的闭环传递函数  $H_{ry}(s)$  具有任意指定的极点。

(2) 由式(3.31)所定义的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  中各元素均为真有理函数。

(3)  $K(s)$  为真有理函数。

图 3.7 所示单位反馈系统的灵敏度函数为

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)}$$

显然,要求  $\mathbf{H}(s)$  中各元素均为真有理函数的充要条件是  $S(s)$  为真有理函数。因此,以上要求(2)也可等价表示为:  $S(s)$  为真有理函数。

由式(3.32),可得

$$H_{ry}(s) = \frac{\frac{n(s)}{d(s)} \cdot \frac{n_c(s)}{d_c(s)}}{1 + \frac{n(s)}{d(s)} \cdot \frac{n_c(s)}{d_c(s)}} = \frac{n(s)n_c(s)}{d(s)d_c(s) + n(s)n_c(s)} \quad (3.33)$$

设待配置的闭环极点为:  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , 其中各  $s_i$  以实数或成对的共轭复数形式出现, 设它所对应的闭环极点多项式为:

$$(s) = (s - s_1) \dots (s - s_k) \quad (3.34)$$

显然  $(s)$  是实系数  $s$  多项式, 而使得式(3.33)所示的闭环传递函数  $H_{ry}(s)$  的极点为  $\{s_1, \dots, s_k\}$ , 等价于解以下多项式方程:

$$d(s)d_c(s) + n(s)n_c(s) = (s) \quad (3.35)$$

方程式(3.35)称为 Diophantine 方程。解这一方程即可得到  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$ , 若由之构成的控制器  $K(s)$  进一步满足对极点配置控制器的要求(2)与(3), 则它就是我们所要求的控制器。

下面我们来讨论 Diophantine 方程式(3.35)有解的条件和求解的方法。

假定  $d(s)$  和  $n(s)$  有公因子  $q(s)$ , 即若有  $d(s) = d_1(s)q(s)$ ,  $n(s) = n_1(s)q(s)$ , 则方程(3.35)可重写为

$$(d_1(s)d_c(s) + n_1(s)n_c(s))q(s) = (s) \quad (3.36)$$

显然, 为使式(3.36)有解,  $(s)$  必然要含有因子  $q(s)$ , 即  $(s)$  也应该可分解成  $(s) = q_1(s)q(s)$ 。从控制系统分析的角度来看,  $d(s)$  和  $n(s)$  的公因子  $q(s)$ , 对应着受控对象的不能控与/或不能观测的振型(或统称为隐藏振型), 而这一部分振型是不能通过反馈控制而改变的。因此, 以上结论正是反映了这一事实。这样, 为了能任意配置闭环系统的极点, 或者说为使方程式(3.35)对任意  $(s)$  均有解  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$ ,  $d(s)$  和  $n(s)$  必须是互质的, 也就是说, 受控对象  $G(s)$  必须是完全能控的和完全能观测的。这与我们前面的结论是完全一致的。

可以利用各种不同的方法来求解 Diophantine 方程式(3.35)。下面我们介绍利用线性方程组的方法。设

$$d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0 \quad (3.37a)$$

$$n(s) = n_ns^n + n_{n-1}s^{n-1} + \dots + n_1s + n_0 \quad (3.37b)$$

$$d_c(s) = d_{cm}s^m + d_{cm-1}s^{m-1} + \dots + d_{c1}s + d_{c0} \quad (3.37c)$$

$$n_c(s) = n_{cm}s^m + n_{cm-1}s^{m-1} + \dots + n_{c1}s + n_{c0} \quad (3.37d)$$

$$(s) = s^k + s_{k-1}s^{k-1} + \dots + s_1s + s_0 \quad (3.37e)$$

代入方程式(3.35)中,可见方程的左边是一个  $n + m$  阶的多项式,方程的右边是一个  $k$  阶的多项式,因此,必须成立  $k = n + m$ 。根据方程式(3.35)的左右两边的  $s$  多项式同次幂系数相等的原则,可以得到关于  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  的各系数  $d_{ci}$  和  $n_{ci}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , 的  $n + m + 1$  个方程,如果能由这些方程中解出  $d_{ci}$  和  $n_{ci}$ ,则即可确定方程式(3.35)的解  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$ 。将  $d_{ci}$  和  $n_{ci}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  看作是待求的未知量,则未知量的个数共为  $2(m + 1)$  个,而与之相应的线性方程组的个数为  $n + m + 1$ 。如果选择控制器的阶次  $m = n - 1$ ,则未知量的个数为  $2n$  个,而方程组的方程个数也为  $2n$  个。可以证明,在这种情况下,若  $d(s)$  和  $n(s)$  为互质多项式的话,则可以由这  $2n$  个线性方程构成的方程组中唯一地解出  $d_{ci}$  和  $n_{ci}$ 。如果  $m < n - 1$ ,例如,若  $m = n - 2$ ,则未知量的个数为  $2n - 2$  个,而方程组的方程个数则为  $2n - 1$  个,方程组中方程的个数大于未知量的个数,因此,这时方程组并不是对任意  $(s)$  均有解。反之,若  $m > n - 1$ ,则对应的方程组有解,但解不唯一,这就意味着控制器  $K(s)$  的设计具有一定的自由度。如何利用这一自由度,进一步改善控制系统的性能,将是我们在下一节中所要讨论的。

总结以上的讨论,若记多项式  $a(s)$  的阶次为  $\deg a(s)$ ,我们可以得出以下结论:

**定理 3.2** 考虑式(3.35)所示的 Diophantine 方程,其中  $\deg n(s) = n$ ,  $\deg d(s) = m$ ,  $\deg n_c(s) = m$ ,  $\deg d_c(s) = m$ , 则  $\deg (s) = n + m$ , 并且对任意满足  $\deg (s) = n + m$  的多项式  $(s)$ , 方程式(3.35)均有解的充分与必要条件为:  $d(s)$  与  $n(s)$  互质, 且  $m = n - 1$ 。

根据定理 3.2,只要选择控制器  $K(s)$  的阶次大于或等于  $n - 1$ ,则可以由方程式(3.35)中得到实现极点配置的控制器。

因为闭环传递函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  各元素均为真有理函数的要求,等价于要求灵敏度函数

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{d(s)d_c(s)}{d(s)d_c(s) + n(s)n_c(s)} = \frac{d(s)d_c(s)}{(s)} \quad (3.38)$$

为真有理函数。根据式(3.37),  $S(s)$  的分子阶次为  $n + m$ , 分母的阶次  $\deg (s) = n + m$ , 为保证  $S(s)$  为真有理函数,显然应该有  $\deg (s) = n + m$ 。

下面再讨论如何保证控制器  $K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$  为真有理函数的问题。根据  $d(s)$ ,  $d_c(s)$ ,  $n(s)$ ,  $n_c(s)$  的定义,再由方程式(3.35)的左右两边的两个多项式的  $s$  最高次幂  $s^{n+m}$  的系数相等可得出

$$d_{cm} + n_n n_{cm} = 1 \quad (3.39)$$

其中我们假定了  $(s)$  具有式(3.37e)的形式。由式(3.39)可见,若  $n_n = 0$ ,则成立  $d_{cm} = 1$ , 这时有  $\deg d_c(s) = m$ ,  $\deg n_c(s) = m$ , 因此,  $K(s)$  为真有理函数。换句话说,只要受控对象的传递函数  $G(s)$  是严格真的[即成立  $\deg d(s) > \deg n(s)$ ], 则方程式(3.35)中解出来的控制器  $K(s)$  必定为真有理函数。若  $G(s)$  为真有理函数,但不是严格真的[即成立  $\deg d(s) = \deg n(s)$ ], 则有可能产生  $d_{cm} = 0$  的情况,从而造成  $K(s)$  非真。但是,这时如果提高控制器  $K(s)$  的阶次,使得  $m = n$ , 则根据前面的分析知道,这时未知数的个数为  $2n + 2$ , 方程组中方程的个数为  $2n + 1$ , 方程组的方程个数小于未知数的个数,因此解不唯一。我们可以预先固定  $d_{cm} = 1$ , 即保证了  $\deg d_c(s) = m$ , 从而保证了  $K(s)$  为真有理函数。

解 Diophantine 方程式(3.35)的更为直接的方法是将  $d(s)$ ,  $d_c(s)$ ,  $n(s)$ ,  $n_c(s)$  和  $(s)$  写成式(3.37)的形式后,根据这些多项式的系数,直接构造线性方程组:





$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & d_1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & d_0 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & n_1 & 17 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & n_0 & 10 \end{array} =$$

由之解得:  $d_1 = -4.5, d_0 = 3.5, n_1 = 5.5, n_0 = 13.5$

即 
$$K(s) = \frac{5.5s + 13.5}{-4.5s + 3.5}$$

显然  $K(s)$  为真。因此,  $K(s)$  即为所求的极点配置控制器。

极点配置控制器的设计具有计算简单,并能直接保证闭环系统稳定性等一系列特点,从而得到了广泛的应用。但是如何选择理想的极点位置,在很大程度上取决于设计者的经验,因为极点的位置与常用的一些工程指标,如阶跃响应的上升时间,过渡过程时间和超调量等均没有直接的联系。在实际设计中,一方面可以利用优化的方法,如后面所要介绍的二次型最优控制的方法,选择理想的极点位置,另一方面,也可以利用频域的分析方法,选择理想极点位置,使闭环系统能满足一些频域设计的要求。例如将闭环传递函数配置成某些标准形式,而在这些标准形式中,可以很容易地得到一些频域指标与传递函数的分子和分母多项式的关系。

若用  $\sigma$  表示超调量,  $t_r$  表示上升时间,  $t_s$  表示过渡过程时间,它们的定义可以从一般的教科书,如文献[8],中找到。根据计算,可以得到在以下典型环节中,  $\sigma, t_r$  和  $t_s$  与传递函数的零极点

### (1) 一阶环节

$$H(s) = \frac{n}{s + n}, \quad t_r = t_s = \frac{2.2}{n}, \quad \sigma = 0 \tag{3.41}$$

### (2) 二阶环节

$$H(s) = \frac{n^2}{s^2 + 2\zeta ns + n^2}$$

对于这类环节,  $\zeta$  将影响系统是单调上升还是产生振荡,过小的  $\zeta$  将产生很大的超调和较长的过渡过程时间。一般取  $0.5 \leq \zeta \leq 1$ , 这样得到的是一个欠阻尼系统,对应于该情况有:

$$t_r = \frac{2.5}{n} \tag{3.42}$$

$$t_s = \frac{4.6}{n} \tag{3.43}$$

$$\sigma = e^{-1.1\pi\zeta} \tag{3.44}$$

### (3) 一般环节

$$H(s) = \frac{(5\zeta n)^{k-2} n^2}{(s + 5\zeta n)^{k-2} (s^2 + 2\zeta ns + n^2)}$$

该环节由一个二阶环节与若干个一阶环节串联而成,其中二阶环节的两个极点是整个环节的主导极点,因此这个环节的上升时间  $t_r$ ,过渡过程时间  $t_s$  与超调量  $\sigma$  近似地与以上二阶环节的一致,即由式(3.42) ~ 式(3.44) 近似给出。

在极点配置设计中,可以首先选择控制器的结构,使得闭环系统传递函数  $H_{ry}(s)$  具有以上几类环节中某一环节的形式,然后,根据对  $t_r, t_s$  和  $\sigma$  的要求,由式(3.41) ~ 式(3.44) 中确定参数  $n, \zeta$  等,最后根据  $\sigma, t_r, t_s$  等参数,确定闭环系统的极点位置。

在极点的配置过程中,为了使闭环系统具有较简单的形式,还可以首先将  $G(s)$  的分母和分子多项式分别分解成

$$d(s) = d^+(s) d^-(s) \tag{3.45}$$

$$n(s) = n^+(s) n^-(s) \tag{3.46}$$

其中  $d^+(s)[n^+(s)]$  包括  $d(s)[n(s)]$  中所有已经处于理想的稳定区域内的零点。然后选择闭环极点多项式

$$d_c(s) = d_1(s) d^+(s) n^+(s) \tag{3.47}$$

将式(3.45) ~ 式(3.47) 代入方程式(3.35) 得

$$d^+(s) d^-(s) d_c(s) + n^+(s) n^-(s) n_c(s) = d_1(s) d^+(s) n^+(s) \tag{3.48}$$

假定  $d(s)$  和  $n(s)$  互质,则在以上式(3.48) 中,左边第一项含有因子  $d^+(s)$ ,右边也含有因子  $d^+(s)$ ,由于  $n(s)$  和  $d(s)$  互质,  $n^+(s) n^-(s) = n(s)$  中不可能含有因子  $d^+(s)$ ,因此,要使式(3.48) 成立,  $n_c(s)$  中必然含有因子  $d^+(s)$ ,即  $n_c(s)$  可写成

$$n_c(s) = d^+(s) \tilde{n}_c(s) \tag{3.49}$$

同理,  $d_c(s)$  也必然要含有因子  $n^+(s)$ ,即

$$d_c(s) = n^+(s) \tilde{d}_c(s) \tag{3.50}$$

将式(3.49) 和式(3.50) 代入方程式(3.48) 并加以化简得

$$d^-(s) \tilde{n}_c(s) + n^-(s) \tilde{d}_c(s) = d_1(s) \tag{3.51}$$

求解 Diophantine 方程式(3.51), 得出  $\tilde{n}_c(s)$  和  $\tilde{d}_c(s)$  后,再分别代入式(3.49) 和式(3.50) 即可求得  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$ 。在以上过程中应注意选择  $\tilde{n}_c(s)$  和  $\tilde{d}_c(s)$  的阶次,以保证控制器的传递函数  $K(s)$  为真有理函数。

根据式(3.33),这时由  $r$  到  $y$  的闭环系统传递函数为:

$$\begin{aligned} H_{ry}(s) &= \frac{n(s) n_c(s)}{d(s) d_c(s) + n(s) n_c(s)} \\ &= \frac{n(s) n_c(s)}{d(s)} \\ &= \frac{n^-(s) n^+(s) d^+(s) \tilde{n}_c(s)}{d^+(s) n^+(s) d_1(s)} \\ &= \frac{n^-(s) \tilde{n}_c(s)}{d_1(s)} \end{aligned} \tag{3.52}$$

显然,由于相应于  $d^+(s)$  和  $n^+(s)$  的零点和极点的相消,  $H_{ry}(s)$  的阶次得到了降低。在实际系统中,由于建模误差或环境变化等一系统不确定因素的存在,这种精确的零点和极点相消,往往是不可能精确地发生的,但是,由于  $d^+(s)$  和  $n^+(s)$  的零点都位于理想的稳定区域,使得这时的闭环系统在理想的稳定区域内存在有与之相应的相距很近的零点和极点对,根据线性系统分析理论可知,这些零点和极点对对整个系统动态响应的影响可以相互近似抵消,从而整个闭环系统的响应仍相当于式(3.52) 所示的降阶系统。

### § 3.4 极点配置控制器的参数化

在控制系统设计的过程中,一个基本的要求就是保证闭环系统的渐近稳定性。除此以外,还有许多附加的要求。例如对干扰的抑制,解耦控制,无静差地跟踪参考输入信号和对系统鲁

棒性的要求等。解决这样一个有多个综合目标设计问题的一个简便方法就是采用参数化的方法。参数化方法的实质是首先将使得闭环系统为渐近稳定或实现某一理想闭环极点配置的控制器集合用某些参数的形式明显地表示出来,然后利用其它的方法选择在参数化过程中已明显地表示出来了的自由参数,使得闭环系统能满足其它的控制目标。

参数化方法是 70 年代末期由 Youla 等人提出来的<sup>[30]</sup>。它的提出,使得前面所介绍的闭环设计法真正地走向实用的阶段。下面我们介绍极点配置控制器的参数化。

考虑图 3.7 所示的单位反馈系统,在上一节中,我们已经知道,设这一系统理想的闭环极点所对应的闭环特性多项式为  $(s)$ ,则极点配置问题等价于求 Diophantine 方程式(3.35)的满足  $\deg n_c(s) < \deg d_c(s)$  的解的问题。

为了简便起见,我们在本节中假定受控对象的传递函数  $G(s)$  为严格真,即在  $n(s)$  的定义式(3.37b)中  $n_n = 0$ 。这是因为当  $G(s)$  为严格真时,取控制器  $K(s)$  的阶次为  $n - 1$ ,  $(s)$  的阶次为  $2n - 1$ ,则由 Diophantine 方程式(3.35)所求出的  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  可以保证控制器的传递函数  $K(s)$  为真有理函数。

若  $\deg d(s) = 2n - 1$ ,我们考虑如何由 Diophantine 方程式(3.35)的任意解  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$ ,得到满足  $\deg n_{c0}(s) < \deg d(s) = n$  的解  $d_{c0}(s)$  和  $n_{c0}(s)$ 。

设  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  是 Diophantine 方程式(3.35)的一组解,则成立

$$\begin{matrix} d_c(s) & n_c(s) & d(s) \\ n(s) & -d(s) & n(s) \end{matrix} = \begin{matrix} (s) \\ 0 \end{matrix} \tag{3.53}$$

设  $n_c(s)$  整除  $d(s)$  后的商为  $l(s)$ ,余数为  $n_{c0}(s)$ ,即

$$n_c(s) = l(s) d(s) + n_{c0}(s) \tag{3.54}$$

其中  $\deg n_{c0}(s) < \deg d(s) = n$  (3.55)

对式(3.53)两边进行基本行变换

$$\begin{matrix} 1 & l(s) & d_c(s) & n_c(s) & d(s) \\ 0 & 1 & n(s) & -d(s) & n(s) \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & l(s) & (s) \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \tag{3.56}$$

即

$$\begin{matrix} d_{c0}(s) & n_{c0}(s) & d(s) \\ n(s) & -d(s) & n(s) \end{matrix} = \begin{matrix} (s) \\ 0 \end{matrix} \tag{3.57}$$

其中  $d_{c0}(s) \stackrel{\text{def}}{=} d_c(s) + l(s) n(s)$

由式(3.57),显然  $d_{c0}(s)$  和  $n_{c0}(s)$  也是方程式(3.35)的解,并且满足  $\deg n_{c0}(s) < n$ 。并且由于式(3.57)有

$$d_{c0}(s) d(s) + n_{c0}(s) n(s) = (s) \tag{3.58}$$

可得  $\deg d_{c0}(s) + \deg d(s) = \deg[(s) - n_{c0}(s) n(s)]$  (3.59)

因为  $\deg\{n_{c0}(s) n(s)\} < 2n - 1, \deg (s) = 2n - 1$ ,故成立  $\deg d_{c0}(s) = n - 1$  (3.60)

对比式(3.55)和式(3.60),我们知道若令

$$K(s) = \frac{n_{c0}(s)}{d_{c0}(s)}$$

则  $K(s)$  为真有理函数。

下面的定理说明了有关极点配置控制器的参数化结论。

**定理 3.3** 设单输入单输出系统传递函数  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  为严格真,且  $d(s)$  和  $n(s)$  无公

因子,则图 3.7 所示的单位反馈系统能将闭环特征多项式配置为任意指定的  $d(s)$  的充要条件是

$$\deg d(s) \leq 2\deg d(s) - 1 \quad (3.61)$$

并且当  $\deg d(s) > 2\deg d(s) - 1$  时,控制器  $K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$  中存在有自由参数,它可以参数化为

$$\begin{aligned} d_c(s) &= d_{c0}(s) - n(s)t(s) \\ n_c(s) &= n_{c0}(s) + d(s)t(s) \end{aligned} \quad (3.62)$$

其中  $d_{c0}(s)$  和  $n_{c0}(s)$  是 Diophantine 方程的一组满足  $\deg n_{c0}(s) < \deg d(s)$  的解;  $t(s)$  是作为自由参数的任意多项式向量。为保证  $K(s)$  为真有理函数,  $t(s)$  的阶次应满足

$$\deg t(s) \leq \deg d(s) - 2\deg d(s) \quad (3.63)$$

在式(3.63)中,我们扩充了  $\deg(\cdot)$  的定义为:

$$\begin{aligned} \deg t(s) &= t(s) \text{ 的阶次} & \text{若 } t(s) \neq 0 \\ \deg t(s) &= -1 & \text{若 } t(s) = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

证明:

式(3.61)成立是极点配置问题的充要条件这一结论在前面已经给予了证明和说明,这里不再重复。我们仅证明极点配置控制器参数化结论式(3.62)和式(3.63)。

首先我们证明满足式(3.62)和式(3.63)的多项式  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  必定为方程式(3.35)的解,并且保证  $K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$  为真。为此,通过直接代入的方法可知具有式(3.62)形式的  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  均是 Diophantine 方程式(3.35)的解。下面仅需证明当式(3.63)得到满足时,  $K(s)$  必为真有理函数。

根据  $d_{c0}(s)$  和  $n_{c0}(s)$  的定义,以及式(3.61),成立

$$\begin{aligned} \deg n_{c0}(s) &\leq \deg d(s) - 1 \\ \deg d_{c0}(s) &\leq \deg d(s) - \deg d(s) \end{aligned} \quad (3.65)$$

而另一方面,由式(3.63)

$$\begin{aligned} \deg[d(s)t(s)] &= \deg d(s) + \deg t(s) \\ &\leq \deg d(s) + \deg d(s) - 2\deg d(s) \\ &= \deg d(s) - \deg d(s) \end{aligned} \quad (3.66)$$

根据式(3.65)和式(3.66),成立

$$\deg n_c(s) = \deg[n_{c0}(s) + d(s)t(s)] \leq \deg d(s) - \deg d(s) \quad (3.67)$$

另外,由于  $G(s)$  为严格真,即成立

$$\deg n(s) < \deg d(s) \quad (3.68)$$

由 Diophantine 方程,成立

$$\deg[d(s)d_c(s)] = \deg[d(s) - n(s)n_c(s)] \quad (3.69)$$

因为式(3.67)和式(3.68),有

$$\begin{aligned} \deg[n(s)n_c(s)] &= \deg n(s) + \deg n_c(s) \\ &< \deg d(s) \end{aligned} \quad (3.70)$$

所以有

$$\deg[d(s) - n(s)n_c(s)] = \deg d(s) \quad (3.71)$$

代入式(3.69)可得

$$\deg d_c(s) = \deg (s) - \deg d(s) \quad (3.72)$$

对比式(3.67)和式(3.72),显然成立

$$\deg n_c(s) = \deg d_c(s) \quad (3.73)$$

即  $K(s)$  为真。

反过来,我们再证明若  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  是方程式(3.35)的满足式(3.73)的解,则它必定可以表示成式(3.62)和式(3.63)的形式。在这一方面,根据 Diophantine 方程解的性质可知,式(3.62)是方程式(3.35)的通解,即方程式(3.35)的所有解均可表示成式(3.62)的形式。我们仅需证明若具有式(3.62)形式的 Diophantine 方程式(3.35)的解  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  保证了  $K(s)$  为真,即满足式(3.73),则式(3.63)必然成立。

用反证法,若  $d_c(s)$  和  $n_c(s)$  满足式(3.73),但式(3.63)不成立,即若成立

$$\deg t(s) > \deg (s) - 2\deg d(s) \quad (3.74)$$

则有

$$\deg [d(s)t(s)] > \deg (s) - \deg d(s) \quad (3.75)$$

因此有

$$\deg n_c(s) = \deg [n(s) + d(s)t(s)] > \deg (s) - \deg d(s) \quad (3.76)$$

下面分别考虑两种情况:

$$1. \deg (s) = \deg d(s) + \deg d_c(s)$$

在这种情况下,由式(3.76)可直接得出

$$\begin{aligned} \deg n_c(s) &> \deg (s) - \deg d(s) \\ &= [\deg d(s) + \deg d_c(s)] - \deg d(s) \\ &= \deg d_c(s) \end{aligned} \quad (3.77)$$

即与式(3.73)矛盾,  $K(s)$  不为真有理函数。

$$2. \deg (s) < \deg d(s) + \deg d_c(s)$$

在这种情况下,根据方程式(3.35),必然产生了  $d(s)d_c(s)$  和  $n(s)n_c(s)$  两个多项式中  $s$  的高次幂项产生了相互抵消的情况,从而必然成立

$$\deg [d(s)d_c(s)] = \deg [n(s)n_c(s)] \quad (3.78)$$

另一方面,由于  $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$  是严格真有理函数,即

$$\deg n(s) < \deg d(s) \quad (3.79)$$

代入式(3.78)即知有

$$\deg d_c(s) < \deg n_c(s) \quad (3.80)$$

也与式(3.73)矛盾。因此在所有的情况下,当式(3.63)不成立时,将导致控制器传递函数非真,因此式(3.63)是保证  $K(s)$  为真的必要条件。

定理 3.3 所阐述的关于极点配置控制器的参数化表示,不但保证了控制器的传递函数  $K(s)$  为真,并且自由参数[即多项式  $t(s)$  的各系数]直接出现在  $n_c(s)$  和  $d_c(s)$  的系数中,具有十分简明的形式,从而便于指导极点配置控制器的设计。定理中对作为自由参数的多项式  $d(s)$  的阶次的约束式(3.63),实际上是确定了独立的自由参数的个数。在极点配置控制器的设计中,我们可以利用这些自由参数,使得控制器除能实现极点配置以外,还具有其它的功能。

在定理 3.3 中,虽然只讨论了受控对象的传递函数  $G(s)$  为严格真的情况,但因为现实物理系统,特别是工业过程系统的传递函数大都是严格真的,所以它适用于大多数的场合。而对

于受控对象的传递函数  $G(s)$  为真,但不为严格真的情况,通过进一步分析可以知道,只要在选择  $t(s)$  时,不会造成  $d(s) d_c(s)$  和  $n(s) n_c(s)$  的  $s$  高次幂相互抵消的情况,即只要保证

$$\deg \quad (s) = \deg d(s) + \deg d_c(s) \tag{3.81}$$

这一技术条件成立,则定理 3.3 同样适用。如果将  $t(s)$  的各系数(即自由参数)的集合看成是一个  $[\deg t(s) + 1]$  维的线性空间,则使得式(3.81)不成立的  $t(s)$  的集合是仅为该空间中的一个曲面。因此,若任意选择  $t(s)$ ,则式(3.81)将以概率 1 成立。

**【例 3.3】** 设在图 3.7 所示的单位反馈控制系统中,受控对象传递函数

$$G(s) = \frac{(s + 5)}{(s + 1)^2}$$

若选择闭环系统传递函数的极点为:

$$_{1,2} = - 2 \pm 2j, \quad _3 = - 2, \quad _4 = - 3 \tag{3.82}$$

即

$$(s) = (s + 2 - 2j)(s + 2 + 2j)(s + 2)(s + 3)$$

将  $d(s)$ ,  $n(s)$  和  $\quad (s)$  代入 Diphantine 方程式(3.35),利用线性方程组式(3.40)可以解得方程式(3.35)的一组满足  $\deg n_{c0}(s) < \deg d(s)$  的特解

$$\begin{aligned} d_{c0}(s) &= s^2 + 7s + 14.875 \\ n_{c0}(s) &= 4.125s + 6.625 \end{aligned}$$

根据式(3.63),选择  $\deg t(s) = 0$ ,即选择  $t(s) = t_0$ ,其中  $t_0$  是可以任意选择的自由参数。代入参数化定理 3.3 中的式(3.62),可以得到实现  $\quad (s)$  的极点配置控制器具有以下形式

$$K(s) = \frac{n_{c0}(s) + d(s) t_0}{d_{c0}(s) - n(s) t_0} = \frac{t_0 s^2 + (4.125 + 2 t_0) s + (6.625 + t_0)}{s^2 + (7 - t_0) s + (14.875 - 5 t_0)}$$

其中  $t_0$  是自由函数,可以选择它,使得控制系统还是有其它功能。例如选择  $t_0 = 0$ ,则控制器

$$K_1(s) = \frac{4.125s + 6.625}{s^2 + 7s + 14.875}$$

为严格真。若选择  $t_0 = 2.975$  则

$$K_2(s) = \frac{2.975s^2 + 10.075s + 9.6}{s^2 + 4.025s}$$

这时,控制器具有积分作用。可以验证,相应于  $K_1(s)$  和  $K_2(s)$ ,闭环系统的极点均是式(3.82)中所指定的理想极点。

另外,还可以选择  $t_0$ ,降低闭环系统的超调量,或降低控制器输出的幅值等。

### § 3.5 传递函数矩阵的互质分解与 稳定控制器的参数化表示

前面几节关于单输入单输出系统的结论,完全可以推广到多输入多输出系统,在完成这种推广之前,一个非常重要的问题就是如何采用频域的方法,描述多变量线性定常系统。

仿照单输入单输出系统的描述方法,我们将  $m$  维输入  $q$  维输出的多变量系统的传递函数矩阵  $\boldsymbol{G}(s)$  表示为:

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{N}_r(s) \boldsymbol{D}_r^{-1}(s) \tag{3.83}$$

或者

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D}_l^{-1}(s) \mathbf{N}_l(s) \quad (3.84)$$

若在式(3.83)中,  $\mathbf{N}_r(s)$  为  $q \times m$  维多项式矩阵,  $\mathbf{D}_r(s)$  是  $m \times m$  维多项式矩阵, 则是式(3.83)是传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的矩阵分式描述。因为分母矩阵  $\mathbf{D}_r(s)$  位于分子矩阵  $\mathbf{N}_r(s)$  的右边, 还称式(3.83)是  $\mathbf{G}(s)$  的右矩阵分式描述。同理, 若在式(3.84)中,  $\mathbf{D}_l(s)$  是  $q \times q$  维多项式矩阵,  $\mathbf{N}_l(s)$  是  $q \times m$  维多项式矩阵则称式(3.84)是  $\mathbf{G}(s)$  的左矩阵分式描述。

利用系统的矩阵分式描述, 也可以通过解 Diophantine 方程

$$\mathbf{X}_l(s) \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) = \mathbf{I}(s) \quad (3.85)$$

实现闭环分母矩阵的配置。其中  $m \times m$  维多项式矩阵  $\mathbf{I}(s)$  称为期望的闭环分母矩阵, 它由设计者根据对闭环系统性能的要求而定。特别地,  $\det \mathbf{I}(s)$  即为闭环系统的极点多项式, 选择  $\mathbf{I}(s)$ , 使得  $\det \mathbf{I}(s)$  与闭环系统的期望极点一致, 即可实现多变量系统的极点配置。一旦由方程式(3.85)中解出  $\mathbf{X}_l(s)$  和  $\mathbf{Y}_l(s)$ , 则  $\mathbf{K}(s) = \mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s)$  即为待求的控制器传递函数矩阵。

同样, 类似定理 3.3, 可以得出关于实现闭环分母配置的 controllers 的参数化结论, 以及使得多变量系统为闭环渐近稳定的稳定化 controllers 的参数化结论。我们在此不准备进行更深入的讨论, 感兴趣的读者, 可参考文献[32, 34, 35] 等。

如果在表达式(3.83)和式(3.84)中,  $\mathbf{D}_r(s)$ ,  $\mathbf{N}_r(s)$ ,  $\mathbf{D}_l(s)$  和  $\mathbf{N}_l(s)$  均是稳定的真有理函数矩阵, 则称它们为  $\mathbf{G}(s)$  的分解表示。因为这种系统的分解表示是控制系统现代频域分析, 以及后面所要介绍的  $H_\infty$  控制的基础, 我们将在本节中进行重点介绍。

系统的矩阵分式描述和分解表示两者之间有着十分紧密的联系。首先, 它们都具有式(3.83)和式(3.84)一样的形式, 不同的只是看表达式中各矩阵是多项式矩阵还是稳定的真有理函数矩阵。其次, 从代数学的角度来看所有多项式矩阵和稳定的真有理函数矩阵的集合在通常定义的代数运算下都是构成整环, 因此这两种对系统的描述方式, 从某种角度上来看, 可以说几乎是完全一致的, 了解了其中一种描述方式也就了解了另一种。

### 3.5.1 传递函数矩阵的互质分解

如果有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的所有元素都是真有理函数, 则称  $\mathbf{G}(s)$  为真有理函数矩阵, 特别地, 如果  $\mathbf{G}(s)$  的所有元素都是严格真, 则称  $\mathbf{G}(s)$  为严格真有理函数矩阵。如果  $\mathbf{G}(s)$  中所有元素都在  $s$  闭右半平面解析, 即  $\mathbf{G}(s)$  中所有元素的极点都在  $s$  左半平面, 则称  $\mathbf{G}(s)$  为稳定的有理函数矩阵。记所有的稳定的真有理函数矩阵的集合为  $H$ , 可以证明,  $H$  在有理函数矩阵通常的加法运算和数乘运算下, 构成一个实数域上的线性空间。

称有理函数矩阵  $\mathbf{U}(s)$  为单模阵, 若  $\mathbf{U}(s)$  为非奇异方阵, 且  $\mathbf{U}(s), \mathbf{U}^{-1}(s) \in H$ 。

对于一维的标量情况, 单模阵对应着为真但非严格真的最小相位传递函数。显然, 单模阵的乘积仍是单模阵, 单模阵的逆仍是单模阵。

设  $\mathbf{A}(s), \mathbf{B}(s) \in H$ , 且具有相同的行数, 若存在方阵  $\mathbf{R}(s) \in H$ , 使得  $\mathbf{A}(s) = \mathbf{A}(s) \mathbf{R}(s), \mathbf{B}(s) = \mathbf{B}(s) \mathbf{R}(s)$  则称  $\mathbf{R}(s)$  为  $\mathbf{A}(s)$  和  $\mathbf{B}(s)$  的右公因子。类似地, 若  $\mathbf{K}(s), \mathbf{D}(s) \in H$ , 且具有相同的行数, 若存在方阵  $\mathbf{T}(s) \in H$ , 使得  $\mathbf{K}(s) = \mathbf{T}(s) \mathbf{K}(s), \mathbf{D}(s) = \mathbf{T}(s) \mathbf{D}(s)$ , 则称  $\mathbf{T}(s)$  为  $\mathbf{K}(s)$  和  $\mathbf{D}(s)$  的左公因子。

称  $\mathbf{A}(s)$  和  $\mathbf{B}(s)$  为右互质, 当且仅当存在  $\mathbf{X}(s), \mathbf{Y}(s) \in H$ , 满足右 Bezout 等式

$$\mathbf{X}(s) \mathbf{A}(s) + \mathbf{Y}(s) \mathbf{B}(s) = \mathbf{I} \quad (3.86)$$

或者等价地, 称  $\mathbf{A}(s)$  和  $\mathbf{B}(s)$  为右互质, 当且仅当  $\mathbf{A}(s)$  和  $\mathbf{B}(s)$  除单模阵以外不具有其它的

右公因子。

类似地,我们可以定义  $\mathbf{K}(s)$  和  $\mathbf{D}(s)$  的左互质和左 Bezout 等式之间的关系。

对于任意给定的传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$ , 如果存在右互质阵  $\mathbf{D}_r(s)$  和  $\mathbf{N}_r(s)$   $H$ , 使得式 (3.83) 成立, 则称式 (3.83) 为  $\mathbf{G}(s)$  的右互质分解。类似地, 在式 (3.84) 中, 若  $\mathbf{D}_l(s)$ ,  $\mathbf{N}_l(s)$   $H$  为左互质, 则称式 (3.84) 是  $\mathbf{G}(s)$  的左互质分解。

**【例 3.4】**

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s-2)(s+3)}$$

的右互质分解为:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+a)^2} \frac{(s-2)(s+3)}{(s+a)^2}^{-1}$$

其中  $a$  可以是任意大于零的实数。

**【例 3.5】**

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{-s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

的一个右互质分解为:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+5)^4} & 0 & \frac{(s+1)^2(s+2)^2}{(s+5)^4} & \frac{-(s+1)^2(s+2)}{(s+5)^3} \\ \frac{-(s+1)^2}{(s+5)^4} & \frac{s^2}{(s+5)^3} & 0 & \frac{s+2}{(s+5)^3} \end{bmatrix}^{-1}$$

对于传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  所描述的系统, 我们可以通过它的状态空间描述, 得出它的右互质分解和左互质分解表示。设  $\mathbf{G}(s)$  为给定的传递函数矩阵, 作  $\mathbf{G}(s)$  的状态空间实现  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , 即

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{3.87}$$

设  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  为完全能控和完全能观测的, 则存在状态反馈阵  $\mathbf{F}$ , 使得  $\mathbf{A}_F = \mathbf{A} + \mathbf{BF}$  为稳定的。记  $\mathbf{C}_F = \mathbf{C} + \mathbf{DF}$ , 并令

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{x} \tag{3.88}$$

则  $\mathbf{G}(s)$  的状态空间实现可写成:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}_F\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \tag{3.89a}$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{u} \tag{3.89b}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}_F\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{v} \tag{3.89c}$$

从而有:

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{C}_F(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{v}(s) \tag{3.90a}$$

$$\mathbf{v}(s) = [\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{I}]^{-1}\mathbf{u} \tag{3.90b}$$

令

$$\mathbf{N}_r(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}_F(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} \tag{3.91a}$$

$$\mathbf{D}_r(s) = \mathbf{I} + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} \tag{3.91b}$$

则显然成立  $\mathbf{y}(s) = \mathbf{N}_r(s)\mathbf{D}_r^{-1}(s)\mathbf{u}(s)$ , 即



$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{N}_r(s) \mathbf{D}_r^{-1}(s) \quad (3.92)$$

令

$$\mathbf{X}_l(s) = \mathbf{I} - \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1} \mathbf{B}_H \quad (3.93a)$$

$$\mathbf{Y}_l(s) = -\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1} \mathbf{H} \quad (3.93b)$$

其中  $\mathbf{A}_H = \mathbf{A} + \mathbf{H}\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{H}$  是使得  $\mathbf{A}_H$  稳定的适当矩阵,  $\mathbf{B}_H = \mathbf{B} + \mathbf{H}\mathbf{D}$ 。根据式(3.91) 和式(3.93), 不难验证  $\mathbf{N}_r(s)$ ,  $\mathbf{D}_r(s)$ ,  $\mathbf{X}_r(s)$  和  $\mathbf{Y}_r(s)$   $H$ , 且满足右 Bezout 等式:

$$\mathbf{X}_l(s) \mathbf{D}_r(s) - \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) = \mathbf{I} \quad (3.94)$$

因此,  $\mathbf{D}_r(s)$  与  $\mathbf{N}_r(s)$  右互质, 式(3.92) 为  $\mathbf{G}(s)$  的右互质分解。

类似地, 设  $\mathbf{z} = \mathbf{G}^T(s) \mathbf{w}$  作  $\mathbf{G}^T(s)$  的状态空间实现

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \mathbf{w} \quad (3.95a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}^T \mathbf{z} + \mathbf{D}^T \mathbf{w} \quad (3.95b)$$

令  $\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{H}^T \mathbf{w}$ , 可将式(3.95) 表示为:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_H^T \mathbf{z} + \mathbf{C}_H^T \mathbf{w} \quad (3.96a)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}_H^T \mathbf{z} + \mathbf{D}_H^T \mathbf{w} \quad (3.96b)$$

$$\mathbf{z} = -\mathbf{H}^T \mathbf{z} + \mathbf{z} \quad (3.96c)$$

由式(3.96) 可推导出

$$\mathbf{w} = [\mathbf{D}_H^T + \mathbf{B}_H^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H^T)^{-1} \mathbf{C}_H^T] \mathbf{z} \quad (3.97a)$$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{I} + \mathbf{H}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H^T)^{-1} \mathbf{C}_H^T]^{-1} \mathbf{z} \quad (3.97b)$$

令

$$\mathbf{N}_l(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1} \mathbf{B}_H \quad (3.98a)$$

$$\mathbf{D}_l(s) = \mathbf{I} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1} \mathbf{H} \quad (3.98b)$$

则由式(3.97), 显然有

$$\mathbf{G}^T(s) = \mathbf{N}_l^T(s) [\mathbf{D}_l^T(s)]^{-1}$$

即

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D}_l^{-1}(s) \mathbf{N}_l(s) \quad (3.99)$$

令

$$\mathbf{X}_r(s) = \mathbf{I} - \mathbf{C}_F(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1} \mathbf{H} \quad (3.100a)$$

$$\mathbf{Y}_r(s) = -\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1} \mathbf{H} \quad (3.100b)$$

显然,  $\mathbf{D}_l(s)$ ,  $\mathbf{N}_l(s)$ ,  $\mathbf{X}_r(s)$ ,  $\mathbf{Y}_r(s)$   $H$ , 且满足左 Bezout 等式

$$\mathbf{D}_l(s) \mathbf{X}_r(s) - \mathbf{N}_l(s) \mathbf{Y}_r(s) = \mathbf{I} \quad (3.101)$$

因此, 式(3.99) 是  $\mathbf{G}(s)$  的左互质分解。

分别由式(3.91) 和式(3.98), 式(3.93) 和式(3.100), 可以推导出以下两式:

$$\mathbf{N}_l(s) \mathbf{D}_r(s) = \mathbf{D}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \quad (3.102)$$

$$\mathbf{X}_l(s) \mathbf{Y}_r(s) = \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{X}_r(s) \quad (3.103)$$

总结式(3.94), 式(3.101), 式(3.102) 和式(3.103), 可以得到关于传递函数矩阵的双互质分解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & -\mathbf{Y}_l(s) \\ -\mathbf{N}_l(s) & \mathbf{D}_l(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r(s) & \mathbf{Y}_r(s) \\ \mathbf{N}_r(s) & \mathbf{X}_r(s) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (3.104)$$

### 【例 3.6】 考虑传递函数

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

作它的状态方程实现为:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

其中  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [-1 \quad 1]$ ,  $D = 0$ , 选取  $\mathbf{F}$ , 使得  $\mathbf{A}_F = \mathbf{A} + \mathbf{BF}$  的特征值为  $\{-1, -1\}$ , 可得

$$\mathbf{F} = [-1 \quad -4] \quad \mathbf{A}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

则由式(3.91) 可得出它的右互质分解式(3.92) 中各矩阵分别为:

$$\mathbf{N}_r = \mathbf{C}_F(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} = \frac{s-1}{(s+1)^2}$$

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{I} + \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1}\mathbf{B} = \frac{s(s-2)}{(s+1)^2}$$

若选

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_H = \mathbf{A} + \mathbf{HC} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$$

可以验证  $\mathbf{A}_H$  是稳定的, 则由式(3.93) 有:

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1}\mathbf{B}_H = \frac{s^2 + 6s - 23}{(s+1)^2}$$

$$\mathbf{Y}_l(s) = -\mathbf{F}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_H)^{-1}\mathbf{H} = \frac{-41s+1}{(s+1)^2}$$

可以验证以上计算所得的  $\mathbf{N}_r$ ,  $\mathbf{D}_r$ ,  $\mathbf{X}_F$ ,  $\mathbf{Y}_l$  满足式(3.94)。另外, 对于本例, 由于  $G(s)$  是标量, 它们左互质分解与右互质分解一致。

### 3.5.2 稳定控制器的参数化表示

采用传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的互质分解表示的一个重要的优点就是可以很容易得到使得闭环系统为渐近稳定的控制器集合的参数化表示。

考虑图 3.7 所示的单位反馈系统, 其中  $\mathbf{G}(s)$  为受控对象,  $\mathbf{K}(s)$  为控制器。设  $\mathbf{G}(s)$  和  $\mathbf{K}(s)$  的互质分解分别为:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{N}_r(s)\mathbf{D}_r^{-1}(s) = \mathbf{D}_l^{-1}(s)\mathbf{N}_l(s) \quad (3.105)$$

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{Y}_r(s)\mathbf{X}_r^{-1}(s) = \mathbf{X}_l^{-1}(s)\mathbf{Y}_l(s) \quad (3.106)$$

称图 3.7 所示的单位反馈系统为内部稳定的, 若  $\det[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)] \neq 0$ , 且

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} & -[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) \\ \mathbf{K}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} & \mathbf{I} - \mathbf{K}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} \quad (3.107)$$

可以证明以下定理。

**定理 3.4** 在图 3.7 所示的单位反馈控制系统中, 设  $\mathbf{G}(s)$  和  $\mathbf{K}(s)$  的右互质分解和左互质分解分别由式(3.105) 和式(3.106) 给出, 则整个系统为内稳定的充分必要条件是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.108)$$

或

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_l(s) & \mathbf{X}_r(s) + \mathbf{N}_l(s) \mathbf{Y}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.109)$$

为单模阵。

设  $\mathbf{K}(s) = \mathbf{Y}_r(s) \mathbf{X}_r^{-1}(s) = \mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s)$  使得闭环系统为内稳定, 则根据定理 3.4, 必存在有单模阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1}$  和  $\begin{bmatrix} \mathbf{D}_l(s) & \mathbf{X}_r(s) + \mathbf{N}_l(s) \mathbf{Y}_r(s) \end{bmatrix}^{-1}$  满足式(3.108)和式(3.109)。

在式(3.108)两边同乘以  $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1}$ , 可得

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

其中  $\mathbf{X}_l(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{X}_l(s)$ ,  $\mathbf{Y}_l(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{Y}_l(s)$   $H$ , 并且有

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s) &= \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{Y}_l(s) \\ &= \mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s) = \mathbf{K}(s) \end{aligned}$$

即  $\mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s)$  也是  $\mathbf{K}(s)$  的左互质分解。因此, 式(3.110)成立也是图 3.7 所示的单位反馈控制系统为内稳定的充分必要条件。对式(3.109), 我们也可以进行类似的分析。归纳以上分析可以得出的以下定理:

**定理 3.5** 设在图 3.7 所示的单位反馈控制系统中  $\mathbf{G}(s)$  的互质分解由式(3.105)给出, 则控制器  $\mathbf{K}(s)$  使闭环系统稳定的充分必要条件是存在着  $\mathbf{K}(s)$  的既约分解式(3.106), 满足 Bezout 等式

$$\mathbf{X}_l(s) \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) = \mathbf{I} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{D}_l(s) \mathbf{X}_r(s) + \mathbf{N}_l(s) \mathbf{Y}_r(s) = \mathbf{I} \quad (3.112)$$

由定理 3.5, 所有满足式(3.111)或式(3.112)的解的集合, 就是使得图 3.7 所示闭环系统稳定的控制器的集合。根据这一分析, 以下定理给出了稳定控制器的参数化结论。

**定理 3.6** 设在图 3.7 所示的单位反馈控制系统中, 受控对象  $\mathbf{G}(s)$  的互质分解由式(3.105)给出, 则使得闭环系统稳定的控制器  $\mathbf{K}(s)$  可以参数化为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(s) &= (\mathbf{X}_l - \mathbf{Q} \mathbf{N}_l)^{-1} (\mathbf{Y}_l + \mathbf{Q} \mathbf{D}_l) \\ &= (\mathbf{Y}_r + \mathbf{D}_r \mathbf{Q}) (\mathbf{X}_r - \mathbf{N}_r \mathbf{Q})^{-1} \end{aligned} \quad (3.113)$$

其中  $\mathbf{X}_l(s)$ ,  $\mathbf{Y}_l(s)$  和  $\mathbf{X}_r(s)$ ,  $\mathbf{Y}_r(s)$  分别满足方程式(3.111)和式(3.112); 自由参数矩阵  $\mathbf{Q} \in H$ , 且  $\det(\mathbf{X}_l - \mathbf{Q} \mathbf{N}_l) \neq 0$ ,  $\det(\mathbf{X}_r - \mathbf{N}_r \mathbf{Q}) \neq 0$ 。

证明: 对于任意  $\mathbf{Q} \in H$ , 令  $\mathbf{X}_l = \mathbf{X}_l - \mathbf{Q} \mathbf{N}_l$ ,  $\mathbf{Y}_l = \mathbf{Y}_l + \mathbf{Q} \mathbf{D}_l$ , 并直接代入式(3.112)可得

$$\mathbf{X}_l(s) \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) = \mathbf{I} \quad (3.114)$$

由定理 3.5, 所有具有式(3.113)形式的控制器都使得闭环系统渐近稳定。

另一方面, 若  $\mathbf{K}(s) = \mathbf{X}_l^{-1}(s) \mathbf{Y}_l(s)$  为使得闭环系统稳定的控制器, 则由定理 3.4,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.115)$$

为单模阵。即成立

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (3.116)$$

若令

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & \mathbf{D}_r(s) + \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{N}_r(s) \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{X}_l(s) = \mathbf{X}_l(s) - \mathbf{Q}(s) \mathbf{N}_l(s) \quad (3.117)$$

并代入式(3.116), 可得

$$[X_l(s) - Q(s)N_l(s)]D_r(s) + \bar{r}^{-1}(s)Y_l(s)N_r(s) = I \quad (3.118)$$

因为  $X_l(s)$  和  $Y_l(s)$  满足式(3.111), 并由式(3.102), 对任意  $Q$ , 成立

$$[X_l(s) - Q(s)N_l(s)]D_r(s) + [Y_l(s) + Q(s)D_l(s)]N_r(s) = I \quad (3.119)$$

比较式(3.118)和式(3.119)可得

$$\bar{r}^{-1}(s)Y_l(s) = Y_l(s) + Q(s)D_l(s) \quad (3.120)$$

即  $K(s)$  具有式(3.113)的形式。下面我们证明  $Q(s) \in H$ 。将式(3.117)两边同乘  $Y_r(s)$ , 式(3.120)两边同乘以  $X_r(s)$ , 得

$$\bar{r}^{-1}(s)X_l(s)Y_r(s) - X_l(s)Y_r(s) = -Q(s)N_l(s)Y_r(s) \quad (3.121)$$

$$\bar{r}^{-1}(s)Y_l(s)X_r(s) - Y_l(s)X_r(s) = Q(s)D_l(s)X_r(s) \quad (3.122)$$

将式(3.122)减去式(3.121), 并利用式(3.112)可得

$$Q(s) = \bar{r}^{-1}(s)[-X_l(s)Y_r(s) + Y_l(s)X_r(s)] + X_l(s)Y_r(s) - Y_l(s)X_r(s) \in H \quad (3.123)$$

定理 3.6 明确地给出了使得闭环系统稳定的控制器的参数化表示, 在该定理中,  $Q(s) \in H$  是自由参数矩阵, 在满足  $Q(s) \in H$  的前提下, 可以任意选择  $Q(s)$ , 以满足其它的控制目标, 如强镇定(控制器本身是稳定的), 同时稳定, 鲁棒稳定等。另外, 定理 3.6 也在  $H$  控制中起着关键的作用。

**【例 3.7】** 设受控对象

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)} = \frac{s}{(s+1)^2} \frac{s-1}{s+1}^{-1} = n(s)d^{-1}(s)$$

选择控制器

$$K(s) = \frac{2(s+2)}{s-0.5} = \frac{2(s+2)}{(s+1)} \frac{s-0.5}{s+1}^{-1} = \bar{q}(s)\bar{r}^{-1}(s)$$

则根据式(3.108)有

$$(s) = \bar{q}(s)d(s) + \bar{r}(s)n(s) = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 3s + 0.5}{(s+1)^3}$$

显然  $(s)$  为单模阵(即最小相位函数), 因此  $K(s)$  是使得闭环系统稳定的控制器, 而

$$x(s) = \bar{r}^{-1}(s)\bar{q}(s) = \frac{2(s+2)(s+1)^2}{(s)}$$

$$y(s) = \bar{r}^{-1}(s)\bar{r}(s) = \frac{(s-0.5)(s+1)^2}{(s)}$$

其中  $(s) = s^3 + 1.5s^2 + 3s + 0.5$ 。则显然  $x(s)$  和  $y(s)$  满足

$$x(s)d(s) + y(s)n(s) = 1$$

因此, 使得闭环系统为稳定的控制器集合为

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{y(s) + q(s)d(s)}{x(s) - q(s)n(s)} \\ &= \frac{2(s+2)(s+1)^4 + q(s)(s-1)(s+1)}{(s-0.5)(s+1)^4 - q(s)(s)} \end{aligned}$$

其中  $q(s)$  可以是任意  $H$  函数, 即  $q(s)$  可以是任意的稳定的真有理函数。

## 习 题

3.1 为什么在有可能的情况下, 我们愿意采用自身为稳定的控制器?

### 3.2 系统的开环传递函数

$$G(s)K(s) = \frac{4}{s^2(0.2s + 1)}$$

- (1) 绘制系统的 Bode 图, 并求系统的相位裕量;
- (2) 在系统中串联一个比例微分环节  $(s + 1)$ , 重新绘制系统的 Bode 图, 并求系统的相位裕量;
- (3) 说明比例微分环节对系统稳定性的影响。

### 3.3 系统的开环传递函数为

$$G(s)K(s) = \frac{36(0.5s + 1)}{s(s + 1)(0.1s + 1)}$$

- (1) 绘制系统的 Bode 图, 并求系统的相位裕量;
- (2) 在系统中串联一个积分环节  $\frac{1}{s}$ , 绘制此时的 Bode 图, 并求相位裕量;
- (3) 说明积分环节对系统稳定性的影响。

### 3.4 给定受控系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{s(s + 1)(s - 2)}$$

试确定控制器  $K(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ , 使得闭环系统的极点为  $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -3, s_4 = -5, s_5 = -7$ 。

### 3.5 给定受控系统传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 5)}$$

设控制器  $K(s)$  为一 3 阶系统, 试确定使得闭环系统的极点位于  $s_1 = -1, s_2 = -2, s_3 = -0.5, s_4 = -3, s_5 = -4$  的控制器的参数化表示。

3.6 设受控系统的传递函数与题 3.5 相同, 试确定使得闭环系统为稳定的控制器的参数化表示。

## 参 考 文 献

- 1 郑大钟编著 线性系统理论 北京:清华大学出版社,1990 .
- 2 陈启宗著,王纪文,杜正秋,毛剑琴译 线性系统理论与设计 北京:科学出版社,1988 .
- 3 阙志宏主编 线性系统理论 西安:西北工业大学出版社,1995 .
- 4 段广仁编著 线性系统理论 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996 .
- 5 凯拉斯著,李清泉,褚家晋,高龙译 线性系统 北京:科学出版社,1985 .
- 6 周凤岐,强文鑫,阙志宏编 现代控制理论及其应用 成都:电子科技大学出版社,1993 .
- 7 王宏璩,邵惠鹤编著 现代控制导论 北京:中国石化出版社 .
- 8 吴麒主编 自动控制原理 北京:清华大学出版社,1992 .
- 9 Wolovich A .Linear multivariable systems .New York:Springer-Verlag,1974 .
- 10 Rosebrock H .State-space and multivariable theory .New York:Wiley-Interscience,1970 .
- 11 Wonham M .Linear multivariable control:A geometric approach 2nd ed ., New York:Springer-Verlag,1979 .
- 12 Kalman R E .Mathematical description of linear dynamical systems .SIAM J .Contr .,1963,1(2):152 ~ 192 .
- 13 Kalman R E .On the structural properties of linear constant multivariable systems .Proc,3th IFAC Congress, 1966 London .

- 14 Luenberger D G .Canonical forms for linear multivariable systems .IEEE Trans .Auto .Control,1967 ,AC-12(1): 290 ~ 293 .
- 15 Luenberger D G .Observers for multivariable systems .IEEE Trans .Auto Control .1966, AC-11(2) :190 ~ 197 .
- 16 Syrmos V L, Abdallah C T, Dorato P, Grigoriadis K .Static output feedback-A Survey .Automatica,1997 ,33(2): 125 ~ 137 .
- 17 Davison E J, Wang S H .On pole assignment in linear multivariable systems using output feedback, IEEE Trans . Auto .Control, 1971, AC-16(1) ,98 ~ 103
- 18 Rosenbrock H H, Hayton G E .The General Problem of Pole assignment, Int J .control,1978 ,27:837 ~ 852 .
- 19 韩正之, 陈树中 .Morgan 问题始末 控制与决策,1991 ,5(4) :52 ~ 58 .
- 20 李春文, 冯元琨 .多变量非线性控制的逆系统方法 .北京: 清华大学出版社,1991 .
- 21 Falb P L, Wolovich W A .Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems .IEEE Trans . Auto .Control, 1967, AC-12: 651 ~ 649 .
- 22 Gilbert E .The decoupling of multivariable systems by state feedback .SIAM J Control,1969 ,7(1) :50 ~ 63 .
- 23 Davison E J .The robust control of a servomechanism problem for linear time invariant multivariable systems . IEEE Trans .Auto .Control,1976 ,AC-21(1):25 ~ 34 .
- 24 Maciejowski J M .Multivariable feedback design .Workingham: Addison-Wesley Publishing Company, 1989 .
- 25 Newton G C, Gould L A and Kaiser L F .Analytical design of linear feedback controls .New York: Wiley, 1957 .
- 26 Bode H W .Network analysis and feedback amplifier design .New York: Van Nostrand, 1945 .
- 27 Freudenberg J S, Looze D P, Frequency feedback systems .Berlin: Springer-Verlag, 1987 .
- 28 MacFarlane A G J, Karcianias N .Poles and zeros of linear multivariable systems: A survey of the algebraic, geometric and complex variable theory, Int J .of Control, 1976, 24(1) :33 ~ 47
- 29 Postlethwait I, Mac Farlane A G J .A complex variable approach to the analysis of linear multivariable feedback systems .Berlin: Springer-Verlay, 1979 .
- 30 Youla D C, Jabr H, Bogiorno J J .Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers .IEEE Trans .Automat .Contr .,1976 ,AC-31 :319 ~ 338 .
- 31 Kokotovic P V Recent trends in feedback design :An overview Automatica, 1985, vol 21(3) :225 ~ 236 .
- 32 Xiao J .Parameterization of feedback controllers: A polynomial approach .Studies in Informatics and Control, 1993 ,2(4) :287 ~ 294 .
- 33 肖建 .单输入单输出系统极点配置控制器的参数化与设计 .西南交通大学学报,1990,25(1) :58 ~ 64 .
- 34 肖建 .多变量控制系统的频域参数化 .西南交通大学学报 .1993 ,28(5) :60 ~ 64
- 35 Xiao J .Parameterization of pole assignment controllers with applications to robust controller design Advances in Modelling and Simulation, 1990 ,21(3) :1 ~ 14 .
- 36 肖建 .具有固定极点的同时稳定 .控制理论与应用 .1990,7(1) :40 ~ 46 .
- 37 肖建 .单输入单输出系统的同时稳定: 多项式方法 .自动化学报 .1996,22(2) :219 ~ 223 .
- 38 Vidyasagar M .Control system synthesis: A factorization approach MA: MIT Press, 1985 .
- 39 Friedland B .Control system design, New York: McGraw-Hill C ., 1986 .
- 40 Kucara V ,Discrete linear control: The polynomial equation approach, New York: Wiley, 1979 .

## 第二篇 最优控制

### 概 述

在二次世界大战期间及其以后一段时间内,建立在传递函数和频率法基础上的经典控制理论得到了迅猛的发展,然而随着时代的发展,控制系统日趋复杂,对它的精度要求不断提高,经典控制理论分析方法日益暴露出它的局限性。首先,它只适用于线性定常系统,对非线性系统或线性时变系统无能为力。其二,它只适用于单输入单输出系统。其三,严格来说,经典控制理论只是系统的一类分析方法,不是系统综合与设计的方法,为了能用它实现系统的综合与设计,常常采用半经验的方法,通过反复试探才能得到较满意的控制方案。因此,当系统很复杂,精度要求很高时就不易得到较好的结果,人们期待着更好的控制器设计方法。这样,随着工业生产的不断发展和计算技术的进步,最优控制系统就应运而生了。

最优控制的想法早在 50 年代时就诞生了,50 年代美国学者贝尔曼(Bellman)所提出的“动态规划”和苏联学者庞特里雅金(Pontryagin L)所提出的“最大值原理”为解决最优控制提供了有力的数学工具。数字计算机的飞速发展一方面使得在线实现最优控制系统成为了可能,另一方面又提出了许多亟需解决的理论课题,进一步推动着现代控制理论的发展。

最优控制问题核心是选择控制函数  $u(t)$ ,使得某一性能指标达到最小或最大值。这一性能指标通常包含着对系统控制品质的各种要求。它自始至终都是采用数学分析的方法。

最优控制理论既适用于线性系统,也适用于非线性系统;既适用于定常系统,也适用于时变系统;既适用于单变量系统,也适用于多变量系统;既适用于集中参数系统,也适用于分布参数系统。

根据所考虑的系统不同,最优控制问题有确定性最优控制和随机控制之分。研究确定性系统的最优控制问题称为确定性最优控制,而讨论随机系统的最优控制问题则称为随机最优控制。在它们当中,确定性最优控制是随机最优控制的基础,随机最优控制是确定性最优控制的发展。根据所研究的受控对象是连续时间系统还是离散时间系统,最优控制有连续时间最优控制和离散时间最优控制之分,两者在数学处理上有一些差异。根据最优控制的终端条件不同,最优控制问题还可分为固定终端问题、自由终端问题、终端时间固定、终端时间自由等最优控制问题。另外还可以按性能指标和应用领域的不同对最优控制问题进行相应的分类,我们今后将逐步予以介绍。

在最优控制中,必须区分开环最优控制系统和闭环最优控制系统。如果最优控制律只是系统的参考输入和受控对象状态的初始值的函数,则该最优控制系统无需系统实时状态的反馈,因而具有开环的形式,称为开环最优控制系统。而另一方面,如果最优控制律由参考输入和受控对象状态的实时值所确定,则相应的最优控制系统具有反馈的形式,称为闭环最优控制系统。虽然从理论上来看,开环和闭环最优控制的控制效果是一样的,但是对实际工程系统来说,开环控制没有考虑环境和扰动等对系统的影响,因而不具备鲁棒性,当因为各种原因,使得实际系统偏离理想工作状况时,控制品质将大大下降。而对闭环最优控制系统,由于及时反馈了受控对象的信息,闭环系统能根据实际情况及时地调整控制策略,因而具有较强的鲁棒性。

为此,我们一般都将最优控制系统构造成闭环形式。

时至今日,最优控制理论与应用的研究,无论在深度和广义上都有了较大的进展。然而,随着人们对客观世界认识的不断深化,又提出了一系列有待解决的新课题。可以毫不夸张地说,最优控制理论和应用的研究仍是现代控制领域中极其活跃的研究课题之一。

## 第四章 最优控制问题与变分法

最优控制问题就是在给定条件下对给定的受控系统确定一种控制规律,致使该系统相应于某一预先规定的性能指标具有最优值。由于受控系统一般都是动态系统,它的所有变量均是时间的函数,使得性能指标是一个泛函数,所以最优控制的问题通常归结为求泛函极值的问题。

变分法是求解泛函极值的有力的数学工具,它从十七世纪末开始逐渐发展成为一门独立的数学分支,并在力学、光学、电磁学和控制理论等方面都有着广泛的应用。本章将首先介绍最优控制问题的提法,然后简要地介绍变分法的一些基本概念及其在最优控制问题中的应用。

### § 4 .1 最优控制问题的数学描述

最优控制问题是从大量实际问题中提炼出来的。具体说来,最优控制就是要寻找容许的控制作用(规律),使动态系统(受控对象)从初始状态转移到某种要求的终端状态,且保证所规定的性能指标(目标函数)取最大(最小)值。

#### 【例 4 .1】 最快拦截问题

设我们发射一枚导弹(简称拦截器  $L$ ),欲在空中拦截另一枚来自敌方的导弹(简称目标  $M$ ),最优控制的目的是控制拦截器的推力  $f(t)$ ,使得拦截器  $L$  在最快的时间内击毁目标  $M$ 。

为简单起见,假设导弹与目标的运动发生在同一平面内,如图 4 .1 所示。设目标  $M$  的运动方程是:

$$\begin{aligned}x_M(t) &= V_{xM}(t) & y_M(t) &= V_{yM}(t) \\V_{xM}(t) &= 0 & V_{yM}(t) &= -g\end{aligned}$$

式中  $(x_M, y_M)$  表示  $M$  在平面上的位置,  $(V_{xM}, V_{yM})$  表示其速度,  $g$  为重力加速度。设拦截器  $L$  的质量为  $m(t)$ , 它的推力由燃料的燃烧所产生。令  $c$  表示推进剂的排出速度,它可假定为一常数;  $(t)$  表示推进剂的流率,则拦截器  $L$  的推力  $f(t)$  可写成

$$f(t) = c(t)$$

令  $(t)$  表示推力  $f$  与  $x$  轴的夹角,  $(x_L, y_L)$  表示  $L$  在平面上的坐标,  $(V_{xL}, V_{yL})$  表示其速度,则拦截器  $L$  的运动方程是:

$$\begin{aligned}x_L(t) &= V_{xL}(t) & y_L(t) &= V_{yL}(t) \\V_{xL}(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \cos(t) & V_{yL}(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \sin(t) - g \\m(t) &= - (t) = - \frac{1}{c} f(t)\end{aligned}$$

图 4 .1 最快拦截问题示意图



令  $x(t) = x_L(t) - x_M(t)$ ,  $y(t) = y_L(t) - y_M(t)$  表示拦截器  $L$  与目标  $M$  的相对位置,  $V_x(t) = V_{xL}(t) - V_{xM}(t)$ ,  $V_y(t) = V_{yL}(t) - V_{yM}(t)$  表示它们的相对速度, 可以将以上关于  $M$  和  $L$  的两个方程合成下面的相对运动方程:

$$\begin{aligned} x(t) &= V_x(t) & y(t) &= V_y(t) \\ V_x(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \cos \theta(t) & V_y(t) &= \frac{f(t)}{m(t)} \sin \theta(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$m(t) = m_0 - \frac{f(t)}{c}$$

另外, 由于推力  $f(t)$  不可能超出一定限度, 所以应满足约束条件

$$|f(t)| \leq F \tag{4.2}$$

能供支配的推进剂的质量也有限, 我们用  $m_0$  表示  $L$  满载燃料时的质量,  $m_l$  表示  $L$  燃料耗完时的质量。

根据以上分析, 最快拦截问题可以用以下数学形式描述: 已知动态系统的运动方程式 (4.1) 及它在初始时刻的位置  $x(0)$ ,  $y(0)$  和速度  $V_x(0)$ ,  $V_y(0)$ ; 且  $m(0) = m_0$ 。问如何选择拦截器  $L$  的推力  $f(t)$  和推力方向角  $\theta(t)$  的变化规律, 在满足对  $f(t)$  的约束式 (4.2) 的前提下, 以最短时间

$$t_f = \int_0^{t_f} dt \tag{4.3}$$

击毁目标, 即达到终态

$$x(t_f) = y(t_f) = 0 \tag{4.4}$$

并满足对燃料的要求

$$m(t_f) \geq m_l \tag{4.5}$$

由[例 4.1]的分析中可以看出, 通常的最优控制问题可以抽象成共同的数学问题, 并用数学语言严格表述出来, 以方便我们对一般的最优控制问题进行讨论。通常说来, 构成一个最优控制问题必须具备四个基本条件:

### 1. 受控对象的数学模型

最优控制是建立在受控对象的数学模型的基础上的。因此, 我们首先必须了解受控对象的数学模型。对于集中参数系统, 我们通常采用状态方程形式的数学模型。它一般具有形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{4.6}$$

其中  $\mathbf{x}(t)$  表示  $n$  维的状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  表示  $m$  维的控制向量,  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$  是一个  $n$  维的向量函数, 它可以是线性的, 也可以是非线性的。

### 2. 初态和终态

系统的初态和终态实际上是状态方程式 (4.6) 的边界条件。一个动态过程, 从数学的观点来看, 是状态空间中从一个状态 (通常称为初态) 到另一个状态 (通常称为终态) 的转移过程。在最优控制中, 通常认为初态是已知的, 即  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 而到达终态的时间  $t_f$  和终态  $\mathbf{x}(t_f)$  则视问题而异。概括起来, 可以用一个目标集来描述

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \tag{4.7}$$

其中  $\mathbf{m}(\cdot, \cdot)$  是一个  $q$  维向量函数,  $0 \leq q \leq n+1$ 。式 (4.7) 在状态空间中定义了一个超曲面。我们容许系统式 (4.6) 的终态可以落在该超曲面的任意一点上。这里存在两个极端情况, 一是  $q = 0$ , 即不存在任何终端约束, 这时系统的终态可以是状态空间中的任意一点。另一个是  $q =$

$n + 1$ , 这时, 目标集为状态空间中的一个固定的点,  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ 。就终端时间  $t_f$  来说, 它也有两种情况, 一种是固定的, 另一种是自由的, 对于后一种情况,  $t_f$  本身也是一个参与优化的参数。

3.容许控制集合

控制向量  $\mathbf{u}(t)$  的各个分量  $u_i(t)$  可以是具有不同物理属性的控制量, 例如阀门的开启度、电机的电磁力矩、电压、电流等。由于物理条件的限制, 控制向量  $\mathbf{u}(t)$  通常都有一个取值范围。这个取值范围对应于  $m$  维控制空间  $R^m$  中的一个集合, 称为容许控制集合。最优控制也必须属于这个集合。容许控制集合可分成两大类, 一类为开域, 即  $\mathbf{u} \in R^m$ , 这时又称容许控制是没有约束的。另一类情况为闭域, 它是  $R^m$  中的一个闭集。通常用一组不等式:

$$\mathbf{g}[\mathbf{u}(t)] \leq 0 \tag{4.8}$$

来描述, 这时称容许控制具有不等式约束。

4.性能指标

性能指标是衡量系统“控制效果”的准则。完成状态空间中状态从  $\mathbf{x}(t_0)$  到  $\mathbf{x}(t_f)$  的转移, 可以采用不同的控制规律来实现。为了比较系统在各种控制作用下工作的好坏, 就得规定一个我们称之为性能指标的技术经济指标, 来判定相应控制系统的优劣, 例如在 [例 4.1] 中将式 (4.3) 所示的时间长短作为性能指标。在这里, 性能指标将对系统性能的物理要求, 转化为数学表达式的形式。选择性能指标主要取决于系统控制问题所要解决的主要矛盾, 对设计者所关心的控制质量应有切实的估计。性能指标的选择是很灵活的, 需要经验和技巧。

从数学形式来看, 性能指标可分成三大类:

(1) 积分型

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{4.9}$$

这是一类积分型的泛函, 在变分法中这类问题称为拉格朗日问题。将  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  看成为代价函数, 则性能指标  $J$  可被看成是系统在整个运行过程中所付出的总代价。它反映了人们关心系统在整个运行过程中的行为。

(2) 终端型

$$J = [\mathbf{x}(t_f), t_f] \tag{4.10}$$

在变分法中称为 Mayer 问题。它只要求系统状态在过程终了时满足一定的要求, 但在整个动态过程中对状态及其控制的演变不作要求。

(3) 复合型

$$J = [\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{4.11}$$

为前面两类性能指标的综合。由变分法可知, 通过适当的数学处理, 以上三种性能指标可以相互转换。

性能指标函数又称目标函数、代价函数、评价函数、性能指标泛函等。本书将不加区别使用这些名称。

【例 4.2】 考虑将一个质量为  $m$  的轨道车沿着一条水平轨道移动。令  $x(t)$  表示在时刻  $t$  时轨道车的位置, 若忽略摩擦力, 则根据牛顿第二运动定律成立:

$$m\ddot{x}(t) = u(t) \quad t > 0 \tag{4.12}$$

其中,  $u(t)$  是对轨道车的外作用力。假设轨道车的初始位置和速度分别为  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0$ 。我们的目的是选择作用力函数  $u(t)$ , 使得轨道车在最短的时间  $t_f$  内到达位置  $\mathbf{x}(t_f) = 0$ ,

且这时的速度  $x(t_f) = 0$ , 并且通常由于物理条件的限制,  $u(t)$  应满足不等式  $|u(t)| \leq M$ 。  
 根据题意, 令

$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x}$  则可得到所考虑系统的状态方程为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \\ x(0) &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

目标集为  $x(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

容许控制集合:  $|u(t)| \leq M$

而性能指标为:

$$\int_0^{t_f} dt = t_f$$

这是一个最小时间的最优控制问题。直观上来说, 最优控制策略应当是在首先一段时间内选  $u = +M$ , 进行最大加速, 然后再选择  $u = -M$  进行最大制动。

## § 4 .2 泛函与变分

本节将介绍泛函与变分的一些基本原理, 它们是最优控制的基础。

### 4 .2 .1 泛 函

一般函数  $f(\mathbf{x})$ , 规定了参变量  $\mathbf{x}$  的取值与函数值的对应关系。然而, 最优控制中的性能指标的值却是随着控制函数  $\mathbf{u}(t)$  的不同而不同。我们称这种关系为泛函。即如果有一类函数  $\{\mathbf{y}(t)\}$ , 对该类函数中每个函数  $\mathbf{y}(t)$  都有一个值  $J(\mathbf{y}(t))$  与之相对应, 则称  $J$  为函数  $\mathbf{y}(t)$  的泛函。用通俗一点的话来说泛函是函数的函数。

例如, 在图 4 .2 中  $t, x$  平面上固定两点  $(t_0, x_0)$  和  $(t_f, x_f)$  之间任意连线  $x(t)$  的弧长  $l$  是  $x(t)$  的泛函。这是由于, 曲线  $x(t)$  上的微元  $dl$  满足

$$dl^2 = dt^2 + dx^2$$

$$dl = \sqrt{dt^2 + dx^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt$$

(4 .13)

图 4 .2  $x(t)$  在固定两点间的弧长

于是可得

$$l[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \tag{4 .14}$$

即对不同的曲线  $x(t)$ , 都有其对应的长度  $l[x(t)]$  与之相对应, 即  $l$  是函数  $x(t)$  的泛函。另外, 式(4 .9) 所示的性能指标也是一个泛函。在式(4 .9) 中,  $J$  是  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  的函数, 当  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  确定以后,  $J$  有一个确定的值与之对应。

在泛函  $J[x(t)]$  中,  $x(t)$  称为泛函的宗量(泛函的变量)。泛函宗量  $x(t)$  的变分  $\delta x(t)$  定

义为两个函数之差,即

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) - x_0(t) \tag{4.15}$$

式中  $x(t)$  和  $x_0(t)$  是属于同一函数类中两个不同的函数。自然  $x(t)$  也是独立自变量  $t$  的函数。类似连续函数的定义,若对于  $x(t)$  的微小变化,泛函  $J[x(t)]$  的变化也很微小,则称泛函  $J[x(t)]$  是连续的。

必须注意对  $x(t)$  的“微小变化”的含义。用几何术语来说,曲线  $x_0(t)$  和  $x(t)$  怎样才算是相差微小或者相近呢?这里要引入“接近度”的概念。

当函数  $x(t)$  与  $x_0(t)$  之差的绝对值,对于定义域中的一切  $t$  都很小时,即

$$|x(t) - x_0(t)| \tag{4.16}$$

则称函数  $x(t)$  与  $x_0(t)$  具有零阶接近度。如图 4.3 所示。

当函数  $x(t)$  和  $x_0(t)$  之差的绝对值和它们的导数之差的绝对值同时都很小时,即

$$|x(t) - x_0(t)| \quad \text{且} \quad |x'(t) - x_0'(t)| \tag{4.17}$$

则称它们具有一阶接近度,如图 4.4 所示。显然,具有一阶接近度的函数必然具有零阶接近度,但反之并不成立。类似还可以定义函数的  $k$  阶接近度。

图 4.3 零阶接近度曲线

图 4.4 一阶接近度曲线

连续泛函  $J[x(t)]$  如果满足

$$J[x_1(t) + x_2(t)] = J[x_1(t)] + J[x_2(t)] \tag{4.18}$$

则称为线性泛函,其中  $c$  为任意常数。

4.2.2 泛函的变分

在最优控制中,我们的目的是选择最优控制函数  $u(t)$  使得相应的性能指标这一泛函为极大或极小。这一类问题称为泛函的极值问题。与函数的极值类似,泛函的极值的存在与否,取决于其自身的性质。但是,函数的极值通常是发生在极值点上。该点可通过求导运算而得到。而泛函的极值,则发生在“极值曲线”上或称“极值轨线”上,它在许多情况下也可以通过变分得到。

泛函中变分的概念可以看成是函数中微分概念的推广。设  $x_0(t)$  是泛函  $J[x(t)]$  的一条极值轨线。与  $x_0(t)$  接近的容许曲线可以表示为:

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t) \tag{4.19}$$

式中  $\delta x(t)$  即式(4.15)所定义的  $x(t)$  的变分。由于对轨线  $x_0(t)$  的微小扰动  $\delta x(t)$  而导致泛函值的变化称为泛函的增量

$$J[x(t)] - J[x_0(t)] \tag{4.20}$$

将  $J[x(t)]$  在  $x_0(t)$  附近作台劳展开有

$$J[x(t)] = \frac{J}{x_0} x + \frac{1}{2} \frac{{}^2J}{x_0^2} (x)^2 + \dots \quad (4.21)$$

其中  $\frac{J}{x_0}$  和  $\frac{{}^2J}{x_0^2}$  分别为  $\left. \frac{J[x(t)]}{x(t)} \right|_{x(t)=x_0(t)}$  和  $\left. \frac{{}^2J[x(t)]}{x(t)^2} \right|_{x(t)=x_0(t)}$  的简洁形式。 $x$  为  $x(t)$  的简写。定义  $J$  的线性主部为  $J$  的一阶变分 (简称为变分), 记为

$$J = \frac{J}{x_0} x \quad (4.22)$$

定义  $J$  的二次部分为  $J$  的二阶变分, 记为:

$${}^2J = \frac{1}{2} \frac{{}^2J}{x_0^2} (x)^2 \quad (4.23)$$

### 4.2.3 泛函极值的条件

为了求得泛函  $J[x(t)]$  的极值曲线  $x_0(t)$ , 我们考察  $x_0(t)$  受到任意微小扰动  $x(t)$  后所得泛函增量  $J$  的性质。如果  $x_0(t)$  使得  $J[x(t)]$  取极小值, 则对任意微小的扰动  $x(t)$ , 泛函的增量应当为正值。即

$$J = J[x(t)] - J[x_0(t)] = J + {}^2J + \dots > 0 \quad (4.24)$$

反之, 如果  $x_0(t)$  使得  $J[x(t)]$  取得极大值, 则应有:

$$J = J[x(t)] - J[x_0(t)] = J + {}^2J + \dots < 0 \quad (4.25)$$

因为  $J$  是  $J$  的线性主部, 若  $J = 0$ , 则它必对  $J$  起支配作用, 即

$$J = J \quad (4.26)$$

而根据式(4.22), 由于  $x(t)$  的任意性,  $J$  是不可能恒大于零或恒小于零的。因此,  $x_0(t)$  是泛函  $J[x(t)]$  的极值曲线的必要条件是

$$J = 0 \quad (4.27)$$

如果以上必要条件式(4.27)得到了满足, 则  ${}^2J$  就对  $J$  起主导作用, 即

$$J = {}^2J \quad (J = 0) \quad (4.28)$$

由  ${}^2J$  的表达式(4.23)可见, 这时恒有  $[x(t)]^2 > 0$ , 从而  ${}^2J$  的符号完全由  $\frac{{}^2J}{x_0^2}$  所决定。因此,  $x_0(t)$  是  $J[x(t)]$  的极小值曲线的充分条件为:

$$J = 0 \quad (4.29)$$

$${}^2J > 0 \quad (4.30)$$

而  $x_0(t)$  是  $J[x(t)]$  的极大值曲线的充分条件为:

$$J = 0 \quad (4.31)$$

$${}^2J < 0 \quad (4.32)$$

如果  $\frac{{}^2J}{x_0^2} = 0$ , 则  $J[x(t)]$  的极值曲线还要由三阶变分而定。

### 4.2.4 固定端点的变分问题

求泛函的极值轨线问题称为变分问题。如果待求的极值曲线的起点和终点都是已知的, 则称这类问题为固定端点的变分问题。具体来说, 我们首先要研究的问题为:

已知轨线  $x(t)$  的始端  $x(t_0) = x_0$  和终端  $x(t_f) = x_f$ , 试求连续可微的极值轨线, 使得性

能泛函:

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} [x(t), x(t), t] dt \tag{4.33}$$

达到极值。其中  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  为连续可微函数。

设  $x_0(t)$  为  $J[x(t)]$  的极值曲线, 由式(4.22) 可求得它的一阶变分为

$$J = \frac{J[x(t)]}{x} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{x} x + \frac{1}{x} x \, dt \tag{4.34}$$

其中,  $x$  为  $x(t)$  的变分。考虑到  $x$  和  $x$  之间存在着依赖关系, 利用分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{x} x \, dt &= \frac{1}{x} x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{1}{x} x \, dt \\ &= - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{1}{x} x \, dt \end{aligned} \tag{4.35}$$

因为考虑的是固定端点问题, 即  $x(t_f) = x(t_0) = 0$ , 从而在上式的推导中有  $\frac{1}{x} x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$ , 将式(4.35) 代入式(4.34) 有:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{x} - \frac{d}{dt} \frac{1}{x} x \, dt \tag{4.36}$$

由于  $x$  取值的任意性, 根据极值轨线的必要条件  $J = 0$ , 可得固定端点变分问题解的必要条件为:

$$\frac{1}{x} - \frac{d}{dt} \frac{1}{x} x = 0 \tag{4.37}$$

式(4.37) 即为变分学中著名的欧拉方程。这是一个二阶的微分方程。它的展开形式为:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} - \frac{2}{x^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \tag{4.38}$$

虽然欧拉方程式(4.37) 或式(4.38) 只给出了极值轨线的必要条件。但是对许多变分问题来说, 可以根据其物理或化学性质来判定待求解问题的极值特性。因此, 欧拉方程在许多场合下是求解变分问题的强有力的工具。

**【例 4.3】** 设已知  $x(0) = 0, x \frac{1}{2} = 1$ , 求极值轨线  $x_0(t)$ , 使得泛函

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - \dot{x}^2) dt \text{ 为最小}$$

相应于本例, 我们有:  $\frac{1}{x} = -2x, \frac{1}{x} = 2x, \frac{1}{t} \frac{1}{x} = 0, \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 0, \frac{2}{x^2} = 2$ , 因此根据式(4.38), 本例所对应的欧拉方程为

$$-2x - 2\ddot{x} = 0$$

解得:

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

根据边界条件,  $x(0) = 0$ , 可得  $c_1 = 0$ , 再由  $x \frac{1}{2} = 1$ , 可得  $c_2 = 1$ , 所以极值轨线

$$x_0(t) = \sin t$$

**【例 4.4】** 最速降线问题

最速降线问题对变分学的创立产生过重大影响。

设在垂直平面中有  $O, A$  两点, 它们不在同一垂线上。现有一质点自  $O$  向  $A$  运动, 假定介

质的阻力可忽略不计,问应取什么样的轨线,才能使所需的时间最短?

取  $O$  为坐标原点,令  $Ox$  为横轴,  $Oy$  垂直向下为纵轴,如图 4.5 所示,最速降线问题就是求使质点以最短时间自  $(0,0)$  到  $(x_f, y_f)$  的曲线。

由于这是一个守恒系统,其总能量不变:

$$\frac{1}{2} m \frac{ds}{dt}^2 - mgy = 0$$

式中  $m$  是质点质量,  $g$  是重力加速度。

于是质点的运动速度为

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

即

图 4.5 最速降线问题

$$\begin{aligned} dt &= \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \\ &= \frac{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}{\sqrt{2gy}} \\ &= \frac{1+y'^2}{\sqrt{2gy}} dx \end{aligned}$$

式中  $y' = \frac{dy}{dx}$ 。质点从  $O$  到  $A$  的时间为

$$J[y(x)] = \int_0^{x_f} \frac{1+y'^2}{\sqrt{2gy}} dx = \int_0^{x_f} F(y, y') dx \tag{4.39}$$

注意在上式中,  $x$  是自变数,  $y$  是  $x$  的函数,这一点与欧拉方程式(4.38)中  $t$  是自变数,  $x$  是  $t$  的函数不同。根据欧拉方程式(4.38) 可得:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{4.40}$$

由于  $F(y, y')$  不显含  $x$ ,故  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 。将上式两边同乘以  $y'$  得

$$y' \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) = 0 \tag{4.41}$$

易证式(4.24) 右边是  $-\frac{1}{y'}y'$  对  $x$  的全导数,即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{y'}y' \right) &= -\frac{1}{y'}y'' + \frac{1}{y'^2}y'' - \frac{1}{y'}y'' - \frac{1}{y'} \frac{1}{y'} (y')^2 - \frac{1}{y'} \frac{1}{y'} y'y'' \\ &= y' \frac{1}{y'} - \frac{1}{y'} \frac{1}{y'} y' - \frac{1}{y'} \frac{1}{y'} y'' \end{aligned}$$

因此,当  $F$  中不显含独立自变量  $x$  时,它的尤拉方程式(4.40) 的积分具有以下形式

$$-\frac{1}{y'}y' = c \tag{4.42}$$

式中  $c$  为积分常数。将式(4.39) 所示的被积函数 代入式(4.42) 可得

$$\frac{1+y'^2}{2gy} - y' \frac{y'}{2gy(1+y'^2)} = c$$

上式经整理和简化后可得微分方程

$$y = \frac{c_1}{1 + y^2} \quad (4.43)$$

式中

$$c_1 = \frac{1}{2gc^2}$$

方程式(4.43)宜于用参数法求解。引入参数  $\theta$ ，并令  $y = \cot \theta$ ，代入式(4.43)可得

$$y = \frac{c_1}{1 + \cot^2 \theta} = c_1 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} c_1 (1 - \cos 2\theta)$$

由

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y} \\ &= \frac{2c_1 \sin \theta \cos \theta}{\cot \theta} d\theta \\ &= 2c_1 \sin^2 \theta d\theta \\ &= c_1 (1 - \cos 2\theta) d\theta \end{aligned}$$

积分后,可得

$$\begin{aligned} x &= c_1 \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + c_2 \\ &= \frac{c_1}{2} (2\theta - \sin 2\theta) + c_2 \end{aligned}$$

因此,所求的曲线的参数方程是:

$$\begin{aligned} x - c_2 &= \frac{c_1}{2} (2\theta - \sin 2\theta) \\ y &= \frac{c_1}{2} (1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

令  $\theta = 2\phi$ ，并注意到边界条件  $y(0) = 0$ ，可得出  $c_2 = 0$ 。因此所求的参数方程为:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1}{2} (\theta - \sin \theta) \\ y &= \frac{c_1}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.44)$$

这是圆滚线的参数方程,其中  $\frac{c_1}{2}$  称为滚动圆半径,常数  $c_1$  可由另一个边界条件  $y(x_f) = y_f$  确定,  $\theta$  称为滚动角。

所以,最速降线是一条圆滚线。所谓圆滚线是指一个圆沿定直线滚动时,圆周上一定点所描绘的轨迹。

在式(4.33)所示的性能泛函中,  $x$  是  $t$  的标量函数,现在把它推广到  $n$  维的向量函数  $\mathbf{x}(t)$  的情形,即考虑相应于  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  的泛函

$$\begin{aligned} J[\mathbf{x}(t)] &= J[x_1(t), \dots, x_n(t)] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [x_1(t), \dots, x_n(t); x_1'(t), \dots, x_n'(t); t] dt \end{aligned} \quad (4.45)$$

在固定端点  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{x}(t_f)$  下的取极值的轨线,式中  $\dot{x}_i$  是  $x_i$  及其一阶导数  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  的标量函数。



将式(4.45)中  $x_i$  进行变分,而令其余  $(n-1)$  个宗量保持不变,则在此情况下,  $J$  就成了只依赖于一个变量  $x_i$  的泛函。类似前面的推导可知,它取极值的必要条件是欧拉方程:

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{4.46}$$

成立。由于  $i$  的任意性,故式(4.45)所示的泛函  $J[x(t)]$  取极值的必要条件是下列方程组成立:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ &\dots \dots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{x}_n} &= 0 \end{aligned}$$

写成向量形式,即得向量形式的欧拉方程:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \tag{4.47}$$

其中  $\mathbf{x}$  应有连续的二阶导数,而  $\mathbf{u}$  则至少应两次连续可微。

### § 4.3 对控制变量无约束的最优控制问题

在上节关于固定端点变分问题的讨论中,我们没有对系统的运动轨线附加任何条件,也就是说,我们讨论的是无约束条件的变分问题。而实际上,在最优控制问题中,我们讨论的动态系统均是由微分方程描述的。系统的运动轨线必须满足该微分方程。因此,这一微分方程可以看成是对变分问题的动态约束。另外,动态系统之所以能成为控制系统,是因为它受制于控制作用  $\mathbf{u}(t)$ ,这种控制作用应反映在它对系统运动规律的能动作用中,还反映在它对性能指标的影响中。因此,无论是在描述系统的微分方程中,还是在评估系统的性能指标中,都应包含  $\mathbf{u}(t)$  这一因素。

由于物理条件等因素的考虑,控制向量  $\mathbf{u}(t)$  通常具有一个由式(4.8)所描述的取值范围。我们称之为对控制变量的约束。本节中我们暂时假定对控制变量不存在这一类的约束。

#### 4.3.1 终止时刻 $t_f$ 固定的最优控制问题

根据以上分析,我们将终止时刻  $t_f$  固定的最优控制问题叙述如下:

设系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{4.48}$$

其中  $\mathbf{x}(t)$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}(t)$  为  $m$  维控制向量,  $m \leq n$ ;  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$  是  $n$  维连续可微的向量函数。寻找最优控制向量  $\mathbf{u}^*(t)$ ,使系统从给定的初态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,转移到目标集

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \tag{4.49}$$

其中  $\mathbf{m}(\cdot, \cdot)$  是  $q$  维连续可微的向量函数,并使性能泛函

$$J = \mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{4.50}$$

为最小。这里假定终止时刻  $t_f$  为固定值,容许控制不受约束。

与上一节情况不一样,泛函  $J$  所依赖的  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  并非完全独立,它们受式(4.48)所示的动态约束的制约。因此,这是一个具有等式形式动态约束的变分问题。回忆在解等式约束下

函数极值问题时,我们通常采用的办法是利用拉格朗日乘子法将约束加入到函数中,化成无约束的问题,然后求解。对于这一类的变分问题,我们同样可以采用待定的拉格朗日乘子函数  $\lambda(t)$  将动态约束引入到性能指标中,得到增广的性能泛函:

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] - \dot{\mathbf{x}}(t)] dt \tag{4.51}$$

与求函数极值的拉格朗日乘子法不同的是,由于约束是动态的,在上式中的拉格朗日乘子函数  $\lambda(t)$  是时间  $t$  的待定函数,而不是待定常数。在式(4.51)所示的性能指标中,  $\mathbf{x}$  是状态方程式(4.48)的解,因此恒成立  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}} = 0$ , 式(4.51)所示的  $J$  和式(4.50)所示的  $J$  实际上是同一个性能指标,我们今后不再加以区别,统一用  $J$  表示。

定义哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{4.52}$$

为简便起见,在不致引起误解的前提下,我们省写了  $\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), \lambda(t)$  中的自变量  $t$ ,今后也同样处理。

利用哈密顿函数,式(4.51)可表示为

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}] dt \tag{4.53}$$

而对于目标集式(4.49),也可以将它看成是一等式约束,引入  $q$  维拉格朗日乘子  $\mathbf{v}$  (它是一待定的常数向量),并将它加入到性能指标中得

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}] dt \tag{4.54}$$

将式(4.54)中积分项中被积函数的第二项  $-\lambda^T \dot{\mathbf{x}}$  进行分部积分得

$$J = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] - \lambda^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) + \lambda^T(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)] dt \tag{4.55}$$

注意到  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  固定,有  $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = 0$ ,从而  $J$  的一阶变分为:

$$J = \mathbf{x}(t_f)^T \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}} - \lambda(t_f)^T \right] + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \mathbf{x}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right] dt \tag{4.56}$$

上式表明,  $\mathbf{u}(t)$  既以直接方式,也以间接方式通过  $\mathbf{x}(t)$  影响  $J$ 。我们可以借助待定乘子函数  $\lambda(t)$ ,消除  $\mathbf{u}(t)$  对  $J$  的间接影响。为此,我们按照不同的终端情况来定义拉格朗日乘子函数  $\lambda(t)$ 。

### 1.自由终端情况

这时相应于目标集式(4.49)中  $q = 0$ ,即  $\mathbf{x}(t_f)$  自由。从而  $\mathbf{x}(t_f)$  任意,为消除  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}(t_f)$  对  $J$  的影响可选择

$$\lambda(t) = - \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}}, \quad \lambda(t_f) = - \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{t=t_f} \tag{4.57}$$

### 2.固定终端情况

这时相应于式(4.49)中  $q = n$ ,即  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$  固定的情况。在此情况下,显然成立  $\dot{\mathbf{x}}(t_f) = 0$

= 0, 只须定义

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{H}{\mathbf{x}} \quad (4.58)$$

### 3. 一般终端约束情况

这时  $\mathbf{x}(t_f)$  受到  $q$  维 ( $0 < q < n$ ) 向量方程式 (4.49) 的约束, 为此可令  $\lambda(t)$  满足

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{H}{\mathbf{x}}, \quad \lambda(t_f) = \frac{H}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}} \mathbf{v} \Big|_{t=t_f} \quad (4.59)$$

在按不同的终端情况分别对待定乘子函数作了上述定义以后, 即可得:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \frac{H}{\mathbf{u}} dt \quad (4.60)$$

考虑到  $\mathbf{u}$  的独立性, 根据性能指标  $J$  取极值的必要条件  $J = 0$ , 和变分学基本引理<sup>[8]</sup>, 可得

$$\frac{H}{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.61)$$

式 (4.61) 与  $\lambda(t)$  的定义式 (4.57), 式 (4.58) 或式 (4.59) 以及系统状态方程式 (4.48) 等一起, 构成了最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  和相应的最优轨线  $\mathbf{x}^*(t)$  所必须满足的一组必要条件。我们将它们归结成以下定理:

**定理 4.1** 设受控系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \quad (4.62)$$

则为把状态  $\mathbf{x}(t)$  自初态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到满足边界条件

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f)] = 0 \quad (4.63)$$

的终态  $\mathbf{x}(t_f)$ , 其中  $t_f$  已知, 并使性能指标:

$$J = [\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \quad (4.64)$$

为最小的最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  应满足的必要条件为:

(1) 若  $\mathbf{x}^*(t)$  为  $\mathbf{u}^*(t)$  所对应的最优轨线, 则存在一相应的协态向量  $\lambda^*(t)$ , 使状态  $\mathbf{x}^*(t)$  和协态  $\lambda^*(t)$  满足规范方程组:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t] \quad (4.65)$$

$$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.66)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \frac{H[\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]}{\mathbf{x}^*} \quad (4.67)$$

$$\lambda^*(t_f) = \frac{H}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}} \mathbf{v} \Big|_{t=t_f} \quad (4.68)$$

(2)  $H$  函数对控制  $\mathbf{u}^*(t)$  取极值:

$$\frac{H[\mathbf{x}^*(t), \lambda^*(t), \mathbf{u}^*(t), t]}{\mathbf{u}^*} = 0 \quad (4.69)$$

(3) 边界条件

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}^*(t_f)] = 0 \quad (4.70)$$

方程式 (4.65) 和式 (4.67) 一起称为规范方程组, 它是由  $2n$  个一阶微分方程组成的微分方程组。为确定这个规范方程组的解, 需要  $2n$  个边界条件。当目标集的约束的个数  $q$  满足  $0 <$

$q < n$  时, 它们分别由式(4.66) 和式(4.68) 给出。这时由于  $q$  维拉格朗日乘子向量  $\mathbf{v}$  未定, 令  $v_i$  为  $\mathbf{v}$  的第  $i$  分量, 则式(4.68) 中还含有  $q$  个待定的拉格朗日乘子  $v_i, i = 1, \dots, q$ , 显然, 它们可由边界条件式(4.70) 决定。当  $q = n$ , 即相应于  $\mathbf{x}(t_f)$  固定时, 则由  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{x}(t_f)$  一起为规范方程组提供  $2n$  个边界条件。当  $q = 0$  即  $\mathbf{x}(t_f)$  自由时, 则由  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\lambda(t_f) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t=t_f}$  一起给出  $2n$  个边界条件。总之, 无论目标集如何, 初始条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  和目标集都提供了  $2n$  个边界条件, 使得规范方程组具有确定解。注意到在规范方程组中, 通常有一半边界条件是规定在初始时刻  $t_0$ , 另一半的边界条件规定在终止时刻  $t_f$ , 因此, 这是一个两点边值问题。在一般情况下, 我们只能在计算机上求得其数值解。

式(4.69) 称为控制方程。它表明, 在任何时刻最优控制  $\mathbf{u}(t)$  都必须使  $H$  函数取极值。由式(4.69) 解出  $\mathbf{u} = \mathbf{u}[\mathbf{x}(t), \lambda(t), t]$ , 代入规范方程组式(4.65) 和式(4.67), 则可使之成为只包含  $\mathbf{x}$  和  $\lambda$  的微分方程组。利用数值积分法求解这个微分方程组, 得出  $\mathbf{x}$  和  $\lambda$ , 再回代入  $\mathbf{u} = \mathbf{u}[\mathbf{x}(t), \lambda(t), t]$ , 即可求出最优控制  $\mathbf{u}(t)$ 。

下面我们考察  $H$  函数的一个有趣的性质。由于  $H$  对时间  $t$  的全导数可表示为:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}^T \mathbf{u} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.71}$$

当  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t), \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$  和  $\lambda(t) = \lambda^*(t)$  时, 它们必定满足规范方程和控制方程, 即成立  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}, \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , 代入式(4.71), 有:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.72}$$

式中,  $\frac{\partial H}{\partial t}$  是  $H$  关于  $t$  的偏导数。式(4.72) 表明,  $H$  对于  $t$  的全导数等于  $H$  关于  $t$  的偏导数。如果受控系统式(4.62) 是时不变的, 并且系统性能指标式(4.64) 中被积函数不是  $t$  的显函数, 则  $H$  不是  $t$  的显函数。这时成立:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{4.73}$$

或

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*) = \text{const}, t \in [t_0, t_f] \tag{4.74}$$

也就是说, 在  $\mathbf{f}$  与  $\lambda$  均为定常的前提下,  $H$  函数沿着最优轨线处处为一常数。

**【例4.5】** 设质量为  $M$  的小车在外力  $f(t)$  的作用下在水平轨道上运动。设开始时小车处于停止状态,  $V(0) = 0$ , 忽略摩擦力, 要求在  $t = t_f$  时小车的速度  $V(t_f) = V_f$ 。求最优控制  $f(t)$ , 使得性能指标:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [f^2 + \frac{1}{2} (V_f - V)^2] dt$$

为最小。其中  $\frac{1}{2} > 0$  是加权因子。

系统的状态方程描述为

$$\dot{V} = \frac{f}{M}$$

相应的  $H$  函数为:  $H = \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} (V_f - V)^2 + \frac{1}{M} f V$

则根据定理 4.1, 可写出规范方程组为:

$$V = \frac{f}{M}$$

$$= -\frac{H}{V} = 2(V_f - V)$$

由控制方程

$$\frac{H}{f} = 0$$

解得  $f = -\frac{1}{2M}$

根据规范方程有:

$$\ddot{V} = -2V = -2\frac{f}{M} = \frac{1}{M^2}$$

解得  $V = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}$

其中  $p = \frac{1}{M^2}$

而最优速度函数

$$V = V_f - \frac{1}{2} = V_f - \frac{c_1 p e^{pt}}{2} + \frac{c_2 p e^{-pt}}{2}$$

根据边界条件  $V(0) = 0, V(t_f) = V_f$ , 可求得  $c_1$  和  $c_2$  为

$$c_1 = \frac{2 V_f e^{-pt_f}}{p(e^{-pt_f} - e^{pt_f})} \quad c_2 = \frac{2 V_f e^{pt_f}}{p(e^{-pt_f} - e^{pt_f})}$$

即最优控制函数:

$$\hat{f} = -\frac{1}{2M} = -\frac{2 V_f}{2Mp(e^{-pt_f} - e^{pt_f})} [e^{p(t-t_f)} + e^{-p(t-t_f)}]$$

$$= -\frac{V_f}{e^{-pt_f} - e^{pt_f}} [e^{p(t-t_f)} + e^{-p(t-t_f)}]$$

### 4.3.2 终端时刻 $t_f$ 待定的最优控制问题

在前面的分析中, 我们都是假定终端时刻  $t_f$  是固定的。现在讨论终端时间未定的情况。这时终端时间  $t_f$  也是待优化的一个参数。这种终端时刻  $t_f$  待定的最优控制问题可以叙述如下。

设受控系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.75)$$

确定最优控制  $\mathbf{u}(t)$  和最优终端时刻  $t_f$ , 将系统由给定的初态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到目标集:

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.76)$$

其中  $\mathbf{m}(\cdot, \cdot)$  是  $q$  维连续可微的向量函数, 并使性能泛函

$$J = [\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (4.77)$$

为最小。其中  $t_f$  待定, 容许控制  $\mathbf{u}$  不受约束。与上一小节处理动态约束的情况类似, 对动态约束式(4.75), 我们采用一拉格朗日乘子函数  $\lambda(t)$  和拉格朗日乘子  $\mathbf{v}$  分别将动态约束式(4.75)和边界条件式(4.76)引入到性能泛函中, 得到

$$J = [\mathbf{x}(t_f), t_f] + \mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}] dt \quad (4.78)$$

其中  $H$  为哈密顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.79)$$

与上一小节不同的是,这时  $t_f$  是可变的,而  $t_f$  的变化一方面直接影响性能指标式(4.78)中的终端项  $[\mathbf{x}(t_f), t_f]$ ,另方面作为积分上限,  $t_f$  的变化将影响整个积分值。因此,在求  $J$  的变分  $\delta J$  时,还必须考虑到  $t_f$  的变化  $\delta t_f$  的影响。

设  $\mathbf{u}(t)$  是使得  $J$  取极小值的最优控制,  $\mathbf{x}(t)$  是与  $\mathbf{u}(t)$  对应的最优轨线,  $t_f$  是最优轨线的终端时刻。若使  $\mathbf{u}(t)$  发生任一微小扰动  $\delta \mathbf{u}(t)$ ,可得到  $\mathbf{u}(t)$  附近一簇容许控制函数:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) + \delta \mathbf{u}(t) \quad (4.80)$$

和它相应的轨线

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t) \quad (4.81)$$

设  $t_f$  是  $\mathbf{x}(t)$  的终端时刻,则成立

$$t_f = t_f + \delta t_f \quad (4.82)$$

在  $t_f$  待定情况下,轨线终端的变分比较复杂。我们首先看  $\mathbf{x}(t)$  的第  $i$  个分量  $x_i(t)$  的变分,如图 4.6 所示。

设在终端时刻  $x_i$  的变分为

$$x_i(t_f) = x_i(t_f) - \hat{x}_i(t_f) \quad (4.83)$$

而在  $t_f$  时刻  $x_i(t)$  的变分  $\delta x_i(t)$  的值为

$$x_i(t_f) = x_i(t_f) - \hat{x}_i(t_f) \quad (4.84)$$

则如图 4.6 可见,忽略  $t_f$  的高次项后成立

图 4.6  $t_f$  待定情况下,  $x_i(t)$  的终端的终端变分

$$x_i(t_f) = x_i(t_f) + \delta x_i(t_f) \delta t_f \quad (4.85)$$

显然,对任意  $i = 1, 2, \dots, n$ , 式(4.85)均成立,我们因此有

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_f) + \delta \mathbf{x}(t_f) \delta t_f \quad (4.86)$$

注意到对积分上界的导数就是被积函数本身,可得出式(4.77)所示性能泛函的变分为

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + t_f \frac{\partial}{\partial t_f} + \mathbf{x}^T(t_f) \frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + t_f \frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{m}}{\partial t_f} + (H - \mathbf{x}^T \mathbf{f})|_{t=t_f} \delta t_f + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} dt \quad (4.87)$$

对式(4.87)被积函数中的第二项  $\int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} dt$  进行分部积分得:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{x}} dt &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} dt \\ &= \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} dt \\ &= \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{x}(t_f) \delta t_f - \int_{t_0}^{t_f} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} dt \end{aligned} \quad (4.88)$$

在以上推导的第三步中我们应用了式(4.86)。将式(4.88)代入式(4.87)中,可得

$$\begin{aligned}
J &= \left. t_f \frac{1}{t_f} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{m}}{t_f} + H - \lambda^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \lambda \right|_{t=t_f} \\
&+ \left. \mathbf{x}(t_f)^T \frac{1}{\mathbf{x}(t_f)} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} - \lambda \right|_{t=t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \frac{H}{\mathbf{x}} + \dot{\lambda} + \mathbf{u}^T \frac{H}{\mathbf{u}} dt \\
&= \left. t_f \frac{1}{t_f} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{m}}{t_f} + H \right|_{t=t_f} \\
&+ \left. \mathbf{x}^T(t_f) \frac{1}{\mathbf{x}(t_f)} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} - \lambda \right|_{t=t_f} \\
&+ \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \frac{H}{\mathbf{x}} + \dot{\lambda} + \mathbf{u}^T \frac{H}{\mathbf{u}} dt
\end{aligned} \quad (4.89)$$

类似上一节的讨论, 我们可选择  $\lambda(t)$ , 消除  $\mathbf{u}(t)$  通过  $\mathbf{x}(t)$  对  $J$  的间接影响, 为此, 可选择

$$\dot{\lambda} = -\frac{H}{\mathbf{x}}, \quad \lambda(t_f) = \frac{1}{\mathbf{x}(t_f)} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} \quad (4.90)$$

代入式(4.89) 成立

$$J = \left. t_f \frac{1}{t_f} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{m}}{t_f} + H \right|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \frac{H}{\mathbf{u}} dt \quad (4.91)$$

这样, 由于  $\mathbf{u}$  和  $t_f$  可以独立变化, 为满足泛函极值的必要条件  $J = 0$ , 当且仅当成立

$$-\frac{H}{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.92)$$

$$H + \frac{1}{t_f} + \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{m}}{t_f} \bigg|_{t=t_f} = 0 \quad (4.93)$$

类似上一小节的讨论, 对应于  $q = 0$  的自由终端情况, 可选择

$$\dot{\lambda} = -\frac{H}{\mathbf{x}}, \quad \lambda(t_f) = \frac{1}{\mathbf{x}(t_f)} \quad (4.94)$$

而对应于  $q = n$  即  $\mathbf{x}(t_f)$  给定的固定终端情况, 则可选择:

$$\dot{\lambda} = -\frac{H}{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}(t_f) \text{ 给定} \quad (4.95)$$

归纳起来, 我们得到以下定理。

**定理 4.2** 设受控系统方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.96)$$

则为把系统状态  $\mathbf{x}(t)$ , 由初态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到满足条件:

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.97)$$

的终态  $\mathbf{x}(t_f)$ , 其中  $t_f$  待定,  $\mathbf{m}$  是  $q$  维向量函数,  $0 \leq q \leq n$  [其中  $q = 0$ , 对应自由终态情况; 而  $q = n$  对应固定终态情况, 这时可由式(4.97) 中解出  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ ]; 并使性能指标

$$J = \{[\mathbf{x}(t_f), t_f]\} + \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (4.98)$$

取极值(极大或极小) 的最优控制  $\mathbf{u}(t)$  所必须满足的必要条件为:

1. 若  $\mathbf{x}(t)$  为  $\mathbf{u}(t)$  所对应的最优轨线,  $t_f$  为最优终止时刻, 则存在一相应的协态向量  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$  和  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  满足规范方程组:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.99)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.100)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \frac{H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t)}{\mathbf{x}} \quad (4.101)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \bigg|_{t=t_f} \quad (\text{自由终态}) \quad (4.102a)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (\text{固定终态}) \quad (4.102b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} \bigg|_{t=t_f} \quad (\text{一般终态约束}) \quad (4.102c)$$

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$$

其中式(4.100)为规范方程组提供了  $n$  个边界条件, 另外  $n$  个边界条件, 则视自由终态、固定终态还是一般终态约束, 分别由式(4.102a), 式(4.102b)和式(4.102c)给出。

2.  $H$  函数对控制  $\mathbf{u}(t)$  取极值

$$\frac{H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, t)}{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.103)$$

3.  $H$  函数在最优终止时刻  $t_f$  满足

$$H + \frac{\partial H}{\partial t_f} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t_f} \bigg|_{t=t_f} = 0 \quad (4.104)$$

以上定理 4.2 与终止时刻  $t_f$  固定时的相应结论定理 4.1 相比, 多了一个确定最优终止时刻  $t_f$  的横截条件式(4.104)。这是因为在  $t_f$  未定情况下,  $t_f$  本身也是一个优化参数, 而式(4.104)提供了确定  $t_f$  所需的方程。定理 4.2 中规范方程组式(4.99) ~ 式(4.102)在形式上与定理 4.1 中的式(4.65) ~ 式(4.68)完全一致。但是在最优终止时刻  $t_f$  没有确定之前, 由式(4.102)给出的边界条件和式(4.100)给出的初始条件一起, 并不能唯一确定  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$ 。因此, 为解这一最优控制问题, 一般应先从控制方程式(4.103)中解出  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t)$  和从式(4.104)中解出  $t_f$  之后, 代入到正规方程组式(4.99) ~ 式(4.102), 再利用两点边值问题的数值方法求得  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  的轨线, 从而得出最优控制  $\mathbf{u}$ 。

在上一小节的式(4.73)中, 我们知道, 如果受控系统和性能指标都不显含时间  $t$ , 则  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  在最优轨线上处处为一常数。而在  $t_f$  待定的情况下, 由横截条件式(4.104)可知, 若进一步  $\mathbf{m}$  也不显含  $t$ , 则成立

$$H[\mathbf{x}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), \mathbf{u}(t_f)] = 0 \quad (4.105)$$

因此, 对于  $t_f$  待定的最优控制问题, 如果  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{m}$  均不显含  $t$ , 则成立

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (4.106)$$

即  $H$  函数沿最优轨线处处为 0, 而与时间无关。

【例 4.6】 给定系统的状态方程

$$\dot{x} = -x + u$$

初始条件

$$x(0) = 1$$

目标集

$$x(t_f) = 0$$



其中  $t_f$  是可变的终端时刻。试求最优控制  $u(t)$ , 将系统由  $x(0)$  转移到  $x(t_f)$ , 并使性能泛函:

$$J = \int_0^{t_f} (1 + u^2 + x^2) dt$$

达到极小值。其中  $t_f > 0$ 。

这是终端时间  $t_f$  未定的最优控制问题, 其哈密顿函数为:

$$H = 1 + u^2 + x^2 + \lambda(-x + u)$$

由此得规范方程组为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x \end{aligned}$$

由控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0$$

解得

$$u = -\frac{\lambda}{2}$$

代入规范方程组得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - \frac{\lambda}{2} \\ \dot{\lambda} &= -2x \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} \\ \lambda &= 2(2 - 1)c_1 e^{-2t} - 2(2 + 1)c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

由  $x(0) = 1$  得

$$c_1 + c_2 = 1$$

由  $x(t_f) = 0$  得

$$c_1 e^{-2t_f} + c_2 e^{2t_f} = 0$$

再由  $H[x(t_f), \lambda(t_f), u(t_f), t_f] = 0$ , 得:

$$1 + u^2(t_f) + x^2(t_f) + \lambda(t_f)[-x(t_f) + u(t_f)] = 0$$

联立以上三式解得

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right), \quad c_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \\ t_f &= \frac{1}{2} \ln \frac{2}{1} + 1 \end{aligned}$$

于是最优控制  $u(t)$  和最优轨线  $x(t)$  分别为:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) e^{-2t} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) e^{2t} \\ u(t) &= \frac{1}{2} (1 - 2) \left( 1 + \frac{1}{2} \right) e^{-2t} \end{aligned}$$

$$+ (1 + 2) x_1 - 1 + \frac{1}{2} e^{2t}$$

【例 4.7】 给定受控系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2, & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2 &= u, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

试求最优控制  $u(t)$ , 将系统状态由上述初态转移到  $x_1(t_f) = 0$ ,  $x_2(t_f)$  为任意的终态, 其中  $t_f$  待定, 并使性能指标

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

为最小。

这也是一个终端时刻  $t_f$  未定的最优控制问题, 其哈密顿函数为:

$$H = \frac{1}{2} u^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由此得协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (4.107)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -2\lambda_1 \quad (4.108)$$

它们与状态方程一起构成规范方程组。控制方程式(4.103)给出:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \quad (4.109)$$

注意对  $\mathbf{x}(t_f)$  的约束方程是  $x_1(t_f) = 0$ , 即相应于  $q = 1$  的情况, 利用式(4.102c)和式(4.102d), 有

$$\lambda_1(t_f) = \frac{m}{x_1(t_f)} + \mathbf{v}^T \frac{m}{x_1(t_f)} = [v_1 \quad v_2] \frac{1}{0} = v_1$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{m}{x_2(t_f)} + \mathbf{v}^T \frac{m}{x_2(t_f)} = 0$$

$$x_1(t_f) = 0$$

这样, 求解规范方程组所需的 4 个边界条件为:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(t_f) = 0, \quad \lambda_2(t_f) = 0 \quad (4.110)$$

根据横截条件式(4.104), 可得

$$\frac{1}{2} u^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \Big|_{t=t_f} + 1 = 0 \quad (4.111)$$

由式(4.109)和式(4.110)可知,  $u(t_f) = -\lambda_2(t_f) = 0$ , 代入上式, 可得

$$2\lambda_1(t_f) x_2(t_f) + 1 = 0 \quad (4.112)$$

由式(4.107)解得  $\lambda_1(t) = c_1$

代入式(4.108)解得  $\lambda_2(t) = -2c_1 t + c_2$

再代入式(4.109)得  $u(t) = 2c_1 t - c_2$

将  $u(t)$  代入受控系统的状态方程, 并解得

$$x_2(t) = \int u(t) dt = \int (2c_1 t - c_2) dt = c_1 t^2 - c_2 t + c_3$$

$$x_1(t) = -2x_2(t)dt = -2(c_1 t^2 - c_2 t + c_3)dt = -\frac{2}{3}c_1 t^3 + c_2 t^2 + 2c_3 t + c_4$$

将  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$  代入上式可求出  $c_3 = 0, c_4 = 1$ 。将  $x_1(t_f) = c_1$  和  $x_2(t_f) = c_1 t_f^2 - c_2 t_f$  代入式(4.112) 得:

$$2c_1(c_1 t_f^2 - c_2 t_f) + 1 = 0 \quad (4.113)$$

由  $x_1(t_f) = 0$  及  $x_2(t_f) = 0$  可得:

$$\frac{2}{3}c_1 t_f^3 - c_2 t_f^2 + 1 = 0 \quad (4.114)$$

$$-2c_1 t_f + c_2 = 0 \quad (4.115)$$

联立求解式(4.113) ~ 式(4.115), 可得

$$t_f = 1.0299, \quad c_2 = 1.4142, \quad c_1 = 0.6866$$

所以最优控制  $u(t)$  和最优轨线  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  分别为:

$$u(t) = 1.3732t - 1.4142$$

$$x_1(t) = 0.4577t^3 - 1.4142t^2 + 1$$

$$x_2(t) = 0.6866t^2 - 1.4142t$$

在以上两个算例中, 最优控制  $u(t)$  都不是受控系统状态  $x(t)$  的函数, 因此对应的最优控制系统都是开环系统。

## 习 题

### 4.1 求泛函

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} (2u^2 + 2x^2 + 4ux) dt$$

满足边界条件  $u(0) = 0, u(\frac{1}{2}) = 1, x(0) = 0, x(\frac{1}{2}) = -1$  的极值曲线。

### 4.2 求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1 + \dot{y}^2}{t} dt$$

在满足边界条件  $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$  下的极值曲线。

### 4.3 考虑线性时不变受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求将系统由初态  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ , 转移到目标集  $x_1(1) + x_2(1) = 1$  且使性能指标  $J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt$  为最小的最优控制  $u(t)$  及最优轨线  $\mathbf{x}(t)$ 。

### 4.4 考虑一阶线性系统

$$\dot{x} = -x + u$$

试求将系统由初态  $x(0) = x_0$  转移到终态  $x(1) = 0$  并使性能指标

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 u^4(t) dt$$

为最小的最优控制  $u(t)$ 。

4.5 已知一阶受控系统  $\dot{x} = u$ , 试求最优控制  $u$ , 将系统由初态  $x(0) = x_0$  转移到终态  $x(T) = x_T$ , 并使性能指标  $J = \int_0^T (x^2 + 4u^2) dt$  为最小。

4.6 考虑受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

性能指标为

$$J = t_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

其中终端时间  $t_f$  自由。试分别求出将系统由初态  $x_1(0) = 10, x_2(0) = 0$  转移到以下两种终态

- (a)  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ ,
  - (b)  $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f)$  自由
- 的最优控制  $u(t)$  和最优轨线  $\hat{x}(t)$ 。

4.7 考虑受控系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求将系统由初态  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , 转移到目标集

$$x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) = t_f^2 + 1$$

并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

为最小的最优控制  $u(t)$ 。其中  $t_f$  自由。

# 第五章 最小值原理

在第四章的利用古典变分法求解最优控制的过程中,我们都假定控制向量  $u(t)$  的取值范围不受任何限制,即其容许集合可以看成是整个  $m$  维控制空间,或者是一个开集。这个假定是应用古典变分法的一个前提。而对许多实际系统来说,我们经常采用与能量相联系的物理量作为控制变量,如电压、电流、流量、热量等。这些物理量的取值范围都是有限的。例如流量的最大值就受到输送管道和阀门的约束。一般说来,控制向量只能在一个  $m$  维的有界闭集中取值。例如规定容许控制域为不等式约束

$$g[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

所表示的有界闭域,其中  $g(\cdot, \cdot, \cdot)$  为  $r$  维向量函数。在这一情况下,古典变分法就不再适用,暴露出它的局限性来。

应用古典变分法的另一个限制条件是要求  $H/\mathbf{u}$  存在且连续,因此,类似

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

这样的性能指标便被排除在外,象消耗燃料最少这类最优控制问题便无法用古典变分法解决。

鉴于古典变分法的应用条件过严,不少学者作了很多努力。原苏联著名数学家庞德里亚金,受力学中的哈密顿原理的启发,在 1956 年至 1958 年逐步创立了最大值原理,成为最优控制理论中划时代成就的标志之一。最大值原理既有严格的理论依据,又有广泛的适用性,它的最大特点是易于确定最优控制系统的普遍结构形式,因而得到了广泛的应用,被誉为“现代变分法”。

由于在多数关于最优控制的著作中约定最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  与泛函指标  $J$  的最小值相对应,为了形式上的统一和便于记忆,通常将“最大值原理”改称为“最小值原理”。因为求一个泛函  $J$  的最小值等价于求  $-J$  的最大值,所以这两种叫法本质上是相同的。

## § 5.1 连续时间系统的最小值原理

本节中我们将首先指出古典变分法在处理具有控制约束问题中所存在的缺陷,然后论证连续系统的最小值原理,并讨论它的意义。

### 5.1.1 古典变分法的缺陷

正如上一节中所指出的那样,虽然古典变分法在处理对控制变量无约束的最优控制问题中,取得了很好的结果,但是当控制变量存在有式(4.8)类型的不等式约束时,利用变分法解相应的最优控制问题却遇到了很大的困难。下面我们简要分析一下,产生这种困难的原因及相应的解决方法。

在上一节中,我们知道适当定义拉格朗日乘子函数  $\lambda(t)$  消除了  $\mathbf{u}$  通过  $\mathbf{x}$  对性能指标的影响后,性能指标的变分为:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T \frac{H}{\mathbf{u}} dt \quad (5.1)$$

在控制变量无约束的情况下, 由于  $\mathbf{u}$  是任意的微变函数,  $J$  不可能恒大于 0 或恒小于 0, 从而为使  $J$  取极值, 最优控制函数  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  必须满足  $J = 0$ 。但是如果对  $\mathbf{u}(t)$  存在有不等式约束, 则  $\mathbf{u}$  在有些情况下就不一定是任意的了。这时, 对控制函数所有的容许变分  $\mathbf{u}(t)$ ,  $J$  则有可能恒大于零。因而, 使得  $J$  取极小值的最优控制所要满足的必要条件应修正为

$$J \geq 0 \quad (5.2)$$

反之, 使得  $J$  取极大值的最优控制所要满足的必要条件为:

$$J \leq 0 \quad (5.3)$$

下面, 我们设  $u(t)$  为标量, 并且对  $u(t)$  的不等式约束为:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad t \in [t_0, t_f] \quad (5.4)$$

并设最优控制是使  $J$  取得极小值, 分三种情况讨论最优控制所要满足的条件。

1. 当  $\hat{u}$  为容许控制域的内点, 即满足

$$u_{\min} < \hat{u}(t) < u_{\max} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.5)$$

时,  $u(t)$  应是可以任意的, 如图 5.1(a) 所示。这时式(5.2)成立的必要条件为

$$\frac{H}{u} = 0 \quad (5.6)$$

(a)

(b)

(c)

图 5.1 在控制变量具有不等式约束时的容许变分

2. 当  $u(t)$  处于容许控制域的上界, 即

$$\hat{u} = u_{\max} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.7)$$

时, 由于不等式约束(5.4),  $u(t)$  不再是任意的, 它只能取负值, 即必然有:

$$u(t) < 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.8)$$

如图 5.1(b) 所示。这时, 若性能指标的变分以式(5.1)表示, 则条件式(5.6)不再是必要条件, 而应采用必要条件式(5.2)。显然, 在此情况下, 为使式(5.2)成立, 当且仅当

$$\frac{H}{u} \geq 0 \quad (5.9)$$

3. 当  $\hat{u}(t)$  处于容许控制域的下界, 即满足

$$\hat{u}(t) = u_{\min} \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.10)$$

时, 同样由于不等式约束式(5.4),  $u(t)$  只能取正值, 即:

$$u(t) > 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.11)$$

如图 5.1(c) 所示。若系统性能指标的变分为式(5.1), 则为使式(5.2)成立, 当且仅当

$$\frac{H}{u} \leq 0 \quad (5.12)$$

## 5.1.2 最小值原理

为了克服古典变分法对当控制向量具有不等式约束时的最优控制所面临的困难, 庞特里雅金等人提出了最大值原理, 成为解决最优控制问题的有力工具。

最大值原理又称最小值原理, 视要求泛函指标的最大值或最小值而异。因为求  $J$  的最大值等价于求  $-J$  的最小值。因此, 二者之间没有本质的区别。虽然庞特里雅金等人在原著中是最大值原理。但在一般的最优控制教科书中叙述的都是最小值原理。本文中我们讨论的也都是最小值原理。下面, 我们不加证明地叙述利用最小值原理求解控制向量具有不等式约束时最优控制问题的结论。

**定理 5.1** 设系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (5.13)$$

其中控制向量  $\mathbf{u}(t)$  是有第一类间断点的分段连续函数, 属于  $m$  维空间中的有界闭集, 满足不等式约束:

$$\mathbf{g}[\mathbf{u}(t), t] \leq 0 \quad (5.14)$$

则将状态  $\mathbf{x}(t)$  由初态  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  转移到满足边界条件:

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (5.15)$$

的目标集, 其中  $t_f$  待定,  $\mathbf{m}$  为  $q$  维向量函数,  $0 \leq q \leq n$ , 并使性能指标

$$J = \mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \quad (5.16)$$

为最小的最优控制  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  所必须满足的必要条件为:

1. 设  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  为最优控制,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  为对应的状态轨线,  $t_f$  为最优终止时刻, 则存在一与  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  和  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  对应的协态向量  $\hat{\lambda}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{x}}$  和  $\hat{\lambda}$  满足规范方程组

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{u}}, t) \quad (5.17)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.18)$$

$$\dot{\hat{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{u}}, t) \quad (5.19)$$

$$\hat{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \bigg|_{t=t_f} \quad (\text{自由终态}) \quad (5.20a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (\text{固定终态}) \quad (5.20b)$$

$$\hat{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \mathbf{m}^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} \bigg|_{t=t_f} \quad (\text{一般终态约束}) \quad (5.20c)$$

$$\mathbf{m}[\hat{\mathbf{x}}(t_f), t_f] = 0$$

其中规范方程组的  $2n$  个边界条件中,  $n$  个由式(5.18)给出, 另外  $n$  个视自由终态、固定终态和一般终态约束等不同情况, 分别由式(5.20a), 式(5.20b)和式(5.20c)给出。

2. 在最优轨线上最优控制函数  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  使  $H$  函数处处为极小:

$$H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mathbf{u}}, t) = \min_{\mathbf{u} \in U[t_0, t_f]} H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \mathbf{u}, t) \quad (5.21)$$

3.  $H$  函数在最优轨线终端处的值由下式决定

$$H + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t_f} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t_f} \bigg|_{t=t_f} = 0 \quad (5.22)$$

关于最小值原理的证明,需要较专门的数学知识,有些学者利用增量法给出了较为浅近的证明,感兴趣的读者可参阅文献[1]等。

分析一下最小值原理中各个条件,可知在规范方程组式(5.17) ~ 式(5.20)中,式(5.17) ~ 式(5.19)是对各类典型最优控制问题都是普通适用的,而边界条件式(5.20)则因问题而异,我们将它分成自由终态、固定终态和终态约束三种情况。换句话说,在求解规范方程组所需要的 $2n$ 个边界条件中, $n$ 个已由状态初值式(5.18)提供,而另外 $n$ 个则视问题而异。另外横截条件式(5.22)也视问题而异。我们下面简单地分析几种典型的情况。

(1)  $[\lambda(t_f), t_f] = 0$ , 状态终值  $\lambda(t_f) = \lambda_f$  固定(即  $q = n$ ), 终端时间  $t_f$  自由。

这时,目标集式(5.15)可以写成

$$m[\lambda(t_f), t_f] = \lambda(t_f) - \lambda_f = 0 \quad (5.23)$$

又因为  $\lambda_f = 0$ , 故横截条件式(5.22)变成

$$H|_{t=t_f} = 0 \quad (5.24)$$

即在终点  $t_f$  处哈密顿函数  $H$  为零,它为确定终端时间  $t_f$  提供了一个条件。另外由式(5.20c)可得出

$$\dot{\lambda}(t_f) = \mathbf{v}$$

即这时在终点处对协态  $\lambda$  无约束,但是另一方面,  $\lambda(t_f) = \lambda_f$  已为规范方程组提供了另外  $n$  个边界条件,这就是式(5.20b)所对应的固定终态情况。显然,式(5.18)和式(5.20b)一起提供了规范方程组所需要的  $2n$  个边界条件。

(2)  $[\lambda(t_f), t_f] = 0$ , 状态终值  $\lambda(t_f)$  受式(5.15)所示的  $q$  个方程的约束,  $0 < q < n$ , 终端时间自由。因为  $\lambda_f = 0$ , 由式(5.20c)可得

$$\dot{\lambda}(t_f) = \frac{\mathbf{m}^T}{\lambda(t_f)} \mathbf{v} \Big|_{t=t_f} \quad (5.25)$$

虽然式(5.25)给出了  $n$  个协态向量  $\lambda$  的终值,但是在它们当中还包含有  $q$  维的未定常数向量  $\mathbf{v}$ 。换句话说,式(5.25)只为解正规方程组提供了  $n - q$  个条件。剩下的  $q$  个条件,将由目标集

$$m[\lambda(t_f), t_f] = 0$$

提供。这样,对应于由式(5.15)所示的  $q$  个( $0 < q < n$ )方程所描述的目标集情况,式(5.18),式(5.15)和式(5.20c)一共为规范方程提供了  $2n$  个边界条件。

特别地,对于  $\lambda(t_f)$  中有  $q$  个分量固定,剩下  $(n - q)$  个自由的情况,有:

$$m_i[\lambda(t_f), t_f] = \lambda_i(t_f) - x_{fi}, \quad i = 1, \dots, q$$

式中  $m_i$  是  $\mathbf{m}$  的第  $i$  分量,  $\lambda_i$  是  $\lambda$  的第  $i$  分量。利用式(5.20c),设  $v_i$  是  $\mathbf{v}$  的第  $i$  分量,有

$$\dot{\lambda}_i(t_f) = v_i \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (5.26)$$

$$\dot{\lambda}_j(t_f) = 0 \quad j = q + 1, \dots, n \quad (5.27)$$

以及

$$\lambda_k(t_f) = x_{fk} \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (5.28)$$

显然,式(5.27)和式(5.28)一起为规范方程组提供了  $n$  个边界条件。

另外,由于  $\lambda_f = 0$ , 横截条件式(5.22)变成

$$H + \mathbf{v}^T \frac{\mathbf{m}}{t_f} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (5.29)$$

它将为确定终端时间  $t_f$  提供一个条件。



(3)  $[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$ ,  $\mathbf{x}(t_f)$  自由(即  $q = 0$ ), 终端时间  $t_f$  自由。

这时对应于目标集式(5.15)的方程个数  $q = 0$  的情况, 又因为  $\lambda = 0$ , 由式(5.20)可推出

$$\dot{\lambda}(t_f) = 0$$

它为解规范方程组提供了所需的其余  $n$  个条件, 对应着定理式(5.20a)的自由终态的情况。

(4) 上述各种情况, 但终端时间  $t_f$  固定。

由于横截条件式(5.22)是由终端时间  $t_f$  的变分所产生的, 如果终端时间  $t_f$  固定, 则横截条件式(5.22)不存在了。

(5) 前述各种情况, 但  $[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$ 。

在这种情况下, 根据定理 5.1 只需在横截条件式(5.22)的计算时计及  $\frac{\partial}{\partial t_f}$ , 同时在确定边界条件的式(5.20)中计算  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$  就行了, 其余结论不变。

根据上面的分析可以得出几点结论:(1) 若终端时间  $t_f$  自由, 则横截条件式(5.22)为确定  $t_f$  提供了一个条件, 若  $t_f$  固定, 则横截条件式(5.22)不复存在。(2) 在一般情况下, 受控系统的初始状态式(5.18)为规范方程组提供了  $n$  个初始条件。剩下的  $n$  个初始条件, 则可以由式(5.20c)来提供, 虽然视自由终态, 固定终态和一般终态约束等不同情况, 这  $n$  个边界条件具有不同的形式, 但是在各种情况下, 它们都为求解规范方程组提供了另外  $n$  个边界条件。

从表面上看最小值原理和经典变分法对于解决同类问题只在极值条件上有差别, 即用定理 5.1 中的式(5.21), 取代了定理 4.2 中控制方程式(4.103)。而对其它的诸如规范方程组及  $H$  函数在  $t_f$  处应满足的条件等, 则在两个定理中完全一致。那么最小值原理的意义何在呢? 我们可以从以下几个方面来讨论。

### 1. 最小值原理具有比变分法更广的适用范围

在经典变分法中, 我们是假定  $\mathbf{u}(t)$  取值不受约束, 这样  $\mathbf{u}$  是任意的, 从而导出  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$  作为最优性条件。因为在许多物理系统中, 基于物理可实现等考虑, 对  $\mathbf{u}(t)$  中各分量的值通常存在有不等式约束。这一实际问题, 在很大程度上限制了经典变分法在实际最优控制系统中的应用。而在最小值原理的定理 5.1 中的极值条件式(5.21)对常见的控制约束都是适用的。从而极小值原理比经典变分法具有更真正的实用价值。

另外, 按照经典变分法, 控制方程  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$  要求  $H$  函数对控制变量  $\mathbf{u}(t)$  有一连续的一阶偏导数, 这样类似  $J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$  这样的性能指标便被排除在外, 而按照最小值原理的式(5.21)就没有这样的限制。

### 2. 最优控制是使得 $H$ 函数取得强极小

在经典变分法的推导过程中, 我们假定  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{x}$  等均是微变量, 即  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  只能和与它十分接近的  $\mathbf{u}(t)$  进行比较, 从而由  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$  所导出的解  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  仅是  $H$  的一条弱极值曲线, 甚至只能得到  $H$  的驻点条件。而由式(5.21)导出的最优控制  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  却并不要求  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{x}$  为微变量, 这样  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  是使  $H$  函数取全局极小。即式(5.21)导出的  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  是强极值曲线。对于由极值条件式(5.21)求出  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ , 可视问题不同, 选一种适当的函数极小化方法。极值条件式(5.21)表明在求  $H$  极小时, 可认为  $\mathbf{x}(t)$  和  $\lambda(t)$  不变, 即实质上是  $H$  函数中与  $\mathbf{u}(t)$  有关的部分对  $\mathbf{u}(t)$  求

强极小。

3.沿最优轨线上  $H$  函数的性质

在上一节中, 我们知道沿最优轨线上  $H$  函数对时间的全导数等于其偏导数 [见式 (4.72)], 并且当受控系统和系统性能指标均是定常时, 即当  $f$  和  $u$  均不显含  $t$  时, 在最优轨线上,  $H$  函数的值为一常数。对应用最小值原理的定理 5.1, 同样也成立类似的性质, 即:

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{\lambda}(t), \mathbf{u}(t), t] = H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{\lambda}(t_f), \mathbf{u}(t_f), t_f] - \int_t^{t_f} \frac{dH}{dt}[\mathbf{x}(t), \mathbf{\lambda}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{5.30}$$

及当  $f$  和  $u$  中均不显含  $t$  时, 成立:

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)] = \text{const} \quad t \in [t_0, t_f] \tag{5.31}$$

进一步, 若  $t_f$  未定, 则由式(5.21), 还成立

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{\lambda}(t), \mathbf{u}(t)] = 0 \tag{5.32}$$

但是上一节中关于这些等式的论证已不再适用。这是因为在定理 5.1 给出的条件下,  $\frac{dH}{dt}$  在最优轨线上并不一定为零, 更何况有时  $\frac{dH}{dt}$  根本不存在。这些结论严格的证明较为繁琐, 在此从略。

4.最小值原理只是必要条件

因为使  $H$  函数处处为极小的  $\mathbf{u}(t)$ , 并不能保证性能指标  $J$  取最小, 极小值原理仍然只是最优控制的必要条件, 并非充分条件。也就是说即使容许控制满足定理 5.1 所提出的条件, 它能否使性能指标  $J$  取极小值, 尚需进一步的判定。另外, 最小值原理也没有涉及最优控制的存在性问题。然而实际工程应用中, 我们往往是通过对于工业过程的机理和问题的物理意义进行分析而得到最优控制是否存在以及最优控制的有关性质等结论。一旦肯定了最优控制的存在, 则由定理 5.1 往往就能得到相应的最优控制。

定理 5.1 虽然只是针对  $t_f$  未定情况下得出来的结论, 然而对于  $t_f$  固定情况, 关于最优控制的相应结论基本上也与其一致。只是这时由于  $t_f$  固定, 条件式(5.22) 不再成立。换句话说, 若  $t_f$  待定, 则最优终止时刻  $t_f$  必须由式(5.22) 确定, 而若  $t_f$  固定, 则无需条件式(5.22) 了。

利用定理 5.1 来解最优控制问题的步骤仍与定理 4.1 和定理 4.2 类似。一般来说, 我们可以先由式(5.21) 中解出  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{\lambda}, t)$ , 然后代入规范方程组式(5.17) ~ 式(5.20) 得到相应的二点边值问题, 求解该问题得到  $\mathbf{x}$  及  $\mathbf{\lambda}$  后, 再进行回代, 即得  $\mathbf{u}(t)$ 。

【例 5.1】 给定系统

$$\dot{x} = x - u, \quad x(0) = 5$$

试求最优控制函数  $u(t)$  满足:

$$\frac{1}{2} u \leq 1$$

并使性能指标:  $J = \int_0^1 (x + u) dt$  为最小。

【解】 对于本最优控制问题, 哈密顿函数为

$$H = x + u + \lambda(x - u) = x(1 + \lambda) + u(1 - \lambda)$$

根据定理 5.1, 为使  $H$  为极小, 只要使  $u(1 - \lambda)$  为极小即可, 显然, 可取

$$u(t) = 1 \quad \text{若} \quad \lambda(t) > 1$$

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} \quad \text{若 } (t) < 1$$

规范方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - u & x(0) &= 5 \\ &= -\frac{H}{x} = -(1 + \frac{1}{2}) \\ (1) &= 0 \end{aligned}$$

由之可解得

$$(t) = e^{1-t} - 1$$

这是一个单调函数,令  $= 1$  代入可解得相应的开关时间  $t_1 = 1 - \ln 2 = 0.307$

于是最优控制为

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= 1 & \text{若 } t < 0.307 \\ \hat{u}(t) &= \frac{1}{2} & \text{若 } t > 0.307 \end{aligned}$$

已知  $\hat{u}(t)$  后可通过求解系统状态方程得最优轨线:

(a) 当  $0 \leq t < 0.307$  时有  $u = 1$ , 代入状态方程得  $\dot{x} - x = -1$ , 利用初始条件  $x(0) = 5$  可解得  $\hat{x}(t) = 4e^t + 1$

(b) 当  $0.307 < t \leq 1$  时有  $u = \frac{1}{2}$ , 将  $t = 0.307$  代入  $\hat{x}(t) = 4e^t + 1$ , 解得  $x(0.307) = 6.437$ , 这是第二段状态轨线的初始条件, 解相应的系统状态方程  $\dot{x} - x = -\frac{1}{2}$  得

$$\hat{x}(t) = 4.369e^t + \frac{1}{2}$$

,  $\hat{u}$  和  $\hat{x}$  的运动轨迹如图 5.2 所示。

图 5.2 [例 5.1] 的解

## § 5.2 离散时间系统的最小值原理

随着计算机控制的普及,对离散时间系统的研究显得更加重要了。最初,人们基于连续时间与它的离散化模型之间的关系,设想也把连续时间系统的最小值原理直接照搬到离散时间系统中去,然而这种尝试却失败了。限于篇幅,我们在这里只介绍控制向量不受约束情况下的离散系统最小值原理。

设一般(包括线性或非线性)的离散时间系统的状态方程是

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad k = 0 \quad (5.33)$$

其初始状态为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , 首先讨论状态终值  $\mathbf{x}(N)$  不受约束的情况, 这时, 最优控制问题是寻找最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , 使性能指标

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (5.34)$$

为最小。

比较连续系统和离散系统最优控制问题的提法可见, 对于连续系统, 最优控制问题是在时间区间  $[t_0, t_f]$  上寻找最优控制  $\mathbf{u}(t)$  和相应的最优轨线  $\mathbf{x}(t)$ , 以使指标泛函取极小值。而对离散系统, 最优控制问题是在采样时刻  $0, 1, \dots, N - 1$  上寻找  $N$  个最优控制向量  $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N - 1)$ , 和相应的最优轨线  $\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(N)$  以使式(5.34)所示的性能指标取极小值, 今后我们将和连续系统的情况一样, 称  $\mathbf{u}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  为最优控制,  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  为最优轨线。

与连续时间系统的情形相似, 通过协态向量序列  $\lambda(k)$  将动态约束式(5.33)加入到性能指标式(5.34)中, 得

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \{ [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \lambda^T(k+1) \{ \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] - \mathbf{x}(k+1) \} \} \quad (5.35)$$

定义离散的哈密顿函数序列

$$H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k] = [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \lambda^T(k+1) \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k], \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5.36)$$

则式(5.35)可改写成

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \{ H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k] - \lambda^T(k+1) \mathbf{x}(k+1) \} \quad (5.37)$$

采用离散形式的分部积分公式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \{ H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k] - \lambda^T(k+1) \mathbf{x}(k+1) \} &= \lambda^T(0) \mathbf{x}(0) - \lambda^T(N) \mathbf{x}(N) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \{ H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k] - \lambda^T(k) \mathbf{x}(k) \} \end{aligned} \quad (5.38)$$

将式(5.38)代入式(5.37), 得

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \lambda^T(0) \mathbf{x}(0) - \lambda^T(N) \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \{ H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k] - \lambda^T(k) \mathbf{x}(k) \} \quad (5.39)$$

注意到泛函指标达到极值的必要条件是泛函的一阶变分  $\delta J = 0$ , 则有:

$$\begin{aligned} \delta J &= \frac{[\delta \mathbf{x}(N), N]}{\mathbf{x}(N)} - \lambda^T(N) \delta \mathbf{x}(N) + \lambda^T(0) \delta \mathbf{x}(0) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}(k)} - \lambda^T(k) \delta \mathbf{x}(k) + \frac{\delta H}{\delta \mathbf{u}(k)} \delta \mathbf{u}(k) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

注意到由于状态初值固定, 有  $\delta \mathbf{x}(0) = 0$ , 这样由式(5.40)可以推出泛函达到极值的必要条件为:

$$\lambda^T(k) = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}(k)} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(k)} + \frac{\mathbf{f}^T}{\mathbf{x}(k)} \lambda^T(k+1) \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5.41)$$

$$(\mathbf{x}(N)) = \overline{\mathbf{x}(N)} \quad (5.42)$$

$$\frac{H}{\mathbf{u}(k)} = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{u}(k)} \quad (k+1) = 0 \quad (5.43)$$

可以将以上内容归纳成以下定理:

**定理 5.2** 设离散时间系统的状态方程为:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.44)$$

其状态初值为  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , 则使得性能指标

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (5.45)$$

取最小值的最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$  所满足的必要条件是

1. 状态向量  $\mathbf{x}(k)$  和协态向量  $\lambda(k)$  满足规范方程组

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (5.46)$$

$$\lambda(k) = \frac{H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k]}{\mathbf{x}(k)} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.48)$$

$$\lambda(N) = \frac{[\mathbf{x}(N), N]}{\mathbf{x}(N)} \quad (5.49)$$

2.  $H$  函数对最优控制序列取极值, 即

$$\frac{H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k]}{\mathbf{u}(k)} = 0 \quad (5.50)$$

在上列各方程中,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

进一步考虑状态终值受约束的情况, 仍旧考虑式(5.33)所描述的受控系统, 这时最优控制的问题是将状态  $\mathbf{x}$  由初态  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  转移到满足边界条件

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N] = 0 \quad (5.51)$$

的目标集, 并使式(5.34)所示的性能指标取最小值。

与前面状态终值自由的情况相比, 这里多了一个边界条件式(5.51)。类似连续时间系统的推导, 我们分别通过协态向量序列  $\lambda(k)$  和拉格朗日乘子向量  $\mathbf{v}$ , 将动态约束式(5.33)和静态约束式(5.51)分别加入到指标中, 可得

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} \{ [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] + \lambda^T(k+1) \{ \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] - \mathbf{x}(k+1) \} \} \quad (5.52)$$

与式(5.36)相比, 可见它们的唯一区别是式(5.52)中添加了反映目标集的项  $\mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N]$ 。显然, 若在定理 5.2 中将凡是出现  $[\mathbf{x}(N), N]$  的地方, 均代入以  $[\mathbf{x}(N), N] + \mathbf{v}^T \mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N]$ , 则定理 5.2 即可移植到状态终值受约束的情形中来。依照这一推断, 并通过固定终态, 终态约束, 和自由终态(对应定理 5.2 的情形)的分析, 可得到以下定理:

**定理 5.3** 设离散时间系统的状态方程是

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.53)$$

则将状态  $\mathbf{x}$  由初态  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  转移到满足边界条件

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N] = 0 \quad (5.54)$$

的目标集, 并使性能指标

$$J = [\mathbf{x}(N), N] + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (5.55)$$

取极小值的最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$  所满足的必要条件是:

1. 状态向量序列  $\mathbf{x}(k)$  和协态向量序列  $\lambda(k)$  满足规范方程组

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (5.56)$$

$$\lambda(k) = -\frac{H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k]}{\mathbf{x}(k)} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.58)$$

$$\lambda(N) = -\frac{[\mathbf{x}(N), N]}{\mathbf{x}(N)} \quad (\text{自由终态情况}) \quad (5.59a)$$

$$\mathbf{x}(N) = \mathbf{x}_f \quad (\text{固定终态情况, } \mathbf{x}_f \text{ 对应给定的终态}) \quad (5.59b)$$

$$\lambda(N) = -\frac{[\mathbf{x}(N), N]}{\mathbf{x}(N)} + \frac{\mathbf{m}^T [\mathbf{x}(N), N]}{\mathbf{x}(N)} \mathbf{v} \quad (\text{一般终态约束}) \quad (5.59c)$$

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(N), N] = 0$$

其中规范方程组的  $2n$  个边界条件中,  $n$  个由式(5.58)给出, 另外  $n$  个视自由终态(即对终态无约束), 固定终态和式(5.54)所示的一般终态约束等情况, 分别由式(5.59a), 式(5.59b)和式(5.59c)给出。

2.  $H$  函数对控制序列  $\mathbf{u}(k)$  取极值

$$\frac{H[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \lambda(k+1), k]}{\mathbf{u}(k)} = 0 \quad (5.60)$$

在上列各式中,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

与求解连续时间最优控制问题相似, 在利用定理 5.3 求解离散时间系统的最优控制问题时, 可先求解控制方程式(5.60)得出  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}[\mathbf{x}(k), \lambda(k+1), k]$ , 并将它代入规范方程组式(5.56) ~ 式(5.58), 利用定理中所提供的边界条件, 求解  $\mathbf{x}(k)$  和  $\lambda(k)$ 。最后将求出的  $\mathbf{x}(k)$  和  $\lambda(k)$  代入  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}[\mathbf{x}(k), \lambda(k+1), k]$  中即得最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$ 。

### 【例 5.2】离散型线性调节器

已知离散时间系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k) \quad (5.61)$$

试求最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , 将系统由初态  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  转移到  $\mathbf{x}(N)$ ,  $\mathbf{x}(N)$  自由; 且使性能指标

$$J = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(N) \mathbf{S} \mathbf{x}(N)] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k)]$$

为极小值。其中  $\mathbf{R}(k)$  为正定阵,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}(k)$  为半正定阵。

构造哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) + \lambda^T(k+1) [\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k)] \quad (5.62)$$

协态方程

$$\lambda(k) = -\frac{H}{\mathbf{x}(k)} = \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k) \lambda(k+1) \quad (5.63)$$

根据控制方程, 有

$$-\frac{H}{\mathbf{u}(k)} = \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}^T(k) \lambda(k+1) = 0 \quad (5.64)$$

注意到  $\mathbf{R}(k)$  的正定性, 由式(5.64) 可解得

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \lambda(k+1) \quad (5.65)$$

对于自由终态, 可根据定理 5.2 中式(5.49) 求得边界条件

$$\lambda(N) = \mathbf{S} \mathbf{x}(N)$$

将式(5.65) 代入状态方程式(5.61) 即可得如下的两点边值问题。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \lambda(k+1) \\ \lambda(k) &= \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k) \lambda(k+1) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \lambda(N) &= \mathbf{S} \mathbf{x}(N) \end{aligned} \quad (5.66)$$

求解这个两点边值问题, 并将求得的  $\lambda(k+1)$  代入式(5.65) 即可得到最优控制序列  $\mathbf{u}(k)$ , 但是这样求出的最优控制系统通常具有开环形式。为了能使最优控制序列具有闭环形式, 我们用数学归纳法求证  $\lambda(k)$  和  $\mathbf{x}(k)$  之间的关系。

设  $\lambda(k+1) = \mathbf{G}(k+1) \mathbf{x}(k+1)$ , 并代入式(5.66) 有:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{x}(k+1) \quad (5.67)$$

$$\lambda(k) = \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{x}(k+1) \quad (5.68)$$

从式(5.67) 中解出  $\mathbf{x}(k+1)$ , 并代入式(5.68), 有:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{I} + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1)]^{-1} \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) \\ &= \{ \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{I} + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1)]^{-1} \mathbf{A}(k) \} \mathbf{x}(k) \\ &= \{ \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) [\mathbf{G}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k)]^{-1} \mathbf{A}(k) \} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5.69)$$

其中我们假定了  $\mathbf{G}(k+1)$  的非奇异性, 若令

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) [\mathbf{G}^{-1}(k+1) + \mathbf{B}(k) \mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k)]^{-1} \mathbf{A}(k) \quad (5.70)$$

则有:

$$\lambda(k) = \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \quad (5.71)$$

$\mathbf{G}(k)$  所必须满足的式(5.70) 形式的方程称为离散黎卡提(Ricatti) 方程。它的终值条件由

$$\mathbf{G}(N) = \mathbf{S} \quad (5.72)$$

给出, 若  $\mathbf{A}(k)$  为非奇异, 则由式(5.63) 可得

$$\lambda(k+1) = \mathbf{A}^T(k) [\lambda(k) - \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k)] \quad (5.73)$$

将式(5.71) 代入可得

$$\lambda(k+1) = \mathbf{A}^T(k) [\mathbf{G}(k) - \mathbf{Q}(k)] \mathbf{x}(k) \quad (5.74)$$

代入式(5.65) 可得闭环形式的最优控制

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{R}^{-1}(k) \mathbf{B}^T(k) \mathbf{A}^T(k) [\mathbf{G}(k) - \mathbf{Q}(k)] \mathbf{x}(k) \quad (5.75)$$

式(5.75) 表明当前的最优控制  $\mathbf{u}(k)$  可以由当前的状态  $\mathbf{x}(k)$  来决定, 即这时的最优控制具有线性状态反馈的形式, 很容易实现。

前面我们分别讨论了连续系统和离散系统的最小值原理。对连续时间系统, 利用连续的最小值原理可以得到两点边值问题, 由于要在计算机上求解, 则要将这个两点边值问题离散化, 形成离散的两点边值问题。另一方面, 连续时间系统本身可以离散化得到相应的离散化模型, 应用离散的最小值原理, 可以直接得到离散形式的两点边值问题。将这两种离散形式的两点边值问题进行比较, 可见它们之间存在着差异。但是, 若采样周期足够小, 则两种两点边值问题的数值解本质上是相同的。

从另一个角度来看,离散的最小值原理产生的是形如非线性差分方程的两点边值问题,它的解是使相应的离散系统的控制为最优。而连续的最小值原理产生的是一形如非线性微分方程的两点边值问题,它的解是连续系统的最优控制。而由连续两点边值问题离散化后所产生的控制和相应轨线,既不能使连续时间问题为严格最优,也不能使连续时间系统离散化后所得的离散模型为严格最优。这就解释了前面两类两点边值问题不一样的原因。

### § 5 .3 时间最优控制

时间最优控制问题讨论如何以最短的时间将受控系统的状态由任意初态转移到期望的终态,例如要求导弹以最短的时间击毁敌机或受控对象以最快速度达到平衡态等。这一问题由于其性能指标特别简单(或是  $t_f = 0$ ,  $x_f = 1$ , 或是  $t_f = t_f$ ,  $x_f = 0$ ),而且具有较大的实用价值,所以研究得最早。早在最小值原理还没有出现的时候,就出现了从工程观点来研究这类问题的各类探讨,它们为现代控制理论提供了一批实际模型,并推动了最优控制的发展。而最小值原理的出现,反过来指导了对这一类系统进行的更深入的研究,加深了对这类系统内部规律的认识,产生了一批新的更复杂的时间最优控制系统。

在时间最优控制系统中,我们通常采用“ 转移时间 ”作为系统的性能指标,表为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt \tag{5 .76}$$

并且基于物理实现等方面的考虑,对控制变量的幅值具有不等式约束

$$| u_i(t) | \leq u_{i\max} \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{5 .77}$$

在应用最小值原理解时间最优控制问题时,往往只能得到开环形式的时间最优控制系统。但是,若受控系统是线性定常系统,则可以得到状态反馈形式的闭环时间最优控制。

#### 5 .3 .1 线性系统的时间最优控制

已知线性定常受控系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{5 .78}$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $m$  维控制向量,它的各分量应当满足不等式约束

$$| u_i(t) | \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{5 .79}$$

线性系统的最优时间控制问题即要求寻找最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ , 将系统由初态  $\mathbf{x}_0$ , 转移至由边界条件

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \tag{5 .80}$$

描述的目标集,其中  $\mathbf{m}$  为  $p$  维连续可微的向量函数,并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt \tag{5 .81}$$

为最小,其中  $t_f$  待定。

下面我们利用最小值原理来解这一问题,构造系统的  $H$  函数:

$$H = 1 + \lambda^T(t) [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \tag{5 .82}$$

由之可求得规范方程组

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathbf{A}^T\lambda(t) - \mathbf{B}^T\lambda(t) \quad \lambda(0) = \lambda_0 \tag{5 .83}$$



$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{H}{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \lambda(t) \quad (5.84)$$

$$\lambda(t_f) = \left. \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}(t_f)} \mathbf{v} \right|_{t=t_f} \quad (5.85a)$$

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f)] = 0 \quad (5.85b)$$

在最优轨线终端处,  $H$  函数满足

$$H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, t) \big|_{t=t_f} = 0 \quad (5.86)$$

根据极小值原理, 最优控制  $\mathbf{u}(t)$  应使  $H$  函数处于强极小, 即:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) &= \min_{|\mathbf{u}_i| \leq 1} \{1 + \lambda^T (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})\} \\ &= 1 + \lambda^T \mathbf{Ax} + \min_{|\mathbf{u}_i| \leq 1} \{u_i (\mathbf{b}_i^T)\} \end{aligned} \quad (5.87)$$

其中  $\mathbf{b}_i$  表示  $\mathbf{B}$  的第  $i$  列。为方便起见, 定义函数

$$\hat{q}_i(t) = \mathbf{b}_i^T \lambda(t) \quad (5.88)$$

则根据最小值原理, 由方程(5.87)可知, 最优控制  $\mathbf{u}$  满足:

$$\hat{u}_i \hat{q}_i = \min_{|u_i| \leq 1} u_i \hat{q}_i \quad (5.89)$$

因为关于  $\mathbf{u}(t)$  的各个分量约束(5.79)是相互独立的, 由式(5.89)显然有

$$\hat{u}_i(t) = -\operatorname{sgn}[\hat{q}_i(t)] = -\operatorname{sgn}[\mathbf{b}_i^T \lambda(t)] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.90)$$

其中  $\operatorname{sgn}$  表示符号函数, 它的定义为:

$$\operatorname{sgn}(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{若 } q_i > 0 \\ -1 & \text{若 } q_i < 0 \\ \text{未定} & \text{若 } q_i = 0 \end{cases} \quad (5.91)$$

根据  $\operatorname{sgn}$  函数的定义, 由式(5.90)可知, 若除开个别点以外都有  $q_i(t) \neq 0$ , 则  $\hat{u}_i(t)$  在除开这些个别点以外均有意义, 若  $q_i(t)$  在某一区间内为零, 则  $\hat{u}_i(t)$  在指定区间内无定义。我们称前者为平凡的, 称后者为奇异的。即若对所有的  $i = 1, 2, \dots, m$ , 在整个控制区间  $t \in [0, t_f]$  内,  $q_i(t)$  仅有有限个孤立的零点, 如图 5.3(a) 所示, 则称相应的最优时间控制问题是平凡的。而若至少对某一个分量  $q_j(t)$ , 在  $t \in [0, t_f]$  区间内, 存在有一个或多个子区间  $[t_1, t_2]$  等, 在该区间内  $q_j(t)$  恒为零, 如图 5.3(b) 所示, 则称相应的时间最优控制问题是奇异的。

(a) 平凡情况

(b) 奇异情况

图 5.3 最优时间控制问题的平凡与奇异

奇异控制问题的出现, 既不意味着时间最优控制不存在, 也不意味着时间最优控制问题无

法定义,它仅仅表明根据式(5.90)无法确定最优控制  $\mathbf{u}(t)$ 。

根据式(5.90)可知,对于平凡时间最优控制问题,最优控制函数  $\mathbf{u}(t)$  具有开关控制的形式,这种根据  $q_i(t)$  的符号取  $u_i(t)$  的容许边界值的控制,称为 Bang-Bang 控制。 $q_i(t)$  的零点即为切换点。如图 5.3(a) 所示。我们将以上的讨论总结为以下定理:

**定理 5.4** 由式(5.78) ~ 式(5.81) 所定义的线性系统时间最优控制问题的解所满足的必要条件为:

1. 设  $\mathbf{u}(t)$  是时间最优控制问题的最优控制向量,  $\mathbf{x}(t)$  是其相应的最优轨线;则存在着一相应的协态向量  $\boldsymbol{\lambda}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$  和  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  满足规范方程组

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.92)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t) \quad (5.93a)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\mathbf{m}^T}{\mathbf{x}} \mathbf{v} \Big|_{t=t_f} \quad (5.93b)$$

$$\mathbf{m}[\mathbf{x}(t_f)] = 0 \quad (5.93c)$$

其中  $\mathbf{v}$  为  $p$  维拉格朗日乘子向量。

2. 最优控制  $\mathbf{u}(t)$ , 必须满足

$$\hat{u}_i(t) = -\operatorname{sgn}[\hat{q}_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.94)$$

其中  $\hat{q}_i(t) = \mathbf{b}_i^T \boldsymbol{\lambda}(t)$ ,  $\mathbf{b}_i$  为  $\mathbf{B}$  的第  $i$  列。

3. 在最优轨线终端处成立:

$$H[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f)] = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t_f)[\mathbf{A}\mathbf{x}(t_f) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t_f)] = 0 \quad (5.95)$$

由协态方程式(5.93a)可知,协态向量  $\boldsymbol{\lambda}$  与  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{u}$  无关,且  $\boldsymbol{\lambda}(t) = 0$  在  $t \in [0, t_f]$ 。否则根据  $H$  函数沿最优轨线成为一常数的性质以及式(5.95)将推出  $1 = 0$  的矛盾结果。因此,我们可令  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(0)$  且  $\boldsymbol{\lambda}(0) = 0$ , 由 (5.93a) 的解为

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\lambda}(0) \quad (5.96)$$

代入式(5.94)可得

$$\hat{u}_i(t) = -\operatorname{sgn}[\hat{q}_i(t)] = -\operatorname{sgn}[\mathbf{b}_i^T e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\lambda}(0)] \quad (5.97)$$

若时间最优控制问题是奇异的,则至少存在一个  $\hat{q}_i(t)$  满足:

$$\hat{q}_i(t) = \mathbf{b}_i^T e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\lambda}(0) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.98a)$$

对上式依次求导,并注意到式(5.96),有

$$\dot{\hat{q}}_i(t) = \mathbf{b}_i^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\mathbf{b}_i^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.98b)$$

$$\ddot{\hat{q}}_i(t) = -\mathbf{b}_i^T \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{b}_i^T (\mathbf{A}^T)^2 \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.98c)$$

$$\dots\dots\dots \hat{q}_i^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} \mathbf{b}_i^T (\mathbf{A}^T)^{n-1} \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.98d)$$

将以上各等式中右边有负号的等式两边同乘以  $-1$ ,以除去负号,可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_i^T \\ & (\mathbf{A}\mathbf{b}_i)^T \\ & \dots \\ & (\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i)^T \end{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.99)$$

令

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_i]$$
(5.100)

则式(5.99) 可写成

$$\mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\Lambda}(t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2]$$
(5.101)

由于  $\boldsymbol{\Lambda}(t) \neq 0, \forall t \in [0, t_f]$ , 故要使上式成立必有

$$\det \mathbf{G}_i = 0$$
(5.102)

因此至少存在有一下标  $i$ , 使得式(5.102) 成立, 是时间最优控制问题为奇异的必要条件。可以证明它也是充分条件。反之, 时间最优控制问题是平凡的充要条件为:

$$\det \mathbf{G}_i \neq 0 \quad i = 1, \dots, m$$
(5.103)

因为  $\mathbf{G}_i$  是  $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  的能控性矩阵, 时间最优控制的平凡性, 即等价于系统对于每个输入  $u_i$  均为完全能控。显然, 单输入的完全能控的线性定常系统, 其时间最优控制必是平凡的。

由图 5.3( a) 可见, 相应于平凡的时间最优控制系统, 最优控制具有 Bang-Bang 控制的形式。估计 Bang-Bang 控制的切换次数对我们有实际的意义。可以证明, 若系统式(5.78) 中系统矩阵  $\mathbf{A}$  的所有特征值都是实数, 且相应的时间最优控制问题是平凡的, 则最优控制向量  $\mathbf{u}(t)$  的各个分量如第  $i$  分量  $u_i(t)$  的切换次数不超过  $n - 1$  次。换句话说, 每一个分段恒值控制  $u_i(t)$  能切换(由  $+1$  到  $-1$ , 或由  $-1$  到  $+1$ ) 至多  $n - 1$  次。具体的切换次数由系统的特性和初始条件所决定。若系统矩阵  $\mathbf{A}$  具有复数特征值, 则切换次数不受此限制。

另外, 还可以证明, 若时间最优控制问题是平凡的, 且相应的最优控制存在, 则它是唯一的。

### 5.3.2 双积分装置的时间最优控制系统

二阶系统的时间最优控制问题的最大特点是可以将极小值原理与相平面法相结合, 进行最优控制系统的分析与综合。双积分模型可以说是二阶系统里面最简单和最常遇到的情况, 它的运动方程为:

$$m\ddot{y}(t) = f(t)$$
(5.104)

它相当于物体在无阻力的环境中运动。若定义状态变量

$$x_1 = y \quad x_2 = \dot{y}$$

并令  $u = \frac{f}{m}$  则可得双积分装置的状态空间模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= x_{10} \end{aligned}$$
(5.105 a)

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= u(t) & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$
(5.105 b)

假定对控制变量的约束为

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, t_f]$$
(5.106)

我们的目的是求最优控制  $u(t)$ , 将系统式(5.105) 由初态  $(x_{10}, x_{20})$  转移到终态  $\mathbf{x}(t_f) = [0 \ 0]^T$ , 并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

为最小。

这一问题的哈密顿函数为

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

它所对应的协态方程为

$$\dot{x} = -\frac{H}{x} = -\frac{0}{1}$$

可解出

$$x_1 = c_1$$

$$x_2 = c_2 - c_1 t$$

利用最小值原理,可得出使  $H$  函数为全局最小的最优控制为:

$$u = -\operatorname{sgn} x_2 = -\operatorname{sgn}[c_2 - c_1 t]$$

由于  $c_1$  和  $c_2$  不能同时为零[否则有  $x_2(t) = 0$ ], 所以  $x_2(t)$  是  $t$  的线性函数, 在  $(0, t_f)$  区间内至多有一点过零。因此 Bang-Bang 控制的切换次数最多为一次。

为进一步探讨  $u$  与  $x$  的关系, 我们采用相平面分析法。首先根据以上分析可知,  $u(t)$  的切换次数不会超过一次, 因此, 最优控制序列只可能是以下四种序列中的一个

$$\{+1\}, \{-1\}, \{+1, -1\}, \{-1, +1\}$$

当  $u = +1$  时, 系统方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = +1$$

解得

$$x_2(t) = x_{20} + t$$

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + x_{20} t + x_{10}$$

消去  $t$ , 得

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + x_{10} - \frac{1}{2} x_{20}^2$$

它在相平面上的图形是开口向右的抛物线, 箭头表示当  $t$  增大时  $x_2$  增大, 如图 5.4 的实线所示。

当  $u = -1$  时, 可类似求得

$$\dot{x}_2(t) = x_{20} - t$$

$$x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + x_{20} t + x_{10}$$

消去  $t$ , 得

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + x_{10} + \frac{1}{2} x_{20}^2$$

它在相平面上的图形是开口向左的抛物线, 箭头表示当  $t$  增大时  $x_2$  减少, 如图 5.4 的虚线所示。

我们的目的是要将系统的状态由初态  $x_0$  转移到原点  $(0, 0)$ , 而由图 5.4 可见, 在所有的相轨迹中, 只有  $+$  和  $-$  两条轨线能到达原点, 它们分别可表示为:

$$+ = (x_1, x_2): x_1 = \frac{1}{2} x_2^2; \quad x_2 \geq 0$$

$$- = (x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2; \quad x_2 \leq 0$$

$-$  和  $+$  组合在一起即构成了  $\Sigma$  曲线, 称为开关曲线, 它可表示为

$$\Sigma = - \cup + = \{(x_1, x_2): x_1 = -\frac{1}{2} x_2 / x_2 \neq 0\}$$

曲线 将相平面分成了两个部分,  $R_-$  和  $R_+$ , 其中  $R_-$  由开关曲线右边的点所组成,  $R_+$  由开关曲线左边的点所组成, 它们分别可表成:

$$R_- = (x_1, x_2): x_1 > -\frac{1}{2}x_2 / x_2 /$$

$$R_+ = (x_1, x_2): x_1 < -\frac{1}{2}x_2 / x_2 /$$

根据开关曲线 和其所划分的区域  $R_-$  和  $R_+$ , 我们结合图 5 .4 来分析各种初态  $(x_{10}, x_{20})$  下的控制规律:

若  $(x_{10}, x_{20})$  位于  $R_+$  上, 如图 5 .4 中 A 点所示, 则唯有采用控制  $u = +1$ , 才可将状态  $\mathbf{x}$  转移至原点, 因而  $u = +1$  是时间最优控制。同理, 若  $(x_{10}, x_{20})$  位于  $R_-$  上, 如图 5 .4 中 B 点所示, 则  $u = -1$  是时间最优控制。

若  $(x_{10}, x_{20})$  位于区域  $R_+$  上的某点 C, 如图 5 .4 中 C 点所示。则系统必须先由控制  $u = +1$  将 状态转移到曲线  $R_-$  上的 E 点, 再由控制  $u = -1$  将状态  $x$  转移至原点, 因而最优控制序列为  $\{+1, -1\}$ 。同理, 若  $(x_{10}, x_{20})$  位于区域  $R_-$  上的某点 D, 则系统必须先由控制  $u = -1$  将状态  $x$  转移到曲线  $R_+$  上的 F 点, 再由控制  $u = +1$  将  $x$  转移到原点。故最优控制序列为  $\{-1, +1\}$ 。

结合以上分析, 我们知道, 任一时刻的最优控制由这一时刻的状态值所决定。其控制规律为

$$\hat{u} = +1, \text{对所有 } (x_1, x_2) \in R_+$$

$$\hat{u} = -1, \text{对所有 } (x_1, x_2) \in R_-$$

如果定义开关函数

$$h(x_1, x_2) = x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t) / x_2(t) / \tag{5 .107}$$

则最优控制可表示为:

$$\hat{u}(t) = \begin{matrix} -1 & \text{当 } h(x_1, x_2) > 0 \\ -\operatorname{sgn}[x_2(t)] & \text{当 } h(x_1, x_2) = 0 \\ +1 & \text{当 } h(x_1, x_2) < 0 \end{matrix} \tag{5 .108}$$

图 5 .5 是以上时间最优控制规律的工程实现框图。

由图 5 5 可见, 最优控制系统在每一瞬间对状态  $x_1$  和  $x_2$  进行测量, 其中  $x_2$  通过非线性函数发生器后得到  $\frac{1}{2} x_2 / |x_2|$ , 将其与  $x_1$  相加并取反后推动继电器, 实现 Bang-Bang 控制。注意到当  $x_1$  和  $x_2$  位于开关曲线上时, 继电器的输入为零, 从而继电器输出未定。但是在实际上, 由于惯性的作用, 使得继电器的动作不会精确地发生在 曲线上, 而是发生在超越 曲线某些距离的地方, 从而相应的继电器输入信号也就不会精确地等于零。这时状态  $(x_1, x_2)$  将沿着与接近的曲线转移到坐标原点附近。所以从实际的观点来看, 这一控制方案还是可行的。

在时间最优控制的作用下, 最短时间  $t_f$  的计算, 是将状态轨线按控制序列分成若干段, 依次算出每段所需的时间, 再求和。在目前情况下, 我们可以分别计算从初态  $(x_{10}, x_{20})$  到轨线与开关曲线相交时的时间, 以及从交点沿开关曲线到原点的时间, 两者求和即得  $t_f$ 。具体结果为:

$$\begin{aligned}
 & \quad \quad \quad |x_{20}| > 0 \quad \quad \quad (x_{10}, x_{20}) \in R_- \\
 t_f = & \quad \quad \quad x_{20} + 2|x_{10}| + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (x_{10}, x_{20}) \in R_- \\
 & \quad \quad \quad -x_{20} + 2|x_{10}| + \frac{1}{2}x_{20}^2 \quad (x_{10}, x_{20}) \in R_+
 \end{aligned}
 \tag{5.109}$$

### 5.3.3 简谐振荡器的时间最优控制

前面我们讨论了双积分装置的时间最优控制问题, 在这类系统中, 系统所有的特征值都是实数。我们现在将研究简谐振荡器的快速停振, 即时间最优控制问题。这类系统的特点是系统所有的特征值都是虚数。

考虑图 5.6 所示的理想简谐振荡器。假设它处于等幅振荡状态(稳态)。现在我们要施加一控制电压信号  $u(t)$ , 使振荡器在尽可能短的时间内停振。

图 5.6 简谐振荡器

图 5.6 所示的简谐振荡器可以用以下微分方程描述

$$LC\ddot{y} + y = u
 \tag{5.110}$$

定义  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , 则上式可改写为:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u
 \tag{5.111}$$

选择状态变量  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ , 可得以上系统的状态方程表示:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} u(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.112}$$

它的特征值  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ , 是两个虚数。

简谐振荡器最小时间控制问题为: 已知式(5.112) 表示的系统, 并假设控制  $u(t)$  满足不等式约束

$$|u(t)| \leq 1
 \tag{5.113}$$

求最优控制规律, 将系统式(5.112) 由任意初始态  $x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}$ , 转移到原点, 并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

取极小值。

为解这一最优控制问题,首先写出它的哈密顿函数

$$H = 1 + x_2 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_2 + u_2 \dot{x}_2 \tag{5.114}$$

由它可以求得协态方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -x_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -x_1 \end{aligned}$$

写成向量的形式,有

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{5.115}$$

可见它与系统状态方程式(5.112)的齐次部分相同。利用最小值原理,根据式(5.114)可以求得最优控制为:

$$u = -\text{sgn}(\lambda_2) \tag{5.116}$$

设  $\lambda_2(0) = \lambda_1$ ,  $\lambda_1(0) = \lambda_2$ , 可以求得协态方程式(5.115)的解为:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \cos t \lambda_1 - \sin t \lambda_2 \\ \lambda_2(t) &= \sin t \lambda_1 + \cos t \lambda_2 \end{aligned} \tag{5.117}$$

特别地,有

$$\lambda_2(t) = -\lambda_1 \sin t + \lambda_2 \cos t \tag{5.118}$$

利用三角级数的公式可将上式写成

$$\lambda_2(t) = A \sin(t + \phi_0) \tag{5.119}$$

图 5.7 显示了  $\lambda_2(t)$  和最优控制  $u(t)$  之间的关系。由此,我们立即可以得到以下的结论。

- 1. 时间最优控制是在  $u(t) = +1$  和  $u(t) = -1$  之间切换的分段常数。
- 2. 时间最优控制  $u(t)$  保持恒值的最长时间不会超过一秒。
- 3. 因为系统的特征值不全为实数,时间最优控制  $u(t)$  的开关次数没有限制。
- 4. 协态  $\lambda_2(t)$  不会在一段有限的时间区间内恒为零。因为由式(5.118)可见,产生这样情况的前提是  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , 从而使得  $\lambda_1(t)$  和  $\lambda_2(t)$  恒等于零。而由式(5.114)可知,这将使得对应的哈密顿函数  $H = 1$ , 与最小值原理所要求的  $H = 0$  的条件相矛盾。由此,可以得出结论,对这一时间最优控制问题,不可能存在奇异控制。

以上四点结论是时间最优控制所必须具备的性质,我们可以根据这些性质,在  $x_1 - x_2$  相平面上,确定时间最优控制。

首先,利用时间最优控制是分段常数的性质,即  $u = \pm 1$ , 来求解系统状态方程式(5.112),可得

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 - \int \cos t dt + \lambda_2 \sin t + \int \sin t dt \\ x_2 &= -\lambda_1 - \int \sin t dt + \lambda_2 \cos t + \int \cos t dt \end{aligned}$$

或

$$x_1(t) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos t + (\lambda_1 + \lambda_2) \sin t + \tag{5.120a}$$

$$x_2(t) = -(\alpha_1 - \alpha_2)\sin t + \alpha_2 \cos t \quad (5.120b)$$

取以上两式两边的平方并相加,进行代数化简后可得

$$[x_1(t) - \alpha_1]^2 + [x_2(t) - \alpha_2]^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + (\alpha_2)^2$$

以上方程中不显含时间  $t$ , 因而是  $x_1 - x_2$  相平面上的相轨迹方程。它在相平面上是圆心位于  $(\alpha_1, 0)$  点的圆族。因此, 若  $u = +1$ , 则相轨迹是圆心在  $(1, 0)$  点的一族圆; 若  $u = -1$ , 则相轨迹是圆心在  $(-1, 0)$  点的一族圆, 如图 5.8 所示。

图 5.7 协态  $\lambda_2(t)$  和最优控制  $u(t)$

图 5.8 Bang-Bang 控制下简谐振荡器的相平面图

当控制为  $u = \pm 1$  时, 从相平面上  $(\alpha_1, \alpha_2)$  到  $(x_1, x_2)$  所需的时间, 可以参照图 5.9, 计算如下

$$\begin{aligned} \tan t &= \tan \theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{\frac{x_2}{x_1 - 1} - \frac{x_2}{x_1 - \alpha_1}}{1 + \frac{x_2}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_2}{x_1 - \alpha_1}} \\ &= \frac{(x_1 - \alpha_1)x_2 - x_2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_1 - \alpha_1) + x_2^2} \end{aligned}$$

图 5.9 计算  $t$  的参照图

由之可以解出

$$t = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{(x_1 - \alpha_1)x_2 - x_2(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_1 - \alpha_1) + x_2^2} \quad (5.121)$$

在图 5.8 的圆弧中, 仅有两个圆  $\gamma_+ = \{(x_1, x_2): (x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 = 1\}$  和  $\gamma_- = \{(x_1, x_2): (x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 = 1\}$  能分别借助控制  $u = +1$  和  $u = -1$  到达原点。然而, 只有  $\gamma_+$  圆的下半圆, 即位于  $x_1$  轴下面的部分, 能通过  $u = +1$  以小于  $\pi/\omega$  秒的时间转移到原点, 从而是最优轨迹的一部分。类似地只有  $\gamma_-$  的上半圆是最优轨迹的一部分。因此, 定义

$$\begin{aligned} \gamma_+^0 &= \{(x_1, x_2): (x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 = 1, x_2 < 0\} \\ \gamma_-^0 &= \{(x_1, x_2): (x_1 + 1)^2 + (x_2)^2 = 1, x_2 > 0\} \end{aligned}$$

显然  $\gamma_+^0, \gamma_-^0$  是开关曲线的最后一段。

如果初态(如  $A$  点)距离目标原点较远时, 如图 5.10 所示, 则经过  $A$  点的相轨迹不会与  $\gamma_+^0$  或  $\gamma_-^0$  相交, 这就意味着控制函数不能通过一次切换就驱使系统转移至目标原点。因此, 在相平面上必然还存在开关曲线的其它线段。假设控制函数的最后一次切换发生在  $\gamma_+^0$  的  $F$  点上, 由



于在  $\Gamma_+^0$  上的相轨迹  $FO$  对应于  $u = +1$ , 因此在切换前必有  $u = -1$ 。由于二次切换的时间间隔为  $\frac{1}{2}$ , 令  $\Gamma_+^1$  表示借助于控制  $-1$ , 能准确地经  $\frac{1}{2}$  秒到达  $\Gamma_+^0$  曲线的状态的集合, 则  $\Gamma_+^1$  必也是开关曲线的一部分, 并且  $\Gamma_+^1$  是在  $x_1$  轴之上, 半径为 1, 圆心位于  $(-3, 0)$  点的半圆。类似地推导可知, 位于  $x_1$  轴之下, 且半径为 1 圆心位于  $(3, 0)$  点的半圆  $\Gamma_-^1$  也是开关曲线的一部分。由上类推, 若令  $\Gamma_+^j, j = 0, 1, 2, \dots$ , 表示圆心在  $(2j+1, 0)$  半径为 1 的位于  $x_1$  轴之下的半圆, 即  $\Gamma_+^j = \{(x_1, x_2): [x_1 - (2j+1)]^2 + (x_2)^2 = 1, x_2 < 0\}$

图 5.10 简谐振荡器时间最优控制

以及令  $\Gamma_-^j, j = 0, 1, 2, \dots$ , 表示圆心在  $(-2j-1, 0)$  半径为 1 的位于  $x_1$  轴之上的半圆, 即

$$\Gamma_-^j = \{(x_1, x_2): [x_1 + (2j+1)]^2 + (x_2)^2 = 1, x_2 > 0\}$$

显然,  $\Gamma_-^j$  线是借助于控制  $u = -1$ , 能准确地经  $\frac{1}{2}$  秒到达  $\Gamma_+^{j-1}$  曲线的所有状态的集合,  $\Gamma_+^j$  曲线是借助于控制  $u = +1$ , 能准确地经  $\frac{1}{2}$  秒到达  $\Gamma_-^{j-1}$  曲线的所有状态的集合。它们的并集, 即构成了开关曲线

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma_+^j \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma_-^j$$

如图 5.10 中的虚线所示。令  $R_-$  是开关曲线  $\Gamma$  上方所有点的集合, 而  $R_+$  是开关曲线  $\Gamma$  下方的所有点的集合, 则最优控制规律为

$$u = \begin{cases} +1 & \text{若 } (x_1, x_2) \in R_+ \\ -1 & \text{若 } (x_1, x_2) \in R_- \end{cases}$$

图 5.10 中画出了两条最优轨线  $ABCDEF O$  和  $GHIJKO$ 。在开关曲线上方的区域  $R_-$ , 有  $u = -1$ , 在开关曲线下方的区域  $R_+$ , 则有  $u = +1$ 。凡是在最优轨线与开关曲线相交的地方, 最优控制进行切换, 直到把状态引向原点。

## 习 题

5.1 考虑一阶线性系统  $\dot{x} = -0.1x + u, x(0) = x_0$ , 其中  $0 \leq u(t) \leq 1$ , 性能指标:

$$J = \int_0^{100} x(t) dt$$

终态  $x(100)$  自由。试求使得  $J$  取最小值的最优控制。

5.2 考虑一阶系统  $\dot{x} = -x + u, x(0) = 10$ , 性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$$

试求以下两种情况下使得  $J$  为最小的最优控制  $u(t)$ 。

(a) 对  $u$  无约束。

(b)  $|u(t)| \leq 0.3$ 。

### 5.3 考虑二阶受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

其中容许控制  $|u(t)| \leq 1$ , 试求最优控制  $u(t)$ , 将系统由初态  $x_1(0) = x_{01}, x_2(0) = x_{02}$  转移到终态  $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ , 并使性能指标

$$J = \int_0^{t_1} (1 + u^2(t)) dt$$

为最小。

### 5.4 设系统状态方程是

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

其中容许控制  $|u(t)| \leq 1$ 。试求将系统由初态  $x_1(0) = x_2(0) = 3$  转移到原点  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$  的时间最优控制。

### 5.5 考虑受控系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

的时间最优控制, 试讨论该最优控制问题的平凡/奇异性质。

### 5.6 设受控系统的方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

容许控制  $|u(t)| \leq 1$ , 试证明为把系统状态由  $x_1(0) = x_2(0) = \frac{1}{2}$  转移到原点  $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ , 若用恒值控制  $u = +1$  需要时间  $3/2$  秒, 而如用时间最优控制, 只需  $3/4$  秒。

### 5.7 考虑离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试求最优控制序列  $\{u(0), u(1), u(2)\}$ , 将系统由初态  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  转移到终态:  $x_1(3)$  自由,  $x_2(3) = 0$ , 并使性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 [x_1^2(k) + u^2(k)]$$

为最小。

## 第六章 线性二次型的最优控制

通过前面关于最优控制的学习,我们知道,为了确定最优控制规律,通常存在不少困难,并且所得到的最优控制律通常具有开环形式,或者是非线性控制律,难以在实际系统中实现最优反馈控制系统。

对于线性系统,如果衡量最优控制性能的指标泛函是状态变量和(或)控制变量的二次型函数的积分,即考虑线性系统在二次型性能指标下的最优控制问题,则最优控制律是一个简单的线性状态反馈律而构成的闭环最优反馈系统。这一性质对于最优控制在工程应用上的实现有着十分重要的意义。这种线性二次型最优控制问题的求解过程十分规范,最优解可以写成统一的解析形式。同时,通过适当选择性能指标中的各权矩阵,可以兼顾系统的各种控制性能要求(如快速性、准确性、稳定性和灵敏度)等。线性二次型最优控制已成为现代控制理论及应用中最有成果的一部分,特别是对线性二次型最优反馈控制系统的结构、性质和设计方法以及对最优调节器的性质与综合等多方面的研究,已取得卓有成效的结果。虽然本章中我们只介绍了利用时域方法解线性二次型最优控制问题,利用频域方法解线性二次型问题的方法也很有特色。另外,关于线性二次型最优控制与极点配置之间的关系也是引起广泛兴趣的研究方向。

### § 6.1 二次型性能指标

设线性时变系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (6.1)$$

其中  $\mathbf{x}(t)$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  是  $m$  维输入向量,  $\mathbf{y}(t)$  是  $p$  维输出向量。设  $\mathbf{r}(t)$  为  $p$  维预期输出(参考输入),则

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (6.2)$$

为输出误差向量。我们的目标是寻找最优控制  $\mathbf{u}(t)$ , 使下列二次型性能指标为最小

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (6.3)$$

其中  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  称为权矩阵,它们均为对称矩阵,  $\mathbf{S}$  为  $q \times q$  维半正定常数矩阵,  $\mathbf{Q}(t)$  为  $q \times q$  维半正定阵,  $\mathbf{R}(t)$  为  $m \times m$  维正定阵,  $t_f$  为给定终端时间。

性能指标式(6.3)具有明确的物理意义。被积函数中的第一项  $\frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t)$ , 由于  $\mathbf{Q}(t)$  的半正定性,只要出现误差  $\mathbf{e}(t) \neq 0$ , 则它总是非负的,从而它是控制误差大小的度量,而它的积分则代表了整个控制区间内控制误差的积累。特别地,若  $\mathbf{Q}(t) = 1$ , 且  $e(t)$  为标量,则它就变成  $\frac{1}{2} e^2(t)$ , 而  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^2(t) dt$  即为经典控制论中的误差平方积分判据。

被积函数中的第二项  $\frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)$ , 表示在工作过程中与控制向量  $\mathbf{u}(t)$  有关的惩罚项。因为  $\mathbf{R}(t)$  正定, 故只要  $\mathbf{u}(t) \neq 0$ , 则它总是正的。特别地, 若  $u(t)$  是标量且为电压, 则  $\frac{1}{2} u^2(t)$  与功率成正比, 而它的积分则正比于控制系统在  $[t_0, t_f]$  区间内消耗的能量。

性能指标中被积函数的两个积分项实际上是相互制约的。显然, 若要求控制误差快速地衰减, 即误差平方积分的减少, 则必然会导致增大控制能量的消耗。反之, 为了节省控制能量, 就不得不牺牲对控制性能的要求。所以, 求两个积分项之和的极小值, 实质上是在控制性能和消耗能量之间求取在某种最优意义下的折衷。一般说来, 如果希望闭环系统有较快速的响应特性, 则可适当加大  $\mathbf{Q}$  中相应元素; 而若希望有效地抑制控制量的幅值和控制能量的消耗, 则可提高  $\mathbf{R}$  中相应元素的幅值。另外, 为简便起见,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  通常为对角矩阵, 通过改变  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  相应元素的大小, 可以强调相应的误差分量  $e_i(t)$  和控制分量  $u_i(t)$ 。改变  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  随时间变化的关系, 还可以强调对不同时刻的  $\mathbf{e}(t)$  和  $\mathbf{u}(t)$  的权衡。

由于在求最优反馈控制律时, 要用到对  $\mathbf{R}(t)$  的求逆, 所以控制加权矩阵必须是正定对称矩阵。它的物理意义是: 从理论上讲, 系统的最优控制性能有可能通过在某些时刻加入幅值为无穷大的控制作用来得到, 但在实际系统中, 这种控制作用是不可能实现的。因此, 在性能指标中必须包含能反映控制向量中各个分量大小的惩罚项。

性能指标式(6.3)中的第一项  $\frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f)$  是为了突出对终端误差的要求而引入的, 称为终端代价函数。它表示在给定终端时刻  $t_f$  到来时, 系统的控制误差接近要求的程度。这在导弹拦截, 宇宙飞船的对接等航空航天问题中是很重要的。

总体来说, 线性二次型指标可归结为花费尽量少的控制能量, 使系统输出  $\mathbf{y}(t)$  尽可能地跟随期望输出  $\mathbf{r}(t)$  的变化。

根据性能指标式(6.3)的几种特殊情况, 我们还可以有以下不同的二次型最优控制问题。

### 1. 输出调节器问题

若  $\mathbf{r}(t) = 0$ , 则  $\mathbf{e}(t) = -\mathbf{y}(t)$ , 性能指标式(6.3)可写成

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.4)$$

即用不大的控制能量, 使输出  $\mathbf{y}(t)$  保持在零值附近。

### 2. 状态调节器问题

若  $\mathbf{r}(t) = 0$ ,  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ , 则  $\mathbf{e}(t) = -\mathbf{x}(t)$ , 性能指标(6.3)变成

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.5)$$

即用不大的控制能量, 将系统状态  $\mathbf{x}(t)$  保持在零值的附近。

### 3. 跟踪问题

若  $\mathbf{r}(t) \neq 0$ , 则  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)$ , 性能指标式(6.3)的意义为用不大的控制能量, 使系统输出  $\mathbf{y}(t)$  跟踪  $\mathbf{r}(t)$  的变化。

就数学形式来看, 线性二次型最优控制问题对控制变量  $\mathbf{u}(t)$  没有不等式约束。但是, 实际上, 对控制变量的约束是隐含在性能指标之中的。通过调节权矩阵  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  可以改变对控制能量和系统误差之间的权衡, 从而对控制变量幅值的限制也可以通过调节  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$

而实现。这样处理的最大好处是使得线性二次型问题成为一个没有不等式约束的最优控制问题,为利用最小值原理处理这类问题带来了极大的方便。进一步分析还可以知道,线性二次型问题的解具有线性的状态反馈形式  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t)$ ,从而很容易工程实现。

加权阵  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  等的选择在很大程度上依靠经验和试探。通常的做法是先选定  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$ ,得到相应的最优反馈控制系统,再通过计算机仿真得到闭环系统响应,如果仿真结果满足控制要求则中止,相应的最优控制系统即为所求,否则,则根据仿真结果,在对  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$  进行适当的修正之后,重新计算相应的最优控制律,如此反复,直到最后得到满意的结果。

## § 6.2 有限时间状态调节器问题

已知线性时变受控对象

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.6)$$

其中控制变量  $\mathbf{u}(t)$  不受约束,状态调节器问题为:寻求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ ,使下列二次型性能指标取极小值:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.7)$$

其中  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  为半正定矩阵,  $\mathbf{R}(t)$  为正定矩阵,  $t_f$  有界且固定。

对以上问题,引入  $n$  维协态向量  $\lambda(t)$ ,将动态约束式(6.6)加入到性能指标中,据此构造  $H$  函数:

$$H = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)] \quad (6.8)$$

因为控制  $\mathbf{u}(t)$  不受约束,根据最小值原理,最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  应当满足

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T(t)\lambda(t) = 0 \quad (6.9)$$

$$\text{即} \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\lambda(t) \quad (6.10)$$

将式(6.10)代入状态方程式(6.6)和协态方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\lambda(t) \quad (6.11)$$

可得规范方程组:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\lambda(t) \quad (6.12a)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\lambda(t) \quad (6.12b)$$

它的边界条件为

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.13a)$$

$$\lambda(t_f) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) \quad (6.13b)$$

这是一个两点边值问题。在求解规范方程组式(6.12)所需的  $2n$  个边界条件中,  $n$  个由式(6.13a)所示的  $\mathbf{x}$  的初态值  $\mathbf{x}(t_0)$  决定,另外  $n$  个由式(6.13b)所示的  $\lambda$  的末态值  $\lambda(t_f)$  决定。由之解出  $\lambda(t)$  后代入式(6.10)即得出最优控制。下面,我们从另一角度来导出最优控制。首先注意到由式(6.13b),在  $t_f$  时刻,  $\lambda$  和  $\mathbf{x}$  满足线性关系,又因为方程组式(6.12)是线性的。我

们可以假设  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{x}$  满足线性关系

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6.14)$$

其中  $\mathbf{P}(t)$  是一个  $n$  阶时变方阵。代入式(6.10) 可得

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6.15)$$

即用这样的方法所求得的最优控制具有状态反馈形式。

微分式(6.14), 并利用式(6.12 a) 和式(6.14), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) \\ &= [\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

而另一方面, 将式(6.14) 代入式(6.12 b) 中可得

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -[\mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t) \quad (6.17)$$

根据方程式(6.16) 和式(6.17) 的等式右边相等, 推出

$$[\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t) = 0 \quad (6.18)$$

式(6.18) 对任意状态  $\mathbf{x}(t)$  都必然成立, 因此,  $\mathbf{P}(t)$  必满足下列形式的矩阵微分方程

$$\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) = 0 \quad (6.19)$$

这是一个非线性矩阵微分方程, 称为黎卡提(Ricatti) 方程。如果令式(6.14) 中  $t = t_f$ , 并与式(6.13 b) 比较, 可得黎卡提方程式(6.19) 的边界条件

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S} \quad (6.20)$$

一旦解出黎卡提方程的解  $\mathbf{P}(t)$ , 则立即可以得到线性时变形式的状态反馈控制规律:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6.21)$$

其中

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \quad (6.22)$$

称为最优状态反馈增益矩阵。

可以证明, 由式(6.21) 表示的状态调节器问题的解, 不仅是使性能指标式(6.7) 取极小的必要条件, 也是充分条件。并且采用这一状态反馈控制后的闭环系统的性能指标所达到的极小值为:

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (6.23)$$

为了证明这一结论, 首先考察  $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$  对时间的导数

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t)] \quad (6.24)$$

代入状态方程式(6.6) 和黎卡提方程式(6.19), 并加以整理和配平方后可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t)] \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t)] \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ -[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \} \\
& = - \frac{1}{2} [ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) ] + \frac{1}{2} [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \\
& \quad \cdot \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ]^T \mathbf{R}(t) [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ]
\end{aligned} \tag{6.25}$$

取上式的从  $t_0$  到  $t_f$  的积分, 得:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} [ \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{P}(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) ] \\
& = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) ] dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ]^T \\
& \quad \cdot \mathbf{R}(t) [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ] dt
\end{aligned} \tag{6.26}$$

代入式(6.20), 并加以整理得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) ] dt \\
& = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ]^T \\
& \quad \cdot \mathbf{R}(t) [ \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) ] dt
\end{aligned} \tag{6.27}$$

上式左边即为式(6.7)所示的性能指标, 由于  $\mathbf{R}(t)$  是一正定矩阵, 所以为使性能指标为最小, 当且仅当

$$\mathbf{u}(t) = - \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \tag{6.28}$$

将式(6.28)代入式(6.27)后, 可得性能指标的最小值为:

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0) \tag{6.29}$$

由以上的推导过程我们知道, 求二次型最优控制的关键问题即是解 Ricatti 方程式(6.19), 求得解  $\mathbf{P}(t)$ 。鉴于  $\mathbf{P}(t)$  的重要性, 我们下面简单地讨论  $\mathbf{P}(t)$  的若干性质。

1. 根据微分方程解的存在与唯一性定理, 在区间  $[t_0, t_f]$  上黎卡提方程式(6.19)的解  $\mathbf{P}(t)$  存在且唯一。

2. 将黎卡提方程式(6.19)和它的边界条件式(6.20)两边同时取转置, 可见  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{P}^T(t)$  是同一个黎卡提方程的解并满足同样的边界条件。根据微分方程解的唯一性, 成立  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^T(t)$ , 从而  $\mathbf{P}(t)$  为一对称矩阵。

3. 将黎卡提方程式(6.19)展开, 则它等价于  $n^2$  个一阶非线性微分方程构成的方程组。而当  $\mathbf{P}(t)$  为对称的情况下, 这  $n^2$  个方程中只有  $\frac{n(n+1)}{2}$  个是独立的, 因此,  $\mathbf{P}(t)$  的对称性当  $n$  是很大的情况下, 使得求解过程大大地简化。

4. 若令任一时刻  $t \in [t_0, t_f]$  为初始时刻, 则将系统由初态  $\mathbf{x}(t)$  转移到终态  $\mathbf{x}(t_f)$  的相应的二次型指标最优值为:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_t^{t_f} [ \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{R}(\tau) \mathbf{u}(\tau) ] d\tau \tag{6.30}$$

由于  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  的半正定性和  $\mathbf{R}(t)$  的正定性, 恒有

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t), t] = 0 \quad (6.31)$$

代入式(6.23)式可得

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = 0 \quad (6.32)$$

即  $\mathbf{P}(t)$  至少是半正定的, 进一步, 若  $\mathbf{Q}(t)$  正定则  $\mathbf{P}(t)$  正定。

由于 Riccati 方程式(6.19)的解  $\mathbf{P}(t)$  与  $\mathbf{x}(t)$  及  $\mathbf{u}(t)$  无关,  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{K}(t)$  可以在对系统实行控制前即在离线时计算出来, 并存储好以供实时控制之用。这样就为工程实现二次型最优控制带来了很大的方便。另一方面, 由于 Riccati 方程是一微分方程, 因此即使受控系统式(6.6)是线性定常系统(即  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  均为定常阵), 且  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  都是定常阵,  $\mathbf{P}(t)$  仍然是时变的, 从而状态反馈律式(6.21)也是时变的。

根据以上的讨论, 可以得出状态调节器的设计步骤如下:

状态调节器的设计步骤

已知: 受控对象的状态方程式(6.6), 状态初始值  $\mathbf{x}_0$  和终端时间  $t_f$ 。要求确定线性二次型最优状态反馈控制律, 使闭环系统的控制品质满足工程要求。

(1) 根据系统要求和工程经验, 选择加权矩阵  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$ , 构造出式(6.7)所示的二次型性能指标。

(2) 根据受控系统式(6.6)中的矩阵  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  和二次型性能指标中的权矩阵  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$ , 按式(6.19)构造黎卡提矩阵方程, 并根据式(6.20)得出它的边界条件。利用相应的数值求解方法, 利用计算机求出黎卡提方程的数值解  $\mathbf{P}(t)$ 。

(3) 根据  $\mathbf{P}(t)$ , 利用式(6.15)构造出最优状态反馈控制律。

(4) 求解经状态反馈后的闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}$$

得出最优轨线  $\mathbf{x}(t)$ 。

(5) 验证这样所求得的闭环系统的响应是否满足工程要求, 如果满足则设计完成, 并认为已得到了最优状态反馈控制律。如果不满足, 则根据具体情况(是控制效果不符合要求还是控制变量幅值或能量太大等)改变二次型性能指标中的权矩阵  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$ , 重新构造二次型性能指标, 返回第二步, 重新开始计算。

在以上的第(2)步中一旦求出黎卡提方程的数值解, 则可以求出如式(6.22)所示的最优状态反馈增益阵  $\mathbf{K}(t)$ 。注意到  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{K}(t)$  只与  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$  等有关, 与状态  $\mathbf{x}(t)$  无关, 因此在构造实际的二次型最优状态反馈控制系统时, 只要系统的状态方程和性能指标确定后, 即可先离线计算出  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{K}(t)$ , 并将  $\mathbf{K}(t)$  的数据保存在计算机的存储器中, 作为在线控制用。减少了计算机在线控制的计算工作量。

**【例 6.1】** 考虑双积分装置

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned} \quad (6.33)$$

在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} [x_1^2(3) + 2x_2^2(3)] + \frac{1}{2} \int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt$$

下的最优控制。

**【解】** 与状态方程式(6.6)和性能指标式(6.7)相比较, 对于本例题我们有



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \frac{1}{2}$$

注意到  $\mathbf{P}(t)$  的对称性, 将待求的 Ricatti 方程的解  $\mathbf{P}(t)$  表示为

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}$$

最优控制为

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \\ &= -2[0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Ricatti 方程可写成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{12} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 1 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 1 \end{bmatrix} 2[0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以及边界条件

$$\begin{bmatrix} p_{11}(3) & p_{12}(3) \\ p_{12}(3) & p_{22}(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

根据以上两式, 可得出三个独立的微分方程及相应的边界条件

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11} &= 2p_{12}^2 - 2 & p_{11}(3) &= 1 \\ \dot{p}_{12} &= -p_{11} + 2p_{12}p_{22} - 1 & p_{12}(3) &= 0 \\ \dot{p}_{22} &= -p_{12} + 2p_{22}^2 - 4 & p_{22}(3) &= 2 \end{aligned}$$

由以上方程中解出  $p_{12}$  和  $p_{22}$  后代入式(6.34) 即得最优控制。

下面再考虑一个一阶线性系统的例子, 例子虽然简单, 但相信读者会有所裨益。

**【例 6.2】** 考虑一阶线性受控系统

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad x(0) = x_0$$

在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} Sx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [qx^2(t) + ru^2(t)] dt$$

下的最优控制, 其中:

$$S \geq 0, q > 0, r > 0$$

**【解】** 根据式(6.28), 可得出:

$$u(t) = -\frac{1}{r}p(t)x(t)$$

其中  $p(t)$  满足 Ricatti 方程及边界条件:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -2ap(t) + \frac{1}{r}p^2(t) - q \\ p(t_f) &= S \end{aligned}$$

积分以上方程得

$$\int_{p(t)}^S \frac{dp(t)}{\frac{1}{r}p^2(t) - 2ap(t) - q} = \int_t^{t_f} dt$$

即:

$$p(t) = r \frac{\frac{S}{r} - a - \frac{r}{\frac{S}{r} - a +} e^{2(t-t_f)}}{1 - \frac{\frac{S}{r} - a -}{\frac{S}{r} - a +} e^{2(t-t_f)}} \tag{6.35}$$

其中  $\quad \quad \quad = \frac{q}{r} + a^2$

将最优反馈控制律  $u(t) = - \frac{1}{r} p(t) x(t)$  代入受控对象的状态方程, 可得

$$\dot{x}(t) = (a - \frac{1}{r} p(t)) x(t) \quad x(0) = x_0$$

解以上状态方程, 可得最优轨线

$$x(t) = x(0) \exp \int_0^t (a - \frac{1}{r} p(\tau)) d\tau$$

图 6.1 分别绘出了当  $a = 1, x_0 = 1, S = 0, q = 1, t_f = 1$  时, 以  $r$  为参变量的最优控制  $u(t)$ , 最优轨线  $x(t)$  和黎卡提方程的解  $p(t)$  的变化曲线。

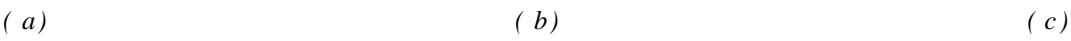


图 6.1 一阶系统的二次型最优控制

由图中可见当  $r$  较小即控制的价值不重要时, 则  $x(t)$  将迅速地衰减到零值, 但相应的控制变量幅值, 特别是在起始部分比较大。若  $r$  较大, 即考虑控制的代价较大时,  $x(t)$  衰减得较慢, 但控制幅值不大。另外, 随着  $r$  的减少,  $p(t)$  在控制区间的起始部分, 几乎是一常数, 仅仅在控制区间的最后部分才保留时变的数值。只是随着  $r$  的变大,  $p(t)$  才体现为真正时变性质。

### § 6.3 无限时间状态调节器问题

上一节所研究的有限时间状态调节器问题, 实际上只考虑了系统在有限时间内由任意初态恢复到平衡状态的行为。而在工程上更为关心的一类问题, 不但包括系统恢复到平衡态的行为, 也包括系统整个运行期间保持平衡的能力。这种问题就无法用有限时间状态调节器理论去解决了。而只能在无限时间内, 考察实际上有限时间区间内控制系统的行为。这就是对应于  $t_f = \infty$  的无限时间最优控制问题。

另外, 前面已经指出, 对有限时间状态调节的问题, 即使  $A, B, Q, R$  等都是定常的, 其最

优反馈律式(6.28)也是时变的,如[例6.2]所示。这样将使得系统的结构大为复杂,给工程实现带来困难。但由[例6.2]可见,  $\mathbf{P}(t)$  的时变部分仅出现在  $t_f$  附近,在此以前,  $\mathbf{P}(t)$  基本上不变。因此,若将  $t_f$  移到无穷远处,则  $\mathbf{P}(t)$  有可能变成常数。使得相应的最优控制系统也就转化成时不变系统。

可以证明线性定常系统无限时间状态调节器问题的以下结论:

**定理 6.1** 设线性定常受控系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.36)$$

为完全能控,二次型性能指标为:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.37)$$

其中  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  均为正定定常矩阵,  $\mathbf{u}(t)$  不受约束。则使得  $J$  为最小的最优控制存在且唯一,它可表示为:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (6.38)$$

其中  $n \times n$  维定常方阵  $\mathbf{P}$  是黎卡提代数方程:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (6.39)$$

的对称正定解。

与有限时间状态调节器问题不同,在这里我们要求系统式(6.36)是完全能控的。这是因为当系统式(6.36)为不能控且相应的不能控振型是不稳定的,同时该不能控且不稳定的振型又反映于性能指标式(6.37)中时,则无论系统如何选择  $\mathbf{u}(t)$ ,  $J$  总是无穷大,因而无法比较  $J$  的大小。从而能控性是为了保证性能指标有限而提出来的。实际上,这一能控性的要求也可以用能镇定性来代替。

另外,由于人们通常所关注的总是系统在有限时间内的响应,终端代价函数  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f)$  没有实际意义。所以在性能指标式(6.37)中  $\mathbf{S} = 0$ 。

需要指出的是,代数黎卡提方程式(6.39)是一非线性方程,它一般有多个解,而在最优控制表达式(6.38)中的  $\mathbf{P}$  只能是式(6.39)的对称正定解。

将式(6.38)代入式(6.36)中可得闭环系统状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) \quad (6.40)$$

它也是一定常系统。将式(6.38)代入式(6.37)中可得最优性能指标值

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \mathbf{x}(t) dt \quad (6.41)$$

因为  $\mathbf{Q}$  正定,  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{R}$  也为正定,因此,  $\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$  正定。若系统式(6.40)不是渐近稳定的,则必有  $\hat{J} \rightarrow \infty$ 。而另一方面因为系统式(6.36)是完全能控的,因此它必可通过式(6.38)形式的状态反馈律而镇定,使得相应的性能指标  $J$  为有限的。这样就与式(6.38)是最优控制律相矛盾。因此采用最优控制律式(6.38)所构成的闭环系统式(6.40)必定是渐近稳定的。

**【例 6.3】** 考虑[例 6.2]所示一阶线性定常系统

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad x(0) = x_0$$

在新的性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [qx^2(t) + ru^2(t)] dt$$

下的最优控制。

【解】 根据定理 6.1, 本例中最优控制

$$u(t) = - \frac{1}{r} p x(t)$$

其中  $p$  是 Ricatti 方程

$$2ap - \frac{1}{r} p^2 + q = 0$$

的正定解。该二次方程的解为：

$$p = ar \pm r \sqrt{\frac{q}{r} + a^2} \tag{6.42}$$

显然, 其中  $p = ar + r \sqrt{\frac{q}{r} + a^2}$  为正定解。

因此最优控制为状态反馈律：

$$u(t) = - \left( a + \sqrt{\frac{q}{r} + a^2} \right) x(t)$$

注意到在前面的[例 6.2]中, 因为  $a > 0$ , 故在  $p(t)$  的表达式(6.35)中令  $t_f \rightarrow \infty$ , 则同样可得到式(6.42)的结果。

【例 6.4】 考虑双积分装置的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

和性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + 2bx_1(t)x_2(t) + ax_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

式中  $a - b^2 > 0$ 。试求使性能指标  $J$  为极小值的最优控制。

对于这个问题, 我们有：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

而不等式  $a - b^2 > 0$  保证了  $\mathbf{Q}$  的正定性。

验证系统的能控性, 因为能控性矩阵

$$\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然为非奇异, 系统完全能控。又因为  $\mathbf{Q}, R$  均为正定对称矩阵, 故最优控制存在且唯一。由式(6.38)可得最优控制律

$$\begin{aligned} \hat{u} &= - R^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ &= - 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= - p_{12} x_1(t) - p_{22} x_2(t) \end{aligned}$$

其中矩阵  $\mathbf{P}$  满足黎卡提代数方程式(6.39)

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 1 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据上式可整理出关于  $p_{ij}$  的三个代数方程:

$$\begin{aligned} p_{12}^2 &= 1 \\ p_{11} - p_{12} p_{22} + b &= 0 \\ 2 p_{12} - p_{22}^2 + a &= 0 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} p_{12} &= \pm 1 \\ p_{11} &= p_{12} p_{22} - b \\ p_{22} &= \pm \sqrt{a + 2 p_{12}} \end{aligned} \quad (6.43)$$

显然,解不唯一。由于我们需要的是黎卡提代数方程的正定解  $\mathbf{P}$ ,为此,利用  $\mathbf{P}$  的正定性质,即

$$p_{11} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0 \quad (6.44)$$

确定正定阵  $\mathbf{P}$ ,首先根据式(6.44)立即可得出  $p_{22} > 0$ ,再根据式(6.43)可得

$$p_{22} = \sqrt{a + 2 p_{12}} \quad (6.45)$$

下面再用反证法证明  $p_{12} = -1$  不是所求的  $\mathbf{P}$  中的元素(即不能保证  $\mathbf{P}$  的正定性)。将  $p_{12} = -1$  代入式(6.45),得

$$p_{22} = \sqrt{a - 2} \quad (6.46)$$

因为  $p_{22}$  是实数,由上式必有  $a > 2$ 。再由式(6.43),式(6.44)和式(6.46)得出

$$p_{11} = p_{12} p_{22} - b = -\sqrt{a - 2} - b > 0 \quad (6.47)$$

由此得出

$$b < -\sqrt{a - 2} < 0 \quad (6.48)$$

将  $p_{12} = -1$ ,和式(6.46) ~ 式(6.47)代入式(6.44),可得不等式

$$-(a - 2) - b \sqrt{a - 2} > 1 \quad (6.49)$$

即

$$-b \sqrt{a - 2} > a - 1 \quad (6.50)$$

利用不等式(6.48),可以将以上不等式变成

$$b^2 > \frac{(a - 1)^2}{a - 2} = a + \frac{1}{a - 2} > a \quad (6.51)$$

即

$$b^2 > a \quad (6.52)$$

它与为保证  $\mathbf{Q}$  的正定性所确定的不等式  $a > b^2 > 0$  矛盾。因此  $p_{12} = -1$  不能保证  $\mathbf{P}$  的正定性,因而将之舍去。这样就可得到黎卡提代数方程的解为:

$$\begin{aligned} p_{12} &= 1 \\ p_{11} &= \sqrt{a + 2} - b \\ p_{22} &= \sqrt{a + 2} \end{aligned}$$

而最优控制

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= -p_{12} x_1(t) - p_{22} x_2(t) \\ &= -x_1(t) - \sqrt{a + 2} x_2(t) \end{aligned}$$

图 6.2 是最优状态反馈系统的方块图。

由图 6.2 可写出系统的闭环传递函数

$$G(s) = \frac{1/s^2}{1 + (1 + s \quad a + 2)/s^2} = \frac{1}{s^2 + s \quad a + 2 + 1}$$

闭环系统极点为：

$$_{1,2} = - \frac{a + 2}{2} \pm \frac{a - 2}{2}$$

由之可见,若  $a < 2$ , 则系统的响应将是衰减振荡的,  $a > 2$  时系统不发生振荡, 呈过阻尼响应。

线性定常系统的无限时间状态调节器, 由于相应的状态反映控制律具有线性时不变形式, 在实际工程控制系统设计中得到了广泛的应用。

在实际控制系统设计中, 也可以采用前面所介绍的尝试法逐步确定二次型性能指标中的权矩阵  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{Q}$ 。即先确定一组正定的

图 6.2 [例 6.3] 的最优状态反馈系统

权矩阵  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{Q}$ , 求解相应的二次型最优控制问题, 得出最优控制律, 然后对在这一控制律作用下闭环系统的动态响应进行计算机仿真, 如果闭环系统的控制性能不符合工程要求, 则根据实际情况, 调整  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{Q}$ , 并重新进行设计, 直至最后的闭环系统符合要求。

控制系统设计的主要工作量在于求解代数黎卡提方程式(6.39), 以得到其正定对称解  $\mathbf{P}$ 。

在矩阵运算软件 MATLAB 的控制系统工具箱中提供了求解代数黎卡提方程式(6.39) 的函数  $lqr(\cdot)$ , 它的调用格式为：

$$[K, P, E] = lqr(A, B, Q, R)$$

其中输入矩阵  $A, B, Q, R$  均是式(6.39) 中的有关矩阵, 返回的  $K$  矩阵为状态反馈矩阵  $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ ;  $P$  为代数黎卡提方程式(6.39) 的解。 $E$  为采用式(6.38) 式所示的状态反馈后, 闭环系统的特征值集合。

## § 6.4 输出调节器问题

从某种角度来看, 前面所叙述的状态调节器问题, 可以看成是输出调节器问题中整个系统状态均为系统输出的特例。输出调节器问题的一般叙述为, 已知受控对象的数学模型

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{6.53}$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  是  $m$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  是  $p$  维输出向量。设控制向量  $\mathbf{u}(t)$  不受约束, 状态为完全能观测的。寻找最优控制  $\mathbf{u}(t)$ , 使下列性能指标为最小：

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{y}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \tag{6.54}$$

其中  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  半正定,  $\mathbf{R}(t)$  正定,  $t_f$  固定。将式(6.53) 中的输出方程代入性能指标式(6.54) 可得

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt \\
& \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt
\end{aligned} \quad (6.55)$$

其中我们定义了  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}(t_f)$  和  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)$ 。由之可见, 如果我们证明了当  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  为半正定时  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  也分别为半正定, 则输出调节器问题也就可转化为等效的状态调节器问题, 于是可将状态调节器的所有研究成果, 推广到输出调节器问题之中。

因为  $\mathbf{Q}(t)$  是对称的, 所以

$$\mathbf{Q}(t)^T = [\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)]^T = \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)$$

也是对称的, 类似可证  $\mathbf{S}$  是对称的。而  $\mathbf{Q}(t)$  为半正定, 即意味着对所有  $\mathbf{y}(t)$  都成立:

$$\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) \geq 0 \quad (6.56)$$

由于系统状态为完全能观测, 因而上式对所有  $\mathbf{x}(t)$  也成立, 即  $\mathbf{Q}(t)$  也是半正定的。类似可证当  $\mathbf{S}$  为半正定时,  $\mathbf{S}$  也是半正定的。利用状态调节器的结论, 我们有:

式(6.53)和式(6.54)所定义的输出调节器的解存在且唯一, 它由下式给出:

$$\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) \quad (6.57)$$

其中  $\mathbf{P}(t)$  是下列黎卡提方程

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(t) = & -\mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \\
& - \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)
\end{aligned} \quad (6.58)$$

满足边界条件:

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}(t_f) \quad (6.59)$$

的解。

对于线性时不变系统:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)
\end{aligned} \quad (6.60)$$

设系统为完全可控和完全可观测的, 若性能指标为:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.61)$$

其中  $\mathbf{u}(t)$  不受约束,  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  都是正定常阵。令  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_1$ , 且系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{C})$  是完全可控和完全能观测的。则类似前面的分析方法, 参照状态调节器的有关结论, 不难得出这时最优控制存在且唯一, 并可由下式确定:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) \quad (6.62)$$

其中  $\mathbf{P}$  为代数黎卡提方程

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0 \quad (6.63)$$

的解。根据前面的结论可见, 最优输出调节器仍然是状态反馈控制律, 而不是输出反馈控制律。这说明了构成最优控制系统需要全部信息的本质。由于状态向量的维数  $n$  通常高于输出向量的维数  $p$ , 即  $n > p$ , 在这种情况下, 当需要从输出向量反推状态向量时, 某些状态向量不能确定。即在受控系统状态空间描述式(6.53)中的输出方程在将状态向量转换为输出向量的过程中丢失了一些信息。事实上, 输出向量仅仅反映出状态向量各分量的线性组合, 它无法提供为支配未来进程所需的全部信息, 因此, 最优控制应是状态  $\mathbf{x}(t)$  的函数。

另方面,如果受控系统不是完全能观测的,则相应于系统的不能观测的振型的那些运动,没有反映到性能指标式(6.54)中,按性能指标式(6.54)所得到的最优控制系统,就不可能保证系统的整体最优,甚至不可能保证闭环系统的渐近稳定性。因此,我们要求受控系统一定是完全能观测的。

**【例 6.5】 考虑双积分系统**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y &= [1 \quad 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^2(t) + ru^2(t)] dt$$

下的最优控制  $\hat{u}(t)$ 。

这是一个输出调节器问题,首先可以验证能控性矩阵  $\mathbf{W}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]$  和能观测性矩阵  $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T]^T$  均为非奇异,系统是完全能控和完全能观测的,最优控制存在。据式(6.62),最优控制为

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ &= -\frac{1}{r} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{r} [p_{12} x_1(t) + p_{22} x_2(t)] \end{aligned}$$

其中  $p_{ij}$  是满足式(6.63)所示的黎卡提代数方程

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{r} [0 \quad 1] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = 0 \end{aligned}$$

的正定对称阵。将以上方程展开整理,可得出关于  $p_{ij}$  的三个代数方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} p_{12}^2 &= 1 \\ p_{11} - \frac{1}{r} p_{12} p_{22} &= 0 \\ 2 p_{12} - \frac{1}{r} p_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

为保证矩阵  $\mathbf{P}$  的正定性,根据矩阵正定性的 Sylvester 判据,黎卡提方程的解  $\mathbf{P}$  中的元素必须满足

$$p_{11} > 0, \quad p_{11} p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

根据这一原则,利用在[例 6.3]中所采用的推导过程类似的方法,可得出保证  $\mathbf{P}$  为正定的解是

$$p_{12} = r^{\frac{1}{2}}, \quad p_{22} = 2 r^{\frac{3}{4}}, \quad p_{11} = 2 r^{\frac{1}{4}}$$

由之可得最优控制

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= -\frac{1}{r} [p_{12} x_1(t) + p_{22} x_2(t)] \\ &= -r^{-\frac{1}{2}} x_1(t) - 2 r^{-\frac{1}{4}} x_2(t) \end{aligned}$$



代入受控对象的状态方程,可得闭环系统的状态方程为:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{-\frac{1}{2}} & 2r^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} -r^{-\frac{1}{2}} & -2r^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

可以求得闭环系统的传递函数

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2r^{-\frac{1}{4}}s + r^{-\frac{1}{2}}}$$

它的两个闭环极点是:

$$s_{1,2} = -\frac{2}{2}r^{-\frac{1}{4}} \pm jr^{-\frac{1}{4}}$$

可以看出,不论加权系数  $r$  值的大小如何,最优闭环系统的阻尼系数均为  $\zeta = \frac{2}{2} = 0.707$ 。

**【例 6.6】** 考虑用能控规范型表示的单输入单输出系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] x\end{aligned}$$

在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [y^2(t) + ru^2(t)] dt$$

下的最优控制。

因为状态方程具有能控规范型的形式,系统完全能控,经验证系统也是完全能观测的,对于  $r > 0$ ,最优控制存在。由式(6.62) 最优控制为:

$$\begin{aligned}u(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ &= -\frac{1}{r} [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{r} [p_{1n}x_1(t) + p_{2n}x_2(t) + \dots + p_{nn}x_n(t)] \\ &= -\frac{p_{1n}}{r} x_1(t) - \frac{p_{2n}}{r} x_2(t) - \dots - \frac{p_{nn}}{r} x_n(t)\end{aligned}$$

其中  $\mathbf{P}$  是黎卡提矩阵代数方程式(6.63) 的解。最优闭环系统的状态方程是

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & W & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \frac{p_{1n}}{r} & \frac{p_{2n}}{r} & \dots & \frac{p_{nn}}{r} \end{bmatrix} \mathbf{x}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - a_0 - \frac{p_{1n}}{r} - a_1 - \frac{p_{2n}}{r} - a_2 - \frac{p_{3n}}{r} \dots - a_{n-1} - \frac{p_{nn}}{r}$$

闭环系统的传递函数

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{1}{s^n + a_{n-1} + \frac{p_{nn}}{r} s^{n-1} + \dots + a_1 + \frac{p_{2n}}{r} s + a_0 + \frac{p_{1n}}{r}}$$

最优闭环系统特征多项式为

$$k(s) = s^n + a_{n-1} + \frac{p_{nn}}{r} s^{n-1} + \dots + a_1 + \frac{p_{2n}}{r} s + a_0 + \frac{p_{1n}}{r}$$

注意到原受控对象的开环特征多项式为

$$(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

可见输出调节器通过状态反馈改变了闭环系统的极点分布, 达到使得二次型性能指标为最小的目的。

## § 6.5 跟踪问题

跟踪问题是控制工程中所关心的另一类问题, 它的目的是使系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  紧紧跟随期望输出(参考输入)  $\mathbf{r}(t)$ 。换句话说, 我们在这里所指的跟踪问题是寻找最优控制  $\mathbf{u}(t)$ , 使得系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  在所关心的区间内尽量接近所希望的轨线  $\mathbf{r}(t)$ , 并使某种性能指标为最小。

前面我们讨论了状态调节器问题和输出调节器问题, 从另一个角度来看, 它也可以看成是一种特殊的跟踪问题, 即期望状态或期望输出为零的跟踪问题, 关于这一点, 我们在第 6.1 节中已有介绍。而对于跟踪问题, 也可以通过变换将它化成等效的状态调节器问题, 从而用调节器的设计方法求出它的最优控制规律。

我们下面将先讨论当期望输出是一个非零的常数时的跟踪问题(也称非零给定值的调节器问题), 继而讨论期望输出随时间变化时的跟踪问题。

### 6.5.1 非零给定值时的输出调节器问题

在前面讨论调节器问题时, 总是认为期望输出即系统的参考输入是零。如果参考输入是非零的常数, 就构成了非零给定值的调节器问题。它也可以看成参考输入是一常数的跟踪问题。

考虑线性定常受控对象

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \tag{6.64}$$

其中  $\mathbf{x}$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  是  $m$  维控制向量,  $\mathbf{y}$  是  $p$  维输出向量。设系统的参考输入  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  为一  $p$  维定常实向量。显然, 如果系统能在稳态时实现输出  $\mathbf{y}$  与  $\mathbf{r}_0$  的一致, 则稳态时状态空间描述式(6.64)中各量应当满足:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{Cx}_0 \tag{6.65}$$

$$0 = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Bu}_0 \tag{6.66}$$

由以上两式解出  $\mathbf{u}_0$ , 该控制向量  $\mathbf{u}_0$  即可将系统维持在  $\mathbf{y} = \mathbf{r}_0$  的稳态值上。根据以上的稳态值  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{y} = \mathbf{r}_0$ , 定义偏差:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0, \quad \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0, \quad \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{r}_0 \quad (6.67)$$

注意到式(6.64) ~ 式(6.67), 则显然  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  和  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  也可用与状态空间方程式(6.64)一致的形式来描述:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

将描述偏差量系统的状态空间方程式(6.68) 看作受控对象, 考虑二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\hat{\mathbf{y}}^T(t) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{y}}(t) + \hat{\mathbf{u}}^T(t) \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}(t)] dt \quad (6.69)$$

的最优控制问题, 则将非零给定值的输出调节器问题, 化成了前面讨论了的零值给定的输出调节器问题。利用式(6.62) 和式(6.63) 可知, 最优输出调节器为:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (6.70)$$

式中  $\mathbf{P}$  是黎卡提矩阵代数方程

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0 \quad (6.71)$$

的正定解。

当系统式(6.64) 是完全能控且完全能观测时, 最优控制闭环系统

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} \quad (6.72)$$

是渐近稳定的。这时成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0] = 0$$

即稳态时有  $\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{r}_0$ , 也就是说, 系统的输出能达到并保持在给定值  $\mathbf{r}_0$ 。

因为状态方程描述式(6.68) 与式(6.64) 的一致性, 显然可以利用输出调节器问题的求解方法, 直接根据原受控对象的状态空间描述式(6.64) 和二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (6.73)$$

确定式(6.70) 所示的最优状态反馈控制律中的反馈增益矩阵  $\mathbf{K}$ 。根据偏差系统的最优控制律式(6.70) 和偏差的定义式(6.67), 可以得出关于原受控对象(6.64) 的最优控制律:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0 \quad (6.74)$$

令  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0$ , 则式(6.74) 可写成

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}_0 \quad (6.75)$$

可见当系统的期望输出  $\mathbf{r}_0 = 0$  时, 最优控制  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  由两部分组成, 一部分等于状态的负反馈  $-\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$ , 它可以根据  $\mathbf{r}_0 = 0$  时所对应的输出调节器问题确定, 另一部分是常向量  $\mathbf{u}_0$ , 它是使得系统输出在到达稳态时保持在  $\mathbf{r}_0$  所必需的。

将式(6.75) 代入受控对象的状态空间方程式(6.64), 得最优闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (6.76)$$

因为闭环系统是渐近稳定的, 它在稳态时的状态  $\mathbf{x}_0$  必然满足

$$0 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (6.77)$$

由于  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  的所有特征值都具有负实部,  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  非奇异, 由上式可得

$$\mathbf{x}_0 = -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_0 \quad (6.78)$$

因为在稳态时系统输出  $y$  等于期望输出  $r_0$ , 即

$$y(\infty) = Cx_0 = r_0 \tag{6.79}$$

将式(6.78) 两边同乘以  $C$ , 并代入式(6.79) 可得

$$r_0 = - C(A - BK)^{-1} Bu_0 \tag{6.80}$$

根据式(6.80) 即可解出常向量  $u_0$ 。

因为  $C$  是  $p \times n$  维矩阵,  $B$  是  $n \times m$  维矩阵, 当  $y$  的维数  $p$  少于  $u$  的维数  $m$ , 即  $p < m$  时, 式(6.80) 有无数个解, 任取其中之一即可得  $u_0$ 。反过来如果  $p > m$ , 则式(6.80) 一般无解。我们下面考虑  $p = m$ , 且  $C(A - BK)^{-1} B$  非奇异的情况。这时由式(6.80) 可得

$$u_0 = - [C(A - BK)^{-1} B]^{-1} r_0 \tag{6.81}$$

我们也可以从另一角度推出式(6.81)。最优闭环系统式(6.76) 的传递函数矩阵为

$$W_k(s) = C(sI - A + BK)^{-1} B \tag{6.82}$$

由于系统在稳态时输出  $y(\infty) = r_0$ , 根据拉氏变换终值定理有

$$\begin{aligned} y(\infty) = r_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} sW_k(s) \cdot \frac{u_0}{s} = W_k(0) u_0 \\ &= C(-A + BK)^{-1} Bu_0 = - C(A - BK)^{-1} Bu_0 \end{aligned} \tag{6.83}$$

根据式(6.83), 在  $p = m$ , 且  $W_k(0)$  非奇异时, 式(6.81) 也可重写为:

$$u_0 = W_k^{-1}(0) r_0 = - [C(A - BK)^{-1} B]^{-1} r_0 \tag{6.84}$$

代入式(6.75) 可得出在非零给定值时, 最优输出调节器为:

$$\dot{u}(t) = - Kx(t) + W_k^{-1}(0) r_0 \tag{6.85}$$

当  $r_0 = 0$  时,  $\dot{u}(t) = - Kx(t)$  与输出调节器的结果式(6.62) 一致。改变给定值  $r_0$ , 只要改变式(6.85) 后面一项即可。换句话说, 当给定  $r_0 \neq 0$  时, 最优输出调节器只需增加一项  $W_k^{-1}(0) r_0$ 。

上面的推导虽然只是针对无限时间输出调节器问题进行的, 但对在非零给定值下其它最优控制问题也可类似的推导。进一步, 这种非零给定值下的状态反馈控制律, 对任何使得闭环系统为渐近稳定的控制律都是适用的。

**【例 6.7】** 已知二阶受控系统的状态空间方程

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t) \end{aligned}$$

设系统的期望输出  $r_0 = 1$ , 试确定相应的最优输出调节器。

在输出调节器的性能指标式(6.61) 中, 选  $Q = 1$ ,  $R = 1$ , 根据式(6.71) 构造本例的黎卡提代数方程

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 1 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 20 \end{bmatrix} [0 \quad 20] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{0} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

简化整理后可得:

$$\begin{aligned} 400 p_{12}^2 - 1 &= 0 \\ 400 p_{12} p_{22} - p_{11} + 2 p_{12} &= 0 \end{aligned}$$

$$400 p_{12}^2 + 4 p_{22} - 2 p_{12} = 0$$

解这些方程,可得出正定解

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{6.63}{20} & 0.05 \\ 0.05 & \frac{4.63}{400} \end{bmatrix}$$

最优反馈增益阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = [0 \quad 20] \begin{bmatrix} \frac{6.63}{20} & 0.05 \\ 0.05 & \frac{4.63}{400} \end{bmatrix} \\ &= 1 \quad \frac{4.63}{20} \end{aligned}$$

根据式(6.84)可计算出

$$\begin{aligned} u_0 &= - [\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B}]^{-1} r_0 \\ &= - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4.63}{20} & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= - [1 \quad 0] \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -6.63 & -1 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

故根据式(6.75),所求的最优控制律为:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= -1 \quad \frac{4.63}{20} \mathbf{x}(t) + 1 \\ &= 1 - x_1(t) - \frac{4.63}{20} x_2(t) \end{aligned}$$

非零给定值的最优输出调节器问题也可以采用下面要介绍的跟踪问题的方法求解。

## 6.5.2 线性时变系统的跟踪问题

考虑线性时变受控对象

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{y}$  分别是  $n$  维状态向量,  $m$  维输入向量和  $p$  维输出向量。

已知系统的初始状态

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.86)$$

设  $\mathbf{r}(t)$  是系统的  $p$  维期望输出,定义跟踪误差

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \quad (6.87)$$

则跟踪问题为:求最优控制  $\mathbf{u}(t)$ ,使系统式(6.85)的实际输出  $\mathbf{y}(t)$  跟踪期望输出  $\mathbf{r}(t)$ ,并使以下二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (6.88)$$

取极小值,其中  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{Q}(t)$  是半正定阵,  $\mathbf{R}(t)$  是正定阵。

根据式(6.85)和式(6.87)可以将性能指标式(6.88)写成:

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f) \\ + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt \quad (6.89)$$

引入  $n$  维协态向量  $\lambda(t)$ , 构成哈密顿函数:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t)]^T \mathbf{Q}(t) [\mathbf{r}(t) - \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t)] + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \\ + \lambda^T(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)] \quad (6.90)$$

利用最小值原理, 最优控制应使  $H$  取极小值。由于对  $\mathbf{u}$  无约束, 可以通过

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t) \lambda(t) = 0$$

解出最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \lambda(t) \quad (6.91)$$

确定  $\mathbf{x}(t)$  和  $\lambda(t)$  的规范方程组为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}^*(t) \\ = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \lambda(t) \quad (6.92)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) \\ = -\mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t) \lambda(t) + \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}(t) \quad (6.93)$$

边界条件为式(6.86) 和

$$\lambda(t_f) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{e}(t_f) \\ = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{C}(t_f) \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{r}(t_f) \quad (6.94)$$

注意到在期望输出是非零常数的情况下, 最优控制律式(6.75) 是在输出调节器的最优控制律式(6.62) 的基础上, 增加一常向量  $\mathbf{u}_0$ , 我们可以认为当期望输出  $\mathbf{r}(t)$  是时间的函数时, 最优控制律应该具有形式

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \lambda(t) \\ = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) [\mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t)] \quad (6.95)$$

或者说, 协态向量  $\lambda(t)$  具有形式

$$\lambda(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t) \quad (6.96)$$

其中  $\mathbf{P}(t)$  是待求的  $n \times n$  维矩阵,  $\mathbf{g}(t)$  是一个与  $\mathbf{r}(t)$  有关的  $n$  维向量。事实上, 根据规范方程组式(6.92) ~ 式(6.93), 我们也可以证明  $\lambda(t)$  和  $\mathbf{P}(t)$  之间满足式(6.96) 的关系。

显然, 为了确定最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$ , 必须首先确定  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{g}(t)$ , 为此, 将式(6.96) 对时间  $t$  求导, 并将状态方程(6.92) 代入, 得

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t) \\ = \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{P}(t) [\mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \lambda(t)] - \dot{\mathbf{g}}(t) \\ = [\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t) \\ + \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{g}(t) - \dot{\mathbf{g}}(t) \quad (6.97)$$

另一方面, 将式(6.96) 代入协态方程式(6.93) 后, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) = & [-\mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) \\ & + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{g}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (6.98)$$

由式(6.97)和式(6.98)中消去  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ , 可得

$$\begin{aligned} & [\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{x}(t) \\ & = \mathbf{g}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) - [\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) - \mathbf{A}^T(t)]\mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (6.99)$$

上式左端是一时变矩阵与状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的乘积, 右端则是时间的函数, 要使式(6.99)对任意  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{g}(t)$  和  $\mathbf{r}(t)$  均成立, 必须有

$$\mathbf{P}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{C}(t) \quad (6.100)$$

$$\mathbf{g}(t) = -[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]^T\mathbf{g}(t) - \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) \quad (6.101)$$

这就是矩阵  $\mathbf{P}(t)$  和向量  $\mathbf{g}(t)$  应满足的微分方程。根据式(6.96), 有

$$\dot{\mathbf{x}}(t_f) = \mathbf{P}(t_f)\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{g}(t_f) \quad (6.102)$$

将上式与式(6.94)比较, 可得出方程式(6.100)和式(6.101)的边界条件分别为

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{C}(t_f) \quad (6.103)$$

$$\mathbf{g}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{r}(t_f) \quad (6.104)$$

根据以上边界条件, 分别由式(6.100)和式(6.101)解出  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{g}(t)$ , 再代入式(6.95)即可求得跟踪问题的解。将最优控制律式(6.95)代入受控对象状态方程式(6.85)可得最优闭环系统的状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (6.105)$$

根据初始条件式(6.86)求解以上闭环系统状态方程即可得出最优轨线  $\mathbf{x}^*(t)$ 。

可以证明对于最优性能指标以下关系式成立:

$$\hat{J} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{g}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \phi(t_0) \quad (6.106)$$

其中函数  $\phi(t)$  应满足以下微分方程和边界条件:

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{r}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t) - \mathbf{g}^T(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (6.107)$$

$$\phi(t_f) = \mathbf{r}^T(t_f)\mathbf{P}(t_f)\mathbf{r}(t_f) \quad (6.108)$$

根据以上的推导, 可以归纳出最优跟踪控制器的设计算法如下:

最优跟踪控制器设计算法

条件: 已知受控系统的状态空间描述式(6.85)和状态初始值式(6.86), 终端时间  $t_f$  和系统期望输出  $\mathbf{r}(t)$ 。要求确定线性二次型最优状态反馈控制律, 使闭环系统输出尽可能地与期望输出  $\mathbf{r}(t)$  一致, 整个闭环系统  $\mathbf{y}(t)$  的控制品质满足工程要求。

(1) 根据对闭环系统的要求和工程经验, 选择加权矩阵  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{Q}(t)$ , 构造出如式(6.88)所示的二次型性能指标。

(2) 根据受控系统状态空间描述式(6.85)中的  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  等矩阵和权矩阵  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  等, 分别构造如式(6.100)形式的黎卡提方程和式(6.101)形式的向量微分方程, 并根据式(6.103)和式(6.104)所提供的边界条件, 利用相应的数值求解方法, (在简单的情况下, 也可以用直接求解方法) 得出  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{g}(t)$ 。

(3) 根据  $\mathbf{P}(t)$  和  $\mathbf{g}(t)$ , 得出最优控制:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(t) &= -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)[\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{g}(t)] \\ &= -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t)\end{aligned}\quad (6.109)$$

(4) 求解最优闭环系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t) \quad (6.110)$$

得出最优轨线  $\mathbf{x}(t)$ 。

(5) 验证闭环系统的输出  $\mathbf{y}(t)$  与期望输出  $\mathbf{r}(t)$  之间的接近程度和控制量的幅值或能量是否满足工程要求。如果不满足, 则根据具体情况, 改变权矩阵  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{S}$ , 并返回到第(2)步, 重新开始设计。

将最优控制律式(6.109)和黎卡提方程式(6.100)与输出调节器情况下的最优控制律式(6.57)及黎卡提方程式(6.58)相比较, 可以看出跟踪问题的最优控制律由两部分组成, 其中状态反馈部分与最优输出调节器完全一致, 与系统的期望输出  $\mathbf{r}(t)$  无关, 这也就是说, 最优跟踪控制的闭环系统特征值与最优输出调节器的闭环系统特征值完全相同, 因而其动态性能也与期望输出  $\mathbf{r}(t)$  无关。

最优跟踪控制系统和最优输出调节器之间的本质差异, 表现在式(6.109)中的  $\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{g}(t)$  这一项。其中  $\mathbf{g}(t)$  是由非齐次微分方程式(6.101)和边界条件式(6.104)所确定的。比较式(6.101)与式(6.105), 可见它们齐次部分的系数矩阵, 一个是  $-\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)$  另一个是  $[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]$ , 即互为负的转置阵。因此, 两个状态方程具有对偶形式。因为  $[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{P}(t)]$  与期望输出  $\mathbf{r}(t)$  无关, 所以方程式(6.101)和动态性能也与期望输出  $\mathbf{r}(t)$  无关。正因为如此, 我们可以把系统的期望输出  $\mathbf{r}(t)$  看成是加给动态系统的驱动函数, 用以激励信号  $\mathbf{g}(t)$ 。

由于方程式(6.101)的边界条件是终端条件, 为了计算  $\mathbf{g}(t)$  的现在值, 必须知道期望输出  $\mathbf{r}(t)$  的全部未来值。进一步由于最优控制律式(6.109)包含有  $\mathbf{g}(t)$ , 所以最优控制的现在值, 也依赖于期望输出的全部未来值。这样就使得最优跟踪的实现, 关键在于预先掌握期望输出  $\mathbf{r}(t)$  的全部变化规律。这在有些时候是可能的; 例如在控制数控机床或机器人按预定的轨道运动时。但是在相当多的实际系统中, 期望输出  $\mathbf{r}(t)$  的变化规律有时难以事先确定。针对这一情况, 在设计最优跟踪控制系统时, 可采用两种处理办法; 一种是以期望输出的未来值的“预估值”代替期望输出未来值的实际值, 这样所实现的跟踪系统的最优程度取决于“预估值”与实际值是否相符; 二是把预期输出看成是随机的, 这时我们是将确定性问题作为随机性问题处理, 因此设计的跟踪系统将是“平均”意义下的最优系统, 但不能保证任一次试验下系统的响应都是满意的。

**【例 6.8】** 已知一阶受控系统的状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t)\end{aligned}$$

其中控制  $u(t)$  不受约束。设期望输出为  $r(t)$ , 跟踪误差  $e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - x(t)$ 。试求最优控制  $\hat{u}(t)$  使性能指标

$$J = \frac{1}{2} S e^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [Q e^2(t) + R u^2(t)] dt$$

取极小值。其中,  $S \geq 0$ ,  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$ 。

根据式(6.109), 所求的最优控制为:



$$\dot{x}(t) = \frac{1}{R}[g(t) - P(t)x(t)]$$

其中  $P(t)$  和  $g(t)$  分别满足微分方程

$$\dot{P}(t) = -2aP(t) + \frac{1}{R}P^2(t) - Q$$

$$P(t_f) = S$$

$$\dot{g}(t) = -a - \frac{1}{R}P(t)g(t) - Qr(t)$$

$$g(t_f) = Sr(t_f)$$

最优轨线  $x(t)$  满足最优闭环系统状态方程

$$\dot{x}(t) = a - \frac{1}{R}P(t)x(t) + \frac{1}{R}g(t)$$

图 6.3(a) 表示当  $a = -1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $S = 0$ ,  $Q = 1$  和  $t_f = 1$  情况下, 当期望输出为阶跃函数即  $r(t) = 1, t \geq 0$  时, 以  $R$  为参变量的最优跟踪系统的一组响应曲线。由图可见, 随着  $R$

(a) (b) (c)  
图 6.3 当  $r(t) = 1$  时最优跟踪系统的时间响应

的减少, 系统的跟踪能力增强。此外在控制区间的终端  $t_f$  附近, 跟踪误差又复回升, 这是由于  $S = 0$ ,  $g(t_f) = 0$ ,  $P(t_f) = 0$  导致  $u(t_f) = 0$  的缘故。

图 6.3(b) 为  $g(t)$  的一组响应曲线, 由图可见, 随着  $R$  的减少,  $g(t)$  在控制区间的开始阶段几乎保持恒定, 但由于  $S = 0$ , 故  $g(t)$  随后逐渐下降至零。

图 6.3(c) 是最优控制  $u(t)$  的一组响应曲线, 由图可见随着  $t$  的增加, 在  $t_f$  附近  $u(t)$  将衰减至零, 这也是在终端附近跟踪误差较大的原因。

图 6.4 表示最优跟踪系统在  $a = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $S = 0$ ,  $Q = 1$  和  $t_f = 5$  情况下, 当期望输

图 6.4 当  $r(t) = 2\sin 4t$  时最优跟踪系统的响应曲线

出按正弦  $r(t) = 2\sin 4t, t \geq 0$  变化时的一组响应曲线。由图可见,当  $R$  很小时,在经历一短暂的初始阶段之后,系统实际输出  $y(t)$  将跟随  $r(t)$  按正弦规律变化,且无明显相移。随着  $R$  的加大,系统的跟踪能力越来越差,反倒象一个调节器系统。

# 习 题

6.1 考虑一阶系统  $\dot{x} = -u, x(0) = 3$ , 试求它在二次型性能指标

$$J = x^2(5) + \frac{1}{2} \int_0^5 u^2(t) dt$$

下的最优控制。

6.2 考虑双积分装置

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

下的最优控制。

6.3 设二阶系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

二次型性能指标为:

$$J = \frac{1}{2} [x_1^2(t_f) + g x_1(t_f) x_2(t_f) + h x_2^2(t_f)] + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + m x_1(t) x_2(t) + n x_2^2(t) + u^2(t)] dt$$

试证明使得最优控制  $u(t)$  仅是  $x_1(t)$  的函数的充分必要条件是  $a = g = m = 0$ , 并阐明其物理意义。

6.4 推导线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

在二次型性能指标

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)] dt$$

下的最优控制律, 黎卡提方程和边界条件。

6.5 考虑线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

确定使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x_1^2(t) + q x_2^2(t) + r u^2(t)] dt, \quad q > 0, r > 0$$

为最小的最优控制, 分别针对

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$a_0 = 0, a_1 = -1$$

$$a_0 = 2, a_1 = 3$$

等三种情况

- (a) 描绘当  $r = 1$  和  $r = 0.1$  时,当  $q$  变化时最优闭环系统极点的轨迹。
- (b) 描绘当  $q = 1$  和  $q = 0.1$  时,当  $r$  变化时最优闭环系统极点的轨迹。
- (c) 作出关于系统特性的结论。

### 6.6 设有三阶系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试求在二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x_1^2(t) + 0.1 x_2^2(t) + 0.1 u^2(t)] dt$$

下的最优控制律,并写出相应的黎卡提代数方程。

### 6.7 考虑二阶系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

设参考输入  $r = a$ (常数),试求使得性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(y(t) - r)^2 + u^2(t)] dt$$

为最小的最优控制  $u(t)$ 。

# 第七章 动态规划

动态规划是一类适用范围很广的动态最优化方法,它是美国学者贝尔曼在 1957 年首先提出来的。在多级决策过程的寻优中,动态规划是一种很有效的方法。

动态规划的核心是贝尔曼最优性原理,它的基本思想是将一个多级的决策问题转化成一系列单级决策问题,然后从最后一级开始逆向递推至初始状态为止。动态规划既可用于求解在约束条件下的函数极值问题,也可用于求解约束条件下的泛函极值问题,对于解线性离散时间系统二次型性能指标最优控制问题特别有效。动态规划的连续形式,不仅本身是连续系统最优控制问题的一类有效求解方法,而且在理论上与变分法和最小值原理相辅相成,进一步促进了最优控制问题的研究。

## § 7 .1 最优性原理

多级决策过程是指这样一个过程,即按时间或空间顺序可以将过程分解为若干级,如图 7 .1 所示。

对于该过程中的任意一段,如  $k + 1$  段必须作出相应的决策  $u_k$ ,才能确定这一段输入状态  $x_k$  和输出状态  $x_{k+1}$  之间的关系。在选择好每一段的决策  $u_j, j = 0, 1, \dots, N - 1$  后,整个过程的状态转移,即由  $x_0$  转移到  $x_1$ ,再转移到  $x_2, \dots$ ,一直转移到  $x_N$  的过程也就完全确定了。

在多级决策过程中,每一级的输出状态(如第  $k + 1$  级的  $x_{k+1}$ ) 都仅与该级的“决策”(  $u_k$  ) 及该级的输入状态(  $x_k$  ) 有关。而与前面各级的“决策”及状态转移规律无关。这种特有性质,称为无后效性。

作为动态规划的粗浅介绍,我们来考虑一个赛车决策的问题。规定的赛车方法是:选手们都从  $S$  站出发,到  $F$  站终止,如图 7 .2(  $a$  ) 所示,比赛路程分四段,虽然在最后一段选手们都必

图 7 .1 多级决策过程

(  $a$  )

(  $b$  )

图 7 .2 赛车问题

须到达终点即  $F$  站,但在第一、二、三段选手们可以选择不同的检查站。各检查站之间的行车时间如图 7.2(a) 所示。选手的目的是规划一条由  $S$  到  $F$  的行车路线,使总的行车时间为最小。为得到行车时间最小的路线,选手在路程的前三段要作出三次决策。如在  $S$  点,选手要在  $x_1(1)$  和  $x_2(1)$  中作一选择,而在  $x_1(1)$  站或  $x_2(1)$  站,又要对下一步经过  $x_1(2)$  还是  $x_2(2)$  作一选择,如此类推。由图可见,到达各站后选手可以选择的决策至多有两个。

这是一个四级决策过程,解决这一问题最直观的方法是穷举法,即寻找出由  $S$  到  $F$  的所有可能路线,这些共有  $2^{4-1} = 8$  条,计算出每条路线的行车时间,然后,选择其最小者。但是这种方法计算工作量大,并且当决策级数  $n$  增加时,计算工作量将以指数形式增加。

另外一种方法是由最后一段开始,分段逆向递推出各中间站到终点的最小时间,同时得到各级相应的决策。

本例中最后一段没有选择余地,如图可知,若以  $\hat{J}[x_1(3)]$  和  $\hat{J}[x_2(3)]$  分别表示由  $x_1(3)$  和  $x_2(3)$  到达  $F$  的最小时间,则有:

$$\hat{J}[x_1(3)] = 4 \quad \hat{J}[x_2(3)] = 3$$

我们在相应于  $x_1(3)$  的圆上标注 4,在  $x_2(3)$  的圆上标注 3,并以箭头表示相应的决策,如图 7.2b 所示。再来讨论倒数第二段,若由  $x_1(2)$  出发,则到  $F$  有两条路线,即  $x_1(2) x_1(3) F$  和  $x_1(2) x_2(3) F$ ,它们相应的时间为

$$\begin{aligned} J[x_1(2) x_1(3) F] &= 1 + \hat{J}[x_1(3)] = 5 \\ J[x_1(2) x_2(3) F] &= 1 + \hat{J}[x_2(3)] = 4 \end{aligned}$$

比较后可知由  $x_1(2)$  到  $F$  的最短时间  $\hat{J}[x_1(2)] = 4$  和相应的决策  $x_1(2) x_2(3) F$ ,我们同样在相应于  $x_1(2)$  的圆圈内标注最小时间 4,并以箭头表示相应的决策。类似地分析由  $x_2(2)$  到  $F$  的两条路线  $x_2(2) x_1(3) F$  和  $x_2(2) x_2(3) F$ ,可得出自  $x_2(2)$  出发到  $F$  的最小时间  $\hat{J}[x_2(2)] = 5$  及最优决策  $x_2(2) x_2(3) F$ 。我们同样在  $x_2(2)$  的圆上标注最小时间 5 和以箭头表示相应的决策。

类似地,由  $x_1(1)$  站出发,则为计算从  $x_1(1)$  到  $F$  的最小时间,只须比较:

$$\begin{aligned} \text{路线 } x_1(1) x_1(2) x_2(3) F: \quad J[x_1(1) x_1(2) x_2(3) F] &= 6 + \hat{J}[x_1(2)] = 10 \\ \text{路线 } x_1(1) x_2(2) x_2(3) F: \quad J[x_1(1) x_2(2) x_2(3) F] &= 6 + \hat{J}[x_2(2)] = 11 \end{aligned}$$

得出  $\hat{J}[x_1(1)] = 10$ , 和相应的决策  $x_1(1) x_1(2) x_2(3) F$ 。并在圆上标注。

依次类推,可以算出自  $S$  点出发到终点  $F$  的最小时间和相应的最优决策。由图 7.2(b) 可见,最优决策和最小代价分别为路线  $Sx_2(1) x_1(2) x_2(3) F$  和  $\hat{J}(S) = 13$ 。

这种寻找最优路线的方法称为动态规划法。它的解题思路是:为找到由  $S$  到  $F$  的最优路线,我们从  $F$  开始依次找出各站到  $F$  的最优路线,从而使得最优路线自然的包含在其中了。就本例来说,由于将一个复杂的需要一次同时确定四级决策问题的过程,分解成四个简单的分别只需确定一级决策的过程,从而使求解过程大大简化。总共只需 10 次加法即可完成,而穷举法则需要 24 次加法。一般来说,  $n$  级的决策过程,采用穷举法需要进行  $(n - 1)2^{n-1}$  次加法,而采用动态规划法只需  $4(n - 2) + 2$  次加法,  $n$  越大计算量相差越悬殊。

动态规划法将一个复杂的多级决策过程分解成一系列易于求解的单级决策过程,然后从

最后一级开始采用逆推方法,通过计算、比较各级相应的性能指标,将逐个单级决策延伸而得出整体决策。这种将一个复杂的难以直接处理的多级决策问题转化为一系列单级决策的简单问题来处理的方法,在数学上称之为“嵌入原理”。除了便于求解以外,这种方法还可以大大丰富解的内容。

动态规划法是一种特别适用于直接利用计算机进行计算的方法。

仔细观察图 7.2( b) 可见,最优路线  $Sx_2(1) x_1(2) x_2(3) F$  的一部分如  $x_1(2) x_2(3) F$  也是自  $x_1(2)$  站出发的最优路线。它反映了一种规律性,这就是著名的最优性原理。

定理 7.1 最优性原理

一个  $N$  级的决策过程  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  的最优策略  $\{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  具有这样的特点,即不论初始状态  $x_0$  和初始决策  $u_0$  如何,若以  $u_0$  和  $x_0$  所形成的状态  $x_1$  作为初态来考虑,则最优策略的子策略  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  对于余下的  $N - 1$  级决策过程  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  来说,也必构成一个最优策略。

证明: 设决策序列  $\hat{u}_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ , 是使性能指标取最小值的最优决策序列, 即  $\{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  是最优策略, 相应的最优性能指标记为  $\hat{J}(x_0, \hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1})$ 。

用反证法, 设在  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  区间的子序列  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  不是最优策略, 则在同一区间, 必存在另一个决策序列  $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{N-1}\}$ , 它相应的性能指标比  $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  要小, 即

$$J(x_1, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{N-1}) < J(x_1, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1})$$

定义决策序列  $\{\hat{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{N-1}\}$ , 则它与最优决策序列  $\{\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$  相比, 前者在决策级 0 与后者的性能指标的值相同, 但在决策级  $1, 2, \dots, N - 1$  所对应的性能指标比后者小, 因而导致

$$\hat{J}(x_0, \hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1}) > J(x_0, \hat{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{N-1})$$

与原假设  $\hat{J}(x_0, \hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N-1})$  是取极小值的最优性能指标矛盾。最优性原理得证。

从最优轨线的角度来看, 最优性原理也可以表述为, 最优轨线的一部分必为最优轨线。

最优性原理不但适于离散决策过程, 还适用于连续决策过程。

在前面赛车决策问题中, 从某站  $x(k)$  出发, 由不同决策所导致的下一站(下一个状态)  $x(k + 1)$  的变化规律, 及相应的性能指标值, 都是用图解的方法直观地给出的。一般说来, 在决策作用下的状态演化规律及相应的性能指标, 均可以用解析形式给出。

离散时间系统的最优控制问题是一个典型的多级决策问题。它要求我们逐级作出决策, 选择最优控制, 完成从初始状态到终端状态的转移, 并使系统的性能指标为极小。

下面, 我们讨论利用动态规划解离散时间系统的最优控制问题。设离散系统的状态方程为:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)], \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.1}$$

其中  $\mathbf{x}(k)$  是  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}(k)$  为  $m$  维控制向量。这一系统的控制问题显然也可看成一个多级决策过程。设系统的初始状态为  $\mathbf{x}(k)$ , 则在控制向量  $\mathbf{u}(k)$  (看作一次决策) 的作用下, 状态将转移到  $\mathbf{x}(k + 1)$ 。

设离散时间的最优控制问题为: 寻找最优控制序列  $\{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N - 1)\}$ , 使性能指标

$$J = [ \mathbf{x}(N) ] + \sum_{k=0}^{N-1} [ \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k) ] \quad (7.2)$$

为最小。我们在前面介绍了解这类最优控制问题的离散时间最小值原理。显然，这一问题也可以看成是一个  $N$  级决策过程，从而也可利用动态规划来解。设由  $\mathbf{x}(0)$  出发的性能指标式 (7.2) 最优值为：

$$\hat{J}[\mathbf{x}(0)] = \min_{\mathbf{u}(0)} \min_{\mathbf{u}(1)} \dots \min_{\mathbf{u}(N-1)} [ \mathbf{x}(N) ] + \sum_{k=0}^{N-1} [ \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k) ] \quad (7.3)$$

类似定义以  $\mathbf{x}(i)$  为初态的性能指标最优值为：

$$\hat{J}[\mathbf{x}(i)] = \min_{\mathbf{u}(i)} \min_{\mathbf{u}(i+1)} \dots \min_{\mathbf{u}(N-1)} [ \mathbf{x}(N) ] + \sum_{k=i}^{N-1} [ \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k) ] \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.4)$$

对于无预响应的动态系统式 (7.1) 来说， $\mathbf{u}(k)$  能够影响  $k$  时刻以后的状态  $\mathbf{x}(k+1), \mathbf{x}(k+2), \dots, \mathbf{x}(N)$ ，但不能影响  $k$  时刻以前的状态  $\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \dots, \mathbf{x}(0)$  等。因此上式中  $[ \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i) ]$  项仅依赖于  $\mathbf{u}(i)$ ，而与  $\mathbf{u}(i+1), \mathbf{u}(i+2), \dots, \mathbf{u}(N-1)$  等无关，故可将其改写成

$$\begin{aligned} \hat{J}[\mathbf{x}(i)] &= \min_{\mathbf{u}(i)} \{ [ \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i) ] \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}(i+1)} \min_{\mathbf{u}(i+2)} \dots \min_{\mathbf{u}(N-1)} \{ [ \mathbf{x}(N) ] + \sum_{k=i+1}^{N-1} [ \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k) ] \} \} \\ &= \min_{\mathbf{u}(i)} \{ [ \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i) ] + \hat{J}[\mathbf{x}(i+1)] \} \end{aligned} \quad (7.5)$$

方程式 (7.5) 称为贝尔曼方程，它的边界条件为：

$$\hat{J}[\mathbf{x}(N)] = [ \mathbf{x}(N) ] \quad (7.6)$$

由式 (7.6) 出发，根据式 (7.5) 依次逆向递推，每次确定一个决策  $\mathbf{u}(k)$  和相应子过程的最优性能指标  $\hat{J}[\mathbf{x}(k)]$ ， $N$  次递推之后即可得到最优控制序列  $\{ \mathbf{u}(k), k = 0, 1, \dots, N-1 \}$  和最优轨线  $[ \mathbf{x}(k), k = 0, 1, \dots, N ]$ 。

**【例 7.1】** 求一阶离散时间线性系统

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) \quad x(0) = x_0$$

在指标泛函

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [ qx^2(k) + ru^2(k) ] \quad (7.7)$$

下的最优控制。

**【解】** 因为无终端约束项，贝尔曼方程的边界条件为

$$\hat{J}[x(3)] = 0$$

第一步

按贝尔曼方程有

$$\begin{aligned} \hat{J}[x(2)] &= \min_{u(2)} \{ qx^2(2) + ru^2(2) + \hat{J}[x(3)] \} \\ &= \min_{u(2)} [ qx^2(2) + ru^2(2) ] \end{aligned}$$

考虑到  $x(2)$  不受  $u(2)$  影响，根据

$$\frac{[qx^2(2) + ru^2(2)]}{u(2)} = 2ru(2) = 0$$

得

$$\hat{u}(2) = 0, \quad \hat{J}[x(2)] = qx^2(2)$$

第二步

求  $\hat{u}(1)$

$$\begin{aligned}\hat{J}[x(1)] &= \min_{u(1)} \{ qx^2(1) + ru^2(1) + \hat{J}[x(2)] \} \\ &= \min_{u(1)} [ qx^2(1) + ru^2(1) + qx^2(2) ] \\ &= \min_{u(1)} \{ qx^2(1) + ru^2(1) + q[ax(1) + bu(1)]^2 \}\end{aligned}$$

由

$$\frac{\hat{J}[x(1)]}{u(1)} = 2ru(1) + 2qb^2u(1) + 2abqx(1) = 0$$

得

$$\hat{u}(1) = -\frac{abq}{r + qb^2}x(1) \stackrel{\text{def}}{=} -f(1)x(1)$$

$$\hat{J}[x(1)] = 1 + \frac{ra^2}{r + b^2q}qx^2(1)$$

第三步

求  $\hat{u}(0)$

$$\begin{aligned}\hat{J}[x(0)] &= \min_{u(0)} \{ qx^2(0) + ru^2(0) + \hat{J}[x(1)] \} \\ &= \min_{u(0)} [ qx^2(0) + ru^2(0) + 1 + \frac{ra^2}{r + b^2q}qx^2(1) ] \\ &= \min_{u(0)} [ qx^2(0) + ru^2(0) + 1 + \frac{ra^2}{r + b^2q}q[ax(0) + bu(0)]^2 ]\end{aligned}$$

由  $\frac{\hat{J}[x(0)]}{u(0)} = 0$  解得

$$\hat{u}(0) = -\frac{abq(r + b^2q + ra^2)}{(r + b^2q)^2 + ra^2b^2q}x(0) \stackrel{\text{def}}{=} -f(0)x(0)$$

并求得最优指标泛函为:

$$\hat{J}[x(0)] = q + rf^2(0) + 1 + \frac{ra^2}{r + b^2q}q[a - bf(0)]^2x^2(0)$$

这样, 我们知道使泛函指标为最小的最优控制具有状态反馈形式

$$\hat{u}(k) = -f(k)x(k) \quad k = 0, 1, 2$$

其中

$$f(0) = \frac{abq(r + b^2q + ra^2)}{(r + b^2q)^2 + ra^2b^2q}$$

$$f(1) = \frac{abq}{r + qb^2}$$

$$f(2) = 0$$

### 【例 7 2】 发电厂经济运行问题

某发电厂有三台发电机并网运行, 设  $W_i$  表示第  $i$  号机的输出功率, 则各发电机的运行费用为:

$$C(W_1) = \frac{1}{2}W_1^2, \quad C(W_2) = W_2^2, \quad C(W_3) = \frac{3}{2}W_3^2$$



规定:当只有一台发电机运行时,使用 1 号机,当有两台发电机运行时使用 1、2 号机。一般情况下三台发电机同时运行。假定发电厂的总负荷  $D$  不会使任何一台发电机超出额定容量。试求 1 号和 2 号机同时运行及三台发电机同时运行时的最佳负荷分配方案,使电站运行费用达最小值。

令  $J_{n-1}(D - W_n)$  为除  $n$  号发电机外,其它  $n - 1$  台发电机的最小运行费用。先考虑二台发电机运行情况。

当只有 1 号机运行时,有

$$J_1(D) = \frac{1}{2} W_1^2 = \frac{1}{2} D^2$$

当 1 号和 2 号同时运行时,则有:

$$\begin{aligned} J_2(D) &= \min_{W_2} [W_2^2 + J_1(W_1)] \\ &= \min_{W_2} [W_2^2 + J_1(D - W_2)] \\ &= \min_{W_2} [W_2^2 + \frac{1}{2}(D - W_2)^2] \end{aligned}$$

因为对  $W_i$  无约束,根据

$$\frac{\partial}{\partial W_2} J_2(D) = \frac{\partial}{\partial W_2} [W_2^2 + \frac{1}{2}(D - W_2)^2] = 3W_2 - D = 0$$

可求得  $\hat{W}_2 = \frac{1}{3} D$ ,  $\hat{W}_1 = D - \hat{W}_2 = \frac{2}{3} D$ 。可见当 1 号和 2 号机同时运行时最佳负荷分配为:

1 号机承担总负荷的  $\frac{2}{3}$ , 2 号机承担总负荷的  $\frac{1}{3}$ 。

这时发电机总的运行费用为:

$$J_2(D) = \frac{1}{2} \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} D\right)^2 + \left(\frac{1}{3} D\right)^2 = \frac{1}{3} D^2$$

在三台发电机同时运行的情况下,有

$$\begin{aligned} J_3(D) &= \min_{W_3} \left[ \frac{3}{2} W_3^2 + J_2(D - W_3) \right] \\ &= \min_{W_3} \left[ \frac{3}{2} W_3^2 + \frac{1}{3}(D - W_3)^2 \right] \end{aligned}$$

求导后可求得使  $J_3(D)$  取最小值的方程

$$\frac{\partial}{\partial W_3} J_3(D) = \frac{\partial}{\partial W_3} \left[ \frac{3}{2} W_3^2 + \frac{1}{3}(D - W_3)^2 \right] = \frac{11}{3} W_3 - \frac{2}{3} D = 0$$

由之解得:

$$\hat{W}_3 = \frac{2}{11} D$$

$$\hat{W}_2 = \frac{1}{3}(D - \hat{W}_3) = \frac{1}{3} D - \frac{2}{11} D = \frac{3}{11} D$$

$$\hat{W}_1 = \frac{2}{3}(D - \hat{W}_3) = \frac{2}{3} D - \frac{2}{11} D = \frac{6}{11} D$$

可见三台发电机并网运行时,最佳负荷分配是:1 号机 2 号机 3 号机 =  $\frac{6}{11} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{2}{11}$ , 这时总的运行费用为:

$$J_3(D) = \frac{1}{2} \hat{W}_1^2 + \hat{W}_2^2 + \frac{3}{2} \hat{W}_3^2 = \frac{3}{11} D^2$$

## § 7.2 离散时间线性二次型问题

动态规划的一个重要应用,就是对线性离散时间系统二次型性能指标的最优控制问题,可以得到解析形式的解。

已知离散时间线性系统状态方程为:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.8)$$

寻找最优控制序列 $\{\mathbf{u}(k), k = 0, 1, \dots, N-1\}$ ,使得性能指标

$$J = \mathbf{x}(N)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k)] \quad (7.9)$$

为最小。其中 $\mathbf{S}$ 为半正定矩阵, $\mathbf{Q}(k)$ 与 $\mathbf{R}(k)$ 均为正定矩阵。为利用动态规划解这一问题,首先得出该问题相应的贝尔曼方程为:

$$\hat{J}(\mathbf{x}(k)) = \min_{\mathbf{u}(k)} \{ \mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) + \hat{J}[\mathbf{x}(k+1)] \} \quad (7.10)$$

它的边界条件为:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(N)] = \mathbf{x}(N)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(N)$$

根据上式,我们猜测贝尔曼方程(7.10)的解具有以下二次型形式:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}(k)^T \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (7.11)$$

其中 $\mathbf{G}(k)$ 是一 $(n \times n)$ 维对称时变矩阵。将式(7.11)代入式(7.10)得

$$\begin{aligned} \hat{J}[\mathbf{x}(k)] &= \mathbf{x}(k)^T \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) = \min_{\mathbf{u}(k)} [\mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{x}(k+1)^T \mathbf{G}(k+1) \mathbf{x}(k+1)] \end{aligned} \quad (7.12)$$

将状态方程表达式(7.8)代入上式,并配平方得

$$\begin{aligned} \hat{J}[\mathbf{x}(k)] &= \mathbf{x}(k)^T \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) = \min_{\mathbf{u}(k)} \{ \mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k) \\ &\quad + [\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)]^T \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k)] \} \\ &= \min_{\mathbf{u}(k)} \{ \mathbf{x}(k)^T \{ \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) \\ &\quad - \mathbf{F}^T(k) [\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)] \mathbf{F}(k) \} \mathbf{x}(k) \\ &\quad + [\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{x}(k)]^T [\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)] [\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(k) \mathbf{x}(k)] \} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{F}(k) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) \quad (7.14)$$

在式(7.13)中,仅第二项与 $\mathbf{u}(k)$ 有关,若 $\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)$ 为正定阵,则为使性能指标 $\hat{J}$ 取极小值,当且仅当

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{F}(k) \mathbf{x}(k) \quad (7.15)$$

将式(7.15)代入式(7.13),并注意到式(7.11)可得

$$\begin{aligned} \hat{J}[\mathbf{x}(k)] &= \mathbf{x}(k)^T \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{x}(k)^T \{ \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) \\ &\quad - \mathbf{F}^T(k) [\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)] \mathbf{F}(k) \} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (7.16)$$

因为式(7.16)对任意  $\mathbf{x}(k)$  都成立, 我们有:

$$\mathbf{G}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) - \mathbf{F}^T(k) [\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)] \mathbf{F}(k) \quad (7.17)$$

它与  $\mathbf{F}(k)$  的计算公式(7.14)式一起, 构成离散黎卡提方程, 其边界条件为:

$$\mathbf{G}(N) = \mathbf{S} \quad (7.18)$$

由式(7.18)出发, 逆向分别求解式(7.14)和式(7.17), 即可依次求得全部  $\mathbf{F}(k)$  和  $\mathbf{G}(k)$ 。

前面我们在证明最优控制具有式(7.15)形式时, 假定了  $\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)$  的正定性。现在我们来证明这一假设成立。由于  $\mathbf{R}(k)$  正定, 我们只需证明  $\mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)$  半正定或  $\mathbf{G}(k+1)$  半正定。

将式(7.14)代入式(7.17)得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)] + \mathbf{Q}(k) \\ &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)]^T \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)] \\ &\quad + \mathbf{F}^T(k) \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)] + \mathbf{Q}(k) \end{aligned} \quad (7.19)$$

另一方面, 将式(7.14)两边左乘  $[\mathbf{R}(k) + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)]$  得

$$\mathbf{R}(k) \mathbf{F}(k) = \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)] \quad (7.20)$$

代入式(7.19)得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}^T(k)] \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)] \\ &\quad + \mathbf{F}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{F}(k) + \mathbf{Q}(k) \end{aligned} \quad (7.21)$$

利用数学归纳法, 设  $\mathbf{G}(k+1)$  半正定, 则由于  $[\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)]^T \mathbf{G}(k+1) [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k) \mathbf{F}(k)]$  和  $\mathbf{F}^T(k) \mathbf{R}(k) \mathbf{F}(k)$  及  $\mathbf{Q}(k)$  分别均为半正定, 从而可推出  $\mathbf{G}(k)$  半正定。而对于  $\mathbf{G}(k)$  的终值, 成立  $\mathbf{G}(N) = \mathbf{S}$  为半正定, 因此对所有  $k = N, N-1, \dots, 1, 0$ , 均有  $\mathbf{G}(k)$  半正定。

根据以上的推导可以看出, 最优控制  $\mathbf{u}(k)$  是状态变量  $\mathbf{x}(k)$  的线性反馈。其中  $(m \times n)$  维反馈增益阵  $\mathbf{F}(k)$  只取决于受控对象状态方程式(7.8)中的矩阵  $\mathbf{A}(k)$  和  $\mathbf{B}(k)$ , 以及二次型性能指标式(7.9)中的权矩阵  $\mathbf{R}(k)$ ,  $\mathbf{Q}(k)$  和  $\mathbf{S}$  等, 与初始状态  $\mathbf{x}(0)$  无关。因此在采用式(7.15)实行最优状态反馈控制时, 可以先离线计算好  $\mathbf{F}(k)$ , 存放在控制计算机的内存内, 而在线控制时只需作式(7.15)所示的简单运算就可以了。

将式(7.14)代入式(7.17)可得  $\mathbf{G}(k)$  所必须满足的离散黎卡提方程的另一形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(k) &= \mathbf{Q}(k) + \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) - \mathbf{A}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k) [\mathbf{R}(k) \\ &\quad + \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{B}(k)]^{-1} \mathbf{B}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{A}(k) \end{aligned} \quad (7.22)$$

它的边界条件仍为:

$$\mathbf{G}(N) = \mathbf{S} \quad (7.23)$$

归纳以上的推导, 可以得出离散时间二次型最优控制器的设计方法:

离散时间二次型最优控制器的设计

条件: 已知离散时间受控对象的状态方程式(7.8), 和根据工程实践要求所选择的二次型性能指标式(7.9)。

(1) 根据受控系统状态方程式(7.8)中的矩阵  $\mathbf{A}(k)$  和  $\mathbf{B}(k)$  以及权矩阵  $\mathbf{R}(k)$ ,  $\mathbf{Q}(k)$  和  $\mathbf{S}$ , 按式(7.22)和式(7.23)构造离散黎卡提方程, 利用逆向递推方法, 由  $\mathbf{G}(N)$  开始, 依次递推算出  $\mathbf{G}(N-1)$ ,  $\mathbf{G}(N-2)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{G}(1)$ ,  $\mathbf{G}(0)$ 。

(2) 利用  $\mathbf{G}(k)$ , 根据式(7.14) 即可求得最优状态反馈增益阵  $\mathbf{F}(k)$ , 再根据式(7.15) 构造出最优状态反馈控制律。

(3) 求解经状态反馈后的闭环系统

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}(k) - \mathbf{B}(k)\mathbf{F}(k)]\mathbf{x}(k) \quad (7.24)$$

得出最优状态轨线  $\mathbf{x}(k)$ 。

(4) 最优性能指标满足

$$\hat{J}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{G}(k+1) \mathbf{x}(k) \quad (7.25)$$

特别地, 对由  $\mathbf{x}(0)$  出发的最优控制系统, 它的性能指标为:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{G}(1) \mathbf{x}(0) \quad (7.26)$$

类似连续时间二次型最优控制系统的设计, 在以上设计步骤中如果所得到的最优状态反馈闭环系统式(7.24) 不符合工程要求, 可以根据实际情况, 更改权矩阵  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  和  $\mathbf{S}$ , 并重新利用以上方法进行设计, 直至最终的闭环系统符合要求。

在前面第 5.2 节的[例 5.2] 中, 我们用离散时间最小值原理解这一二次型最优控制问题, 得到具有式(5.75) 形式的最优控制律, 和式(5.70) 及式(5.72) 形式的离散黎卡提方程。利用矩阵求逆公式, 可以证明, 那里的结果与本节所得的结果是完全一致的。

**【例 7.3】** 考虑一阶线性离散系统

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k)$$

在二次型性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^2(k) + 2u^2(k)]$$

下的最优控制。

首先通过逆向递推的方法, 依次求出  $G(k)$  和  $F(k)$ , 因为无终端项, 有

$$G(3) = S = 0$$

为使计算简便, 首先计算

$$Z_1(2) = R + B^T G(3) B = 2$$

$$Z_2(2) = B^T G(3) A = 0$$

则根据式(7.14) 和式(7.22), 有

$$F(2) = Z_1^{-1}(2) Z_2(2) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} G(2) &= Q + A^T G(3) A - Z_2^T(2) Z_1^{-1}(2) Z_2(2) \\ &= 1 + 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

同理可依次计算

$$Z_1(1) = R + B^T G(2) B = 3$$

$$Z_2(1) = B^T G(2) A = 2$$

$$F(1) = Z_1^{-1}(1) Z_2(1) = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$G(1) = Q + A^T G(2) A - Z_2^T(1) Z_1^{-1}(1) Z_2(1) = \frac{11}{3}$$

$$Z_1(0) = R + B^T G(1) B = \frac{17}{3}$$

$$Z_2(0) = B^T G(1) A = \frac{32}{3}$$

$$F(0) = Z_1^{-1}(0) Z_2(0) = \frac{22}{17}$$

可见最优控制序列为

$$u(0) = -\frac{22}{17}x(0), \quad u(1) = -\frac{2}{3}x(1), \quad u(2) = 0$$

### § 7.3 连续动态规划与哈密顿 — 雅可比方程

利用离散动态规划的思想,也可以解连续时间动态系统的最优化问题,得出动态规划的连续形式,即哈密顿 — 雅可比方程。

设我们所考虑的最优控制问题是求一容许控制  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , 将连续时间系统

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.27)$$

由初态  $x_0$  转移到目标集

$$m[x(t_f), t_f] = 0 \quad (7.28)$$

并使性能指标

$$J = m[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (7.29)$$

为最小。

根据最优性原理,连续系统在最优控制下的最优轨线的一部分也必是最优轨线。设最优控制存在,则对每个初态  $x(t)$ , 都存在一个相应的最优控制  $u(t)$ ,  $t \in [t, t_f]$ , 使系统状态沿最优轨线到达目标集式(7.28)。令  $\hat{J}[x(t), t]$  表示以任意时刻  $t \in [t_0, t_f]$  为初始时刻,  $x(t)$  为初态时的最优性能指标

$$\hat{J}[x(t), t] = \min_{u(t)} \left\{ m[x(t_f), t_f] + \int_t^{t_f} L[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right\} \quad (7.30)$$

其相应的最优控制函数记为  $u^*[x(t), t]$ 。显然,在目标集式(7.28)上成立:

$$\hat{J}[x(t_f), t_f] = m[x(t_f), t_f] \quad (7.31)$$

假定  $\hat{J}[x(t), t]$  存在并连续,且对  $x(t)$  和  $t$  至少有连续的一阶偏导数。由于因果性,  $t$  时刻以后的输入不影响  $t$  时刻以前的状态,我们可把式(7.30)写成

$$\begin{aligned} \hat{J}[x(t), t] = \min_{u(t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \right. \\ \left. + \hat{J}[x(t+\Delta t), t+\Delta t] \right\} \end{aligned} \quad (7.32)$$

根据积分中值定理,式(7.32)中右边的第一项可写成

$$\int_t^{t+\Delta t} L[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau = L[x(t+\Delta t), u(t+\Delta t), t+\Delta t] \Delta t \quad (7.33)$$

式中,  $\Delta t$  1。若  $\Delta t$  很小,将式(7.32)中第二项  $\hat{J}[x(t+\Delta t), t+\Delta t]$  在  $t$  时刻作台劳展开得

$$\begin{aligned} \hat{J}[\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t] &= \hat{J}[\mathbf{x}(t), t] + \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{t} \Delta t \\ &+ \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \Delta t + o(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (7.34)$$

式中  $o(\Delta t^2)$  为台劳展开中关于  $\Delta t$  的高次项。将式(7.33)和式(7.34)代入式(7.32),并考虑到  $\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]$  和  $\frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{t}$  与  $\{\mathbf{u}(\cdot), [t, t + \Delta t]\}$  无关,可从求最小化运算中提出,令  $\Delta t \rightarrow 0$ ,可得:

$$\begin{aligned} -\frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{t} &= \min_{\mathbf{u}(t)} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ &+ \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (7.35)$$

这就是连续系统中的贝尔曼方程,有时也称哈密顿—雅可比方程。它是根据最优性原理推导出来的,它的边界条件为:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = [\mathbf{x}(t_f), t_f] \quad (7.36)$$

满足哈密顿—雅可比方程式(7.35)及其边界条件式(7.36),是以上最优控制问题的解和相应的最优性能指标的充分条件。这一点与最小值原理仅为最优控制的必要条件不同。

如果利用前面定义过的哈密顿函数。

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (7.37)$$

$$\text{并令} \quad \lambda(t) = \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}} \quad (7.38)$$

则方程式(7.35)可改写成

$$-\frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{t} = \min_{\mathbf{u}(t)} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}}, t] \quad (7.39)$$

哈密顿—雅可比方程是个给定终止时刻边界条件的泛函方程。一般情况下,我们通常可根据在  $\mathbf{x}, \frac{\hat{J}}{\mathbf{x}}$  和  $t$  保持不变的条件下,使得  $H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \frac{\hat{J}}{\mathbf{x}}, t]$  为全局最小的原则,求得最优控制  $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \frac{\hat{J}}{\mathbf{x}}, t)$ ,代入式(7.39)的右边得到相应的偏微分方程,并利用边界条件,解出最优性能指标函数  $\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]$ ,最后得到最优控制  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \frac{\hat{J}}{\mathbf{x}}, t)$ 。

一般说来,除极少数情况外,要得到哈密顿—雅可比方程的解析解十分困难,只能借助于数值方法或近似方法。但若解一旦求得,则可以立即得到  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  形式的解,即相应的最优控制具有状态反馈形式。

#### 【例 7.4】 线性二次型问题

前面,我们利用最小值原理得到了线性二次型问题的解,现在,我们利用动态规划来讨论同样的问题。

设线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.40)$$

为完全能控,性能指标具有以下形式:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt \quad (7.41)$$

其中  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  正定。我们的目的是寻找最优控制, 使  $J$  为极小。这时最优性能指标  $\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]$  不是  $t$  的显函数, 因而有  $\frac{\partial \hat{J}}{\partial t} = 0$ , 于是哈密顿 — 雅可比方程具有形式:

$$0 = \min_{\mathbf{u}(t)} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}^T [\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)] \quad (7.42)$$

边界条件为:

$$\frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

因为  $\mathbf{u}(t)$  无约束, 可通过求导得出极值, 因而令

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}^T [\mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)] \right] = 0$$

解得

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}$$

将其代回到式(7.42) 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}} \\ + \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \end{aligned} \quad (7.43)$$

对于二次型性能指标式(7.41), 可以假定最优性能指标具有二次型形式:

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t), t] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (7.44)$$

其中  $\mathbf{P}$  为  $n$  阶正定对称阵, 这时成立

$$\frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (7.45)$$

代入式(7.43) 中, 有

$$\frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Q} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) = 0 \quad (7.46)$$

式(7.46) 对任意非零  $\mathbf{x}(t)$  均成立, 因而必成立

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (7.47)$$

这就是第六节中所述的黎卡提代数方程。

从黎卡提代数方程中求得正定解  $\mathbf{P}$ , 即得最优控制

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \frac{\partial \hat{J}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$$

## § 7.4 动态规划与变分法和最小值原理的关系

至今为止, 我们在本章里介绍了求解动态系统最优控制的三种方法: 变分法, 最小值原理和动态规划。

变分法是解动态系统优化问题的经典方法, 它是研究泛函极值的有力工具。但是它不能解决控制向量具有闭集性约束的最优控制问题。正因为如此, 导致了最小值原理的出现。而后者

可看成一种现代变分法,它将古典变分法看作是自己的一种特殊情况。在解最优控制问题中两者都得到了一组由常微分方程组(规范方程组)所表示的必要条件。并且,两者所指明的都只是局部极小的条件,而不是整体极小的条件。也就是说,凡是不符合变分法或极小值原理的控制,必不是最优控制,但是符合变分法或最小值原理的控制,也不见得就是最优控制,它仅是最优控制的候选函数。至于到底是否是最优控制,还得依据问题的性质加以判定,或进一步从数学上予以证明。

动态规划法是研究决策过程最优化的一种方法,它的适应范围比变分法和最小值原理更广。动态规划的基本思想是最优性原理,而它的基本方法是逆向递推法,即递推程序与事物发展的方向相反。对于连续系统的最优性问题,动态规划法给出了泛函方程形式的哈密顿—雅可比方程,经适当处理后,可以变为偏微分方程。虽然这一方程比规范方程组更难求解,但它的结果是充分条件。在建立哈密顿—雅可比方程时,我们假设  $\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]$  的可微性。但是,有许多问题并不都满足这一假设,这时就不能用它求最优控制。动态规划的主要缺点是它在数值计算过程中产生的“维数灾”问题。即当状态变量个数  $n$  和决策级数  $N$  增加时,它对计算机内存容量的要求急剧增加。使得在有些情况下,最现代的计算机也难以满足其对内存的要求。但近年来,一些学者正在寻找各种改进算法,以便能够有效地改善对于存储量的要求和减少计算工作量。能用最小值原理解决的最优控制问题,未必能写出它的哈密顿—雅可比方程。因为,对许多实际的工程问题来说,最优性能指标的可微性常常得不到满足。对于某些同时可用动态规划和变分法或同时可用动态规划和最小值原理的最优控制问题,究竟采用哪一种方法,可视方便与否或主观爱好而定。当然,不论用什么方法,所得的结果应该是相同的。实际上这三种方法也互有联系。下面我们考察一下最小值原理与动态规划的关系。

考察受控系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{7.48}$$

在性能指标

$$J = [\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{7.49}$$

下的最优控制问题。其中容许控制  $\mathbf{u}(t)$ , 终态  $\mathbf{x}(t_f)$  自由, 终端时刻  $t_f$  可以是固定的或自由的。

对于终端时刻  $t_f$  固定的最优控制问题,假定最优性能指标  $\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]$  存在,且连续可微。根据式(7.35)和式(7.36)可得出该问题的哈密顿—雅可比方程及边界条件为

$$-\frac{\partial \hat{J}(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t + \frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \right\} \tag{7.50}$$

$$\hat{J}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = [\mathbf{x}(t_f), t_f] \tag{7.51}$$

若令

$$\lambda(t) = \frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial \mathbf{x}} \tag{7.52}$$

并引入哈密顿函数

$$H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t] = [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] + \lambda^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{7.53}$$

则式(7.50)可改写为:

$$-\frac{\partial \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\partial t} = H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t] \tag{7.54}$$



$$\text{其中} \quad H[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), (t), t] = \min_{\mathbf{u}(t)} H[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), (t), t] \quad (7.55)$$

式(7.55)表明,在保持  $\mathbf{x}(t)$ ,  $(t)$  和  $t$  不变的条件下选择  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ,使哈密顿函数  $H$  取全局最小。这恰恰也是最小值原理中  $H$  取全局最小的条件。特别地,若  $\mathbf{u}(t)$  不受约束,且  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{f}$  对  $\mathbf{u}$  连续可微,则可由下式求得  $\hat{\mathbf{u}}(t)$ :

$$-\frac{H}{\mathbf{u}}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), (t), t] = 0 \quad (7.56)$$

由条件式(7.55)或式(7.56),可将  $\hat{\mathbf{u}}(t)$  表示为:

$$\hat{\mathbf{u}}[\mathbf{x}(t), (t), t] = \hat{\mathbf{u}}[\mathbf{x}, \frac{\hat{J}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}}, t] \quad (7.57)$$

在式(7.52)两边对  $t$  取全导数,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (t) &= \frac{d}{dt} \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}} = \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}} + \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}^2} \mathbf{x} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}} + \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}^2} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \\ &= \frac{1}{\mathbf{x}} \cdot [\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] - \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \\ &\quad + \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}^2} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \\ &= - \frac{1}{\mathbf{x}} [\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] - \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}^2} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \\ &\quad - \frac{\mathbf{f}^T[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t]}{\mathbf{x}} \cdot \frac{\hat{J}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}} + \frac{\frac{d}{dt} \hat{J}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}^2} \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t] \\ &= - \frac{[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t]}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{f}^T[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), t]}{\mathbf{x}} \cdot \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t), t]}{\mathbf{x}} \\ &= - \frac{H}{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t), (t), t] \end{aligned} \quad (7.58)$$

根据式(7.52),由边界条件式(7.51)可得

$$(t_f) = \frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\mathbf{x}} = \frac{[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{\mathbf{x}} \quad (7.59)$$

这样,由哈密顿-雅可比方程式(7.50)和边界条件式(7.51)出发,我们推出了与最小值原理中的协态方程和边界条件一致的式(7.58)和式(7.59)。

如果终端时刻  $t_f$  是待定的,将边界条件式(7.51)对  $t_f$  取偏导数,可得

$$\frac{\hat{J}[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{t_f} = \frac{[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{t_f} \quad (7.60)$$

再根据式(7.54)可得

$$H[\mathbf{x}(t_f), \hat{\mathbf{u}}(t_f), (t_f), t_f] = - \frac{[\mathbf{x}(t_f), t_f]}{t_f} \quad (7.61)$$

这也正是最小值原理中用来确定最优终端时刻的横截条件。

以上推导揭示了动态规划与最小值原理在数学上的等效关系与相互之间的联系。但是,这种推导不能认为是严格的证明。通过这一推导只是希望读者对这些方法的应用条件及其相互关系有更深入的了解。如读者有兴趣,可以类似地推导出变分法中的欧拉方程与动态规划的哈密顿-雅可比方程之间的联系。

## 习 题

7.1 城市街道示意图如图 7.3 所示, 图中数值表示两站间行车时间, 试求由  $S$  到  $F$  的时间最短的行车路径。

7.2 将一个正数  $a$  分成  $n$  部分, 使其乘积为最大。  
试用动态规划法求出其最优划分策略。

7.3 设有一阶离散时间系统

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

已知其初态  $x(0) = x_0$ , 终态  $x(N) = x_f$ , 试求最优决策序列  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , 使性能泛函

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} [1 + u^2(k)]^{\frac{1}{2}}$$

为最小。

图 7.3 习题 7.1 图

7.4 已知一阶离散时间系统  $x(k+1) = x(k) + \frac{1}{10}[x^2(k) + u(k)]$ ,  $x(0) = 3$ , 试求使得性能指标

$$J = \sum_{k=0}^1 |x(k) - 3u(k)|$$

为最小的最优控制序列  $u(k)$ 。

7.5 考虑一阶离散时间系统  $x(k+1) = x(k) + u(k)$ , 在容许控制集合为  $-1 \leq u(k) \leq 1$  时, 相应于性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 [x^2(k) + u^2(k)]$$

的最优控制。

7.6 考虑一阶离散时间系统  $x(k+1) = x(k)u(k) + u(k)$ ,  $x(0) = 1$ , 并设控制变量容许取值  $+1$ ,  $-1$  和  $0$ , 试用动态规划法求最优控制序列  $\{u(0), u(1), u(2)\}$  使性能指标

$$J = |x(3)| + \sum_{k=0}^2 \{|x(k)| + 3|u(k) + 1|\}$$

为最小。

7.7 考虑一阶系统  $\dot{x} = u$ , 设控制输入只能在  $+1$ ,  $-1$  和  $0$  中取值, 试用动态规划法确定将系统由初态  $x(0) = 0$  转移到终态  $x(4) = 1$ , 并使性能指标

$$J = \int_0^4 [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

为最小的最优控制  $u(t)$  和最优轨线  $x(t)$ 。

7.8 考虑一阶系统  $\dot{x}(t) = u(t)$ , 其中  $u(t)$  不受约束, 试用动态规划法求将系统由初态  $x(0) = x_0$  转移到终态  $x(t_f) = x_f$ , 并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} [x^2(t) + u^2(t)] dt$$

为最小的最优控制。

## 第八章 $H$ 控制

古典控制理论采用频率法来研究系统,以各种图表如 Nichols 图, Bode 图, Nyquist 曲线等为主要工具,采用尝试法来设计控制系统的参数。50 年代以来发展的现代控制理论的一个重要特点就是控制系统设计的规范性。前面所介绍的最优控制理论,特别是线性二次型最优控制,以严谨的数学结构和对设计指标的明确的描述方法,为控制系统的设计提出了解析手段,整个设计过程可以很容易地在计算机上实现。但是,这类方法的应用前提是必须要有关于受控对象的精确的数学模型,并且在控制系统综合的过程中,没有考虑模型的误差。由于各种原因,在工程实践中,关于受控对象的数学模型不可避免地存在着误差,从而限制了这类设计方法的应用。

鲁棒控制的概念是 70 年代初发展起来的。它在控制系统设计过程中,将数学模型与实际受控对象的不一致性看作是数学模型的不确定性,如模型的频率特性可以在一定范围内变化,或模型的某些参数可以在一定范围内取值等,然后设计鲁棒控制系统,使得闭环系统对在这一不确定范围内所有的受控对象均能满足理想的控制性能要求。近十几年来,蓬勃发展的  $H$  控制理论,是鲁棒控制系统的一类较为完善的设计方法。

$H$  控制是 Zames 在 1981 年首次提出来的,与前面所描述的线性二次型最优控制一样,它也属于一类最优控制问题,只是有关的性能指标是某个传递函数矩阵的  $H$  范数。以后,许多学者提出了不同的解决这一  $H$  控制问题的解法,如基于古典的函数插值理论的解法,利用 Hankel 算子理论所得到的解析算法,以及近年来发展的基于状态空间理论的,通过解两个适当的代数黎卡提方程的方法等。这些方法并被开发成 MATLAB 中的鲁棒控制工具包 (Robust Control Tool Box) 非常有利于计算机辅助设计。

### § 8.1 数学基础

为了更好的了解  $H$  控制,我们先将  $H$  控制中所涉及的数学基础知识作一个浅显的介绍。为简便起见,除必要以外,我们忽略了定理的证明。愿意进一步探讨的读者可参阅有关的参考书。

#### 8.1.1 Banach 与 Hilbert 空间

令  $X$  表示复数域  $\mathbf{C}$  上的线性空间。在  $X$  上定义范数  $\|\cdot\|$  为一个将  $\mathbf{x} \in X$  映射到实数域  $\mathbf{R}$  上的函数,满足以下三个条件:

- (1) 正定性:  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ , 当且仅当  $\mathbf{x} = 0$  时有  $\|\mathbf{x}\| = 0$ ;
- (2) 齐次性:  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ,  $\alpha \in \mathbf{C}$ ;
- (3) 三角不等式:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ 。

称定义了范数的线性空间  $X$  为线性赋范空间。在线性赋范空间中,可以定义两个元素之间的距离  $d(\cdot, \cdot)$  为它们之间差的范数,即

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

如果  $X$  中的序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  满足

$$\lim_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$$

则称序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  收敛于  $\mathbf{x}$ , 而  $\mathbf{x}$  称为该序列的极限, 并称序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  是收敛的。如果序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  满足: 对所有给定  $\epsilon > 0$ , 存在整数  $n$ , 若  $i, j > n$ , 恒有  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < \epsilon$ , 其中  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{x}_j$  分别是序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  中的第  $i$  和第  $j$  项, 则称  $\{\mathbf{x}_k\}$  为柯西序列。显然, 空间中的收敛序列必是柯西序列。如果空间  $X$  中所有的柯西序列都是收敛的, 则称空间  $X$  是完备的。完备的线性赋范空间称为巴拿赫(Banach)空间。

Banach 空间  $X$  的子集  $S \subset X$  称为  $X$  的子空间, 若

$$\begin{aligned} \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S &\Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S \\ \mathbf{x} \in S, \quad \mathbf{C} &\Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

称  $S$  为闭子空间, 若  $S$  中的收敛序列  $\{\mathbf{x}_k\}$  的极限也在  $S$  中。

若在域  $\mathbf{C}$  上的线性空间  $X$  中的任意一对元素  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , 均对应于  $\mathbf{C}$  中的一个数  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , 满足:

- (1)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{C}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$
- (2)  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \quad \langle \mathbf{c}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{c}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$
- (3)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{C}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$
- (4)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = 0$  时有  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$

则称  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  为元素  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  的内积。定义了内积的空间  $X$  称为内积空间。在该空间中, 可由内积导出范数  $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{\frac{1}{2}}$ , 因此  $X$  也是一个赋范线性空间。完备的内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间。

称内积空间  $X$  中的元素  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  正交, 若  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ 。设  $S$  是  $X$  的一个子集, 若  $\mathbf{x}$  与  $S$  中的任一元素正交, 则称  $\mathbf{x}$  与  $S$  正交。设  $T$  也是  $X$  的一个子集, 如果  $T$  中的任意元素  $\mathbf{x}$  均与  $S$  正交, 则称  $S$  与  $T$  正交。若  $S$  是  $X$  的闭子空间, 则称  $X$  中与  $S$  正交的全体元素的集合  $S^\perp$  为  $S$  的正交补, 可以证明  $S^\perp$  是  $S$  的闭子空间。这样可以将空间  $X$  作唯一的直交分解:

$$X = S \oplus S^\perp$$

换句话说, 任意  $\mathbf{x} \in X$ , 可以唯一写成  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ , 其中  $\mathbf{x}_1 \in S, \mathbf{x}_2 \in S^\perp$ 。

例如对  $n$  维复向量空间  $\mathbf{C}^n$ , 其元素  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  等均为  $n$  维的列向量, 若定义内积

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$$

其中  $*$  表示共轭转置, 则  $\mathbf{C}^n$  构成一个内积空间, 其范数为  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^* \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ 。

## 8.1.2 Hilbert 空间举例

设时域信号  $\mathbf{x}(t)$  是定义于  $-\infty < t < \infty$ , 并在  $\mathbf{C}^n$  中取值的函数。定义  $L_2(-\infty, \infty)$  范数为:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.1)$$

所有  $L_2(-\infty, \infty)$  范数有界的信号集合构成勒贝格空间  $L_2(-\infty, \infty)$  (为简单起见, 我们没有表出该空间对向量的  $\mathbf{x}(t)$  的维数  $n$  的依赖性)。在  $L_2(-\infty, \infty)$  中定义内积

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{y}(t) dt \quad (8.2)$$

则  $L_2(-\infty, \infty)$  为 Hilbert 空间。从物理角度来看,  $L_2(-\infty, \infty)$  可以表示为两个正交子空间的和, 即

$$L_2(-\infty, \infty) = L_2(-\infty, 0] \oplus L_2[0, \infty)$$

其中

$$\begin{aligned} L_2(-\infty, 0] &= \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in L_2(-\infty, \infty), \mathbf{x}(t) = 0, \forall t > 0 \} \\ L_2[0, \infty) &= \{ \mathbf{x} / \mathbf{x} \in L_2(-\infty, \infty), \mathbf{x}(t) = 0, \forall t < 0 \} \end{aligned}$$

例如图 8.1 所示信号  $\mathbf{x}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ , 若定义

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_-(t) &= \begin{cases} \mathbf{x}(t) & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \\ \mathbf{x}_+(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mathbf{x}(t) & t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

则有  $\mathbf{x}_-(t) \in L_2(-\infty, 0], \mathbf{x}_+(t) \in L_2[0, \infty)$ , 且

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_-(t) + \mathbf{x}_+(t)$$

图 8.1  $L_2(-\infty, \infty)$  空间的分解

对于频域信号  $\mathbf{X}(j\omega)$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$ , 同样可以定义  $L_2$  范数:

$$\|\mathbf{X}(j\omega)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(j\omega) \mathbf{X}(j\omega) d\omega} \tag{8.3}$$

所有  $L_2$  范数有界的  $\mathbf{X}(j\omega)$  的集合构成  $L_2$  空间, 在  $L_2$  空间中, 定义内积

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(j\omega) \mathbf{Y}(j\omega) d\omega \tag{8.4}$$

$L_2$  按以上内积构成 Hilbert 空间。 $L_2$  中有理函数的集合  $RL_2$  是它的一个子空间,  $RL_2$  中各元素是  $n$  维向量, 其中各分量均是在虚轴上无极点的严格真有理函数。

下面考虑复频域函数向量  $\mathbf{X}(s)$ , 定义所有在  $s$  半平面上解析, 在  $\mathbf{C}^n$  中取值, 同时  $H_2$  范数

$$\|\mathbf{X}(s)\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\sigma > 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(\sigma + j\omega) \mathbf{X}(\sigma + j\omega) d\omega} \tag{8.5}$$

有界的函数向量集合为  $H_2$ , 则  $H_2$  根据以上所定义的范数构成 Banach 空间。

因为极限  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbf{X}(\sigma + j\omega) = \mathbf{\Phi}(j\omega)$  对几乎所有的  $\omega$  都存在, 且  $\mathbf{\Phi}(j\omega) \in L_2$ , 我们通常不区分  $\mathbf{X}(s) \in H_2$  和它的边界值  $\mathbf{\Phi}(j\omega) \in L_2$ , 将  $H_2$  看成为 Hilbert 空间  $L_2$  中的闭子空间。定义  $RH_2$  为  $n$  维稳定的且严格真的有理函数向量的集合, 则  $RH_2$  为  $H_2$  的子空间。

$H_2$  在  $L_2$  中的正交补  $H_2^\perp$  是具有以下性质的函数向量  $\mathbf{X}(s)$  的集合:  $\mathbf{X}(s)$  在  $s$  左半平面上解析, 在  $\mathbf{C}^n$  中取值, 且范数

$$\sup_{\sigma < 0} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(\sigma + j\omega) \mathbf{X}(\sigma + j\omega) d\omega} \tag{8.6}$$

有界。我们同样可以不区分  $\mathbf{X}(s) \in H_2$  和它的边界值  $\mathbf{X}(j\omega) \in L_2$ 。定义  $RH_2$  为  $n$  维的在  $s$  左半平面上解析且为严格真的有理函数集合, 则  $RH_2$  为  $H_2$  的子空间。显然, 我们有:

$$L_2 = H_2 \cup H_2 \tag{8.7}$$

因此, 任意函数向量  $\mathbf{X}(s) \in L_2$  都可以表示为  $H_2$  和  $H_2$  中的函数向量之和, 例如, 当  $n = 1$  时, 在虚轴上解析的严格真有理函数

$$X(s) = \frac{s + 5}{(s + 2)(s - 3)}$$

属于  $L_2$ 。可以将  $X(s)$  的极点按左、右半平面进行分解, 利用部分分式可得

$$X(s) = \frac{-0.6}{s + 2} + \frac{1.6}{s - 3} = X_1(s) + X_2(s)$$

显然,  $X_1(s) \in H_2, X_2(s) \in H_2$ 。

**定理 8.1** 设  $\mathbf{X}(j\omega), \mathbf{Y}(j\omega)$  分别为  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{y}(t)$  的傅氏变换, 如果  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ , 则  $\mathbf{X}(j\omega), \mathbf{Y}(j\omega) \in L_2$ , 且成立 Parseval 等式:

$$\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle = \langle \mathbf{X}(j\omega), \mathbf{Y}(j\omega) \rangle \tag{8.8}$$

以及

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2^2 = \|\mathbf{X}(j\omega)\|_2^2 \tag{8.9}$$

证明: 根据内积定义, 有:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) \mathbf{y}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Y}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^*(t) e^{j\omega t} dt \cdot \mathbf{Y}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}^*(j\omega) \mathbf{Y}(j\omega) d\omega \\ &= \langle \mathbf{X}(j\omega), \mathbf{Y}(j\omega) \rangle \end{aligned}$$

令  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ , 即可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_2^2 &= \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}(j\omega), \mathbf{X}(j\omega) \rangle \\ &= \|\mathbf{X}(j\omega)\|_2^2 \end{aligned}$$

将以上所介绍的内容加以归纳, 可以得到以下的等价关系:

$$L_2(-\infty, 0] \xleftrightarrow{\text{拉氏变换}} H_2 \\ L_2(-\infty, \infty) = L_2[-\infty, 0] \cup L_2(0, \infty) \xleftrightarrow{\text{拉氏变换}} H_2 \cup H_2 = L_2$$

### 8.1.3 $H_2$ 空间

线性定常系统可以由传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  或单位脉冲响应矩阵  $\mathbf{g}(t)$  来描述。即对于输入信号  $\mathbf{u}(t)$ , 系统输出  $\mathbf{y}(t)$  可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

或

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

对于脉冲响应收敛的系统,有  $\|g(t)\| < \infty$ 。因为  $\mathbf{G}(s)$  是  $\mathbf{g}(t)$  的拉氏变换象函数,所以  $\mathbf{G}(s)$  在  $s$  闭右半平面解析,且满足

$$\sup_{\text{Re } s \geq 0} \max \{ \|\mathbf{G}(s)\| \} < \infty$$

其中  $\max$  表示矩阵的最大奇异值。所谓  $H_\infty$  空间就是指在  $s$  闭右半平面内解析,且满足上式的复变函数矩阵的集合,在  $H_\infty$  空间中定义  $H_\infty$  范数

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\text{Re } s \geq 0} \max \{ \|\mathbf{G}(s)\| \} \tag{8.10}$$

根据复变函数极大模原理,上式实际上等价于

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \max \{ \|\mathbf{G}(j\omega)\| \} \tag{8.11}$$

$H_\infty$  空间按照以上定义的范数,构成 Banach 空间。定义  $RH_\infty$  为  $H_\infty$  中所有稳定的真有理函数矩阵的集合,则  $RH_\infty$  是  $H_\infty$  的一个子空间。

设  $\mathbf{G}(s) \in H_\infty$ ,  $\mathbf{U}(s) \in H_2$ ,则显然有  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \in H_2$ ,以下定理表明了  $H_\infty$  空间与  $H_2$  空间的联系

**定理 8.2** 设  $\mathbf{G}(s) \in H_\infty$ ,  $\mathbf{U}(s) \in H_2$ ,则

$$\|\mathbf{G}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\|\mathbf{U}(s)\|_{H_2} = 1} \frac{\|\mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)\|_{H_2}}{\|\mathbf{U}(s)\|_{H_2}} \tag{8.12}$$

定理 8.2 的物理意义为:系统传递函数矩阵的  $H_\infty$  范数实际上反映了系统输入输出信号  $H_2$  范数的最大增益。

类似可以定义  $L_\infty$  空间,设  $\mathbf{G}(j\omega)$  在  $\mathbb{C}^{n \times m}$  中取值,且  $\max \{ \|\mathbf{G}(j\omega)\| \}$  对所有  $\omega$  有界,则所有这样  $\mathbf{G}(j\omega)$  的集合构成一个线性空间  $L_\infty$ ,在  $L_\infty$  中定义  $L_\infty$  范数

$$\|\mathbf{G}(j\omega)\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \max \{ \|\mathbf{G}(j\omega)\| \} \tag{8.13}$$

则  $L_\infty$  在这一范数下构成 Banach 空间。同样可以定义  $RL_\infty$  为在虚轴上无极点的真有理函数矩阵的集合,则  $RL_\infty$  是  $L_\infty$  的一个子空间。

类似  $H_2$  和  $L_2$  的关系那样分析,可以知道,对  $H_\infty$  中的每一个元素都可以通过求极限的方法得到它的唯一的属于  $L_\infty$  的边界值。因此,我们可以将  $H_\infty$  空间看作是 Banach 空间  $L_\infty$  的一个闭子空间。

最后,我们归纳一下在实有理函数情况下,以上所定义的各空间:

$RL_2$ :在虚轴上无极点的严格真有理函数向量集合;

$RH_2$ :稳定的严格真有理函数向量集合;

$RH_\infty$ :在  $s$  左半平面无极点的严格真有理函数向量集合;

$RH$ :稳定的真有理函数矩阵集合;

$RL$ :在虚轴上无极点的真有理函数矩阵集合。

因为在本章中我们只讨论线性定常系统,我们只关心有理函数向量或矩阵,为此,在本章中,如无特殊说明,我们均分别简记  $RL_2, RH_2, RH_\infty, RL$  和  $RH$  为  $L_2, H_2, H_\infty, L$  和  $H$ 。

### 8.1.4 算子

算子是泛函分析中的基本概念之一。设  $X$  和  $Y$  是 Banach 空间,  $T$  是由  $X$  的某个子集  $D$  到

$Y$  的一个映射。称  $T$  为算子,  $D$  为  $T$  的定义域, 集合  $\{y: y = T\mathbf{x}, \mathbf{x} \in D\}$  称为  $T$  的值域。若  $T$  满足可加性和齐次性, 则称  $T$  为线性算子, 我们本章中只讨论线性算子。称  $T$  是有界的, 若存在正数  $M$ , 使得对一切  $\mathbf{x} \in D$ , 有  $\|T\mathbf{x}\| \leq M \|\mathbf{x}\|$ 。

对于线性有界算子, 定义算子范数

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|T\mathbf{x}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|T\mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|T\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \tag{8.14}$$

下面我们介绍几类常用的算子:

傅里叶变换

$$\mathbf{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{-j\omega t} dt$$

是一个由  $L_2(-\infty, \infty)$  到  $L_2$  的算子, 根据定理 8.1, 该算子的范数是 1。

因为  $L_2$  可写成  $H_2$  和  $H_2$  的直和, 因此, 任意  $\mathbf{f} \in L_2$  可以唯一分解成  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$  其中  $\mathbf{f}_1 \in H_2, \mathbf{f}_2 \in H_2$ 。

由  $L_2$  到  $H_2$  的算子  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_1$ , 称为由  $L_2$  到  $H_2$  的正交投影算子; 而由  $L_2$  到  $H_2$  的算子  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_2$  称为  $L_2$  到  $H_2$  的正交投影算子。可以证明  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_1$  和  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_2$  的范数均为 1。

对  $\mathbf{F} \in L$ , 定义由  $L_2$  到  $L_2$  的算子  $\mathbf{F}$  为:

$$\mathbf{F}\mathbf{g} = \mathbf{F}\mathbf{g} \tag{8.15}$$

显然  $\mathbf{F}$  是一线性算子, 根据定理 8.2,  $\mathbf{F}$  的算子范数  $\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}\|$ , 因此  $\mathbf{F}$  是一有界线性算子, 称为劳伦 (Laurent) 算子, 而  $\mathbf{F}$  称为它的符号。因此,  $\mathbf{F}$  又称为符号为  $\mathbf{F}$  的 Laurent 算子。

$\mathbf{F}|_{H_2}$  称为限制于  $H_2$  的  $\mathbf{F}$ , 它是由  $H_2$  到  $L_2$  的映射, 根据定理 8.2, 它的范数也等于  $\|\mathbf{F}\|$ 。

如果  $\mathbf{F} \in H$ , 则根据定理 8.2, 显然有:

$$\mathbf{F}|_{H_2} \in H_2 \tag{8.16}$$

它的逆也真, 即: 若  $\mathbf{F}|_{H_2} \in H_2$ , 则  $\mathbf{F} \in H$ 。

令  $\mathbf{F} \in L$ , 定义由  $H_2$  到  $H_2$  的算子  $\mathbf{F}$  为: 对任意  $\mathbf{g} \in H_2$ ,  $\mathbf{F}\mathbf{g}$  等于  $\mathbf{F}\mathbf{g}$  在  $H_2$  上的正交投影, 即

$$\mathbf{F} >_2 \mathbf{F}|_{H_2} \tag{8.17}$$

称  $\mathbf{F}$  为符号为  $\mathbf{F}$  的托普尼兹 (Teoplitz) 算子。类似地, 可以定义由  $H_2$  到  $H_2$  的符号为  $\mathbf{F}$  的汉克尔 (Hankel) 算子  $\mathbf{F}$  为:

$$\mathbf{F} >_1 \mathbf{F}|_{H_2} \tag{8.18}$$

即对任意  $\mathbf{g} \in H_2$ ,  $\mathbf{F}\mathbf{g}$  等于  $\mathbf{F}\mathbf{g}$  在  $H_2$  上的正交投影。显然, 若  $\mathbf{F} \in H$ , 则有  $\mathbf{F} = 0$ 。

则

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{g} &= F(s) g(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+0.5)(s-1)} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+0.5} + \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{g} &= \mathbf{F}\mathbf{g} = \frac{1}{s+1} + \frac{-2}{s+0.5} \\ \mathbf{F}\mathbf{g} &= \mathbf{F}\mathbf{g} = \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$



为将传递函数矩阵与状态空间描述联系起来,考虑  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{D}$ , 为简便起见, 记为:

$$\mathbf{F}(s) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$$

根据矩阵求逆公式, 若  $\mathbf{F}(s)$  和  $\mathbf{D}$  均可逆, 则有:

$$\mathbf{F}^{-1}(s) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]^{-1} = [\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{BD}^{-1}, -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{D}^{-1}]$$

作为一个例子, 设

$$\mathbf{F}(s) = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, 0]$$

其中  $\mathbf{A}$  为反稳定的 (即  $\mathbf{A}$  的所有特征值均在  $s$  右半平面), 则有  $\mathbf{F} \in L$ ,  $\mathbf{F}(s)$  的反双边拉氏变换为:

$$L^{-1}\{\mathbf{F}(s)\} = \mathbf{f}(t) = \begin{cases} -\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, & t < 0 \\ 0 & t \geq 0 \end{cases} \tag{8.19}$$

设在时域内与 Hankel 算子所对应的算子  $\mathbf{f}: L_2[0, \infty) \rightarrow L_2(-\infty, 0]$  定义为:

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}u \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} \mathbf{f}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad t < 0 \tag{8.20}$$

其中  $\mathbf{u}(t) \in L_2[0, \infty)$ , 将式 (8.19) 代入得

$$\mathbf{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}u = -\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \int_0^{\infty} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{8.21}$$

定义能控性算子  $\mathbf{c}: L_2[0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$  为

$$\mathbf{c}u \stackrel{\text{def}}{=} -\int_0^{\infty} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \tag{8.22}$$

以及能观测性算子  $\mathbf{o}: \mathbb{C}^n \rightarrow L_2(-\infty, 0]$

$$\mathbf{o}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}, \quad t < 0 \tag{8.23}$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , 则由式 (8.21) ~ 式 (8.23), 成立

$$\mathbf{f} = \mathbf{o} \circ \mathbf{c}$$

设  $X, Y$  均是 Hilbert 空间,  $T: X \rightarrow Y$ , 是定义在  $X$  中的线性算子, 如果有算子  $T^*: Y \rightarrow X$ , 满足

$$(T\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, T^*\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y \tag{8.24}$$

则称  $T^*$  是  $T$  的伴随算子。若算子  $T^* = T$ , 则称  $T$  为自伴算子。显然, 算子  $T^*: X \rightarrow X$  是自伴算子, 并且它的范数满足:

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| \tag{8.25}$$

下面我们来看看  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^*$  等算子的伴随算子。首先定义

$$\tilde{\mathbf{F}}(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^*(j\omega) \tag{8.26}$$

其中上标  $*$  表示矩阵的共轭转置。对于复频域函数, 则有

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^T(-s) \tag{8.27}$$

显然, 式 (8.27) 的定义与式 (8.26) 是一致的。根据  $\mathbf{F}$  的定义, 对  $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in L$ , 成立

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{g}, \mathbf{h} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{g}^*(j\omega)\mathbf{F}^*(j\omega)\mathbf{h}(j\omega)d\omega \\ &= \mathbf{g}, \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{h} \end{aligned} \tag{8.28}$$

这样  $\mathbf{F}$  的伴随算子  $\mathbf{F}^*$  等于符号为  $\tilde{\mathbf{F}}$  的 Laurent 算子。

类似可得出 Hankel 算子  $\mathbf{F}$  的伴随算子  $\mathbf{F}^*$ 。设  $\mathbf{g} \in H_2, \mathbf{h} \in H_2$ , 则有:

$$\begin{aligned} {}_F \mathbf{g}, \mathbf{h} &= {}_1 \mathbf{F} \mathbf{g}, \mathbf{h} = \mathbf{F} \mathbf{g}, \mathbf{h} \\ &= \mathbf{g}, \mathbf{F}^* \mathbf{h} = \mathbf{g}, {}_2 \mathbf{F}^* \mathbf{h} \end{aligned} \quad (8.29)$$

其中第二个等式成立是因为  ${}_2 \mathbf{F} \mathbf{g} \in H_2$  故与  $\mathbf{h} \in H_2$  正交, 第四个等式成立是因为  ${}_1 \mathbf{F}^* \mathbf{h} \in H_2$  与  $\mathbf{g} \in H_2$  正交。根据式(8.29), 我们有

$${}_F^* = {}_2 \mathbf{F}^* / H_2 \quad (8.30)$$

另外还可以类似推出  ${}_c$  和  ${}_0$  的伴随算子  ${}_c^*$  和  ${}_0^*$  分别为:

$${}_c^* : C^n \rightarrow L_2[0, \infty), ({}_c^* \mathbf{x})(t) = -\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}, t \geq 0 \quad (8.31)$$

$${}_0^* : L_2(-\infty, 0] \rightarrow C^n, {}_0^* \mathbf{y} = \int_{-\infty}^0 e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{y}(t) dt \quad (8.32)$$

设  $X, Y$  为 Hilbert 空间, 定义算子  $T: X \rightarrow Y$  的维数为  $TX$  闭包的维数。对于 Hankel 算子  ${}_F$  的维数, 我们有如下定理。

**定理 8.3** 若  $\mathbf{F} \in RL$ , 则  ${}_F$  为有限维算子。

最后, 我们将这一小节所讨论的算子作一小结。

设  $\mathbf{g} \in L_2, \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$ , 其中  $\mathbf{g}_1 \in H_2, \mathbf{g}_2 \in H_2^\perp$ , 则有

正交投影算子  ${}_1 : L_2 \rightarrow H_2, {}_1 \mathbf{g} = \mathbf{g}_1$

正交投影算子  ${}_2 : L_2 \rightarrow H_2^\perp, {}_2 \mathbf{g} = \mathbf{g}_2$

Laurent 算子  ${}_F : L_2 \rightarrow L_2, {}_F \mathbf{g} = \mathbf{F} \mathbf{g}$

Toeplitz 算子  ${}_F : H_2 \rightarrow H_2, {}_F = {}_2 \mathbf{F}^* / H_2$

Hankel 算子  ${}_F : H_2 \rightarrow H_2^\perp, {}_F = {}_1 \mathbf{F} / H_2$

${}_F$  的伴随算子  ${}_F^* : L_2 \rightarrow L_2, {}_F^* \mathbf{g} = \mathbf{F}^* \mathbf{g}$

${}_F$  的伴随算子  ${}_F^* : H_2 \rightarrow H_2^\perp, {}_F^* = {}_2 \mathbf{F}^* / H_2$

能控性算子  ${}_c : L_2[0, \infty) \rightarrow C^n, {}_c \mathbf{u} = -\int_0^\infty e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) dt$

能观测性算子:  ${}_0 : C^n \rightarrow L_2(-\infty, 0], {}_0 \mathbf{x} = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}$

${}_c$  的伴随算子:  ${}_c^* : C^n \rightarrow L_2[0, \infty), {}_c^* \mathbf{x} = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{x}$

${}_0$  的伴随算子:  ${}_0^* : L_2(-\infty, 0] \rightarrow C^n, {}_0^* \mathbf{y} = \int_{-\infty}^0 e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{y}(t) dt$

## 8.1.5 Hankel 算子的范数与 Nehari 定理

令  $X$  为 Banach 空间, 若存在有  $C, \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq 0$ , 满足

$$T\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (8.33)$$

则称  $\lambda$  为  $T$  的特征值,  $\mathbf{x}$  为相应于  $\lambda$  的特征向量。

根据定理 8.3, Hankel 算子  ${}_F$  为有限秩算子, 因此自伴算子  ${}_F^* {}_F$  也是有限秩,  ${}_F^* {}_F$  有特征值, 且成立以下定理

**定理 8.4** 自伴算子  ${}_F^* {}_F$  的特征值为非负实数, 且它的最大特征值等于  ${}_F^* {}_F$  的范数, 即  ${}_F^* {}_F = \max({}_F^* {}_F)$ , 其中  $\max(\cdot)$  表示算子的最大特征值。

根据定理 8.4 及式(8.25),  ${}_F$  的范数满足

$$\|{}_F\| = \max({}_F^* {}_F) \quad (8.34)$$

这样我们可以通过计算  $\sigma_F^*$  特征值来求得  $\sigma_F$  的范数。

考虑李雅普诺夫方程

$$A L_c + L_c A^T = - B B^T \tag{8.35}$$

其中  $A$  为反稳定的。为求以上李雅普诺夫方程的解,利用恒等式

$$\frac{d}{dt} (e^{-At} B B^T e^{-A^T t}) = - A e^{-At} B B^T e^{-A^T t} - e^{-At} B B^T e^{-A^T t} A^T \tag{8.36}$$

注意到  $-A$  为稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-At} = 0$ ,对上式两边取 0 到  $\infty$  的积分可得:

$$- B B^T = - A \int_0^\infty e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt - \int_0^\infty e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt A^T \tag{8.37}$$

与式(8.35) 比较可知,李雅普诺夫方程式(8.35) 的解为

$$L_c = \int_0^\infty e^{-At} B B^T e^{-A^T t} dt$$

类似可以证明李雅普诺夫方程

$$A^T L_0 + L_0 A = - C^T C \tag{8.38}$$

的解为

$$L_0 = \int_0^\infty e^{-A^T t} C^T C e^{-At} dt \tag{8.39}$$

根据线性系统的理论知道,  $L_c$  和  $L_0$  分别是系统  $(A, B, C)$  的能控性格兰矩阵和能观测性格兰矩阵,它们也是算子  $\pi_c^*$  和  $\pi_0^*$  的矩阵表示。

**定理 8.5** 设  $F(s) = [A, B, C, 0] \in L$ , 其中  $A$  为反稳定的,则算子  $\pi_F^*$  与矩阵  $L_c L_0$  具有相同的特征值。

根据以上的推导及定理 8.5, 我们可以通过以下的方法计算  $\sigma_F$  的范数。首先将  $F(s) \in L$  分解成

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) \tag{8.40}$$

其中  $F_1(s) \in H$ ,  $F_2(s)$  严格真且在  $s$  左半平面内的解析[即  $F_2(s)$  的所有极点都不稳定]。作  $F_2(s)$  的最小状态空间实现

$$F_2(s) = [A, B, C, 0]$$

然后分解求解李雅普诺夫方程式(8.35) 与式(8.38) 得出  $L_c$  和  $L_0$ , 即可求得  $\sigma_F = \sqrt{\lambda_{\max}(L_c L_0)}$ 。

现在,我们考虑函数逼近问题。设已知矩阵  $R \in L$ , 我们的问题是求出它与  $H$  空间的距离,即找出

$$\inf\{ \|R - X\| : X \in H \} \tag{8.41}$$

从系统的观点来看,这一问题就是找出一个与不稳定的传递函数矩阵的距离最近的稳定传递函数矩阵。

固定  $X \in H$ , 则显然有:

$$\begin{aligned} \|R - X\| &= \|R - X\|_1 = \| (R - X) \| / H_2 \\ &= \|R - X\| = \|R\| \end{aligned}$$

最后一个等式是因为  $\|X\| = 0$ , " $X \in H$ 。这样我们得到了  $\|R - X\|$  的一个下限  $\|R\|$ 。Nehari 定理告诉我们,  $\|R\|$  就是待求的  $R$  与  $H$  空间的距离。

**定理 8.6** (Nehari 定理) 对  $R \in L$  则存在有  $X \in H$ , 满足式(8.41), 并且  $\|R - X\| = \|R\|$ 。

### 8 .1 .6 有理函数矩阵的内外分解

如果有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s) \in H$  满足

$$\mathbf{G}^T(-s) \mathbf{G}(s) = \mathbf{I}$$

则称  $\mathbf{G}(s)$  为内矩阵, 内矩阵具有保范特性, 即如果  $\mathbf{G}(s)$  是内矩阵, 则对任意  $\mathbf{Q}(s) \in H$ ,  $\mathbf{X}(s) \in H_2$ , 成立

$$\mathbf{G}(s) \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}(s) \tag{8.42}$$

$$\mathbf{G}(s) \mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(s) \tag{8.43}$$

特别地, 若内矩阵  $\mathbf{G}(s)$  是标量, 则内函数  $\mathbf{G}(s)$  为全通函数。

如果有理函数阵  $\mathbf{P}(s) \in H$  对于任意  $\text{Re}(s) > 0$  均为行满秩, 或等价地存在  $\mathbf{M}(s) \in H$ , 使得

$$\mathbf{P}(s) \mathbf{M}(s) = \mathbf{I} \tag{8.44}$$

则称  $\mathbf{P}(s)$  为外矩阵。特别地, 若外矩阵  $\mathbf{P}(s)$  为标量, 则它为最小相位函数。

对于任意给定的  $m \times p$  维有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s) \in H$ , 存在  $m \times r$  维内矩阵  $\mathbf{G}_i(s)$ ,  $m \times r$ , 和  $r \times p$  维外矩阵  $\mathbf{G}_0(s)$ ,  $r \times p$ , 使得

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_i(s) \mathbf{G}_0(s) \tag{8.45}$$

上式即称为有理函数阵  $\mathbf{G}(s)$  的内外分解。

【例 8.1】 考虑标量情况, 若

$$G(s) = \frac{s(s-1)(s^2-s+1)(s+2)}{(s+1)^5}$$

令

$$G_i(s) = \frac{(s-1)(s^2-s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$G_0(s) = \frac{s(s+1)(s^2+s+1)(s+2)}{(s+1)^5}$$

则  $G(s) = G_i(s) G_0(s)$  为  $G(s)$  的内外分解。

## § 8 .2 H 性能指标

本节讨论利用  $H$  指标的设计思想。首先我们介绍标准问题, 即  $H$  控制问题的标准形式。许多工程上常见的  $H$  控制问题, 如鲁棒控制, 扰动抑制, 混合灵敏度问题, 跟踪问题等都可以写成标准问题的形式。我们还将介绍模型匹配问题, 利用稳定控制器的参数化结论, 标准问题也可以化成模型匹配问题。

### 8 .2 .1 标准 $H$ 控制问题

各种  $H$  控制问题都可以化成图 8.2 所示的标准问题。其中  $\mathbf{u}$  为控制输入信号,  $\mathbf{y}$  为观测量,  $\mathbf{w}$  为干扰输入信号(或为了设计而定义的辅助信号),  $\mathbf{z}$  为被控量(或根据设计需要定义的评价信号);  $\mathbf{G}$  称为增广受控对象, 它包括实际受控对象和为了描述设计指标而确定的加权函数等;  $\mathbf{K}$  为待设计的控制器。设增广受控对象  $\mathbf{G}$  的状态方程描述为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \tag{8.46a}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \quad (8.46b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u} \quad (8.46c)$$

其中  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态变量,  $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  分别是  $r, m, p, q$  维信号向量。令  $\mathbf{G}(s)$  是增广受控对象的传递函数矩阵描述, 则根据  $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  的维数可以将  $\mathbf{G}(s)$  分块成:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

根据这一分块, 图 8.2 所示系统可写成

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{u} \quad (8.48a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{G}_{22} \mathbf{u} \quad (8.48b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (8.48c)$$

对照  $\mathbf{G}$  的状态空间描述式(8.46), 我们还可以将  $\mathbf{G}(s)$  表为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \quad (8.49)$$

如果  $[\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}(s) \mathbf{K}(s)]$  非奇异, 则从  $\mathbf{w}$  到  $\mathbf{z}$  的闭环传递函数矩阵  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  为:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{zw}(s) &= F_l(\mathbf{G}, \mathbf{K}) \\ &= \mathbf{G}_{11}(s) + \mathbf{G}_{12}(s) \mathbf{K}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22}(s) \mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}_{21}(s) \end{aligned} \quad (8.50)$$

$F_l(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  也称为  $\mathbf{G}(s)$  和  $\mathbf{K}(s)$  的线性分数变换。

标准  $H$  最优控制问题为: 对于给定的增广受控对象  $\mathbf{G}(s)$ , 求反馈控制器  $\mathbf{K}(s)$ , 使得图 8.2 所示的闭环系统稳定, 并使  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  的  $H$  范数为极小, 即

$$\min_{\mathbf{K}(s) \in S_k} \|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_H = 0 \quad (8.51)$$

其中  $S_k$  表示使得图 8.1 所示闭环系统为稳定的控制器  $\mathbf{K}$  的集合。

$H$  次优控制问题为: 对于给定的增广受控对象  $\mathbf{G}(s)$  和  $(\gamma > 0)$ , 求反馈控制器  $\mathbf{K}(s)$ , 使得图 8.2 所示的闭环系统稳定, 且  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  满足

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_H < \gamma \quad (8.52)$$

对于工程上常见的  $H$  控制问题, 都可以化成以上的标准形式。

## 8.2.2 干扰抑制问题

根据前面的讨论  $H$  范数的定义,  $H$  最优控制问题实质上就是极小化某一闭环传递函数幅频曲线的峰值。下面我们来看看如何利用  $H$  控制的原理, 来实现干扰抑制。假定单输入受控对象

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u + \mathbf{B}_2 w \quad (8.53)$$

其中  $u$  为控制输入,  $w$  为干扰信号,  $u, w$  均是标量。假设干扰信号是确定的, 可由以下集合描述:

$$L_2 = \{ w(t) \mid \int_0^\infty w^2(t) dt < \infty \} \quad (8.54)$$

即  $w(t)$  是能量有限的信号。考虑抑制干扰  $w \in L_2$  对系统性能的影响, 引入标量  $\gamma > 0$ , 求控制器  $K$  满足:

$$\int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u^2(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^2(t) dt, \quad \forall w \in L_2 \tag{8.55}$$

显然  $\gamma$  越小, 则上式左端越小, 故干扰  $w \in L_2$  对系统的性能影响也就越小。定义辅助输出信号

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \tag{8.56}$$

并利用定理 8.1 中的 Parseval 等式(8.8), 可将式(8.55) 写成

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \quad \forall w \in L_2 \tag{8.57}$$

或者, 等价地

$$\frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma^2, \quad \forall w \in L_2, w \neq 0 \tag{8.58}$$

根据  $H_\infty$  范数与  $H_2$  范数的关系式(8.12), 定义

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \sup_{w \neq 0} \frac{\|\mathbf{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2} \tag{8.59}$$

其中  $\mathbf{T}_{zw}$  为由  $w$  到  $\mathbf{z}$  的闭环传递函数, 即

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_1 \tag{8.60}$$

则式(8.55) 可表示为

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \tag{8.61}$$

而干扰抑制问题, 等价于标准  $H_\infty$  控制问题

$$\min_{\mathbf{K}} \|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty \tag{8.62}$$

在前面第三章中, 我们讨论了系统的灵敏度函数  $S(s)$  与干扰抑制的关系问题。通常说来, 我们希望选择  $|S(j\omega)|$  在低频段 ( $0 < \omega < \omega_0$ ) 内较小, 以达到抑制该频段的干扰和模型误差的影响。理想的  $S(s)$  的频谱图如图 3.3 所示。为此, 我们可以选择权函数  $R(s)$ , 使得  $|R(j\omega)|$  在低频内 ( $0 < \omega < \omega_0$ ) 具有较大的值, 但是随着  $\omega$  的增加而逐渐减少。并通过求以下  $H_\infty$  控制问题, 来得到所要求的控制系统:

$$\min_{\mathbf{K}} \|R(s) S(s)\|_\infty \tag{8.63}$$

其中灵敏度函数  $S(s) = [1 + P(s) K(s)]^{-1}$ ,  $P(s)$  是受控对象传递函数,  $K(s)$  是控制器传递函数。

### 8.2.3 鲁棒控制问题

由于参数变化和受控对象数学模型的不精确性等因素, 通常使得在工程实践中按照受控对象数学模型而设计的控制系统性能下降, 甚至有可能影响闭环系统的稳定性。鲁棒控制的目的是在控制系统设计时, 就将受控对象的数学模型的不确定性加以考虑, 从而得到当实际受控对象在一定范围内变化时都能有较好控制性能的鲁棒控制系统。

为设计鲁棒控制系统, 首先要考虑如何表达受控对象模型的不确定性的问题。通常我们将

受控对象模型的不确定性分成两类,即结构性不确定和非结构性不确定。本章中我们只考虑非结构性不确定。它将设计所依据的受控对象模型称为标称模型,而将模型的不确定性表示对标称模型的扰动,如图 8.3 所示。

图 8.3 加性扰动模型

扰动可以是图 8.3(a) 所示的加性扰动,也可以是相乘性扰动。前者扰动后模型为  $P(s) + P(s)$ , 其中  $P(s)$  是标称模型,  $P(s)$  是扰动, 后者的扰动后模型是  $P(s)[1 + P(s)]$  或  $[1 + P(s)]P(s)$ 。鲁棒控制问题即是设计控制器  $K(s)$ , 不仅对受控对象的标称模型  $P(s)$  具有良好的闭环控制性能, 并且也使扰动后的受控对象  $P(s) + P(s)$  {或  $P(s)[1 + P(s)]$ } 具有满意的控制效果。特别地, 若以闭环稳定性来作为控制效果的衡量度, 即保证当  $P(s)$  在一定范围内变化时,  $P(s) + P(s)$  {或  $P(s)[1 + P(s)]$ } 所对应的闭环系统均是渐近稳定的, 则称系统是鲁棒稳定的。

我们现在的加性扰动情况为例, 说明如何将鲁棒稳定控制问题化成标准  $H$  控制问题。图 8.3(a) 所示的加性扰动系统, 可以等价地表示为图 8.3(b)。假定图 8.3(b) 所示的系统是单输入单输出系统, 并且  $K(1 - PK)^{-1}$  是稳定的, 则根据奈魁斯特稳定性判据可知, 图 8.3 所示的闭环系统对任意  $P$  为稳定的充分条件是

$$| P(j\omega) K(j\omega) [1 - P(j\omega) K(j\omega)]^{-1} | < 1, \quad \omega \in [0, \infty) \tag{8.64}$$

即开环系统的奈魁斯特曲线位于单位圆内, 不围绕点  $-1 + j0$ 。

因此, 如果设计控制器  $K$ , 使得  $K(1 - PK)^{-1}$  稳定 [即使得图 8.3(b) 所示系统在  $P = 0$  时的标称系统稳定], 同时满足:

$$| K(j\omega) [1 - P(j\omega) K(j\omega)]^{-1} R(j\omega) | < 1, \quad \omega \in [0, \infty) \tag{8.65}$$

其中  $R(j\omega)$  是  $P(j\omega)$  变化的上界, 即

$$| P(j\omega) | < | R(j\omega) |, \quad \omega \in [0, \infty) \tag{8.66}$$

则闭环系统是鲁棒稳定的。根据  $H$  范数的定义, 式(8.65) 等价于:

$$K(s) [1 - P(s) K(s)]^{-1} R(s) < 1 \tag{8.67}$$

以上结论虽然是相应于单输入单输出系统推导出来的, 但是利用小增益定理, 可以证明它们关于多输入多输出系统仍然成立。只要将式(8.66) 改成

$$\| P(j\omega) \| < | R(j\omega) |, \quad \omega \in [0, \infty) \tag{8.68}$$

并将式(8.67) 中各量除  $R(j\omega)$  外换成相应的传递函数矩阵即可。

如果将广义受控对象  $G(s)$  定义为

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & R(s)I \\ I & P(s) \end{bmatrix}$$

则以上鲁棒稳定性问题可以化成标准  $H$  控制问题, 即选择  $K(s)$ , 使得  $G(s)$  稳定, 且使

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{R}(s) \mathbf{K}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{P}(s) \mathbf{K}(s)]^{-1} \quad (8.69)$$

的  $H$  范数满足

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_H = 1 \quad (8.70)$$

#### 8.2.4 模型匹配问题

模型匹配问题如图 8.4 所示,我们希望选择  $\mathbf{Q}(s) \in H$ ,使得  $\mathbf{T}_2(s) \mathbf{Q}(s) \mathbf{T}_3(s)$  尽可能地匹配  $\mathbf{T}_1(s)$ ,其中  $\mathbf{T}_1(s)$ ,  $\mathbf{T}_2(s)$ ,  $\mathbf{T}_3(s) \in H$  为给定的实有理函数矩阵,  $\mathbf{Q}(s) \in H$  是待求的实有理函数矩阵。

图 8.4 模型匹配问题

如图 8.4 所示,假定模型匹配问题的目的是使性能指标

$$\sup \{ \|\mathbf{z}\|_2 : \|\mathbf{w}\|_2 = 1, \|\mathbf{w}\|_2 < 1 \} \quad (8.71)$$

为极小,即在最不利的情况下,相应于单位能量输入,误差  $\mathbf{z}$  的能量为最小。根据定理 8.2,以上性能指标式(8.71)等价于  $\|\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 \mathbf{Q} \mathbf{T}_3\|_H$ 。因此,模型匹配问题等价于,已知  $\mathbf{T}_1(s)$ ,  $\mathbf{T}_2(s)$ ,  $\mathbf{T}_3(s) \in H$ ,选择  $\mathbf{Q}(s) \in H$ ,使得  $H$  范数

$$\|\mathbf{T}_1(s) - \mathbf{T}_2(s) \mathbf{Q}(s) \mathbf{T}_3(s)\|_H \quad (8.72)$$

为极小。将模型匹配问题化成标准问题,可取广义受控对象  $\mathbf{G}(s)$  和控制器  $\mathbf{K}(s)$  分别为:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(s) & \mathbf{T}_2(s) \\ \mathbf{T}_3(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (8.73)$$

$$\mathbf{K}(s) = -\mathbf{Q}(s) \quad (8.74)$$

反过来,利用稳定控制器的参数化结论,也可以将标准问题化成模型匹配问题。为此,设在图 8.2 所示的标准  $H$  控制问题中,  $\mathbf{G}_{22}(s)$  的互质分解为:

$$\mathbf{G}_{22}(s) = \mathbf{N}_r(s) \mathbf{D}_r^{-1}(s) = \mathbf{D}_l^{-1}(s) \mathbf{N}_l(s) \quad (8.75)$$

其中  $\mathbf{N}_r(s)$ ,  $\mathbf{D}_r(s)$ ,  $\mathbf{D}_l(s)$ ,  $\mathbf{N}_l(s) \in H$ 。根据式(3.104)可以得出关于  $\mathbf{G}_{22}(s)$  的双互质分解

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_l(s) & -\mathbf{Y}_l(s) \\ -\mathbf{N}_l(s) & \mathbf{D}_l(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r(s) & \mathbf{Y}_r(s) \\ \mathbf{N}_r(s) & \mathbf{X}_r(s) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (8.76)$$

根据稳定控制器的参数化结论定理 3.6,使得  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  稳定的  $\mathbf{K}(s)$  可参数化为:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(s) &= [\mathbf{X}_l - \mathbf{Q}(s) \mathbf{N}_l(s)]^{-1} [\mathbf{Y}_l(s) + \mathbf{Q}(s) \mathbf{D}_l(s)] \\ &= [\mathbf{Y}_r(s) + \mathbf{D}_r(s) \mathbf{Q}(s)] [\mathbf{X}_r(s) - \mathbf{N}_r(s) \mathbf{Q}(s)]^{-1} \end{aligned} \quad (8.77)$$

代入式(8.50),并利用恒等式  $(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1}$ ,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{zw}(s) &= \{ \mathbf{G}_{11}(s) + \mathbf{G}_{12}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{K}(s) \mathbf{G}_{22}(s)]^{-1} \mathbf{K}(s) \mathbf{G}_{21}(s) \} \\ &= \{ \mathbf{G}_{11}(s) + \mathbf{G}_{12}(s) \mathbf{D}_r(s) [\mathbf{Y}_l(s) - \mathbf{Q}(s) \mathbf{D}_l(s)] \mathbf{G}_{21}(s) \} \end{aligned} \quad (8.78)$$



若令

$$\mathbf{T}_1(s) = \mathbf{G}_{11}(s) + \mathbf{G}_{12}(s) \mathbf{D}_r(s) \mathbf{Y}_l(s) \mathbf{G}_{21}(s) \tag{8.79a}$$

$$\mathbf{T}_2(s) = \mathbf{G}_{12}(s) \mathbf{D}_r(s) \tag{8.79b}$$

$$\mathbf{T}_3(s) = \mathbf{D}_l(s) \mathbf{G}_{21}(s) \tag{8.79c}$$

则可以证明  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 \in H$  ,且

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{T}_1(s) - \mathbf{T}_2(s) \mathbf{Q}(s) \mathbf{T}_3(s) \tag{8.80}$$

因此,式(8.51)所示的标准  $H$  控制问题,等价于使得式(8.72)为极小的模型匹配问题。

我们在下一节将给出在单输入单输出情况下模型匹配问题的解。

### § 8.3 单输入单输出情况下 $H$ 问题的解

经过适当的变换,许多  $H$  控制问题都可以化成模型匹配问题,本章将讨论模型匹配问题的可解性和在单输入单输出情况下模型匹配问题的解。

考虑式(8.72)所示的模型匹配问题。最简单的情况是线性方程

$$T_1(s) = T_2(s) Q(s) T_3(s) \tag{8.81}$$

有  $Q(s) \in H$  的解。这时的  $Q(s)$  显然为最优。但是,对于工程实际问题,几乎不可能通过解线性方程(8.81)来得到最优的  $Q(s) \in H$  。甚至在有的情况下,模型匹配问题的最优解不存在。

【例 8.2】 考虑  $T_1(s) = \frac{1}{s+1}, T_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, T_3(s) = 1$  的模型匹配问题。

则若选择

$$Q(s) = \frac{1}{s+1}$$

则

$$(T_1 - T_2 Q) = \frac{s}{(s+1)(s+1)}$$

根据以上函数的波德图,有

$$T_1 - T_2 Q$$

因此选择  $\epsilon$  任意小,则  $|T_1 - T_2 Q|$  也任意小。但是模型匹配问题的精确解是取  $\epsilon = 0$ ,这时  $|T_1 - T_2 Q| = 0$ ,而对应的  $Q(s) = s+1$ ,显然这时的  $Q \notin H$  ,因此最优的  $Q$  不存在。

以下定理给出了模型匹配问题最优解的存在的条件:

**定理 8.7** 如果对所有的  $\omega$  ,矩阵  $T_2(j\omega)$  和  $T_3(j\omega)$  的秩均不改变,则模型匹配问题的最优解存在。

注意定理 8.7 给出的仅是最优解存在的充分条件。

下面我们讨论单输入单输出情况下模型匹配问题的解,这时  $T_1, T_2, T_3$  和  $Q$  均是标量。不失一般性,可假定  $T_3 = 1$ 。为保证最优解存在,假定  $T_2(j\omega) \neq 0, 0$  。最后,假定  $T_2^{-1}(j\omega) \in H$  ,否则的话,可通过直接解线性方程(8.81)来求得  $Q$ 。

将  $T_2$  作内外分解得  $T_2 = T_{2i} T_{20}$  其中  $T_{2i}$  和  $T_{20}$  分别是内外函数,则有

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 Q &= T_1 - T_{2i} T_{20} Q \\ &= T_{2i} (T_{2i}^{-1} T_1 - T_{20} Q) \\ &= T_{2i}^{-1} T_1 - T_{20} Q \\ &\stackrel{\text{def}}{=} R - X \end{aligned} \tag{8.82}$$

其中,我们定义了  $R = T_{2i}^{-1} T_1$ ,  $X = T_{20} Q$ 。这样,我们将模型匹配问题变成了找出  $R - L$  与  $H$  空间距离的问题。Nehari 定理是解这一类问题的有力工具。根据这一定理,存在有最优解  $X - H$ , 满足:

$$R - L = \inf \{ \| R - X \| \} \quad (8.83)$$

为求  $R - L$ , 将  $R - L$  作直交分解

$$R - L = R_1 + R_2 \quad (8.84)$$

其中  $R_2 \in H$ ,  $R_1$  为严格真,并在  $s$  左半平面内解析。将  $R_1$  作最小状态空间实现

$$R_1(s) = [A, B, C, 0] \quad (8.85)$$

则  $A$  为反稳定的,即  $A$  的所有特征值都在  $s$  右半平面内。通过解两个李雅普诺夫方程

$$A L_c + L_c A^T = -B B^T \quad (8.86)$$

$$A^T L_0 + L_0 A = -C^T C \quad (8.87)$$

得  $L_c$  和  $L_0$ 。设  $\lambda^2$  为  $L_c L_0$  的最大特征值,  $w$  为相应的特征向量, 即

$$L_c L_0 w = \lambda^2 w \quad (8.88)$$

定义  $v = \lambda^{-1} L_0 w$ , 则成立

$$L_c v = -w \quad (8.89)$$

$$L_0 w = -v \quad (8.90)$$

定义有理函数:

$$f(s) \stackrel{\text{def}}{=} [A, w, C, 0] \quad (8.91)$$

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} [-A^T, v, B^T, 0] \quad (8.92)$$

显然有  $f \in H_2$ ,  $g \in H_2$ 。通过加减  $s L_c$  项, 将式(8.86) 改写成:

$$-(sI - A) L_c + L_c (sI + A^T) = -B B^T \quad (8.93)$$

在上式两边同时左乘  $C(sI - A)^{-1}$ , 右乘  $(sI - A^T)^{-1} v$  可以得到

$$-C L_c (sI + A^T)^{-1} v + C(sI - A)^{-1} L_c v = C(sI - A)^{-1} B B^T (sI + A^T)^{-1} v \quad (8.94)$$

上式中左边第一项属于  $H_2$ ; 根据式(8.89) 和式(8.91), 第二项等于  $f(s)$ ; 而根据式(8.85) 和式(8.92), 等式右边等于  $R_1(s) g(s)$ 。将方程式(8.94) 两边同时作  $H_2$  上的正交投影  $P_1$  可得

$$f = P_1 R_1 g = R_1 g = R g \quad (8.95)$$

以上最后一个等式是因为  $R_1 = R$ 。类似地可推导出

$$f^* = g \quad (8.96)$$

根据式(8.95) 和式(8.96), 有

$$f^* R g = \lambda^2 g \quad (8.97)$$

即  $g$  是相应于  $f^* R$  的最大特征值  $\lambda^2$  的特征向量。

根据  $f$  和  $g$  的定义式(8.91) 和式(8.92), 我们有:

$$f^*(s) f(s) = w^T (sI + A^T)^{-1} C^T C (sI - A)^{-1} w \quad (8.98)$$

$$g^*(s) g(s) = v^T (sI - A)^{-1} B B^T (sI + A^T)^{-1} v \quad (8.99)$$

将式(8.93) 代入式(8.99) 可得

$$\begin{aligned} g^*(s) g(s) &= v^T (sI - A)^{-1} [-(sI - A) L_c + L_c (sI + A^T)] (sI + A^T)^{-1} v \\ &= -v^T L_c (sI + A^T)^{-1} v + v^T (sI - A)^{-1} L_c v \end{aligned}$$

$$= -\mathbf{w}^T (\mathbf{sI} + \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{w}$$

类似可以推导出

$$\tilde{f}(s) f(s) = \mathbf{v}^T (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T (\mathbf{sI} + \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{v}$$

因此,我们有

$$\tilde{f}(s) f(s) = \tilde{g}(s) g(s) \quad (8.100)$$

特别地,有

$$|f(j)| = |g(j)| \quad 0 \quad (8.101)$$

以下定理给出了模型匹配问题的解。

**定理 8.8** 设  $\mathbf{L}_c$  和  $\mathbf{L}_0$  分别是李雅普诺夫方程式(8.86)和式(8.87)的解,且  $\mathbf{L}_c \mathbf{L}_0$  的最大特征值为  $-\lambda$ ,  $R, X, T_{20}, f, g$  等分别由式(8.82) ~ 式(8.92)定义,则

$$X = R - \inf\{R - X\} \quad (8.102)$$

且模型匹配问题的最优解可由

$$X = R - f/g \quad (8.103)$$

$$Q = T_{20}^{-1} X \quad (8.104)$$

得出。相应于最优解  $Q, T_1 - T_2 Q$  为全通函数。

证明:根据 Nehari 定理,成立

$$\|R - X\|_2 = \inf\{\|R - X\|_2\} \quad (8.105)$$

令  $h = (R - X)g$ , 则

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \langle h, h \rangle = \langle (R - X)g, (R - X)g \rangle \\ &= \langle h, h \rangle + \langle Rg, Rg \rangle - \langle h, Rg \rangle - \langle Rg, h \rangle \end{aligned} \quad (8.106)$$

因为  $Rg \in H_2$ , 所以它与  $h$  中的属于  $H_2$  的分量正交, 即

$$\langle h, Rg \rangle = \langle P_1 h, Rg \rangle \quad (8.107)$$

而另一方面, 有

$$P_1 h = P_1 (R - X)g = P_1 Rg = Rg \quad (8.108)$$

代入式(8.107), 有

$$\langle h, h \rangle = \langle Rg, Rg \rangle$$

代入式(8.106), 可得

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \langle h, h \rangle - \langle Rg, Rg \rangle \\ &= \langle h, h \rangle - \langle g, R^* Rg \rangle \\ &= \|(R - X)g\|_2^2 - \|g\|_2^2 \\ &= (\|R - X\|_2^2 - 1) \|g\|_2^2 \end{aligned} \quad (8.109)$$

因为  $\|R - X\|_2 = 1$ , 由上式可得

$$\|h\|_2^2 = 0 \quad (8.110)$$

因此有:

$$h = (R - X)g = 0 \quad (8.111)$$

由上式及式(8.95) 即可得

$$X = R - f/g \quad (8.112)$$

而最优解  $Q$ , 可根据式(8.82) 得出:

$$Q = T_{20}^{-1} X \quad (8.113)$$

另一方面, 由于

$$T_1 - T_2 Q = T_{2i}(R - X) \quad (8.114)$$

因为  $T_{2i}$  是全通函数, 为证明  $T_1 - T_2 Q$  为全通函数, 只要证明  $R - X$  是全通函数即可。由于  $R - X = f/g$ , 根据式(8.101), 则显然  $R - X$  是全通函数。

以上定理给出了求解单输入单输出情况下模型匹配问题的求解步骤。

标量模型匹配问题的求解步骤

已知: 有理函数  $T_1, T_2 \in H$ , 求有理函数  $Q \in H$ , 使得性能指标

$$T_1 - T_2 Q$$

为最小。

1. 作  $T_2(s)$  的内外分解

$$T_2(s) = T_{2i}(s) T_{20}(s)$$

其中  $T_{2i}(s)$  是内函数,  $T_{20}(s)$  是外函数。

2. 定义  $R \stackrel{\text{def}}{=} T_{2i}^{-1} T_1$ , 将  $R$  分解为

$$R(s) = R_1(s) + R_2(s)$$

其中  $R_2(s) \in H$ ,  $R_1(s)$  为严格真, 且在  $s$  左半平面内解析[即  $R_1(s)$  的所有极点都在  $s$  右半平面内]。作  $R_1(s)$  的最小状态空间实现

$$R_1(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

3. 解李雅普诺夫方程

$$\mathbf{A}\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c\mathbf{A}^T = -\mathbf{B}\mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_0\mathbf{A} = -\mathbf{C}^T\mathbf{C}$$

得矩阵  $\mathbf{L}_c$  及  $\mathbf{L}_0$ 。

4. 求得  $\mathbf{L}_c\mathbf{L}_0$  的最大特征值  $\lambda^2$  及相应的特征向量  $\mathbf{w}$ , 定义

$$f(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{w}$$

$$g(s) = \mathbf{B}^T(s\mathbf{I} + \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{L}_0 \mathbf{w}$$

5. 求得

$$X = R - f/g$$

$$Q = T_{20}^{-1} X$$

【例 8.3】 设  $T_1(s) = \frac{s+1}{10s+1}$ ,  $T_2(s) = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+2)^2}$ , 求  $Q(s) \in H$ , 使得性能指标

$$T_1 - T_2 Q$$

为最小。

作  $T_2(s)$  的内外分解为:

$$T_2(s) = T_{2i}(s) T_{20}(s)$$

其中

$$T_{2i}(s) = \frac{(s-1)(s-5)}{(s+1)(s+5)}, \quad T_{20}(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{(s+2)^2}$$

求得

$$R(s) = T_{2i}^{-1} T_1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(s+1)^2(s+5)}{(10s+1)(s-1)(s-5)} \\
&= \frac{1323}{1870(10s+1)} + \frac{-6}{11(s-1)} + \frac{90}{51(s-5)} \\
&= R_2(s) + R_1(s)
\end{aligned}$$

其中  $R_1(s) = -\frac{6}{11(s-1)} + \frac{90}{51(s-5)}$  的所有极点都在  $s$  右半平面。作  $R_1(s)$  的最小状态空间实现  $R_1(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -6/11 \\ 90/51 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]$$

根据李雅普诺夫方程

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{L}_c + \mathbf{L}_c\mathbf{A}^T &= -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\
\mathbf{A}^T\mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_0\mathbf{A} &= -\mathbf{C}^T\mathbf{C}
\end{aligned}$$

可解得

$$\mathbf{L}_c = \begin{bmatrix} 0.1488 & -0.1604 \\ -0.1604 & 0.3114 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1 \end{bmatrix}$$

求得  $\mathbf{L}_c\mathbf{L}_0$  的最大特征值 及相应的特征向量为:

$$= 0.2021, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.7769 \end{bmatrix}$$

计算

$$\begin{aligned}
f(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{w} = \frac{0.2231s - 4.223}{(s-1)(s-5)} \\
g(s) &= \mathbf{B}^T(s\mathbf{I} + \mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{L}_0\mathbf{w} = \frac{-0.2231s - 4.223}{(s+1)(s+5)}
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
X(s) &= R(s) - f(s)/g(s) = 3.021 \frac{(s+1)(s+5)}{(10s+1)(s+18.93)} \\
Q(s) &= T_{20}^{-1}(s)X(s) = \frac{3.021(s+2)^2}{(10s+1)(s+18.93)}
\end{aligned}$$

对于多输入多输出系统,模型匹配问题要复杂得多,根据矩阵  $\mathbf{T}_1$  和  $\mathbf{T}_2$  的维数和它们的秩的不同,模型匹配问题可分为一块优化问题,两块优化问题和四块优化问题。一块优化问题可以看成是为单输入单输出情况的直接推广,可以用本节类似的方法解决。而二块及四块优化问题则需要利用矩阵保范扩张等方法来解决,有兴趣的读者可参考有关文献。

## § 8.4 直接状态空间方法

1988 年 Doyle 等人发表了著名的 DGKF 论文<sup>[19]</sup>,证明了  $H_\infty$  控制问题的求解过程可以通过解两个适当的代数黎卡提方程而实现,从而将  $H_\infty$  控制带入了一个新阶段。这种解法直接利用增广受控对象的状态空间描述进行设计计算,它算法简单,计算量小,每次迭代仅需解两个与增广受控对象阶次相同的代数黎卡提方程,保证了所得控制器的阶次等于增广受控对象的阶次,并可显示出控制器的结构分离特性,表明了传统的线性二次型控制是  $H_\infty$  控制的一个特

例。另外,利用 MATLAB 中鲁棒控制工具包 (Robust Control Tool Box),可以较容易地实现工程设计。

### 8.4.1 状态反馈 $H_\infty$ 控制

考虑图 8.2 所示的标准  $H_\infty$  控制问题,设增广受控对象由以下状态空间方程描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_2\mathbf{w} \tag{8.115a}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \tag{8.115b}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \tag{8.115c}$$

其中  $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  分别是  $n, r, m, p, q$  维信号向量,利用式(8.49)形式的描述方式,即可写成

$$\mathbf{G}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{I} & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{8.116}$$

设系统满足假设:

A1:  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  是能镇定的。

本小节所要讨论的定常状态反馈  $H_\infty$  次优控制问题定义如下:

定常状态反馈  $H_\infty$  次优控制问题:给定常数  $\gamma > 0$ ,求一常数矩阵  $\mathbf{F}$ ,使得经状态反馈

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} \tag{8.117}$$

后,图 8.2 所示系统满足条件:

$$\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty < \gamma, \quad \text{且 } \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} \text{ 为渐近稳定} \tag{8.118}$$

其中  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  是由  $\mathbf{w}$  到  $\mathbf{z}$  的闭环传递函数:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11} \tag{8.119}$$

根据式(8.115),  $\mathbf{D}_{12}$  是  $q \times m$  维矩阵。设

$$\text{rank } \mathbf{D}_{12} = i \leq q \tag{8.120}$$

将  $\mathbf{A}$  作最大秩分解

$$\mathbf{D}_{12} = \mathbf{U}\mathbf{V} \tag{8.121}$$

其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  分别是  $q \times i$  和  $i \times m$  维矩阵,且  $\text{rank } \mathbf{U} = \text{rank } \mathbf{V} = i$ 。

选择  $(m - i) \times m$  维矩阵  $\mathbf{F}_F$ ,满足

$$\mathbf{F}_F\mathbf{V}^T = 0, \quad \mathbf{F}_F^T\mathbf{F}_F = \mathbf{I} \tag{8.122}$$

当  $i = m$ ,即当  $\mathbf{D}_{12}$  为列满秩时,则  $\mathbf{F}_F = 0$ 。定义

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{D}_{11}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{11}^T \tag{8.123}$$

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{V}^T(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U})^{-1}(\mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{V} \tag{8.124}$$

显然,  $\mathbf{D}_{12} = 0$  时,有  $\mathbf{F}_F = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{H}_F = 0$ 。在此基础上,定义:

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A} + \mathbf{B}_1(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{11}^T\mathbf{C}_1 \tag{8.125a}$$

$$\mathbf{B}_F = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{12} \tag{8.125b}$$

$$\mathbf{C}_F = [\mathbf{I} + \mathbf{D}_{11}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{11}^T]^{1/2}\mathbf{C}_1 \tag{8.125c}$$

$$\mathbf{D}_F = \mathbf{B}_1(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1/2} \tag{8.125d}$$

$$\mathbf{F}_F = [\mathbf{I} + \mathbf{D}_{11}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T\mathbf{D}_{11})^{-1}\mathbf{D}_{11}^T]^{1/2}\mathbf{D}_{12} \tag{8.125e}$$

可以得到以下定理:

**定理 8.9** 设图 8.2 所示系统中增广受控对象由式(8.115) 描述,且满足假设 A1, 则状态反馈  $H$  次优控制问题有解的充分必要条件是:

$$(1) \mathbf{D}_{11}^T \mathbf{D}_{11} < \mathbf{I},$$

(2) 存在正常数  $\gamma > 0$  和正定矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得代数黎卡提方程

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_F^T \mathbf{H}_F \mathbf{F}_F^T \mathbf{C}_F)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_F - \mathbf{B}_F \mathbf{H}_F \mathbf{F}_F^T \mathbf{C}_F) + \mathbf{P} \mathbf{D}_F \mathbf{D}_F^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B}_F \mathbf{H}_F \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{B}_F \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_F^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}_F \mathbf{H}_F \mathbf{F}_F^T) \mathbf{C}_F + \mathbf{Q} = 0 \quad (8.126)$$

存在正定解  $\mathbf{P} > 0$ 。

如果以上条件成立, 则使得式(8.118) 成立的状态反馈矩阵由下式给出

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} + \mathbf{H}_F \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} - \mathbf{H}_F \mathbf{F}_F^T \mathbf{C}_F \quad (8.127)$$

其中  $\mathbf{P}$  是式(8.126) 的正定解。如果进一步假设

$$A2: \quad \mathbf{D}_{11} = 0, \quad \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = 0, \quad \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}$$

则在定理 8.9 中  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{F}_F = 0$ ,  $\mathbf{H}_F = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C}_F^T \mathbf{F}_F = 0$ 。定理 8.9 可以写成更加简洁的形式:

**定理 8.10** 对于由式(8.115) 描述的增广受控对象, 若其满足假设 A1 和 A2, 则状态反馈  $H$  次优控制问题有解的充分必要条件是存在  $\mathbf{Q} > 0$ , 使得代数黎卡提方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{Q} = 0 \quad (8.128)$$

存在正定解  $\mathbf{P}$ 。若上述条件成立, 则使得式(8.118) 成立的状态反馈阵  $\mathbf{F}$  由下式给出

$$\mathbf{F} = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \quad (8.129)$$

假设条件 A2 中  $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = 0$ , 即正交性条件, 其实质是意味着在评价信号  $\mathbf{z}$  中, 状态变量  $\mathbf{x}$  和控制变量  $\mathbf{u}$  的加权是相互独立的, 即

$$\mathbf{z}^2 = \mathbf{C}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{u} \quad \mathbf{z}^2 = \mathbf{C}_1^T \mathbf{x}^2 + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{u}^2 \quad (8.130)$$

在实际系统中, 所设定的控制性能评价信号往往容易满足这一条件。

虽然定理 8.9 和定理 8.10 给出的只是  $H$  次优控制问题的解, 但是我们可以通过反复“递减 — 试探求次最优解”的迭代过程, 求得  $H$  最优控制器的逼近解。这时将趋向于式(8.51) 所定义的  $\mathbf{u}_0$ 。

## 8.4.2 输出反馈 $H$ 控制

下面考虑输出反馈的  $H$  控制问题。设在图 8.2 所示标准  $H$  控制问题中, 增广受控对象  $\mathbf{G}$  由以下状态空间方程描述:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \quad (8.131a)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \quad (8.131b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \quad (8.131c)$$

即

$$\mathbf{G}(s) = \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \quad (8.132)$$

设增广受控对象满足如下假设:

S1:  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$  和  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$  为能镇定的

S2:  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1)$  和  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  为能检测的, 即系统  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1)$  和  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  的不能观测的振型都是稳定的。

S3:  $\mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{21}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]$

S4:  $\mathbf{D}_{21} [\mathbf{D}_{21}^T \quad \mathbf{B}_1^T] = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$

S5:  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{j} \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}$  对所有  $-\infty < \omega < \infty$  均为列满秩  
 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{j} \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$  对所有  $-\infty < \omega < \infty$  均为行满秩

定理 8.11 设增广受控对象式(8.131) 满足假设 S1 ~ S5。则存在控制器  $\mathbf{K}(s)$ , 使得图 8.2 所示系统为闭环内部稳定且  $\mathbf{T}_{zw}(s) < 1$  的充分必要条件是:

(1) 黎卡提方程:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}(\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{P} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = 0 \quad (8.133)$$

具有半正定解  $\mathbf{P} \geq 0$ , 且使得  $\mathbf{A} + (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \mathbf{P}$  稳定。

(2) 黎卡提方程:

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Q} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = 0 \quad (8.134)$$

具有半正定解  $\mathbf{Q} \geq 0$ , 且使得  $\mathbf{A}^T + (\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2) \mathbf{Q}$  稳定。

(3)  $\max(\mathbf{P} \mathbf{Q}) < 1$

如果上述条件成立, 则对于增广受控对象式(8.131), 使得图 8.2 所示系统为稳定, 且  $\mathbf{T}_{zw}(s) < 1$  的控制器由下式给定:

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} - \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{B} \mathbf{F} & -\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{L} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.135)$$

其中  $\mathbf{F} = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \mathbf{C}_2^T$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{Q}$ 。

定理 8.11 虽然给出的是满足

$$\mathbf{T}_{zw}(s) < 1 \quad (8.136)$$

的标准  $H_\infty$  控制次优问题解, 但是, 在  $H_\infty$  次优控制问题中对于  $\mathbf{T}_{zw}(s)$  的要求, 即式(8.52) 中的  $\mathbf{T}_{zw}(s) < \gamma$ , 可通过以下方法得到。显然, 式(8.52) 等价于

$$\frac{1}{\gamma} \mathbf{T}_{zw}(s) < 1 \quad (8.137)$$

而  $\frac{1}{\gamma} \mathbf{T}_{zw}(s)$  实际上等价于在图 8.2 所示系统中, 令增广受控对象  $\mathbf{G}$  为:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (8.138)$$

类似在状态反馈情况下, 我们也可以通过“逐步减少  $\gamma$ , 并利用定理 8.11 依次求  $H_\infty$  次优控制问题”, 这样的迭代过程逼近  $H_\infty$  控制问题的最优解。整个求解过程可以利用 MATLAB 中的鲁棒控制工具包完成。



习 题

- 8.1 设  $a(s) = \frac{1}{s+1} \quad H_2, b(s) = \frac{1}{s-5} \quad H_2$ , 试证明  $a, b \neq 0$ 。
- 8.2 设  $F(s) = \frac{s+2}{(s+5)(s-6)}, g(s) = \frac{s+3}{(s+8)(s-7)}$ , 试求  ${}_Fg$  和  ${}_Fg_0$ 。
- 8.3 令

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2-1} & 4 \\ \frac{1}{s^2-s+1} & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix} L$$

试求出它与  $H$  空间的距离。

- 8.4 已知  $T_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, T_2(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}$ , 试求模型匹配问题的解。
- 8.5 设增广受控对象

$$G(s) = \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}$$

试求状态反馈控制器  $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ , 使得图 8.2 所示系统闭环内部稳定, 且  $\mathbf{T}_{zw}(s) < \quad$ 。

8.6 设  $S(s)$  和  $T(s)$  分别是图 3.7 所示系统的灵敏度函数和补灵敏度函数, 试将混合灵敏度问题

$$\frac{W_S(s) S(s)}{W_T(s) T(s)} < 1$$

其中  $W_S(s)$  和  $W_T(s)$  为权函数, 化成标准  $H$  控制问题。

参 考 文 献

1 符曦编著 系统最优化及控制 北京:机械工业出版社,1995 .

2 秦寿康,张正方编 最优控制 北京:电子工业出版社,1984 .

3 蔡宣三编著 最优化与最优控制 北京:清华大学出版社,1982 .

4 吴麒主编 自动控制原理 北京:清华大学出版社,1992 .

5 Athans M, Falb P L .Optimal control .New York:McGraw - Hill,1996 .

6 Sage A P, White C C .Optimum systems control, Englewood Cliffs:Prentice - Hall Inc,1977 .

7 Arthur E, Bryson Jr, Ho Y C .Applied optimal control .New York:John Wiley and Sons Inc,1975 .

8 艾利斯哥尔兹 变分法 北京:人民教育出版社,1958 .

9 Athans M .Status of optimal control theory and applications for deterministic systems, IEEE Trans Auto .Contr . AC - 11(3):580 ~ 596, 1966 .

10 Brewer J W .Kronecker products and matrix calculus in system theory .IEEE Tran Circuits and Systems .1978, CAS - 25(9):772 ~ 780 .

11 Kleinman D L .On an iterative technique for Ricatti equation computations .IEEE Trans Auto .Contr, 1968, AC - 13(1):114 ~ 115 .

12 Laub A J .A Shur method for solving algebraic Ricatti equations .IEEE Trans Auto .Contr ., 1979, AC - 24(6):

- 13 Anderson B D O .Moore J B Linear optimal control .Englewood Cliffs:Prentice - Hall Inc, 1971 .
- 14 童调生等编著 .电气工程最优控制 .北京:机械工业出版社, 1989 .
- 15 王永初编 .最优控制系统设计基础 .北京:科学出版社, 1981 .
- 16 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌 .实变函数论与泛函分析 .北京:高等教育出版社, 1979 .
- 17 Duren D L .Theory of  $H^p$  Spaces .New York:Academic Press, 1970 .
- 18 Zames G .Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformation, multiplicative seminorms and approximate inverses .IEEE Trans Auto .Contr ., 1981, AC - 26: 301 ~ 320 .
- 19 Doye J, Glover K, Khargonekar P .Francis B A, State - space solution to standard  $H^\infty$  and  $H_2$  control problem . 1989 IEEE Trans Auto .Contr ., AC - 34(8): 831 ~ 842 .
- 20 Green M, Glover K, Limebeer D, Doyle J .A  $J$  - spectral factorization approach to  $H^\infty$  control .SIAM J .of Contr ., Opt ., 1990, 28(6): 1350 ~ 1371 .
- 21 Frances B A .A course in  $H^\infty$  control theory .New York:Springer-verlag, 1987 .
- 22 解学书,钟宜生编著 . $H^\infty$  控制理论 .北京:清华大学出版社, 1994 .
- 23 申铁龙著 . $H^\infty$  控制理论及应用 .北京:清华大学出版社, 1996 .
- 24 张显库等 . $H^\infty$  鲁棒控制理论发展的十年回顾 .控制与决策, 1999, 14(4): 289 ~ 296 .
- 25 Zhou K, Doyle J C, Glover K .Robust and optimal control .New Jersey:Prentice-Hall Inc ., 1996 .
- 26 薛定宇 .控制系统计算机辅助设计 .北京:清华大学出版社, 1996 .
- 27 Johnson MA, Grimble MJ .Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design .IEEE Proc .Pt .D, 1987, 134(1): 53 ~ 71 .
- 28 肖建,唐磊 .汽车主动悬挂的预见控制研究 .西南交通大学学报, 1999, 34(4): 384 ~ 387 .
- 29 肖建 .节省列车牵引能耗的最优操纵策略 .现代节能, 1994, 2: 42 ~ 46 .

# 第三篇 系统辨识

## 概 述

在实际的工程控制问题中,为了设计和分析一个控制系统,不仅要求研究受控对象的静态特性,而且要求深入分析研究其动态特性。所谓的动态特性是指受控对象的工况相对于某一平衡点发生变化时的系统运动状态特性。许多工业系统、生物医学系统和社会经济系统等都可以看成为一个动态系统,这些系统就其各自的表现形式来说都是各式各样的,但是作为动态系统来看,其动态特性都可以用数学模型来描述和分析。我们在前面讨论线性系统综合与设计、最优控制等问题时,都有一个隐含的前提,即假定受控对象的数学模型是已知的。显然,对于自动控制系统的分析和设计来说,建立受控对象的数学模型是必不可少的。建立所研究的对象的数学模型,主要有两条途径,一条是借助于基本物理定律,即利用各个专门学科领域提出来的关于物质和能量的守恒性和连续性原理,以及系统等结构数据,推导出系统的数学模型。这种建立模型的方法称为数学建模法或称解析法。但是,对很大一类工程系统,如化工过程,由于其复杂性,很难用解析法推导出数学模型。有时只能知道系统数学模型的一般形式及其部分参数,有时甚至连数学模型的形式也不知道。这时,只能通过系统的运行或试验,得到关于系统的有关数据,然后通过计算处理,建立起系统的数学模型(模型结构和参数)。这种建立数学模型的方法即为系统辨识的方法。

系统辨识是 20 世纪 60 年代开始迅速蓬勃发展起来的一门学科。这是因为在当时自动控制理论发展到了很高的水平,经典控制论被更有前途的现代控制理论所超越。与此同时,工业大生产的发展,也要求将控制技术提到更高的水平。现代控制理论的应用是建立在已知受控对象的数学模型这一前提下的,而在当时对受控对象数学模型的研究相对较为滞后。现代控制理论的应用工作中遇到了确定受控对象合适的数学模型的各种困难。因此,建立系统数学模型的方法——系统辨识,就成为应用现代控制理论的重要前提。在另一方面,随着计算机科学的飞速发展,计算机为辨识系统所需要进行的离线计算和在线计算提供了高效的工具。在这样的背景下,系统辨识问题便愈来愈受到人们的重视,成为发展系统理论,开展实际应用工作中必不可少的组成部分。

国际自动控制联合会(IFAC)自 1967 年起每三年召开一次“辨识和系统参数估计”专业性国际学术讨论会。到目前为止已进行了 11 届。这表明它是十分活跃和受到重视的学科之一。系统辨识在许多领域得到了成功的应用。目前,单变量线性系统辨识的理论和方法,已趋于成熟阶段,多变量线性系统的辨识尚有待于进一步提高。另外,关于连续时间模型、非线性系统模型和分布参数模型等的辨识方法,以及模糊逻辑,神经网络,小波变换等方法在系统辨识中的应用等方面的讨论,目前正方兴未艾。

系统辨识的方法很多,从广义上来说,它可以分为相关分析及谱分析方法类、预测误差方法类和子空间方法类等。本篇中所介绍的非参数辨识方法属于相关分析及谱分析方法类,而最小二乘法及最大似然法属于预测误差类方法。子空间方法是近年来发展的一类新的辨识方法,它具有计算速度快等一系列特点。

# 第九章 建模与系统辨识

## § 9.1 数学模型

数学模型是研究事物性质的一种抽象工具,它是描述实际系统各物理量之间关系的最简单,最能体现被描述对象基本特性的数学表达式。不同的物理系统可能是同一个数学模型。较之其他的模型形式来说,数学模型更便于人们对它独立地进行处理,这是其他模型形式(如物理模型)不易做到,甚至做不到的。数学模型的应用极为广泛,它是分析、设计、预报、控制和故障诊断一个实际物理系统的基础。

正如前面所指出的那样,数学模型的建立可以通过数学建模法或者通过系统辨识法实现。对于复杂的工业过程,我们通常不可能采用数学建模的方法,仅根据物理定律的推导而得到系统的数学模型,或者虽然通过对系统的分析,我们得到了系统数学模型的结构,但是相应的参数未知,这时就必须采用系统辨识的方法来建立系统的数学模型。与数学建模所得到的模型不同,通过系统辨识而得到的系统数学模型具有以下特征:

(1)由辨识所得到的模型具有有限的有效性(只描述系统在某些工作点附近的动态行为,或者系统对某些特定信号的响应等)。

(2)由辨识所得到的模型,通常不反映系统具体的物理关系。这是因为在许多情况下,模型中的参数没有直接的物理意义,它们仅仅作为一个工具,给出系统整个动态行为的描述。

(3)这样的模型比较容易构造及利用。

虽然从理论上说,对于受控系统,人们在辨识它的数学模型之前可以对它一无所知,即所谓“黑箱问题”。但是实际上,人们在辨识系统之前通常要对受控系统进行一些调查,对它的情况有先验的部分了解,使得黑箱问题变成灰箱问题。这是因为在进行系统辨识之前,我们必须首先构造适当的模型结构。当受控系统是非线性系统时,这一工作的难度很大。另外在对受控系统的输入输出数据的采集中,不可避免地会混入噪声,同时受控系统也可能是时变或缓慢时变的。这些都给系统辨识带来了一定的难度。

根据对受控系统的先验知识,可以将数学模型分成若干类,大致可列举如下:

(1)按受控系统的输入输出个数,可分成单输入与单输出(SISO)模型和多输入多输出(MIMO)模型。

(2)按受控系统参数的性质分为分布参数模型和集中参数模型。前者要用偏微分方程描述,后者用常微分方程描述。

(3)按受控系统性质可分为线性系统模型和非线性系统模型。

(4)按要建立模型在时间上是连续的或离散的,分为连续时间模型和离散时间模型。前者通常用微分方程描述,而后者用差分方程描述。

(5)所要建立的受控系统模型还可分为非参数模型和参数模型。在经典控制理论中,分析系统常采用非参数模型,如频率响应、阶跃响应和脉冲响应等。它所对应的系统辨识方法是非参数辨识法,如频谱分析、富氏分析和相关分析等。而现代控制理论中常用的状态方程和差分

方程、微分方程等数学模型都是参数模型,对参数模型一旦方程的阶次和全部待定的系统参数都确定了,数学模型也就确定了。因此,对于参数模型,在确定了模型结构以后,可以根据受控系统的输入输出数据来估计模型中各个参数的值,这一过程称为参数估计。

虽然被辨识的对象大都为连续时间系统,但是,在系统辨识中,我们通常是根据所采集的待辨识对象在离散的采样时刻的输入输出数据,辨识它的离散化模型。究其原因,一方面是由于计算机技术的飞速发展,数字计算机在系统辨识,系统仿真和系统控制等方面起着主导的作用,而计算机只能处理离散时间的信号,从而使得在计算机系统仿真或控制中,我们通常要求系统的离散化模型。另一方面,描述离散时间随机系统的随机差分方程比描述连续时间随机系统的随机微分方程更容易进行数学处理。在本书中,我们也只讨论离散时间数学模型的辨识问题。具体来说,我们将讨论脉冲响应函数和线性差分方程的辨识问题。

脉冲响应函数又称权函数,它反映了单位脉冲在  $t = 0$  时刻加到输入端后系统的输出响应。脉冲响应函数模型属于非参数模型。对于离散型单输入单输出线性系统,脉冲响应序列为:  $\{ h(i) \}, i = 0, 1, 2, \dots$ ; 而根据叠加原理,系统对于任意形式的输入,其输出可以由输入序列  $\{ u(i) \}$  和脉冲响应序列的卷积而求得:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k h(k-i) u(i) \tag{9.1}$$

表面上看来  $h(i)$  等似乎也是参数,但由于这些参数原则上有无数量,所以脉冲响应函数属于非参数模型。用脉冲响应序列作为系统的模型,在应用上有诸多不便之处,我们更多采用的是线性差分方程模型。在系统辨识中,通常采用的差分方程模型有:

1.自回归模型(AR)

$$D(q^{-1}) y(k) = e(k) \tag{9.2}$$

其中  $y(k)$  为噪声,  $e(k)$  为白噪声过程,

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d} \tag{9.3}$$

$q^{-1}$  称为延时算子  $q^{-1} y(k) = y(k-1)$ 。AR 模型表明噪声  $e(k)$  等于它自身的  $k$  时刻及截止到  $k - n_d$  时刻诸值的回归值,这也就是它被称为自回归模型的原因。

2.滑动平均模型(MA)

$$y(k) = C(q^{-1}) e(k) \tag{9.4}$$

其中

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \tag{9.5}$$

它说明噪声  $e(k)$  等于白噪声  $e(k)$  的滑动平均值,故称为滑动平均模型。

3.自回归滑动平均模型(ARMA)

$$D(q^{-1}) y(k) = C(q^{-1}) e(k) \tag{9.6}$$

即噪声  $e(k)$  既包含它自身的回归值,同时又包含了白噪声的滑动平均值。

以上讨论的均是噪声的模型,我们更多需要的是把噪声的模型与系统输入输出关系综合在一起的模型。

4.受控的自回归滑动平均模型(ARMAX)

$$A(q^{-1}) y(k) = B(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) e(k) \tag{9.7}$$

其中  $y(k)$  和  $u(k)$ , 分别为系统的输入和输出

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n_a} \quad (9.8)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n_b} \quad (9.9)$$

前面 3 类模型可以看成是 ARMAX 模型的特殊形式。另外, 若  $C(q^{-1}) = 1$ , 则 ARMAX 模型变成:

### 5. 受控的自回归(ARX) 模型

$$A(q^{-1}) y(k) = B(q^{-1}) u(k) + e(k) \quad (9.10)$$

ARX 模型可以很容易地写成线性回归形式。

### 6. 受控的滑动平均(MAX) 模型

$$y(k) = B(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) e(k) \quad (9.11)$$

## § 9.2 辨识实验输入信号

在辨识实验中对待辨识的对象所加入的输入信号的形式对辨识结果的影响是非常大的。输入信号的选择与待辨识的对象有关, 与所采用的辨识方法也有关系。还可以采用优化的方法选择最优输入信号。

下面是一些典型的输入信号

#### 1. 阶跃函数

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases} \quad (9.12)$$

阶跃函数中只有振幅  $u_0$  待定。对于具有较大的信噪比的系统, 用阶跃函数作为输入可以得到关于系统动态的许多信息, 如上升时间、最大超调量、稳态增益等。但如果要想得到系统较精确的模型, 阶跃函数作为输入往往是不够的。

#### 2. ARMA 随机序列

设  $\{e(k)\}$  是计算机所产生的伪白噪声序列, 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e(k) e(k+1) = 0$$

$$\text{或} \quad R_{ee}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & \tau = 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

其中  $R_{ee}(\tau)$  是噪声序列  $\{e(k)\}$  的自相关函数。

辨识实验输入序列  $\{u(k)\}$  可以由  $\{e(k)\}$  通过 ARMA 过程产生:

$$u(k) + c_1 u(k-1) + \dots + c_m u(k-m) = e(k) + d_1 e(k-1) + \dots + d_m e(k-m) \quad (9.14)$$

其中,  $m, \{c_j\}, \{d_j\}$  等均是待定参数。 $\{e(k)\}$  通常选定为高斯分布或均匀分布。选择不同的  $c_j$  和  $d_j$ , 可以使得  $\{u(k)\}$  具有不同的频率特性和不同的形式。为使得  $\{u(k)\}$  为平稳过程, 必须选择  $c_j$ , 使得

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_m q^{-m} \quad (9.15)$$

的零点位于单位圆内。

3.正弦波合成

u(t) = \sum\_{j=1}^m a\_j \sin(\omega\_j t + \phi\_j) \tag{9.16}

其中,  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$  为角频率,  $\phi_j$  为初相角,  $a_j$  为振幅,  $\{\omega_j\}$ 、 $\{\phi_j\}$  及  $\{a_j\}$  等均是待定参数, 适当选择这些参数, 可以得到很好的辨识结果。

4.伪随机二位式序列信号

伪随机二位式序列(PRBS), 是一类周期性的拟白噪声序列。它具有类似于白噪声的自相关函数, 同时又是一个周期性重复的函数, 即是一个确定性函数, 所以称为伪随机信号。

构造伪随机信号的方法有许多种, 最常用的最方便的方法是采用“最大长度两位式序列信号”(M序列)。

M序列可用线性反馈(模2加法)移位寄存器产生。也可以利用数字计算机编程产生。例如图9.1所示的四级移位寄存器, 取其反馈为第三级和第四级的模2加法和。设该移位寄存器每一级的初始状态为逻辑1(其实初始状态只要不是全为逻辑零就可以了), 当同时加入移位脉冲后, 它的输出端即输出{1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0} 这样的周期长度为15的二电平周期变化的序列。

一般说来, 一个  $N$  级移位寄存器除各级都为零的状态以外, 总共有  $(2^N - 1)$  种组合状态, 因此, 其输出序列的最大周期为  $(2^N - 1)$ 。这样, 当一个  $N$  级移位寄存器所产生的输出序列长度为  $(2^N - 1)$  时, 称为最大长度序列或称 M 序列。例如在前面的 4 级移位寄

图 9.1 四级移位寄存器框图

存器, 它的 M 序列的长度  $L = 2^4 - 1 = 15$ 。因此, 采用第三级和第四级模2加法和作为反馈信号的四级移位寄存器能产生 M 序列。读者可以自行验证, 若我们取第二级和第四级的模2加法和为反馈信号, 则输出序列的周期长度将大大缩短, 不可能产生 M 序列。因此, 在带有反馈的移位寄存器中, 反馈信号的构成对序列的长度有决定性的影响。那么, 什么样的线性反馈逻辑构成产生 M 序列呢? 不少参考文献如文献[2] 上提供了相应的表, 根据表格即可适当选择反馈逻辑, 构成 M 序列。利用计算机, 还可以直接根据 M 序列本身(如 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0) 并周期变化, 来产生二位式序列信号。

M 序列具有以下性质:

- (1) M 序列的长度为  $(2^N - 1)$ 。
- (2) 在一个周期内逻辑 0 状态比逻辑 1 状态少一个。
- (3) 若在一个周期内, 状态逻辑不变的长度称为“游程”, 则对于  $N = 4$  时, 其长度为 1 个码的游程有 4 个, 长度为 2 个码的游程有 2 个, 长度为 3 个码的游程有 1 个, 长度为 4 个码的游程有 1 个。总游程数为  $2^{N-1} = 2^{4-1} = 8$ 。因此, 在总共 8 个游程中, 长度为 1 个码的占 1/2, 长度为 2 个码的占 1/4, 长度为 3 和 4 个码的占 1/8。这一结论也可以推广到一般情况。
- (4) M 序列具有“移位相加”的性质, 也就是说, 如果将一个 M 序列和将其延迟了  $r$  个码以后的序列按模 2 加法规则相加, 所得到的新序列是延迟了  $q$  个码的原来那个 M 序列。其中  $r, q$  是满足  $1 \leq r, q \leq N - 1$  的正整数。例如 M 序列 {1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0} 延迟  $r = 13$

个码后得序列: {1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1}, 把这两个序列按模 2 加法相加得新序列 {0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1}, 它相当于延迟了  $q = 10$  个码的原序列。

(5) 如果约定逻辑 1 状态相当于电平“ -  $a$ ”, 逻辑 0 状态相当于电平“  $a$ ”, 并设移位寄存器基本时钟周期为  $T$ , 则 M 序列 {1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0} 所对应的伪随机二位式序列的波形如图 9 .2 所示。

它的自相关函数

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) u(t + \tau) dt$$

(9 .17)

的离散表达式为: 图 9 .2 M 序列的波形及自相关函数

$$R_{uu}(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k) u(k + \mu)$$

(9 .18)

其中,  $k = \frac{t}{T}$ ,  $\mu = \frac{\tau}{T}$  为 M 序列偏移码的数目。

按同符号电平相乘为 +  $a^2$ , 异符号相乘为 -  $a^2$  的原则, 式(9 .18) 可写为:

$$R_{uu}(\mu) = \frac{a^2}{N} \{ u(k) \text{ 和 } u(k + \mu) \text{ 同符号码的个数} - u(k) \text{ 和 } u(k + \mu) \text{ 异符号码的个数} \}$$

(9 .19)

显然, 当  $\mu$  为正整数时,  $u(k) u(k + \mu)$  等价于将原序列 {  $u(k)$  } 和另外一个延迟  $\mu$  个码的序列 {  $u(k + \mu)$  } 按模 2 加法相加, 根据“ 移位相加 ”性质, 所得到的是一个将原序列延迟  $q$  个码的新 M 序列。在这个序列中逻辑 1 状态等价于两个码符号相异, 它的个数为  $(N + 1)/2$ , 而逻辑 0 的状态等价于两对应码符号相同, 它的个数为  $(N - 1)/2$ 。于是当  $\mu = 1, 2, \dots, N - 1$  时, 有

$$R_{uu}(\mu) = \frac{a^2}{N} \left[ \frac{N - 1}{2} - \frac{N + 1}{2} \right] = - \frac{a^2}{N}, \quad \mu = 1, 2, \dots, N - 1$$

(9 .20)

当  $\mu = 0$  时, 显然成立

$$R_{uu}(0) = \frac{a^2}{N} \cdot N = a^2$$

(9 .21)

总结以上两式可得

$$R_{uu} = \begin{cases} a^2 & \mu = 0 \\ - \frac{a^2}{N} & \mu = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases}$$

(9 .22)

由上式可见, 只要  $N$  充分大, 伪随机二位式序列的自相关函数就相当接近白噪声的自相关函数, 即 M 序列与离散时间白噪声具有相似的性质。

## 习 题

- 9 .1 什么叫参数模型和非参数模型 ? 它们的辨识方法有什么区别 ?
- 9 .2 利用三角函数的知识, 证明: 正弦波信号  $u(k) = a \sin(k + \varphi)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; 满足差分方程



$$u(k) - 2\cos \theta u(k-1) + u(k-2) = 0$$

上式提供了一个计算正弦波信号的迭代算法。

9.3 在用移位寄存器产生 M 序列时,是否必须从最后一级移位寄存器输出?

9.4 移位寄存器的初始状态(除全不“0”的状态以外)是否对产生 M 序列有影响?对辨识结果是否有影响?

9.5 在选择伪随机二位式序列的周期长度时应当注意一些什么问题?

# 第十章 非参数辨识方法

非参数模型辨识法(也称经典辨识法)得到的模型是非参数模型。它在假设系统是线性的前提下,不必事先确定模型的具体结构,可以用于任意复杂的系统的辨识,在工程上有广泛的应用。非参数模型通常的表现形式是以时间或频率为自变量的实验曲线。通过适当的数学处理,也可以把它们转换成参数模型,如传递函数等。

常见的非参数模型辨识的方法有瞬态响应分析法,频率响应法,相关分析法和谱分析法等。

## § 10 .1 阶跃响应法

阶跃信号是最常见的一类输入信号,如电源的突然加上或切断,输入阀门突然开启或关闭等,都是阶跃信号的例子。在被辨识的系统上人为地施加阶跃信号,测出系统输出随时间变化的响应曲线,即阶跃响应曲线,然后,根据该曲线,推导出被辨识系统的传递函数,这就是阶跃响应法。

由于实测现场运行条件的限制,在现场做阶跃输入试验,可能存在有很多困难。为了得到比较准确的阶跃响应,必须合理选择阶跃输入信号的幅值。为了消除偶然性干扰因素的影响,应在相同条件下重复地实验,直到获得两条基本相同的阶跃响应曲线为止。

在取得系统的阶跃响应曲线后,可以根据阶跃响应曲线算出被辨识系统的传递函数。通常我们都是假定传递函数的结构为已知的条件下,利用图解法推算出传递函数的参数。一般都是利用试探法选择一阶和二阶的带纯滞后的线性模型作为待辨识系统的模型。

图 10 .1 带纯滞后的系统  
阶跃响应曲线

### 10 .1 .1 具有纯滞后的一阶惯性环节

对于常见的开环稳定的工业过程,即自平衡的工业过程,它的阶跃响应曲线通常为一 S 形曲线,如图 10 .1 所示。

如果采用带纯滞后的一阶惯性环节模型

$$G( s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{- s} \tag{10 .1}$$

作为自平衡工业过程的模型,则稳态放大倍数  $K$ ,时间常数  $T$  和纯滞后 三个参数需要确定。

系统过渡过程结束后,系统即达到稳态值  $y( )$ ,如图 10 .1 所示。根据定义,稳态放大倍数  $K$  是输出稳态值  $y( )$  与阶跃输入幅值  $u_0$  之比

$$K = \frac{y( )}{u_0} \tag{10 .2}$$

在计算时间常数  $T$  和纯滞后  $\tau$  时, 可将实验阶跃响应曲线  $y(t)$ , 修改成如下的标么阶跃响应曲线  $y^*(t)$

$$y^*(t) = \frac{y(t)}{y(\infty)} \tag{10.3}$$

若用式(10.1) 形式的带纯滞后一阶环节模型, 则  $y^*(t)$  的数学表达式为

$$y^*(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} & t \geq \tau \end{cases} \tag{10.4}$$

为确定  $T$  和  $\tau$ , 应当选  $y^*(t)$  的两个坐标值, 以便联立求解, 如选择  $t_2 > t_1 > \tau$ , 则

$$\begin{aligned} y^*(t_1) &= 1 - e^{-\frac{t_1-\tau}{T}} \\ y^*(t_2) &= 1 - e^{-\frac{t_2-\tau}{T}} \end{aligned} \tag{10.5}$$

对式(10.5) 两边取自然对数, 得

$$\begin{aligned} T &= \frac{t_2 - t_1}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]} \\ &= \frac{t_2 \ln[1 - y^*(t_1)] - t_1 \ln[1 - y^*(t_2)]}{\ln[1 - y^*(t_1)] - \ln[1 - y^*(t_2)]} \end{aligned} \tag{10.6}$$

特别地, 若选  $y^*(t_1) = 0.39$ ,  $y^*(t_2) = 0.63$ , 可得

$$\begin{aligned} T &= 2(t_2 - t_1) \\ &= 2t_1 - t_2 \end{aligned} \tag{10.7}$$

### 10.1.2 二阶环节

对于图 10.1 所示的实验阶跃响应曲线, 也可以用二阶环节来描述。在实际中, 究竟是用具有纯时滞的一阶环节还是用二阶环节来描述, 没有严格区分的方法, 可以将两种计算结果和实验曲线对比, 看哪一种精度高, 就选哪一种。

二阶环节的传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2 Ts + 1} \tag{10.8}$$

同样, 我们可以采用式(10.2), 求得稳态放大倍数  $K$ , 并根据式(10.3), 作出标么阶跃响应曲线  $y^*(t)$ 。然后, 根据  $y^*(t)$  求得参数  $T$  和  $\tau$ 。对于  $y^*(t)$ , 它对应的二阶环节传递函数应为:

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2 Ts + 1} \tag{10.9}$$

它也可以写成:

$$G(s) = \frac{1}{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)} \tag{10.10}$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{T}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ \sigma_2 &= \frac{1}{T}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{aligned} \tag{10.11}$$

因为  $\tau_1 \neq \tau_2$ , 故  $\tau_1$  和  $\tau_2$  为实数且均大于零。由式(10.11) 可得:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \\ &= \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\tau_1\tau_2} \end{aligned} \tag{10.12}$$

输入单位阶跃函数时, 式(10.10) 所示环节的阶跃响应为:

$$y^*(t) = 1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \tag{10.13}$$

令  $\tau_2 = \tau_1$ , 则式(10.13) 可改写成

$$\begin{aligned} 1 - y^*(t) &= \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \\ &= \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} (1 - 1) = 0 \end{aligned} \tag{10.14}$$

两边取自然对数, 有

$$\ln[1 - y^*(t)] = \ln \frac{1}{\tau_1} - \frac{t}{\tau_1} + \ln 1 - \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \tag{10.15}$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 上式为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln[1 - y^*(t)] = \ln \frac{1}{\tau_1} - \frac{t}{\tau_1} \tag{10.16}$$

即, 这时  $\ln[1 - y^*(t)]$  趋近于一条直线, 其斜率  $m$  和截距  $b$  为:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{\tau_1} \\ b &= \ln \frac{1}{\tau_1} \end{aligned} \tag{10.17}$$

因此只要在坐标纸上画出当  $t$  充分大时的  $\ln[1 - y^*(t)]$  的图形, 然后作为其渐近线, 再求出此直线的斜率  $m$  和截距  $b$ , 就可算出:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1}{m} \\ &= \frac{e^b}{e^b - 1} \end{aligned} \tag{10.18}$$

## § 10.2 相关分析法

一般说来, 由于工业现场存在有噪声干扰, 阶跃响应法所建立的数学模型精度较低。并且由于这些方法在测试时必须使被辨识对象由正常运行状态转入试验状态, 从而影响生产。

相关分析法抗干扰能力强, 辨识精度高, 并且可以在线辨识, 从而成为在工业中较为广泛应用并且有效的辨识方法。它既可以用来辨识非参数模型, 以得到被辨识系统的频率响应或脉冲响应。另外也可以与最小二乘法相结合, 构成相关分析——最小二乘两步法。

### 10.2.1 相关函数

相关函数是随机过程的一个统计量, 它可以描述一个信号的未来值与当前值或者一个信号的未来值与另一个信号的当前值之间的依赖关系。

设  $x(t)$  为平稳随机过程, 则  $x(t)$  与  $x(t + \tau)$  是该随机过程的任意两个随机变量, 定义

自相关函数  $R_{xx}(\tau)$  为:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E\{x(t)x(t+\tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2)f_x(t_1,t_2,\tau)dt_1dt_2 \end{aligned} \tag{10.19}$$

其中  $f_x(t_1,t_2,\tau)$  是  $\{x(t), x(t+\tau)\}$  的二维联合分布概率密度。若  $x(t)$  和  $y(t)$  为联合平稳随机过程,则可以定义互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  为:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E\{x(t)y(t+\tau)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)y(t_2)f_{xy}(t_1,t_2,\tau)dt_1dt_2 \end{aligned} \tag{10.20}$$

其中  $f_{xy}(t_1,t_2,\tau)$  是  $\{x(t), y(t+\tau)\}$  的二维联合分布概率密度。  
对于具有各态历经性的平稳随机过程,在式(10.19)和式(10.20)中所求的数学期望值,可以用样本函数在整个时间轴上的平均值代替,即成立

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \tag{10.21}$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt \tag{10.22}$$

对于应用中经常遇到的正态平稳过程,如果其均值为零,自相关函数  $R_{xx}(\tau)$  连续,那么可以证明该过程具有各态历经性的一个充分条件是

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |R_{xx}(\tau)|d\tau < \infty$$

事实上,各态历经的条件是比较宽的,工程上碰到的平稳过程大多数均为各态历经的。在实践中,我们通常不直接验证平稳过程是否满足各态历经的条件,而事先假定所研究的平稳过程具有各态历经性,看所得的结论是否与实际相符合,如果不符合再修改假设,另作处理。因此,在本书中,我们今后都认为所讨论的随机过程为各态历经的平稳过程。

自相关函数  $R_{xx}(\tau)$  通常具有以下性质:

- (1)  $R_{xx}(\tau)$  是  $\tau$  的偶函数;即  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$
- (2)  $R_{xx}(0) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$ , 其中  $\mu_x$  为  $x(t)$  的均值,  $\sigma_x^2$  为  $x(t)$  的方差。
- (3)  $R_{xx}(\tau) \leq \mu_x^2$
- (4)  $R_{xx}(\tau)$  在  $\tau = 0$  时取极大值,即  $R_{xx}(\tau) \leq R_{xx}(0)$

互相关函数  $R_{xy}(\tau)$  具有以下性质

- (1)  $R_{xy}(\tau)$  通常不是  $\tau$  的偶函数。
- (2)  $R_{xy}(\tau)$  不一定在  $\tau = 0$  时取极大值。
- (3) 若  $x(t)$  和  $y(t)$  是彼此独立的随机信号,且至少有一个信号的均值为零,则  $R_{xy}(\tau) = 0$ 。
- (4)  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ 。
- (5)  $|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}$ 。

### 10.2.2 相关分析的理论基础

相关分析法的理论基础是维纳-霍甫(Wiener-Hopf)方程。考虑图10.2所示的有噪声干扰的系统。

该系统的理想输出  $z(t)$  可表示为卷积形式

$$z(t) = \int_0^T g(\tau) u(t - \tau) d\tau \quad (10.23)$$

其中  $g(\tau)$  为系统的脉冲响应。上式两边同乘以  $u(t - \tau)$ , 得

$$z(t) u(t - \tau) = \int_0^T g(\tau) u(t - \tau) u(t - \tau) d\tau \quad (10.24)$$

两边同取由 0 到  $T$  的积分, 并取极限得

$$\lim_T \frac{1}{T} \int_0^T z(t) u(t - \tau) dt = \int_0^T g(\tau) \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T u(t - \tau) u(t - \tau) dt d\tau \quad (10.25)$$

若  $u(t)$  和  $z(t)$  均为具有各态历经性的平稳过程, 则成立:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T u(t - \tau) u(t - \tau) dt \quad (10.26)$$

$$R_{uz}(\tau) = \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T z(t) u(t - \tau) dt \quad (10.27)$$

代入式(10.25), 成立

$$R_{uz}(\tau) = \int_0^T g(\tau) R_{uu}(\tau - \tau) d\tau \quad (10.28)$$

作变量置换, 也可写成

$$R_{uz}(\tau) = \int_0^T g(t) R_{uu}(\tau - t) dt \quad (10.29)$$

这就是著名的维纳—霍甫方程。对于图10.2所示的系统来说,  $z(t)$  是系统的理想输出, 它实际上往往是测不到的。实际测量值是  $y(t)$ 。由图可见,  $y(t) = z(t) + n(t)$ , 其中  $n(t)$  是量测噪声。对于实际系统来说, 由于测量误差等因素的影响, 量测噪声往往是不可避免的。辨识的任务就是要根据已被噪声污染了的系统输出测量值  $y(t)$  和系统输入值  $u(t)$ , 得出系统的脉冲响应函数  $g(t)$ 。若  $u(t)$  和  $n(t)$  不相关, 且  $E(n(t)) = 0$  或  $E(u(t)) = 0$ , 则有:

图 10.2 有噪声干扰的系统

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T [z(t) + n(t)] u(t - \tau) dt \\ &= R_{uz}(\tau) + \lim_T \frac{1}{T} \int_0^T n(t) u(t - \tau) dt \\ &= R_{uz}(\tau) \end{aligned} \quad (10.30)$$

在上式中, 我们利用了互相关函数的性质(3)。将式(10.30)代入式(10.29), 立即得到

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^T g(t) R_{uu}(\tau - t) dt \quad (10.31)$$

由此可见只要噪声  $n(t)$  和输入  $u(t)$  不相关, 并且其中某一个的均值为零, 则我们可以通过式(10.31)解出待求的系统脉冲传递函数  $g(t)$ 。在实际系统中关于  $n(t)$  和  $u(t)$  不相关的条件往往是可以满足的。因此, 相关分析具有较强的抗干扰能力, 所以可以用它求解相当广泛一类系统的脉冲传递函数。

维纳—霍甫方程式(10.29)或式(10.31)是一个积分方程, 它的求解是比较困难的。但是若采用白噪声作为系统输入  $u(t)$ , 则很容易求解。这是因为对白噪声, 它的自相关函数为:

$$R_{uu}(\tau) = A^2 \delta(\tau) \tag{10.32}$$

其中  $\delta(\tau)$  表示 Dirac 函数。代入式(10.31) 可得：

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= \int_0^\infty g(t) \cdot A \delta(\tau - t) dt \\ &= Ag(\tau) \end{aligned} \tag{10.33}$$

可见,当输入是白噪声时,系统的脉冲响应与输入输出的互相关函数  $R_{uy}(\tau)$  成正比。这样,求脉冲响应问题,可通过计算互相关函数而得解。

在采用白噪声信号作为输入时,由于白噪声的整个能量分布在一个很广的频率范围内,所以它对正常运行影响不太大,实验可以在正常运行状态下进行,并且若  $u(t)$  为白噪声,则由于白噪声的性质,它与量测噪声  $v(t)$  必定是相互独立的,式(10.30) 必然成立,避免了  $v(t)$  所引起的误差。然而白噪声是一种理想信号,很难在物理上真正实现。而且采用白噪声作输入时,对相关函数的计算,理论上需要用无限长时间上的观测数据,这是我们不希望的。

采用伪随机二位式序列,则由于它具有近似白噪声的性质,一方面可以简化求解维纳—霍甫方程的过程,另一方面也比较容易产生。更重要的是它只需较少的观测数据,就能完成相关函数的计算。在选择伪随机二位式序列的周期时,应当要使得该周期大大大于待辨识对象的过渡过程时间。

## 习 题

10.1 设有一系统的标么阶跃响应  $y^*(t)$  如下表所示

$t$	6	8	10	12	14	16	18	20
$y^*$	0.863175	0.945158	0.978710	0.991885	0.996948	0.998860	0.999576	0.999843

如果采用二阶环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

来描述该系统,试估计模型中的参数  $T$  及  $\zeta$ 。

10.2 阐述相关分析法辨识系统的脉冲响应的步骤及应注意的问题。

10.3 试推出维纳—霍甫方程式(10.29) 的离散形式,以及自相关函数和互相关函数计算公式(10.21) ~ 式(10.22) 的离散形式。讨论当输入  $u(k)$  为伪随机二位式序列时,如何利用相关分析法得出系统的脉冲响应函数。

# 第十一章 最小二乘辨识

前面已经指出,参数估计是在假定待辨识对象模型结构已知的条件下,利用实验数据来确定系统模型中的参数,从而得到系统模型的方法。参数估计有很多不同的算法,最小二乘法 (LS) 是最广泛应用的方法之一,它还是其它方法的基础。

1795 年, K .F. Gauss 首先用最小二乘法预测行星的运动轨道,开辟了利用最小二乘理论处理观测得到的实验数据的新纪元。本世纪 60 年代, J. Aström 将这一方法用于线性动态系统的参数估计,并取得了许多成果。最小二乘法几乎与所有的辨识算法都有联系,在使用它时,不需要太多的数据统计方面的知识,容易为工程技术人员所掌握。当其它辨识算法失效时,有时仍然还可应用最小二乘法。从最小二乘法还可推广出辅助变量法、广义最小二乘法,扩充最小二乘法和多步法等。

## § 11.1 最小二乘估计的批处理算法

考虑单输入单输出对象的辨识问题,假定事先根据对待辨识对象的了解,选定描述对象的数学模型为线性差分模型,并进一步确定模型的阶次为  $n$ ,即对象的数学模型为:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (11.1)$$

其中,  $\{u(k)\}$  为输入序列;  $\{y(k)\}$  为输出序列;  $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  为待辨识的未知参数;  $n$  为模型的阶次。参数估计问题就是在假定系统处于稳定运行的前提下,根据系统的输入输出的实际测量值  $u(k)$  和  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+N$ , 来估计系统模型参数  $a_i$  和  $b_i$ , 使得模型式(11.1) 在某一判据下与测得的输入输出数据相拟合。在实际中,由于量测噪声干扰,和模型拟合误差等的存在,在模型式(11.1) 中引入方程误差  $e(k)$ , 得

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) + e(k) \quad (11.2)$$

上式也可以改写成线性回归的形式

$$y(k) = \mathbf{h}^T(k) + e(k) \quad (11.3)$$

其中

$$\mathbf{h}^T(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n)] \quad (11.4)$$

$$\mathbf{h}^T = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n] \quad (11.5)$$

如果对待辨识对象的输入输出测量了  $n+N$  次, 其中  $N \geq 2n+1$ , 测得数据  $y(0), y(1), \dots, y(n+N)$  和  $u(0), u(1), \dots, u(n+N)$ , 分别令  $k = n+1, \dots, n+N$ , 则可列出  $N+1$  个  $(2n+1)$  元的一次方程组:



$$\begin{aligned}
 y(n) &= -a_1 y(n-1) - \dots - a_n y(0) + b_0 u(n) + \dots + b_n u(0) + e(n) \\
 y(n+1) &= -a_1 y(n) - \dots - a_n y(1) + b_0 u(n+1) + \dots + b_n u(1) + e(n+1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 y(n+N) &= -a_1 y(n+N-1) - \dots - a_n y(N) + b_0 u(n+N) + \dots + b_n u(N) + e(n+N)
 \end{aligned}$$

写成矩阵形式,得

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} + \mathbf{e} \tag{11.6}$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) \\ \mathbf{h}^T(n+1) \\ \dots \\ \mathbf{h}^T(n+N) \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

$$\mathbf{Y}^T = [y(n) \quad \dots \quad y(n+N)] \tag{11.8}$$

$$\mathbf{e}^T = [e(n) \quad \dots \quad e(n+N)] \tag{11.9}$$

和  $\mathbf{h}^T(k)$ ,  $k = n, n+1, \dots, (n+N)$ , 由式(11.4) 和式(11.5) 所定义。

最小二乘法(LS) 的参数估计,就是要从一类模型式(11.2) 中,找到这样的模型,在这个模型中,系统的参数向量 的估计值  $\hat{\theta}$ ,将使得残差  $e(i)$ ,  $i = n, n+1, \dots, n+N$  的平方和为最小。即使得评价函数

$$J = \sum_{k=n}^N e^2(k) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} \tag{11.10}$$

取最小值。这种根据使得残差平方和  $J$  为最小的原则来确定估计量  $\hat{\theta}$  的方法,即为最小二乘法。式(11.6) 亦可写成

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{H} \tag{11.11}$$

代入式(11.10) 中可得

$$J = [\mathbf{Y} - \mathbf{H}]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{H}] \tag{11.12}$$

使  $J$  为最小的必要条件为

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = -2\mathbf{H}^T(\mathbf{Y} - \mathbf{H}) = 0 \tag{11.13}$$

若系数矩阵  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  为非奇异时,可得关于  $\theta$  的最小二乘估计值:

$$\hat{\theta}_{LS} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \tag{11.14}$$

使  $J$  为最小的充分条件为:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} = 2\mathbf{H}^T \mathbf{H} > 0 \tag{11.15}$$

显然,当方阵  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  为非奇异时,  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  也是正定的,满足充分条件。它表明了最小二乘辨识法的一个重要性质,即它只有一个最小值,即全局最小值。因此,  $\hat{\theta}_{LS}$  是唯一的。在统计学中,方程式(11.13) 称为正规方程组。由于估计量  $\hat{\theta}_{LS}$  是在取好足够的输入输出数据后一次计算出来的。所以式(11.14) 又称为最小二乘估计的批处理算法。

关于  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  为正定阵的问题,引出了关于输入信号  $u(k)$  为持续激励的条件。一般说来,称  $u(k)$  对所有  $k$  来说均为  $n$  阶持续激励,若存在整数  $m$ ,使得

$$\mathbf{I}_1 > \sum_{k=t}^{t+m} (\mathbf{I}(k))^T (\mathbf{I}(k)) > \mathbf{I}_2 \quad (11.16)$$

其中  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 > 0$ , 向量

$$\mathbf{I}^T(k) = [u(k-1) \dots u(k-n)] \quad (11.17)$$

对于最小二乘法来说, 如果输入信号  $u(k)$  为  $n$  阶持续激励, 则最小二乘估计有唯一解。因此, 我们在选择实验输入信号时, 必须保证输入信号是持续激励的。

在以上的关于最小二乘估计的推导中, 如果测量了  $n + N$  次, 则评价函数  $J$  由  $N + 1$  项组成, 每一项代表该次残差的平方, 如式(11.10)所示。由于每一项的系数都是 1, 这意味着观测者认为每一次观测值的精确度都相同, 因而对误差一律同等看待。在实际中, 可能有时观测的精确度高一些, 有时观测的精确度较低。因此, 应当使得精度高的数据在评价函数中所占的份额应较精度低的数据多一些, 即对精度高的数据加上较大的权。这样便引入了加权的最小二乘法。这时, 评价函数  $J$  改写成

$$J_W = \mathbf{e}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \quad (11.18)$$

其中  $\mathbf{W}$  称为权矩阵, 它是一个正定阵。通常取为对角矩阵。用同样的方法, 求使得  $J_W$  为最小的  $\hat{\theta}$  值, 可得到加权最小二乘估计量

$$\hat{\theta}_{WLS} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} \quad (11.19)$$

当权矩阵  $\mathbf{W}$  为单位阵时,  $\hat{\theta}_{WLS} = \hat{\theta}_{LS}$ 。

## § 11.2 最小二乘估计的统计特性

在上一节的推导中, 我们知道, 参数估计是根据待辨识对象输入输出的有限次数的观测值求出来的。因此, 估计结果必然是这些观测值的某个函数。由于待辨识对象和观测值存在着各种随机干扰和噪声, 这些对待辨识对象的观测值是随机变量的实际观测值(样本)。显然, 作为这些观测值的函数的估计量也是一个随机变量, 即使对同一个待辨识对象, 基于不同的观测值所得到的参数估计值之间也会有差异。由于这一原因, 我们必须采用数理统计的方法来研究参数估计量, 也就是说, 在大量观测结果的基础上, 基于数理统计的方法来求出估计量并对估计量进行分析。最小二乘法就是在数理统计的基础上进行的。为了分析最小二乘估计的优劣度和可信性, 必须研究它的统计特性。通常我们借用数理统计领域常用术语, 研究估计量的无偏性, 有效性和一致性。

### 11.2.1 无偏性

对某一种参数估计算法, 若它的估计量的数学期望等于被估计量的真值, 即

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (11.20)$$

其中,  $\theta$  为参数的真值,  $E[\cdot]$  表示数学期望, 则称该估计为无偏的。若估计不是无偏的, 则称它为有偏估计, 并称  $E[\hat{\theta}] - \theta$  为偏差。对于无偏估计, 相应于同一个待辨识对象的不同组输入输出观测数据所得到的各估计量将围绕参数的真值而上下摆动, 这是我们所希望的。

对最小二乘估计, 若残差序列  $\{e(k)\}$  是独立的零均值的白噪声序列, 则最小二乘估计是无偏的。这是由于, 由式(11.14)得

$$\hat{\theta}_{LS} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \theta + \mathbf{e}) = \theta + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e} \quad (11.21)$$

上式两边取数学期望,并注意到  $e(k)$  是白噪声序列以及  $E[e(k)] = 0$ ,可得

$$E[\hat{\theta}_{LS}] = E[\theta] + E\{\mathbf{H}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T\} E[e] = \theta \quad (11.22)$$

显然,若  $\{e(k)\}$  不是零均值白噪声序列,则最小二乘估计值是有偏估计,这时必须采用其他的估计算法。

### 11.2.2 有效性

无偏性反应了参数估计值是否是围绕参数真值周围而上下摆动的。当然,仅有这一点还不够。对于无偏估计,我们还应考虑估计量对参数真值平均偏离的大小,或者说它围绕真值摆动幅度的大小。由于方差是随机变量与其均值的偏离程度的衡量,所以,只要一个估计量的方差愈小,则该估计量处于参数真值附近的概率就愈大。设  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  是关于  $\theta$  的两个无偏估计,若  $\hat{\theta}_1$  的方差比  $\hat{\theta}_2$  的方差要小,则称  $\hat{\theta}_1$  较  $\hat{\theta}_2$  有效。称对参数  $\theta$  的一个估计算法为有效的,若其它任一种算法所得到的估计量的方差都比该估计算法所得的估计量的方差要大。

对于最小二乘估计,若残差  $\{e(k)\}$  是同分布、均值为零,方差为  $\sigma^2$  的白噪声序列,则方差阵为

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\theta}_{LS} - \theta)(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^T\} &= E\{[(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e}][(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{e}]^T\} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \end{aligned} \quad (11.23)$$

根据假定,  $E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\}$  是残差的协方差阵,

$$E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (11.24)$$

代入式(11.23)可得

$$E\{(\hat{\theta}_{LS} - \theta)(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^T\} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (11.25)$$

由式(11.25)和式(11.21)可见,若  $\hat{\theta}_{LS}$  的方差越小,则  $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$  越小,从而参数估计量  $\hat{\theta}_{LS}$  就越接近于真值  $\theta$ 。

可以证明,在以上关于残差的假设条件下,最小二乘估计  $\hat{\theta}_{LS}$  是有效估计。

### 11.2.3 一致性

一致性是检验在待辨识对象的一次实验或观察中的观测次数(输入输出数据的个数)  $N$  愈多时,估计量是否愈接近被估计量的参数真值。具体说来,设参数真值为  $\theta$ , 它的估计量为  $\hat{\theta}$ , 若下式成立

$$\text{Prob}\{(\hat{\theta} - \theta) = 0\} = 1 \quad \text{若 } N \rightarrow \infty \quad (11.26)$$

其中,  $N$  表示测量样本的个数,则称估计量  $\hat{\theta}$  有一致性。换句话说,当样本无限增大时,若估计量  $\hat{\theta}$  以概率 1 收敛于真值  $\theta$ , 则称这样的估计为一致性估计。

对最小二乘估计,若残差  $\{e(k)\}$  是同分布,零均值,方差为  $\sigma^2$  的白噪声序列,则它是一致性估计。这是因为,这时由式(11.25),成立

$$\text{cov}(\hat{\theta}_{LS}) = E\{(\hat{\theta}_{LS} - \theta)(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^T\} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \frac{1}{N} \mathbf{H}^T \mathbf{H}^{-1} \quad (11.27)$$

若  $u(k)$  是持续激励的, 则  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{H}^T \mathbf{H}$  依概率 1 收敛于一个正定矩阵, 并且由于方差  $\sigma^2$  是有界的, 因此有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}(\hat{\theta}_{LS}) = 0 \quad (11.28)$$

即:

$$P_{\text{rob}}\{\hat{\theta}_{LS} - \theta = 0\} = 1, \quad \text{若 } N$$

$\hat{\theta}_{LS}$  当  $N \rightarrow \infty$  时以概率 1 收敛于真值  $\theta$ 。

综上所述, 当残差为白噪声时, 最小二乘估计是无偏的, 有效的和一致的。并且在应用最小二乘法时, 无需有关输入输出数据的统计分布知识, 从而给应用带来了方便。

## § 11.3 递推最小二乘估计

由最小二乘估计的一致性可知, 对于常系数模型, 为了使估计值  $\hat{\theta}_{LS}$  更接近于真值  $\theta$ , 希望能利用的数据尽量多一些。因此, 总希望能在运行过程中利用一些新的信息来改进估计值  $\hat{\theta}_{LS}$ , 以提高估计的精度, 即希望进行在线的估计计算。另外当采用自适应控制时, 系统的控制算法要求参数估计必须在线进行。但是式(11.14) 是一个批处理算法, 按它进行在线计算时, 每当测得一组新数据, 都要重新计算一次估计值, 而且原来所有的数据都要保留, 这就使得计算机存储容量要求越来越大, 计算工作量也越来越大。解决这一问题的方法就是将式(11.14) 的批处理算法改变成递推形式。递推算法的优点是每一步的计算量和存贮量小, 离线或在线辨识均可, 且具有跟踪时变参数的能力。

### 11.3.1 递推最小二乘估计算法

获得  $n + N$  组观测数据,  $y(0), y(1), \dots, y(n + N), u(0), u(1), \dots, u(n + N)$  后, 由式(11.14) 可得最小二乘估计

$$\hat{\theta}_N = [\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N]^{-1} \mathbf{H}_N^T \mathbf{Y}_N \quad (11.29)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_N^T &= [\hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_n \quad \hat{b}_0 \quad \dots \quad \hat{b}_n] \\ \mathbf{H}_N &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) \\ \mathbf{h}^T(n+1) \\ \dots \\ \mathbf{h}^T(n+N) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} y(n) \\ \dots \\ y(n+N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{h}(k)$  由式(11.4) 定义。在式(11.29) 中, 我们引入了  $N$  作为下标,  $\hat{\theta}_N$  表示基于  $n + N$  组数据对于  $\theta$  的估计值,  $N$  为时间变量, 随着递推的进行,  $N \rightarrow \infty$ 。在以上数据的基础上, 假定我们又取得了一组新的观测数据,  $y(n + N + 1)$  和  $u(n + N + 1)$ , 则基于  $n + N + 1$  组数据对  $\theta$  的估计值为:

$$\hat{\mathbf{y}}_{N+1} = (\mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{H}_{N+1})^{-1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{Y}_{N+1} \quad (11.30)$$

式中

$$\mathbf{Y}_{N+1} = \begin{bmatrix} y(n) \\ \dots \\ y(n+N) \\ y(n+N+1) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{Y}_N}{y(n+N+1)} \quad (11.31)$$

$$\mathbf{H}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) \\ \dots \\ \mathbf{h}^T(n+N) \\ \mathbf{h}^T(n+N+1) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{H}_N}{\mathbf{h}^T(n+N+1)}$$

$$\text{令 } \mathbf{P}_N = [\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N]^{-1} \quad (11.32)$$

并称它为估计误差的协方差阵, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N+1} &= (\mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{H}_{N+1})^{-1} \\ &= [\mathbf{H}_N^T \mid \mathbf{h}(n+N+1)] \frac{\mathbf{H}_N}{\mathbf{h}^T(n+N+1)}^{-1} \\ &= [\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N + \mathbf{h}(n+N+1) \mathbf{h}^T(n+N+1)]^{-1} \\ &= [\mathbf{P}_N^{-1} + \mathbf{h}(n+N+1) \mathbf{h}^T(n+N+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (11.33)$$

为了能简化以上两次关于矩阵求逆的运算, 我们首先介绍以下矩阵求逆公式。

设  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$  均为非奇异方阵, 则成立以下恒等式:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1} \quad (11.34)$$

在式(11.33)中, 令  $\mathbf{P}_N^{-1} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{h}(n+N+1) = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C} = 1$ ,  $\mathbf{h}^T(n+N+1) = \mathbf{D}$ , 则有:

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - [1 + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)]^{-1} \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1) \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \quad (11.35)$$

将式(11.33)和式(11.35)代入式(11.30)得:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{N+1} &= \mathbf{P}_{N+1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{Y}_{N+1} \\ &= \mathbf{P}_{N+1} [\mathbf{H}_N^T \mid \mathbf{h}(n+N+1)] \frac{\mathbf{Y}_N}{y(n+N+1)} \\ &= \mathbf{P}_{N+1} [\mathbf{H}_N^T \mathbf{Y}_N + \mathbf{h}(n+N+1) y(n+N+1)] \\ &= \{ \mathbf{P}_N - [1 + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)]^{-1} \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1) \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \} [\mathbf{H}_N^T \mathbf{Y}_N + \mathbf{h}(n+N+1) y(n+N+1)] \\ &= \hat{\mathbf{y}}_N + \mathbf{K}_{N+1} [y(n+N+1) - \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\mathbf{y}}_N] \end{aligned} \quad (11.36)$$

式中

$$\mathbf{K}_{N+1} = \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1) [1 + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)]^{-1} \quad (11.37)$$

式(11.35) ~ 式(11.37) 组成了最小二乘估计的递推算法:

$$\hat{\mathbf{y}}_{N+1} = \hat{\mathbf{y}}_N + \mathbf{K}_{N+1} [y(n+N+1) - \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\mathbf{y}}_N] \quad (11.38)$$

$$\mathbf{K}_{N+1} = \frac{\mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)}{1 + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)} \quad (11.39)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \quad (11.40)$$

递推最小二乘估计(RLS) 算法具有明确的物理意义, 如果用  $\hat{y}(n+N+1) = \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\mathbf{p}}_N$  表示基于  $n+N$  时刻的历史数据对  $y(n+N+1)$  的预报值, 则  $y(n+N+1) - \hat{y}(n+N+1)$  即为预报误差。上式表明, 在采用 RLS 估计时, 新的参数估计值  $\hat{\mathbf{p}}_{N+1}$  是根据预报误差对原估计量  $\hat{\mathbf{p}}_N$  进行的修正, 修正的幅度即  $\mathbf{K}_{N+1}$  按最小二乘准则确定。

在使用以上递推最小二乘估计时, 必须知道初始值  $\mathbf{P}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0$ 。计算  $\mathbf{P}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0$  有两种方法, 第一种方法是用批处理的最小二乘法先计算  $\mathbf{P}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0$ 。即先取  $(N+n)$  组输入输出数据,  $y(0), y(1), \dots, y(N+n), u(0), u(1), \dots, u(N+n)$ , 采用最小二乘估计式(11.14), 先算出  $\hat{\mathbf{p}}_0$  和  $\mathbf{P}_0$ , 即计算出:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} & (11.41) \\ \mathbf{H}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) \\ \mathbf{h}^T(n+1) \\ \dots \\ \mathbf{h}^T(N+n) \end{bmatrix} & \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \dots \\ y(N+n) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{p}}_0 &= \mathbf{P}_0 \mathbf{H}_0^T \mathbf{Y}_0 & (11.42) \end{aligned}$$

另一种方法是直接令

$$\hat{\mathbf{p}}_0 = 0, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{I} \tag{11.43}$$

式中,  $\lambda$  是充分大的正数,  $10^5 \sim 10^{10}$ 。这是因为  $\mathbf{P}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0$  的影响将随着递推次数的增加而衰减, 可以证明当  $N \rightarrow \infty$  时, 递推  $2n$  步后即可获得满意的初始估计量。

递推最小二乘估计的计算步骤

- (1) 按式(11.41)、式(11.42) 或式(11.43) 构造  $\mathbf{P}_0$  和  $\hat{\mathbf{p}}_0$ ;
- (2) 构造  $\mathbf{h}^T(n+N+1)$ ;
- (3) 进行第  $(N+1)$  次采样得  $y(n+N+1)$  和  $u(n+N+1)$ ;
- (4) 由式(11.39) 算  $\mathbf{K}_{N+1}$ ;
- (5) 由式(11.38) 算  $\hat{\mathbf{p}}_{N+1}$ ;
- (6) 由式(11.40) 算  $\mathbf{P}_{N+1}$ ;
- (7) 判定  $\hat{\mathbf{p}}_{N+1}$  是否满足要求, 若满足则停机, 否则置  $N = N+1$ , 跳到第(2) 步继续进行。

根据以上计算步骤, 即可采用计算机在线进行参数估计的计算, 每次只需保存前  $n$  次的采样值, 上次参数估计值  $\hat{\mathbf{p}}_N$ , 误差矩阵  $\mathbf{P}_N$  和本次采样值。这样就解决了计算机存储量的矛盾。这种在线算法, 允许当测量值数目  $N$  加大时, 很容易刷新估计值  $\hat{\mathbf{p}}$ , 因此它还可以用来跟踪缓慢变化的时变系统的参数值。

递推最小二乘估计算法 RLS 和最小二乘估计批处理算法 LS 在数学上是严格等价的。因此, 虽然在 RLS 估计过程中“历史”的数据没有保存下来, 但是, 事实上, “历史”数据的影响却一直在起作用。换句话说, RLS 实质上是使用了迄今为止的全部数据。由于数据的总长度是在不断地增加, 以上所介绍的 RLS 算法又称为无限增长记忆的递推最小二乘估计算法。

### 11.3.2 适应性递推最小二乘估计

由式(11.38) ~ 式(11.40) 所构成的递推最小二乘估计算法, 是一种在线估计算法。它没

有耗时较多的矩阵求逆运算,所要求的计算机存储也较批处理算法要少。但是,由于在这类算法中,“历史”的老数据将一直在起作用,对于在线辨识来说,由之带来了一系列的问题。

首先是时变参数的影响问题。若待辨识的系统是缓慢时变系统,则在线辨识所得到的模型应能跟得上系统的这种变化。然而由于“历史”的老数据一直在起作用,新数据会被旧数据所淹没,使得新数据对辨识结果的影响越来越小,不利于时变系统的辨识。

其次是“数据饱和”的问题。即使模型参数是时不变的,以上的在线辨识算法也会产生“数据饱和”现象,即新数据不能对参数估计起改进作用,有时反而会使参数估计值与真值之间的误差越来越大。这种现象产生的重要原因是由式(11.38)中修正项的增益  $\mathbf{K}_{N+1}$  所引起的。由递推算法中知道,误差协方差阵  $\mathbf{P}_0$  是正定的,而由式(11.33),  $\mathbf{P}_i, i = 1, 2, \dots, n + N + 1$  都是正定的。由于  $\mathbf{h}(n + N + 1) \mathbf{h}^T(n + N + 1)$  是半正定矩阵,所以

$\mathbf{P}_N - \mathbf{P}_{N+1} = [1 + \mathbf{h}^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n + N + 1)]^{-1} \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n + N + 1) \mathbf{h}^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N$  也为半正定矩阵,即  $\mathbf{P}_N \geq \mathbf{P}_{N+1}$ 。这样,随着递推次数的增加,  $\mathbf{P}_N$  将逐渐减小,最后可能接近于零。由式(11.39),  $\mathbf{P}_N$  趋于零将导致  $\mathbf{K}_{N+1}$  趋于零,使得新的采样值对模型参数估计已不再起作用,从而产生了数据饱和现象。在计算机递推计算的过程中,由于计算机字长有限,每步计算都存在有舍入误差。当数据饱和后,新的采样值不但不对参数估计值起改进作用,反而可能由于舍入误差的影响,  $\mathbf{P}_N$  的误差加大,使得  $\mathbf{P}_N$  失去正定性,甚至失去对称性,从而造成参数估计值的误差加大。

把前面所提出的一般的递推最小二乘估计算法进行改进,便能克服以上的问题,使算法符合实时在线辨识的要求。改进的思路是采用适应性递推最小二乘算法,强调新数据的作用,摒弃或降低旧数据的作用,从而更好地适应参数的变化。常用的适应性算法有渐消记忆法和限定记忆法。

另一方面,为了防止  $\mathbf{P}_N$  在递推过程中由于舍入误差而失去正定性,可以采用方根滤波法或  $\mathbf{UDU}^T$  分解法等估计算法,感兴趣的读者可参考有关文献。

### 1. 渐消记忆法

渐消记忆法又称遗忘因子法,它的思想是在递推最小二乘法中引入遗忘因子,使旧数据的影响一次比一次减弱,从而人为地降低旧数据的作用。

在递推计算过程中,每当取得一组新数据  $y(n + N + 1)$  和  $u(n + N + 1)$  后,就把以前所有的数据都乘上一个加权因子  $\lambda, 0 < \lambda < 1$ 。按照这一想法,将式(11.31)中的  $\mathbf{H}_{N+1}$  和  $\mathbf{Y}_{N+1}$  写成:

$$\mathbf{H}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N \\ \mathbf{h}^T(n + N + 1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_N \\ y(n + N + 1) \end{bmatrix} \quad (11.44)$$

令

$$\mathbf{P}_N = (\mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N)^{-1} \quad (11.45)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{N+1} &= (\mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{H}_{N+1})^{-1} \\ &= [\lambda^2 \mathbf{H}_N^T \mathbf{H}_N + \mathbf{h}(n + N + 1) \mathbf{h}^T(n + N + 1)]^{-1} \end{aligned} \quad (11.46)$$

利用矩阵和求逆公式,并令遗忘因子  $\lambda = \lambda^2$ ,则可得

$$\mathbf{P}_{N+1} = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}_N - \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{h}^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N] \quad (11.47)$$

式中

$$\mathbf{K}_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)}{[\mathbf{I} + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)]} \quad (11.48)$$

代入式(11.36) 可得:

$$\hat{\mathbf{x}}_{N+1} = \hat{\mathbf{x}}_N + \mathbf{K}_{N+1} [y(n+N+1) - \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\mathbf{x}}_N] \quad (11.49)$$

式(11.47) ~ 式(11.49) 即构成了渐消记忆法的递推公式。从另一角度来看, 渐消记忆法相当于将最小二乘估计算法的目标函数修改为

$$J = \sum_{k=n}^{n+N} [y(k) - \mathbf{h}^T(k) \hat{\mathbf{x}}]^2 \quad (11.50)$$

可见, 老的数据是按照指数衰减的速度逐渐被“遗忘”掉的, 因此又称为遗忘因子法。

“遗忘因子”满足  $0 < \lambda < 1$ , 选择不同的  $\lambda$  将得到不同的遗忘效果。 $\lambda$  值越小, 历史数据的作用“遗忘”得越快。实际使用时, 可通过试算比较来确定。对时变参数系统, 通常取  $\lambda = 0.95 \sim 0.995$ 。一旦选定后, 在线辨识过程中, 一般不再调整。显然, 当取  $\lambda = 1$  时, 渐消记忆法就变成为式(11.38) ~ 式(11.40) 所示的递推最小二乘估计算法。

## 2. 限定记忆法

限定记忆法的基本思想是, 实时在线估计时, 在时刻  $k$  的参数估计值只依据该时刻前面有限个过去的数据进行, 其余的老数据完全被丢掉。假定我们保持的数据个数始终为  $(n+N+1)$  组, 每采样一次, 增加一组新数据, 则同时去掉一个旧数据, 保持数据为固有的长度  $(n+N+1)$ 。所以称为限定记忆法。

当取到一组新数据  $y(n+N+1)$  和  $u(n+N+1)$  后, 应当去掉旧数据  $y(0)$  和  $u(0)$ , 然后用  $y(1), y(2), \dots, y(n+N+1), u(1), u(2), \dots, u(n+N+1)$  来进行最小二乘估计。这时按如下方法构造新的矩阵和向量

$$\mathbf{H}_{N+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) \\ \mathbf{h}^T(n+1) \\ \dots \\ \mathbf{h}^T(n+N) \\ \mathbf{h}^T(n+N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mathbf{h}^T(n+N+1) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (11.51)$$

$$\mathbf{Y}_{N+1} = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \dots \\ y(n+N) \\ y(n+N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y(n+N+1) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (11.52)$$

将式(11.51) 和式(11.52) 代入最小二乘估计公式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{N+1} = (\mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{H}_{N+1})^{-1} \mathbf{H}_{N+1}^T \mathbf{Y}_{N+1} \quad (11.53)$$

并利用矩阵求逆公式进行类似递推最小二乘法的推导过程, 可得以下限定记忆法的递推公式:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{N+1} &= \hat{\mathbf{x}}_N + \mathbf{K}_{N+1} [\mathbf{h}(n+N+1) y(n+N+1) - \mathbf{h}(n) y(n+1)] \\ \mathbf{K}_{N+1} &= \mathbf{P}_{N+1} - \mathbf{P}_{N+1} \mathbf{h}(n) [1 - \mathbf{h}^T(n) \mathbf{P}_{N+1} \mathbf{h}(n)]^{-1} \mathbf{h}^T(n) \mathbf{P}_{N+1} \\ \mathbf{P}_{N+1} &= \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1) [1 - \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{h}(n+N+1)]^{-1} \mathbf{h}(n+N+1) \mathbf{P}_N \end{aligned} \quad (11.54)$$



式中,

$$y(n+N+1) = y(n+N+1) - \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\mathbf{N}}$$

$$y(n+1) = y(n+1) - \mathbf{h}^T(n) \hat{\mathbf{N}}$$

## § 11.4 广义最小二乘法

前面在讨论最小二乘估计的统计性质时,我们指出,最小二乘估计为无偏估计的前提是噪声向量 $\{e(k)\}$ 是均值为零的不相关序列,且 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{H}$ 是统计独立的。但是实际上噪声向量可能是不相关的。有些系统即使外加噪声是零均值的白噪声序列,但在参数估计过程中,也变成相关的随机序列了。

设系统的模型为:

$$A(q^{-1})z(k) = B(q^{-1})u(k)$$

(11.55)

其中,  $\{z(k)\}$  为系统的理想输出,  $u(k)$  为系统输入。 $A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i q^{-i}$ ;  $B(q^{-1}) = \sum_{i=1}^n b_i q^{-i}$ 。而系统的实际输出为理想输出  $z(k)$  加上量测噪声  $v(k)$ , 即

$$y(k) = z(k) + v(k)$$

(11.56)

将上式代入式(11.55), 可得实际系统模型

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + v(k)$$

(11.57)

其中

$$v(k) = A(q^{-1})e(k)$$

为噪声序列。显然,即使 $\{e(k)\}$ 为白噪声序列,由于  $E\{e(k)e(k-j)} = 0, j \neq n, \{v(k)\}$  不再是白噪声序列,而变成相关的随机序列了。因此,在实际应用中,假设 $\{e(k)\}$ 是白噪声序列通常是不合理的。而如果噪声序列是相关序列,最小二乘估计通常不再是无偏估计,而且一般不再具有一致性。

基于上述原因,多年来,人们一直在寻找各种方法来克服噪声相关问题,即解决非白色噪声下参数估计有偏的问题,在最小二乘估计的基础上,提出了许多改进的方法。广义最小二乘法(GLS)就是其中的一种方法。

广义最小二乘法的基本思想在于通过滤波的方法,设法把相关的噪声序列白色化,然后再利用最小二乘法对滤波后的数据进行辨识。如果滤波模型选得合适,对数据进行了较好的白色化处理,则可直接用最小二乘法得到无偏估计。所采用的滤波模型实际上是一种动态模型,采用松弛算法不断地迭代调整该动态模型,便可对数据进行较好的白色化处理。

考虑式(11.57)所示的系统模型。设相关噪声序列  $v(k)$  满足自回归模型

$$C(q^{-1})v(k) = e(k)$$

(11.58)

式中,  $e(k)$  是均值为零的白噪声。

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_p q^{-p}$$

(11.59)

则式(11.57)可以写成

$$A(q^{-1})C(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})C(q^{-1})u(k) + e(k)$$

(11.60)

如果令  $y_G(k) = C(q^{-1})y(k)$ ;  $u_G(k) = C(q^{-1})u(k)$  分别表示系统经过白化处理后的输出和输入,则可重写式(11.60)为

$$A(q^{-1})y_G(k) = B(q^{-1})u_G(k) + e(k) \quad (11.61)$$

式(11.61)与基本最小二乘法的模型式(11.2)是一致的。只是输入  $u_G(k)$  和输出  $y_G(k)$  是经过白化处理的。显然如果噪声模型  $C(q^{-1})$  已知,就可以先用它将  $\{y(k)\}$  和  $\{u(k)\}$  进行白化处理后得到  $\{y_G(k)\}$  和  $\{u_G(k)\}$ ,然后利用基本最小二乘法估计  $\hat{a}_i$  和  $\hat{b}_i$ 。但是,一般情况下,  $C(q^{-1})$  是未知的。这时我们可采用松弛算法来依次估计噪声模型参数  $\hat{c}_i$  和系统模型参数  $\hat{a}_i$  和  $\hat{b}_i$ 。

对噪声模型参数  $c_i$  的估计也可采用最小二乘法。由式(11.58)可得

$$y(k) = -c_1 y(k-1) - c_2 y(k-2) - \dots - c_p y(k-p) + e(k) \quad (11.62)$$

分别令  $k = n, n+1, \dots, n+N$ ,可得相应的线性方程组并写成矩阵形式

$$\mathbf{y} = -\mathbf{E}\mathbf{C} + \mathbf{e} \quad (11.63)$$

式中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \dots \\ y(n+N) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \dots \\ e(n+N) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} y(n-1) & y(n-2) & \dots & y(n-p) \\ y(n) & y(n-1) & \dots & y(n-p+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(n+N-1) & y(n+N-2) & \dots & y(n+N-p) \end{bmatrix}$$

利用最小二乘估计,立即可得:

$$\hat{\mathbf{C}}_{LS} = -(\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{y} \quad (11.64)$$

其中相关残差可通过下式计算得到:

$$\hat{e}(k) = A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k) \quad (11.65)$$

显然,在计算  $\hat{e}(k)$  时需要系统模型参数  $\hat{a}_i$  和  $\hat{b}_i$ 。我们可以采用松弛算法来估计噪声模型参数和系统模型参数。一开始可以假定各  $c_i$  为零,用最小二乘法求得  $\hat{a}_i$  和  $\hat{b}_i$  的值,然后用式(11.65)求得近似的  $\hat{e}(k)$  的值,用它又可求得各  $\hat{c}_i$  的值,再重复进行,直至各  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  和  $\hat{c}_i$  都收敛。具体说来,广义最小二乘估计的计算步骤为:

广义最小二乘算法

(1) 令  $c_i = 0$ ,即  $C(q^{-1}) = 1$ ,设  $i = 1$ ,取

$$u_{Gi-1}(k) = u_{G0}(k) = u(k), \quad y_{Gi-1}(k) = y_{G0}(k) = y(k)。$$

(2) 用  $u_{Gi-1}(k)$  和  $y_{Gi-1}(k)$  按最小二乘估计算法式(11.14) 求出系统模型参数的估计值  $\hat{a}_i$ ,即求得  $\hat{A}_i(q^{-1})$  和  $\hat{B}_i(q^{-1})$ 。

(3) 根据  $\hat{A}_i(q^{-1})$  和  $\hat{B}_i(q^{-1})$ ,利用式(11.65) 计算相关残差  $\hat{e}_i(k)$ 。

(4) 根据相关残差  $\hat{e}_i(k)$ ,再利用式(11.64) 估计  $\hat{C}_i(q^{-1})$ 。

(5) 根据  $\hat{C}_i(q^{-1})$ ,计算系统白化滤波后的信号。

$$u_{Gi}(k) = \hat{C}_i(q^{-1})u(k), \quad y_{Gi}(k) = \hat{C}_i(q^{-1})y(k)。$$

(6) 判定  $A_i(q^{-1})$ ,  $\hat{B}_i(q^{-1})$ , 和  $\hat{C}_i(q^{-1})$  中各参数的收敛性。若收敛则停机, 否则令  $i = i + 1$ , 返回到第(2)步重新开始计算。

其中关于参数收敛性的要求, 可通过检查在迭代过程中关于参数向量  $\theta$  的最近两次迭代的估计值之差的范数是否小于一指定的常数来确定。

在上述广义最小二乘估计中, 每次迭代过程中需要解两次最小二乘问题, 并对所有的输入输出数据进行一次白色滤波。总体来说计算工作量比较大。广义最小二乘法的整个迭代循环程序的收敛性没有给予理论证明, 但是在实际应用中通常具有较好的效果。

上述广义最小二乘估计是一种离线的迭代算法, 为了能将它应用于在线辨识, 可以推出它的递推形式。

在依次的递推过程中, 当取得一组新数据  $y(n + N + 1)$  和  $u(n + N + 1)$  后, 利用上一个递推过程中已估计出来的残差模型  $\hat{C}_N(q^{-1})$  对新数据进行滤波, 即

$$y_G(n + N + 1) = \hat{C}_N(q^{-1}) y(n + N + 1) \quad (11.66)$$

$$u_G(n + N + 1) = \hat{C}_N(q^{-1}) u(n + N + 1) \quad (11.67)$$

$$\mathbf{h}_G^T(n + N + 1) = \hat{C}_N(q^{-1}) \mathbf{h}^T(n + N + 1) \quad (11.68)$$

利用  $y_G(n + N + 1)$ ,  $u_G(n + N + 1)$  和  $\mathbf{h}_G^T(n + N + 1)$ , 并类似递推最小二乘法的推导过程可得出关于系统模型参数  $\theta$  的递推算法:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \mathbf{K}_{N+1}^{(1)} [y_G(n + N + 1) - \mathbf{h}_G^T(n + N + 1) \hat{\theta}_N] \quad (11.69)$$

$$\mathbf{K}_{N+1}^{(1)} = \mathbf{P}_N^{(1)} \frac{\mathbf{h}_G(n + N + 1)}{1 + \mathbf{h}_G^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N^{(1)} \mathbf{h}_G(n + N + 1)} \quad (11.70)$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{(1)} = \mathbf{P}_N^{(1)} - \mathbf{K}_{N+1}^{(1)} \mathbf{h}_G^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N^{(1)} \quad (11.71)$$

利用得到的  $\hat{\theta}_{N+1}$  可算出新的残差  $e(n + N + 1)$

$$e(n + N + 1) = y(n + N + 1) - \mathbf{h}_G^T(n + N + 1) \hat{\theta}_N \quad (11.72)$$

利用新的残差  $e(n + N + 1)$  作为一个新的采样值, 用关于误差模型参数的递推算法估计误差模型  $\hat{C}$ 。

$$\hat{C}_{N+1} = \hat{C}_N + \mathbf{K}_{N+1}^{(2)} (e(n + N + 1) - \hat{C}_N(n + N + 1) \hat{C}_N) \quad (11.73)$$

$$\mathbf{K}_{N+1}^{(2)} = \mathbf{P}_N^{(2)} \frac{e(n + N + 1)}{1 + e^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N^{(2)} e(n + N + 1)} \quad (11.74)$$

$$\mathbf{P}_{N+1}^{(2)} = \mathbf{P}_N^{(2)} - \mathbf{K}_{N+1}^{(2)} e^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N^{(2)} \quad (11.75)$$

式中

$$e^T(n + N + 1) = [e(n + N) \quad e(n + N - 1) \quad \dots \quad e(n + N - p)]$$

式(11.66) ~ 式(11.75) 构成递推广义最小二乘估计算法。在递推算法每一次递推过程中, 我们只对新采样的数据  $y(n + N + 1)$ ,  $u(n + N + 1)$  和  $\mathbf{h}(n + N + 1)$  进行一次白色滤波。而在前面批处理和广义最小二乘法中, 每迭代一次对全部数据都重新滤波一次, 因此, 这两种算法在数学上是不等价的。

广义最小二乘法在实际中获得了广泛应用。

## § 11.5 扩充最小二乘法

广义最小二乘法的特点是对系统输入输出信号进行反复的滤波,使噪声白色化。这样就大大地增加了参数估计过程中的计算工作量。1976年 Hsia 提出的扩充最小二乘估计(ELS)不需要对数据进行反复的滤波计算,而是利用增广矩阵把系统模型参数  $a_i$ ,  $b_i$  和噪声模型参数  $c_i$  同时作为待估计的参数,从而大大地提高了计算效率,所以这种算法也叫做增广最小二乘法或增广短阵法。

与广义最小二乘法相似,考虑式(11.57)和式(11.58)所示的系统模型。令

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T &= [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n] \\ \mathbf{C}^T &= [c_1 \quad \dots \quad c_p] \end{aligned}$$

当取得了  $(n + N)$  组采样数据后,可得到以下增广矩阵形式的线性方程组:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{E}] \mathbf{C} + \mathbf{e} \quad (11.76)$$

其中,  $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{Y}$ 、 $\mathbf{e}$  分别由式(11.7) ~ 式(11.9)定义,  $\mathbf{E}$  由式(11.63)所定义。令  $\mathbf{A} = [\mathbf{H} \quad \mathbf{E}]$ ,  $\mathbf{A}^T = [\mathbf{H}^T \quad \mathbf{E}^T]$ , 可将式(11.76)改写成

$$\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{C} \quad (11.77)$$

设目标函数  $J = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ , 利用最小二乘法,可得式(11.76)所示增广系统的最小二乘估计为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}}_{LS} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{H} & \mathbf{H}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{H} & \mathbf{E}^T \mathbf{E} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \\ \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.78)$$

利用分块矩阵求逆公式,并注意到  $\hat{\mathbf{C}}_{LS}$  的定义可得

$$\hat{\mathbf{C}}_{LS} = [\mathbf{H}^T \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} - [\mathbf{H}^T \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{S} \mathbf{Y} \quad (11.79)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{S} \mathbf{Y} \quad (11.80)$$

式中

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (11.81)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^T \mathbf{S} \mathbf{E} \quad (11.82)$$

由式(11.79)可见,关于  $\hat{\mathbf{C}}$  的估计值中第一项就是对  $\mathbf{C}$  的最小二乘估计  $\hat{\mathbf{C}}_{LS}$ , 而第二项是偏差  $\hat{\mathbf{C}}_B$ , 即

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}}_{LS} - \hat{\mathbf{C}}_B \quad (11.83)$$

可见扩充最小二乘法估计的基本思想是设法从最小二乘法估计中减去由于相关噪声引起的偏差  $\hat{\mathbf{C}}_B$ , 从而获得关于参数的无偏一致估计。然而求  $\hat{\mathbf{C}}_B$ , 需要残差阵  $\mathbf{E}$ , 而后者是未知的。为此可采用迭代的方法分别估计  $\hat{\mathbf{C}}_{LS}$  及  $\hat{\mathbf{C}}_B$ , 以构造  $\mathbf{E}$  阵。计算步骤如下:

扩充最小二乘算法

(1) 令  $i = 0$ , 参数向量  $\mathbf{C}$  的第  $i$  次估计值  $\hat{\mathbf{C}}_i = 0$ , 计算  $\hat{\mathbf{C}}_{LS} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}$ 。  $\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ , 令参数向量  $\mathbf{C}$  的第  $i$  次估计值  $\hat{\mathbf{C}}_i = \hat{\mathbf{C}}_{LS}$ 。

(2) 计算残差向量  $\hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{Y} - \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{e}}_i$ , 并构造  $\hat{\mathbf{E}}_i$  阵。

(3) 计算  $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{E}}_0$ 。

(4) 计算  $\hat{\mathbf{C}}_i = \hat{\mathbf{D}}^{-1} \hat{\mathbf{E}}^T \mathbf{S} \mathbf{Y}$

$$\hat{\mathbf{e}}_{Bi} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{C}}_i。$$

(5) 更新  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , 即  $\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_{LS} - \hat{\mathbf{e}}_{Bi}$ 。

(6) 检查  $\hat{\mathbf{e}}_i$  和  $\hat{\mathbf{C}}_i$  的收敛性, 满足收敛条件则停止。否则令  $i = i + 1$ , 返回到第 2 步。

在以上的迭代计算中, 随着迭代次数的增加, 偏差项  $\hat{\mathbf{e}}_B$  的精度将依次增加, 保证了参数估计值的精度。与广义最小二乘法在每次迭代中要两次求矩阵的逆, 并对所有的数据进行滤波计算相比, 这里每一次迭代中仅要求一次逆, 并且不需要作数据滤波, 因此计算工作量将大大减少。但是一般来说, 扩充最小二乘法整个迭代过程的收敛速度比广义最小二乘法慢一些。换句话说, 要达到同样精度的参数估计值, 扩充最小二乘法的迭代次数稍微要多一点。

为便于在线估计, 扩充最小二乘法也有递推算法。它的递推算法可以通过增广模型式(11.76) 或式(11.77), 根据类似递推最小二乘法的推导过程而得到。采用式(11.77) 的符号, 它的递推算法如下:

$$\hat{\mathbf{e}}_{N+1} = \hat{\mathbf{e}}_N + \mathbf{K}_{N+1} [y(n + N + 1) - \hat{\mathbf{e}}^T(n + N + 1) \hat{\mathbf{e}}_N] \quad (11.84)$$

$$\mathbf{K}_{N+1} = \frac{\mathbf{P}_N \hat{\mathbf{e}}(n + N + 1)}{1 + \hat{\mathbf{e}}^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{e}}(n + N + 1)} \quad (11.85)$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \mathbf{K}_{N+1} \hat{\mathbf{e}}^T(n + N + 1) \mathbf{P}_N \quad (11.86)$$

式中

$$\hat{\mathbf{e}}^T(n + N + 1) = [-y(n + N), -y(n + N - 1), \dots, -y(N + 1), u(n + N + 1), \dots, u(N + 1), -\hat{a}(n + N), \dots, -\hat{a}(n + N + 1 - p)] \quad (11.87)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}(n + N + 1) &= y(n + N + 1) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i y(n + N + 1 - i) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \hat{b}_i u(n + N + 1 - i) \end{aligned} \quad (11.88)$$

而  $\hat{a}_i$  和  $\hat{b}_i$  是关于  $a_i$  和  $b_i$  的第  $(n + N + 1)$  步的递推值(即为  $\hat{\mathbf{e}}_{N+1}$  中的元素)。

在以上递推公式中的数据向量  $\hat{\mathbf{e}}^T(n + N + 1)$  中不仅含有可量测的输入变量  $u(k)$  和输出变量  $y(k)$ , 还包括有不可量测的噪声  $\hat{e}(k)$ , 因此, 我们借助于上次递推后的参数估计值  $\hat{\mathbf{e}}_{N+1}$ , 利用式(11.88) 构造噪声  $\hat{e}(n + N + 1)$ 。

## § 11.6 辅助变量法

当系统方程的残差与数据向量为相关时, 最小二乘估计通常有偏。前面所提出的广义最小二乘法和扩充最小二乘法可以用来克服最小二乘法的这一局限性, 但是, 增加了计算工作量, 辅助变量法(IV) 的基本思想是构造一个与系统的信息强相关而与噪声不相关的“辅助变量”, 并利用这一变量来估计模型参数。

对式(11.57) 所示的模型, 如果取得  $(N + n)$  组数据后, 可得线性方程组:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} + \quad (11.89)$$

式中

$$\mathbf{Y}^T = [y(n) \quad y(n+1) \quad \dots \quad y(n+N)]$$

假定存在一个  $(2n+1) \times (N+1)$  维矩阵  $\mathbf{M}$  (与  $\mathbf{H}$  的维数相同), 它的元素与噪声序列  $\{v(k)\}$  不相关, 但是与系统的输入输出数据强相关, 即满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{M}^T \mathbf{M} = 0 \quad (11.90)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{M}^T \mathbf{H} = \mathbf{Q} > 0 \quad (11.91)$$

对式(11.89) 两边左乘  $\mathbf{M}^T$  并解出  $\mathbf{H}$ , 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\mathbf{M}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{Y} - (\mathbf{M}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{H} \\ &= (\mathbf{M}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{Y} - \frac{1}{N} \mathbf{M}^T \mathbf{H}^{-1} \frac{1}{N} \mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (11.92)$$

根据式(11.90) 和式(11.91), 式(11.92) 右边的第二项当  $N \rightarrow \infty$  时趋向零。因此, 若取

$$\hat{\mathbf{H}}_{IV} = (\mathbf{M}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{Y} \quad (11.93)$$

为  $\mathbf{H}$  的估计值, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 显然成立

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{H}}_{IV} = \mathbf{H} \quad (11.94)$$

称  $\hat{\mathbf{H}}_{IV}$  为  $\mathbf{H}$  的辅助变量法估计值,  $\mathbf{M}$  称为辅助变量矩阵。式(11.94) 表明, 辅助变量估计是  $\mathbf{H}$  的弱一致估计。

可见在辅助变量法估计中, 关键问题是如何确定满足式(11.90) 和式(11.91) 的辅助变量矩阵  $\mathbf{M}$ 。

一个直观的想法是: 选择系统理想的输出序列  $\{x(k)\}$ , 代替受噪声污染的系统实际输出序列  $\{y(k)\}$ , 从而使得  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{H}$  无关, 但与  $\mathbf{H}$  中的  $y(k)$  和  $u(k)$  强相关, 即选择辅助变量阵为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -x(n-1) & -x(n-2) & \dots & -x(0) & u(n) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ -x(n) & -x(n-1) & \dots & -x(1) & u(n+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x(n+N-1) & -x(n+N-2) & \dots & -x(N) & u(n+N) & u(n+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} \quad (11.95)$$

其中  $\{x(k)\}$  可以通过对输入序列  $\{u(k)\}$  进行滤波而得到:

$$D(q^{-1})x(k) = F(q^{-1})u(k) \quad (11.96)$$

式中

$$\begin{aligned} D(q^{-1}) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_l q^{-l} \\ F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_m q^{-m} \end{aligned}$$

式(11.96) 所示系统必须是稳定的。显然  $D(q^{-1})$  和  $F(q^{-1})$  的一个最好的选择是使  $D(q^{-1}) = A(q^{-1})$ ,  $F(q^{-1}) = B(q^{-1})$ , 这样  $\{x(k)\}$  就成为无噪声污染的系统理想输出。但是,  $A(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  正是待辨识系统的模型。为克服这一问题, 可选择  $D(q^{-1}) = \hat{A}(q^{-1})$ ,  $F(q^{-1}) = \hat{B}(q^{-1})$ , 其中  $\hat{A}(q^{-1})$  和  $\hat{B}(q^{-1})$  是关于模型式(11.57) 中  $A(q^{-1})B(q^{-1})$  的最小二乘估计值。这样式(11.96) 就变成

$$\hat{A}(q^{-1})x(k) = \hat{B}(q^{-1})u(k) \quad (11.97)$$

另一个更为简单的选择是选  $D(q^{-1}) = 1, F(q^{-1}) = q^{-n}$ , 这样式(11.96) 具有简单形式:

$$x(k) = q^{-n} u(k) \tag{11.98}$$

由式(11.97) 和式(11.98) 得到辅助变量  $x(k)$  代入式(11.95), 即可得到辅助变量矩阵  $\mathbf{M}$ 。

辅助变量法的递推算法可利用与最小二乘法递推算法类似的步骤推导而得到。只要将后者递推公式中相应于  $\mathbf{H}_N$  的一部分换成  $\mathbf{M}_N$  即可。其算法为:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \mathbf{K}_{N+1} [y(n+N+1) - \mathbf{h}^T(n+N+1) \hat{\theta}_N] \tag{11.99}$$

$$\mathbf{K}_{N+1} = \frac{\mathbf{P}_N \mathbf{m}(n+N+1)}{1 + \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \mathbf{m}(n+N+1)} \tag{11.100}$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{P}_N - \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{h}^T(n+N+1) \mathbf{P}_N \tag{11.101}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^T(n+N+1) &= [-y(n+N) \quad \dots \quad -y(N+1) \quad u(n+N+1) \quad \dots \quad u(N+1)] \\ \mathbf{m}^T(n+N+1) &= [-x(n+N) \quad \dots \quad -x(N+1) \quad u(n+N+1) \quad \dots \quad u(N+1)] \\ \mathbf{P}_N &= (\mathbf{M}_N^T \mathbf{P}_N)^{-1} \end{aligned}$$

初始值的选择可与递推最小二乘法类似, 即选择

$$\hat{\theta}_0 = 0, \quad \mathbf{P} = \sigma^{-2} \mathbf{I} \quad (\sigma^2 = 10^6 \sim 10^{10}), \quad x(1) = \dots = x(n) = 0$$

递推的辅助变量法对初值  $\mathbf{P}_0$  的选择非常敏感。为了得到较好的辨识效果, 可以采用最小二乘估计的递推算法作为启动, 在经过 50 ~ 100 个采样数据后, 再转换到辅助变量的递推算法。

## 习 题

- 11.1 简述最小二乘参数辨识的基本原理。
- 11.2 最小二乘估计有解的充分和必要条件是什么?并说明这个问题的物理意义。
- 11.3 考虑以下单参数系统

$$y(k) = \theta u(k) + e(k)$$

其中  $e(k)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声过程。设通过  $N$  组输入输出数据  $\{u(k), y(k)\}, k = 1, \dots, N$ , 采用最小二乘估计来对参数  $\theta$  进行估计。试证明, 对  $\theta$  的最小二乘估计  $\hat{\theta}_{LS}$  的方差为:

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{LS}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{k=1}^N u^2(k)}$$

如果对输入  $u(k)$  具有幅值约束  $|u(k)| \leq 1$ , 试确定使得  $\hat{\theta}_{LS}$  的方差  $\text{Var}(\hat{\theta}_{LS})$  为最小的最优输入信号  $u(k), k = 1, 2, \dots, N$ 。

- 11.4 试推导出加权最小二乘法公式(11.19)。
- 11.5 递推最小二乘法有些什么样的优点?它适宜在什么场合作用?
- 11.6 画出递推最小二乘法的计算框图。
- 11.7 什么是“数据饱和”现象?如何克服?
- 11.8 试证明渐消记忆法相当于使目标函数式(11.50) 为最小。

- 11.9 分别画出广义最小二乘法和递推广义最小二乘法的计算框图。
- 11.10 为什么说广义最小二乘法 and 递推广义最小二乘法在数学上是不等价的。
- 11.11 简述扩充最小二乘法的基本原理。
- 11.12 分别画出扩充最小二乘法 and 递推扩充最小二乘法的计算框图。
- 11.13 为什么说在每一次迭代中扩充最小二乘法的计算工作量少于广义最小二乘法？
- 11.14 在辅助变量法中,应当根据什么原则选择辅助变量？
- 11.15 考虑模型

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k) + e(k)$$

其中  $|a| < 1$ ,  $\{e(k)\}$  和  $\{u(k)\}$  均是均值为零的平稳随机过程。 $\{e(k)\}$  和  $\{u(k)\}$  为统计独立。证明由辅助变量  $x(k) = u(k-1)$  所构成的辅助变量阵是合适的。

- 11.16 考虑系统

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.2q^{-1} + 0.35q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 2q^{-1} + q^{-2}$$

$$C(q^{-1}) = 1 - 0.7q^{-1}$$

$\{e(k)\}$  是均值为零, 方差为 1 的白噪声序列,  $\{u(k)\}$  是伪随机二位式序列。试用计算机仿真以上系统, 产生 200 组输入输出数据  $\{u(k), y(k)\}$ ,  $k = 1, \dots, 200$ 。

(1) 利用与原系统一致的模型, 分别用广义最小二乘法和扩充最小二乘法估计参数  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ 。

(2) 利用模型

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k)$$

分别用最小二乘法和辅助变量法估计参数  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ 。

(3) 比较各种参数估计方法所得的估计结果。



# 第十二章 极大似然估计

上一章中所讨论的估计算法都是基于最小二乘理论的。分析表明,最小二乘法本质上是一种“确定性”的算法。这一计算中,观测数据和未知参数之间的关系即数学模型是人为选定的,估计算法的核心是优化选择模型参数,使得关于误差的二次型目标函数为最小。而对于输出端叠加的噪声统计性质的考虑,只是为了分析估计误差和评价估计算法的质量。

实际上观测数据和未知参数都具有随机性质,另一类的系统辨识方法是完全从概率论的观点出发,提出了基于贝叶斯估计理论的概率性估计方法。这些方法的出发点都与贝叶斯条件概率分布的概念有关。属于这类的方法有极小均方估计,极小方差估计,极大似然估计,极大后验概率估计等,其中以极大似然估计法最为成熟。

## § 12 .1 极大似然估计原理

极大似然法的基本思想是构造一个联系未知参数和观测数据的函数。称这个函数叫似然函数。似然函数的本质是观测数据的条件概率密度函数,这个概率密度函数由先验知识给出。待估计参数的值应使得似然函数为极大。这是基于以下的考虑,即如果在一次观察中一个事件出现了,那么我们可以认为此事件出现的可能性很大。

具体来说,设  $y$  是一个随机变量,它的条件概率密度  $p(y / \theta)$  依赖于未知参数  $\theta$ ,令似然函数  $L = p(y / \theta)$ ,则极大似然估计就是选择参数  $\hat{\theta}$ ,使得  $L = p(y / \hat{\theta})$  取极大值。

考虑以下模型

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) + \varepsilon(k)$$

(12 .1)

式中,  $\{\varepsilon(k)\}$  是一个平稳随机序列,若已测到  $N + 1$  组数据  $y(0), y(1), \dots, y(N); u(1), u(2), \dots, u(N)$  则可得线性方程组:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}$$

(12 .2)

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [y(1) \quad \dots \quad y(N)]^T \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & u(1) & u(0) & 0 & \dots & 0 \\ y(0) & \dots & 0 & u(2) & u(1) & u(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(N-1) & y(N-2) & \dots & y(N-n) & u(N) & u(N-1) & u(N-2) & \dots & u(N-n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由式(12 .2) 所示的差分方程模型,我们知道,  $\mathbf{Y}$ 和  $\boldsymbol{\theta}$  具有相同的概率分布。在  $\boldsymbol{\theta}$  及  $u(0), u(1), \dots, u(N)$  已知的条件下,  $y(1), \dots, y(N)$  的联合分布密度函数  $p\{y(1), \dots, y(N) / u(0), \dots, u(N); \boldsymbol{\theta}\}$  称为似然函数,记为  $L$ 。根据贝叶斯公式,成立

$$L = p\{y(1), \dots, y(N) / u(0), \dots, u(N); \boldsymbol{\theta}\}$$

$$= \prod_{i=1}^N p\{y(i) / y(1), \dots, y(i-1); u(0), \dots, u(N); \} \quad (12.3)$$

若记  $\mathbf{Y}(i) = [y(1) \dots y(i)]$ ;  $\mathbf{U}(i) = [u(0) \dots u(i)]$ , 则上式可简写为:

$$L = p\{\mathbf{Y}(N) / \mathbf{U}(N); \} = \prod_{i=1}^N p\{y(i) / \mathbf{Y}(i-1); \mathbf{U}(i); \} \quad (12.4)$$

为了计算方便, 并且由于  $\ln L$  是  $L$  的单调函数, 似然函数常取对数形式。

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^N p\{y(i) / \mathbf{Y}(i-1); \mathbf{U}(i); \} \quad (12.5)$$

在给定观测值  $y(1), \dots, y(N)$  的条件下, 什么是 的最好的估计呢? 我们称使得似然函数取最大估计值  $\hat{\theta}_{ML}$  为关于 的最大似然估计。这是因为概率密度函数越大, 意味着从总体中得到的样本落在观测值  $\{y(1), \dots, y(N)\}$  附近的可能性越大, 符合极大似然的原理。

使得似然函数取极大值的必要条件为:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (12.6)$$

或 
$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \quad (12.7)$$

由式(12.6) 或式(12.7) 即可解出参数 的极大似然估计  $\hat{\theta}_{ML}$ 。

**【例 12.1】** 设物体的长度为  $l$ ,  $l$  需要估计。对该物体进行  $N$  次测量, 得  $N$  个值  $l(1), \dots, l(N)$ 。假设这  $N$  次测量是独立同分布的, 服从  $N(l, \sigma^2)$  正态分布, 试对物体长度  $l$  作出极大似然估计。

**【解】** 似然函数为

$$L = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{-N} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (l_i - l)^2$$

$$\ln L = -N \ln \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (l_i - l)^2$$

由 
$$\frac{\partial \ln L}{\partial l} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N 2(l_i - l) = 0$$

即可解出关于  $l$  的极大似然估计

$$\hat{l}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$$

即测量值的算术平均值就是对未知长度的极大似然估计。若进一步求方差  $\sigma^2$ , 可由

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^N (l_i - l)^2$$

解得 
$$\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_i - l)^2$$

## § 12.2 极大似然估计算法

首先讨论一类重要的情况, 若在式(12.1) 中,  $\{n(k)\}$  是服从零均值、方差为  $\sigma^2$  的高斯分布的白噪声序列。则由式(12.2),  $\mathbf{Y}$  也是正态分布, 其联合密度函数为:

$$p(\mathbf{Y} / \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{-N} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{H})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H})}{2} \quad (12.8)$$

其中  $N$  是测量样本的个数。它的似然函数

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{N}{2} \ln 2 - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{H})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H}) \quad (12.9)$$

由似然方程

$$-\frac{\ln L}{N} = \mathbf{H}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H}) = 0 \quad (12.10)$$

立即可解得关于  $\theta$  的极大似然估计

$$\hat{\theta}_{ML} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y} \quad (12.11)$$

显然, 式(12.11) 表示, 当噪声序列是高斯分布的白噪声序列时, 极大似然估计就是最小二乘估计。

在一般情况下, 噪声  $\{e(k)\}$  为有色噪声, 它可看成是由白噪声滤波而成:

$$e(k) = \sum_{i=1}^q c_i e(k-i) + e(k) \quad (12.12)$$

其中  $\{e(k)\}$  为白噪声序列。代入式(12.1) 可得

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^n b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^q c_i e(k-i) + e(k) \quad (12.13)$$

若观测到  $(N+1)$  组数据  $y(0), y(1), \dots, y(N); u(0), u(1), \dots, u(N)$  则由上式可得线性方程组:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\theta + \mathbf{e} \quad (12.14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= [e(1) \quad \dots \quad e(N)]^T \\ &= [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_q]^T = [\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T, \mathbf{C}^T]^T \\ &= \begin{bmatrix} y(0) & 0 & \dots & 0 & u(1) & u(0) & 0 & \dots & 0 & e(0) & 0 & \dots & 0 \\ y(1) & y(0) & \dots & 0 & u(2) & u(1) & u(0) & \dots & 0 & e(1) & e(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(N-1) & y(N-2) & \dots & y(N-n) & u(N-1) & u(N-2) & u(N-3) & \dots & u(N-n) & e(N-1) & e(N-2) & \dots & e(N-n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为待辨识的参数向量, 它除了包含系统模型参数  $\theta$  以外, 还包含有噪声模型参数  $\mathbf{C}$ 。设  $\{e(k)\}$  为零均值, 方差为  $\sigma_e^2$  的服从高斯分布的白噪声序列。则由式(12.12),  $\{e(k)\}$  也是满足  $E\{e(k)\} = 0$  的服从高斯分布的随机序列。设  $\mathbf{R}$  由式(12.2) 定义, 则  $\mathbf{R}$  的协方差  $E\{\mathbf{e} \mathbf{e}^T\} = \mathbf{R}$  中的各元素, 是参数  $c_i$  的函数。利用均值和协方差可以写出  $\mathbf{e}$  的联合分布函数

$$p(\mathbf{e} / \theta) = [ (2\pi)^N \det \mathbf{R} ]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e} \right\} \quad (12.15)$$

代入式(12.2) 可得出关于  $\mathbf{Y}$  的联合分布函数, 即似然函数为:

$$L = [ (2\pi)^N \det \mathbf{R} ]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\theta)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\theta) \right\} \quad (12.16)$$

似然函数的对数为:

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det \mathbf{R}) - \frac{1}{2} [(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\theta)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{H}\theta)] \quad (12.17)$$

由于  $\theta$  中包含有未知数  $a_i$  和  $b_i$ ,  $\mathbf{R}^{-1}$  和  $\det \mathbf{R}$  中含有未知参数  $c_i$ 。因此, 似然函数的对数不再维持对待估计参数的二次型关系。不可能用解析方法得到参数的极大似然估计, 只能求助于数值计算方法。

为了能推导出适当的数值计算方法, 考虑以下没有  $u(k)$  的直接传输项的系统模型

$$y(k) = \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^q c_i e(k-i) + e(k) \quad (12.18)$$

它与模型式(12.13)的区别在于这里  $b_0 = 0$ , 即系统没有直接传输项。绝大部分计算机控制系统都可以用这类模型来描述。将式(12.18)代入到似然函数的基本公式(12.4)中, 有

$$L = \prod_{k=1}^N p\{e(k) + \sum_{j=1}^n a_j y(k-j) + \sum_{j=1}^n b_j u(k-j) + \sum_{j=1}^q c_j e(k-j) \mid \mathbf{Y}(k-1); \mathbf{U}(k-1)\}; \quad (12.19)$$

由于在所考虑的模型式(12.18)中, 等式的右边没有  $u(k)$ , 我们将式(12.4)中的  $\mathbf{U}(k)$  改成了  $\mathbf{U}(k-1)$ 。当观测至  $k$  时刻时,  $k-1$  时刻及以前的  $y(\cdot)$ ,  $u(\cdot)$ , 和  $e(\cdot)$  都已确定, 且  $e(k)$  与  $\mathbf{Y}(k-1)$ ,  $\mathbf{U}(k-1)$  及  $e(k-1)$  均不相关, 并注意到  $e(k)$  是零均值, 方差为  $\sigma^2$  的高斯分布白噪声, 式(12.19)可以写成

$$\begin{aligned} L &= \text{Const} + \prod_{k=1}^N p\{e(k)\} \\ &= \text{Const} + \prod_{k=1}^N (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} e^2(k)\right\} \\ &= \text{Const} + (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N e^2(k)\right\} \end{aligned} \quad (12.20)$$

其中, Const 表示常数, 它的大小与今后我们将要进行的优化过程没有关系。由式(12.18),  $e(k)$  满足下列关系。

$$e(k) = y(k) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^q c_i e(k-i) \quad (12.21)$$

由式(12.20)可得对数似然函数为

$$\ln L = \text{Const} - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N e^2(k) \quad (12.22)$$

根据极大似然原理, 噪声方差  $\sigma^2$  的极大似然估计  $\hat{\sigma}^2$  应使得  $\ln L$  为极大值, 即成立

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} \bigg|_{\hat{\sigma}^2} = 0 \quad (12.23)$$

对式(12.22)右边求导, 代入方程式(12.23), 并解之, 可得关于  $\sigma^2$  的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \quad (12.24)$$

将它代入式(12.22)中, 可得

$$\begin{aligned} \ln L &= \text{Const} - \frac{N}{2} \ln \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) - \frac{N}{2} \\ &= \text{Const} - \frac{N}{2} \ln \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \end{aligned} \quad (12.25)$$

模型式(12.18)所对应的参数向量为:

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n \quad c_1 \quad \dots \quad c_q]^T \quad (12.26)$$

它与前面根据模型式(12.13)所定义参数向量  $\theta$  的区别在于它不包括  $b_0$ 。显然, 对数似然函数  $\ln L$  是  $\theta$  中各参数的函数。根据最大似然法,  $\theta$  的最大似然估计  $\hat{\theta}_{ML}$  应使得  $\ln L$  取极大值。由式(12.25), 这又等价于使得

$$J_1(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k)$$

或使得

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N e^2(k) \quad (12.27)$$

取极小值。通过以上分析, 我们知道, 对于式(12.18)所定义的系统, 它的极大似然估计为: 在满足对于  $e(k)$  的约束条件式(12.21)的前提下, 求得参数  $\hat{\theta}_{ML}$ , 使得  $J(\hat{\theta})$  取最小值, 这是一个典型的有约束优化问题。可以采用各类数值寻优算法来求解。下面我们仅介绍利用 Newton-Raphson 法来求解这一优化问题的步骤。

Newton-Raphson 法的基本思想是用一个二次函数局部地近似指标函数  $J(\hat{\theta})$ , 然后求出此近似函数的极小点, 从而得到迭代公式:

$$\hat{\theta}_{M+1} = \hat{\theta}_M - \mathbf{H}^{-1} \bigg|_{\hat{\theta}_M} \frac{J(\hat{\theta})}{\hat{\theta}_M} \quad (12.28)$$

式中,  $\hat{\theta}_M$  和  $\hat{\theta}_{M+1}$  分别为第  $M$  次和第  $M+1$  次迭代的估计值,  $\mathbf{H}$  为 Hessian 阵, 定义为

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} \quad (12.29)$$

为了能利用式(12.28), 必须要求得  $J(\hat{\theta})$  关于  $\hat{\theta}$  的一阶和二阶偏导数。利用式(12.21)和式(12.27), 它们可按以下方式进行:

$$\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \bigg|_{\hat{\theta}_M} = \sum_{i=1}^N e(k) \frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}} \bigg|_{\hat{\theta}_M} \quad (12.30)$$

其中,  $\frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}}$  的各分量可通过以下公式得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(k)}{\partial a_j} \bigg|_{\hat{\theta}_M} &= -y(k-j) - \sum_{i=1}^q c_i \frac{\partial e(k-i)}{\partial a_j} \bigg|_{\hat{\theta}_M} \\ \frac{\partial e(k)}{\partial b_j} \bigg|_{\hat{\theta}_M} &= -u(k-j) - \sum_{i=1}^q c_i \frac{\partial e(k-i)}{\partial b_j} \bigg|_{\hat{\theta}_M} \\ \frac{\partial e(k)}{\partial c_l} \bigg|_{\hat{\theta}_M} &= -\hat{e}(k-l) - \sum_{i=1}^q c_i \frac{\partial e(k-i)}{\partial c_l} \bigg|_{\hat{\theta}_M} \end{aligned} \quad (12.31)$$

$j = 1, \dots, n; \quad l = 1, \dots, q;$

式中  $\hat{e}(k-l)$  是根据上次对参数  $\hat{\theta}$  的估计  $\hat{\theta}_M$ , 由式(12.21)计算出来的噪声值。

而 Hessian 阵  $\mathbf{H}$  可通过以下方法近似计算得到。

$$\mathbf{H} \bigg|_{\hat{\theta}_M} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}} \frac{\partial e(k)}{\partial \hat{\theta}}^T \bigg|_{\hat{\theta}_M} \quad (12.32)$$

整个迭代计算步骤如下:

极大似然估计法的离线迭代算法

(1) 利用最小二乘法等辨识算法按模型式(12.18), 辨识参数向量  $\hat{\theta}_0$ , 作为初始值, 并令  $M = 0$ 。

(2) 根据上一步所辨识的参数  $\hat{\theta}_M$ , 计算

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) &= \sum_{i=1}^N \hat{a}_i y(k-i) + \sum_{i=1}^N \hat{b}_i u(k-i) + \sum_{i=1}^q \hat{c}_i e(k-i) \\ e(k) &= y(k) - \hat{y}(k) \end{aligned}$$

$$J(\hat{\theta}_M) = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^N e^2(k)$$

$$\hat{\theta}_M^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k)$$

(3) 分别根据式(12.30)和式(12.32)求得

$$\left. \frac{J(\cdot)}{\hat{\theta}_M} \right| \text{ 和 } \left. \mathbf{H} \right|_{\hat{\theta}_M}$$

(4) 根据式(12.28), 计算得到  $\hat{\theta}_{M+1}$ 。

(5) 判定收敛性, 即若

$$\left| \frac{\hat{\theta}_{M+1}^2 - \hat{\theta}_M^2}{\hat{\theta}_M^2} \right| <$$

其中,  $\epsilon$  为一指定的误差范围, 则停机。否则回到(2), 继续进行迭代。

## § 12.3 预报误差法

极大似然法要求观测数据的概率分布是已知的。例如我们前面两小节讨论了当观测数据服从高斯分布时的极大似然估计问题。如果数据的概率分布未知, 则使用极大似然法存在一定的困难。本小节所讨论的预报误差法却不要求关于观测数据概率分布的先验知识。因此, 它是极大似然法的一种推广, 是一种可以解决更加一般问题的辨识算法。

考虑非线性离散时间系统

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(1), \mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(1), \theta) + \mathbf{v}(k) \quad (12.33)$$

其中,  $\mathbf{y}(k)$  是  $p$  维的输出向量;  $\mathbf{u}(k)$  是  $r$  维的输入向量;  $\theta$  为模型的参数向量;  $\mathbf{v}(k)$  是  $p$  维的噪声向量, 其均值为零, 协方差阵为  $\mathbf{R}$ 。若令

$$\mathbf{Y}(k-1) = [\mathbf{y}(k-1), \dots, \mathbf{y}(1)]$$

$$\mathbf{U}(k-1) = [\mathbf{u}(k-1), \dots, \mathbf{u}(1)]$$

分别表示直至  $(k-1)$  时刻系统的输出和输入的集合, 则式(12.33)还可以简写为:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{f}(\mathbf{Y}(k-1), \mathbf{U}(k-1), \theta) + \mathbf{v}(k) \quad (12.34)$$

式(12.34)表示了非常广泛的一类系统, 它不但包括了线性系统, 也包括了大多数具有因果关系的非线性系统。在已获得了数据  $\mathbf{Y}(k-1)$  和  $\mathbf{U}(k-1)$  的条件下, 对输出  $\mathbf{y}(k)$  的“最好”预报, 是它的条件期望

$$\hat{\mathbf{y}}(k | \cdot) = E\{\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}(k-1), \mathbf{U}(k-1), \cdot\} \quad (12.35)$$

显然, 这种“最好”的预报应是“最好”的模型的输出。这一模型可以通过极小化预报误差准则来获得。为此, 定义预报误差

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{f}(\mathbf{Y}(k-1), \mathbf{U}(k-1), \theta), \quad (12.36)$$

预报误差估计法的原理就是从模型类式(12.34)中, 选择一个最好的模型, 所选出模型中的估计量  $\hat{\theta}$ , 应使相应的模型具有较小的预报误差。因此, 我们采用使得预报误差协方差的估计量

$$\mathbf{D}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{e}(k) \mathbf{e}^T(k) \quad (12.37)$$

的某种标量函数为最小的原则, 来确定待估计的参数。最常用的预报误差准则有

$$J_1(\boldsymbol{\theta}) = \text{Tr}[\mathbf{W}\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})] \tag{12.38}$$

式中,  $\mathbf{W}$  是预先指定的权矩阵, 它是一正定矩阵;  $\text{Tr}$  表示求矩阵迹的运算。或者

$$J_2(\boldsymbol{\theta}) = \ln\{\det \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})\} \tag{12.39}$$

通过极小化  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  或  $J_2(\boldsymbol{\theta})$  获得的参数估计量即称为预报误差估计。可以证明, 当  $\{\mathbf{d}(k)\}$  是服从高斯分布的不相关随机向量序列时, 预报误差法与极大似然法是等价的。或者说, 极大似然法是预报误差法的一种特例。

通常, 如果已知  $\mathbf{d}(k)$  的协方差阵  $\mathbf{D}$ , 则可选  $J_1(\boldsymbol{\theta})$  作为预报误差准则, 并选  $\mathbf{W} = \mathbf{D}^{-1}$ ; 如果  $\mathbf{D}$  未知, 可选  $J_2(\boldsymbol{\theta})$  作为预报误差准则。

可以采用数值寻优的方法来获得预报误差估计。我们下面介绍采用 Newton-Raphson 法的计算步骤。

根据 Newton - Raphson 法的原理, 极小化  $J_i(\boldsymbol{\theta})$  ( $i = 1, 2$ ) 的迭代过程为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_M - \frac{1}{M} \mathbf{H}^{-1} \frac{J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_M)}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_M} \tag{12.40}$$

其中,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_M$  表示第  $M$  次迭代的参数估计值;  $\frac{J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_M)}{\hat{\boldsymbol{\theta}}_M}$  是  $J_i(\boldsymbol{\theta})$  关于  $\boldsymbol{\theta}$  的梯度;  $\mathbf{H} = \frac{\partial^2 J_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}_M)}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}$  是 Hessian 矩阵,  $\frac{1}{M}$  是迭代步长。

利用如下一些矩阵运算公式

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^T) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \text{Tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \ln \det \mathbf{A} &= (\mathbf{A}^{-1})^T \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= 2 \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \text{若 } \mathbf{A} \text{ 为对称矩阵,} \end{aligned}$$

以上各式中,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  为矩阵,  $\mathbf{x}$  是列向量。可以求得

$$\begin{aligned} \frac{J_1(\boldsymbol{\theta})}{N} &= \frac{1}{N} \text{Tr}[\mathbf{W}\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{d}^T(k) \mathbf{W} \mathbf{d}(k) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{d}^T(k) \mathbf{W} \frac{\mathbf{d}(k)}{2} \\ \frac{J_2(\boldsymbol{\theta})}{N} &= \frac{1}{N} \ln \det \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^r \sum_{p=1}^r \frac{\partial}{\partial d_{lp}} \ln \det \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \frac{d_{lp}}{2} \\ &= \text{Tr} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})} \ln \det \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \right]^T \frac{\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})}{2} \\ &= \text{Tr} \left[ \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{d}(k) \mathbf{d}^T(k) \right] \end{aligned} \tag{12.41}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}^T(k) \mathbf{D}^{-1}(\hat{\theta}) \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_i} \quad (12.42) \\
\frac{\partial^2 J_1(\hat{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{r}^T(k) \mathbf{W} \frac{\partial^2 \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_j}^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_i} + \mathbf{r}^T(k) \mathbf{W} \frac{\partial^2 \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \\
&= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_j}^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_i} \quad (12.43)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 J_2(\hat{\theta})}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_j}^T \mathbf{D}^{-1}(\hat{\theta}) \frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_i} \quad (12.44)$$

在以上各式中,  $d_{lp}$  表示  $\mathbf{D}(\hat{\theta})$  中的  $lp$  元素;且

$$\frac{\partial \mathbf{r}(k)}{\partial \theta_i} = - \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\mathbf{Y}(k-1), \mathbf{U}(k-1)), \quad (12.45)$$

在利用式(12.43)和式(12.44)两式计算 Hessian 阵  $\mathbf{H}$  时,我们忽略了  $\mathbf{r}(k)$  关于  $\theta$  的二阶导数项,这样不仅简化了计算,而且保证了  $\mathbf{H}$  的正定性。

利用 Newton-Raphson 法预报误差估计的具体计算可通过以下步骤进行:

预报误差估计算法

- (1) 利用其它的辨识算法,或者采用试猜的方法,确定一个初值  $\hat{\theta}_0$ ,并令  $M = 0$ 。
- (2) 利用式(12.41)和式(12.43),或式(12.42)和式(12.44)分别计算  $\frac{\partial J_i(\hat{\theta})}{\partial \theta}$  及  $\mathbf{H}$  阵。
- (3) 利用一维搜索算法,求  $\alpha_M$ ,使得

$$J(\hat{\theta}_M + \alpha_M \mathbf{H}^{-1} \frac{\partial J_i(\hat{\theta})}{\partial \theta})$$

取极小值。

- (4) 根据式(12.40)求得新的估计值  $\hat{\theta}_{M+1}$ 。
- (5) 判定收敛性。即若

$$\left| \frac{J_i(\hat{\theta}_{M+1}) - J_i(\hat{\theta}_M)}{J_i(\hat{\theta}_M)} \right| < \epsilon$$

其中  $\epsilon$  是事先确定的误差范围,则计算停止,否则令  $M = M + 1$ ,转至(2)继续进行迭代计算。

这一方法对于不同类型的模型,具有不同的特征。实际应用时,还可以根据所讨论问题的特点进行进一步的简化。

预报误差的参数估计量具有优良的渐近性质,它是一类比较常用的方法。它与极大似然法一样,最终都将参数辨识的问题转变成带约束条件的最优化问题,再利用最优化技术求解。

## 习 题

12.1 画出极大似然估计法的离线迭代算法计算框图。

12.2 考虑系统



$$y(k) = 1.5y(k-1) + 0.7y(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2) + e(k) - e(k-1) + 0.2e(k-2)$$

其中,  $e(k)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  服从正态分布的不相关随机噪声; 试采用伪随机二位式序列作为该系统的输入  $u(k)$ , 通过计算机仿真, 得出该系统的输入输出数据  $\{u(k), y(k)\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 240$ 。根据这些数据

(1) 用最小二乘法得出该系统各参数的估计值。

(2) 利用以上所得到的估计值作为初始值, 采用极大似然估计法得出该系统参数的极大似然估计。

12.3 对题 12.2 所示的系统及相应输入输出数据, 利用预报误差估计算法得出它的参数估计量。

## 第十三章 系统辨识中的实际问题

前面我们介绍了一些辨识方法。这些方法的共同点都是先假定系统模型结构,根据在被辨识对象上进行实验所得到的输入输出数据,估计出模型参数。本章我们将着重讲述实际工作中常遇到的几个主要问题,例如,怎样设计和进行辨识的实验,以得到输入输出数据;怎样确定待辨识系统的模型结构;怎样进行闭环系统中的辨识;以及怎样对辨识所得到的系统模型进行检验等。

为了获得待辨识对象的输入输出数据,首先必须在对象上进行实验。动态系统的实验设计,包括输入信号的选择,测量点的选择,测试信号的优选,采样周期的确定,以及要不要预置滤波器等。在设计实验时,还需要考虑它们之间的综合作用。

对在待辨识对象上进行实验,通常存在一些限制条件,如对输入、输出变量和中间变量的幅值和功率限制;允许试验时间的限制;允许采样的总个数的限制;对采样速度的限制;对所使用的传感器和滤波器的限制等。在具体进行时要对这些问题进行综合考虑。

在对待辨识对象进行系统辨识之前,必须做好以下准备工作。

### 1. 明确模型应用的目的

正如我们在第九章中所指出的那样,对于同一个实验系统,我们可以根据不同的用途建立不同的数学模型。例如在分析、设计实验系统和预报实际物理量随时间变化的曲线时,要使用较为精确的模型;而作为控制用的模型则要尽可能地简单,没有必要很精确。因此,模型应用目的不同,则模型的形式和建模步骤也不同。在建模过程中,必须明确模型的应用目的,并据此决定辨识的方法和步骤。这往往是决定辨识能否获得实际应用的关键。

### 2. 搜集待辨识对象的有关资料

通过对待辨识对象物理过程的了解,以及通过对待辨识对象的实际观察,尽可能地了解待辨识对象的信息。如待辨识对象是线性的还是非线性的?是时变的还是时不变的?系统的最大时间常数、最小时间常数,系统的阶次和某些参数的大致范围,系统的主要频率范围等。

### 3. 通过简单的预试验获得有关信息

如果条件允许,还可以通过在待辨识对象上进行简单的试验,如阶跃分析和相关分析等,或者通过生产实践经验来考虑系统的物理意义和对辨识试验必须施加的种种约束。例如,了解输入信号对系统输出的影响程度;对输入信号的幅值和功率的限制;系统非线性和时变的程度;系统的时滞;主要时间常数的大小;系统过渡过程时间;系统低频漂移程度;噪声强弱;系统最高工作频率或截止频率;能否在开环条件下进行辨识等。

## § 13.1 辨识试验信号的设计

系统辨识的结果与所观察到的关于待辨识对象的输入输出数据有着直接的关系。这些数据通常是在待辨识对象上进行试验所得到的。适当设计这一试验,就能够使实验的结果提供关

于待辨识对象的丰富信息。

13 .1 .1 输入信号的选择

实验输入信号的选择在很大程度上影响观测数据。输入信号决定了系统的工作点,决定了系统的什么样的振型被这一实验所激励。为了能对系统进行有效的辨识,我们希望所量测的关于系统的输入输出数据中充分包含系统的动态信息。然而我们在选择实验输入信号时通常要受到各式各样的约束。例如对于工业过程辨识,由于各种原因,有可能不允许我们对待辨识对象进行长时间的连续试验。而另一方面,对于实验室系统或新产品新设备的开发阶段,则通常允许我们进行各种辨识实验。另外对于辨识输入信号的幅值和功率通常都具有一定的约束。有时甚至对输入信号的波形都有一定的限制。

辨识实验输入信号与所采用的辨识方法有关,特别是对于非参数辨识方法,例如频率响应法要求输入信号为正弦波;瞬态响应分析法要求输入信号为阶跃或脉冲信号;相关分析法要求输入信号为白噪声或伪随机二位式序列等。

对于大多数参数估计方法来说,对信号的波形通常没有什么要求,但要求实验输入信号必须为持续激励的。一般来说,为了辨识  $n$  阶模型中的各个参数,要求实验输入信号  $u(k)$  是  $2n$  阶持续激励的。但是,随着辨识方法不同,要求持续激励的阶次也不一样。输入信号的持续激励条件,保证了系统的各个振型都能够被激励出来。 $n$  阶持续激励信号具有这样的性质,即它的频谱图上至少有  $n$  个不为零的点。因此,如果有一个信号在所有的频率上它的谱密度都不为零,则该信号将会保证足够阶的持续激励。下面的例子表明,如果实验输入信号不是足够阶充分激励,则系统将是不可辨识的。

【例 13 .1】 设待辨识对象的真实模型为:

$$y(k+1) = - ay(k) + bu(k)$$

该系统辨识所得到的模型为:

$$\hat{y}(k+1) = - \hat{a}y(k) + \hat{b}u(k)$$

其中,  $\hat{y}(k+1)$  为辨识所得到的模型的输出预报值。假定控制输入  $u(k)$  为一常数,并且系统的稳态增益等于模型的稳态增益,即

$$\frac{b}{1+a} = \frac{\hat{b}}{1+\hat{a}} \tag{13 .1}$$

则尽管在稳态时,系统输出和模型输出预报之间的预报误差为零,满足式(13 .1),但仍然有可能成立  $a \neq \hat{a}$  及  $b \neq \hat{b}$ 。

设控制输入  $u(t) = c$  为一常数,则在稳态时显然成立

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) = \frac{b}{1+a}c \\ \hat{y}(k+1) &= \hat{y}(k) = \frac{\hat{b}}{1+\hat{a}}c \end{aligned}$$

在稳态时,  $y(k)$  的预报误差为:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k) = \frac{b}{1+a} - \frac{\hat{b}}{1+\hat{a}} c = 0 \tag{13 .2}$$

在上式中我们应用了式(13 .1)。虽然这时预报误差为零,但是若成立  $\hat{a} = a$ , 则由式

(13.1) 可知, 这时若  $\hat{b}$  满足  $\hat{b} = \frac{b(1+a)}{1+a}$ , 则式(13.2) 仍然成立。这就意味着尽管稳态系统的预报误差为零, 但是参数的估计值仍然不一定等于它的真值。换句话说, 对于有两个参数待辨识的系统, 若辨识输入为常数, 则系统的参数不可辨识。

在实际辨识工作中, 我们可以采用白噪声作为辨识输入信号, 它通常可以满足持续激励的条件, 从而获得较好的辨识效果。但是白噪声在物理上不易实现。在实际应用中, 人们常常使用行之有效的伪随机二位式序列作为输入信号。

在实际系统辨识过程中, 我们通常选择一个线性有限阶的模型作为系统的数学模型, 而实际系统却可能是非线性的, 或者实际系统的阶次大大高于模型的阶次。在这种情况下, 辨识的过程也可以看成是一个模型近似过程。因此, 通过系统辨识所得到的模型将依赖于辨识实验所获得的输入输出数据。为了能通过辨识得到关于系统的实用模型, 应当尽可能选择辨识实验条件与将来系统模型的工作条件相一致。换句话说, 辨识输入信号的主要能量应当集中在所辨识的模型未来应用时所处的频带内。

在可能的情况下, 输入信号的幅值应尽可能的大。这是因为随着输入信号幅值的加大, 辨识数据中的信噪比将增加, 从而提高了辨识的精度。但是在实际系统的辨识中, 出于安全性和经济性的考虑, 通常不希望系统输入和输出的变化过大。另外, 实际工业过程通常都具有非线性, 而我们采用辨识的模型却是线性模型。这时, 辨识的过程也可以看成是采用线性模型去近似非线性系统的过程。我们知道, 线性模型只是在某些工作点附近可以近似非线性系统, 如果选择过大幅值的信号将可能使非线性系统偏离它的工作点, 从而造成辨识模型的不精确。

### 13.1.2 最优输入信号设计

采用不同的输入信号, 可以得到不同的辨识精度。什么样的实验输入信号是最优输入信号呢? 这个信号在满足对输入信号的幅值和功率等约束条件下应当能极小化模型误差的某个指标。

选择什么样的性能指标作为评价不同输入信号所取得的辨识效果呢? 显然, 它应当与利用该输入输出数据所进行的参数估计的精度有关, 而该精度又与实验条件和采用的参数估计方法有关。前面我们指出, 如果某一种无偏估计的方差, 在所有的无偏估计方法中达到最小值, 则称该种无偏估计方法为有效估计。设  $\hat{\theta}$  为参数  $\theta$  的无偏估计, 则  $\hat{\theta}$  的方差满足著名的克拉姆—罗(Cramer-Rao) 不等式:

$$\text{Cov} \hat{\theta} = E \left( \hat{\theta} - \theta \right) \left( \hat{\theta} - \theta \right)^T \geq \mathbf{M}^{-1} \tag{13.3}$$

其中,  $\mathbf{M}^{-1}$  称为费歇(Fisher) 信息矩阵, 定义为

$$\mathbf{M} = E_Y \left[ \frac{\partial \ln p(\mathbf{Y} / \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ln p(\mathbf{Y} / \theta)}{\partial \theta}^T \right] \tag{13.4}$$

式中,  $p(\mathbf{Y} / \theta)$  是随机向量  $\mathbf{Y}$  的条件概率密度, 也称似然函数。 $E_Y \{ \cdot \}$  是  $\mathbf{Y}$  的条件期望。显然, 如果对某一类无偏估计, 它的方差达到克拉姆—罗不等式所表示的下界, 即式(13.3) 中的等号成立, 则该类估计是有效估计。如果我们假定所采用的估计方法是有效估计, 且其方差达到克拉姆—罗不等式的下界, 则我们可以采用费歇信息阵作为评价实验条件优良性的一个量度。由于费歇信息阵是一个矩阵, 我们可以取它的一个标量函数  $f(\mathbf{M})$  作为性能指标, 通常取:

$$J = - \ln \det \mathbf{M} \tag{13.5}$$

性能指标式(13.5)中  $\det \mathbf{M}$  通常与输入信号有关,当求得  $\det \mathbf{M}$  与输入信号之间的关系式,并考虑到对输入信号幅值和功率的约束式,利用优化的方法,可以得到使得  $J$  为最优的最优输入信号序列  $\{u(k)\}$ 。常用的方法有时域法和频域法等<sup>[19]</sup>。

一般说来,利用最优输入信号作为测试信号所得到的辨识精度,优于伪随机二位式序列。但是,最优信号的设计问题,只有在噪声的统计特性已经完全掌握的前提下才能解决。这一点在实际上是难以办到的。并且,对一般的系统,要获得最优输入信号的解析解十分困难。

在一般的辨识问题中,尤其在那些试验费用较低,而又便于进行试验的场合,伪随机二位式信号是应用最多的一种信号,虽然一般来说它不是最优输入信号,但是这种试验信号可以用比较简单的办法得到,而且调整也很方便。只有在做辨识试验费用十分昂贵的场合,或者允许辨识时间十分短促的场合,人们才想办法尽可能弄清噪声的特性,并据此利用优化的方法设计出最优输入信号,以便在难得进行一次的辨识试验中,在较短的时间内,尽可能地完成任务。

## § 13.2 采样周期和试验长度的选择

辨识试验的另一个重要问题是采样周期和试验长度的选择。

### 13.2.1 采样周期

为了进行参数估计,首先要获得系统的输入和输出数据。这一过程实际上就是采样过程。在采样过程中,采样周期  $T$ (或采样频率  $f = \frac{1}{T}$ ) 的确定是一个重要问题,它直接影响到数据的有效性和辨识的成本。确定采样周期是一个比较复杂的问题。采样周期取得短些,数据可以含有较多的关于系统的信息,但是要增加计算工作量和成本。同时,如果采样周期太短,则会产生大量相关的和重复多余的数据,这会使最小二乘法产生病态矩阵。当采样周期很小的时候,系统模型的所有极点都集中在复平面上的  $z = 1$  点附近,使得所建立的模型对误差十分敏感。对于相当一大类系统来说,过短的采样周期还将会导致模型为非最小相位的,这将在随后的控制系统设计中引起一些问题。采样周期过长,虽然比较经济,但是太长的采样周期,会在原始数据中引起低频分量和高频分量的叠混,由此产生的模型就不能完全描述原来的系统。下面我们给出关于采样周期选择的几点考虑。

1. 为了避免混叠现象,采样周期  $T$  必须满足香农采样定理,即:

$$\frac{1}{T} \geq 2f_M \tag{13.6}$$

一般取

$$\frac{1}{T} = (3 \sim 4)f_M \tag{13.7}$$

其中,  $f_M$  为系统的最高工作频率。

2. 设  $T_{95}$  为待辨识对象过渡过程进入其稳态值的 95% 所需的时间。选择  $T$  满足

$$\frac{T_{95}}{T} = 5 \sim 15 \tag{13.8}$$

3. 设  $T_{\min}$  为待辨识对象的最小时间常数,选择  $T$  满足

$$T = (1 \sim 2) T_{\min} \tag{13.9}$$

对有多个位置相近的极点的系统,为了解分辨出这些极点,需要较高的采样速率。

4.设  $T_a$  为待辨识对象的主要时间常数,选择

$$T = (0.05 \sim 0.1) T_a \tag{13.10}$$

上式表明在  $T_a$  时间内采样 10 ~ 20 个点。

在实际应用中,可根据以上一些经验公式,通过系统仿真和实验确定采样周期。

### 13.2.2 试验数据长度

在最小二乘估计算法的统计特性中,我们知道,当观测值中混杂有随机噪声时,估计值  $\hat{\theta}$  的协方差随着试验长度  $N$  的增加而减少。因此,为得到较好的模型,希望试验长度  $N$  尽可能地长一些。实际上,试验长度常常受到限制。例如,通常要求在对象上做试验的时间不能太长。另外,当有额外的干扰进入系统,或者出现漂移,或者系统的动态特性发生改变时,试验长度不得不缩短。当然,数据记录装置或计算机内存容量也可能对数据长度有所限制。一般说来,试验时间必须等于或大于系统主要时间常数的十倍,即

$$NT \geq 10 T_a \tag{13.11}$$

另一个简便的方法,就是每做完 4 ~ 5 个周期的伪随机二位式序列的试验,然后判断一次结果的合理性。

## § 13.3 数据的预处理

由辨识试验中采集的输入输出数据一般还不能直接应用于参数估计中。其原因主要有:在数据中通常混有高频和低频的噪声;在数据采集过程中,偶然的突发或异常值,以及漂移和调零偏差等影响了数据的有效性。

### 13.3.1 高频和低频噪声的消除

为了避免混叠现象,消除超过对辨识系统动态特性有意义的频率以上的高频噪声,通常要采用一阶或二阶的无源或有源模拟滤波器对数据在采样前进行滤波。该滤波器应对低频率与中频率的信号具有恒定的增益和接近零度的相移,以免引起有用信号的失真,在高频段,它的增益应该很快下降。采用这样的滤波器后,数据中的高频干扰得到了消除,降低了混叠效应,增加了系统的信噪比。

低频干扰噪声(如漂移)的消除,可以采用各种数字滤波的方法,对输入输出数据都进行高频滤波。一阶高通滤波器的算法为:

$$u(k) = u(k-1) + u^*(k) - u^*(k-1) \tag{13.12}$$

$$y(k) = y(k-1) + y^*(k) - y^*(k-1) \tag{13.13}$$

式中,  $u^*(k)$  和  $y^*(k)$  表示采集到的输入和输出数据,  $u(k)$  和  $y(k)$  是滤波后得到的数据,它们将用于参数估计。一般取  $T_f = e^{-\frac{T}{T_f}}$ ,  $T$  为采样周期,  $T_f$  为滤波器的时间常数。 $T_f$  的选择必须使滤波器具有高通滤波的性能。对于伪随机二位式序列,设时钟周期为  $T$ , 序列周期为  $T_p = N_p T$ , 则时间常数  $T_f$  可取为:

$$T_f > \frac{N_p T}{2} \tag{13.14}$$

另外,为了防止偶然的突发或异常值,可以在每一个采样时刻,连续采集几次(例如 5 ~ 6 次),然后,去掉最大值和最小值,再取平均值,也可以采用其它类似的方法。

### 13.3.2 非零均值的处理

除非采用适当的方法,非零均值的数据可能会在系统辨识的过程中引起一些问题。可以采用两个方法来处理非零均值数据的系统辨识问题,即明确地估计出均值和对数据采用增量化处理等。

当输入输出数据的均值不为零时,可以进行零均值化处理。设实际采集的输入和输出数据分别为  $u^*(k)$  和  $y^*(k)$ ,  $u_0$  和  $y_0$  分别是输入和输出数据的稳态值或直流分量,则零均值化后的数据为:

$$u(k) = u^*(k) - u_0; \quad y(k) = y^*(k) - y_0$$

如果在实际中不知道数据的直流分量  $u_0$  和  $y_0$ ,可以采用辨识的方法求出。如果采用最小二乘评价函数,则  $u_0$  和  $y_0$  的估计值就是它们的算术平均值:

$$y_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \quad u_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)$$

式中,  $N$  是采样点数。

另外一个方法是在参数估计过程中同时估计均值。这时,需要在待辨识对象的模型中增加一个能描述  $y(k)$  的非零均值的参数。例如采用下式所描述的模型:

$$y(k) = G(q^{-1})y(k) + H(q^{-1})u(k) + m$$

其中,  $m$  也是一个待辨识的参数。

增量化处理的思想是采用增量数据来代替原数据,并利用它辨识系统的增量化模型。设原数据为  $y^*(k)$  和  $u^*(k)$ ,则增量化数据为

$$\begin{aligned} y(k) &= y^*(k) - y^*(k-1) \\ u(k) &= u^*(k) - u^*(k-1) \end{aligned}$$

在线辨识时,也要进行数据的预处理,只不过预处理方法是实时进行的。

## § 13.4 模型结构的确定

在前面所讨论的系统辨识方法中,我们都是先假定待辨识对象模型的结构已知,然后利用参数估计的方法,确定模型的有关参数。因此,在实际采集了系统的输入输出数据之后,选择系统模型的结构就成了首要的问题。目前尚没有一般的方法来选择合理的模型结构。验前知识、工程直觉和模型的性质必须结合起来考虑。在实践中,模型结构的选择在很大程度上受模型今后应用的目的的影响。例如,如果辨识模型的目的是为了系统控制,则低阶的精确度较差的模型就可以了。然而,如果模型的目的是为了仿真或者是为了对对象进行详尽的分析,则必须要采用阶次较高的较为精确的模型结构。

有时,我们可以从描述对象的基本物理规律和已知的关系来建立含未知参数的待辨识对象模型结构。而在另外一些情况下,也可以不考虑待辨识对象物理背景如何,直接采用第九章中所介绍的标准的差分方程模型。模型结构的选择要本着“节省原则”,即用尽可能少的参数来描述待辨识的对象。如果两个模型所对应的性能指标值相差不大,则要采用参数量较少的模型。

一旦确定了采用 § 9 .1 中所介绍的某种线性差分方程模型, 则模型结构问题就成为阶次的选择问题。前面我们已经指出, 很大一类工业过程不可能用线性的有限阶系统来精确地描述, 因此系统辨识的问题还包含有模型近似的概念。显然, 模型没有必要把待辨识对象的全部特征都反映出来。一般说来, 模型远较受控系统简单, 所以在一般情况下, 难以找到期望的模型的阶的直接定义。在实际中, 我们通常进行多次参数估计过程, 并依次增加系统模型的阶次, 并将各次辨识结果进行比较, 根据某些原则, 最终确定系统模型。

13 .4 .1 模型阶次的确定

在单输入单输出线性定常系统中, 模型结构就是指模型的阶次和时滞的确定问题。它也是系统辨识中的重要内容之一, 是建立系统数学模型好坏的关键。关于确定模型阶次的方法, 目前常用的有目标函数法, F 检验法, AIC 准则等。但是无论哪一种都不是通用的方法。实际应用时, 比较现实的做法是, 试试各种方法, 以选择最合理的阶次作为模型的阶次。

1 .损失函数法

最小二乘估计是在给定模型阶次的前提下通过极小化二次型目标函数推导出来的。对于同一个被辨识对象, 利用输入输出数据, 假定不同阶次模型, 分别进行最小二乘估计。利用残差的平方和, 即

$$J = \mathbf{E}^T \mathbf{E} = (\mathbf{Y} - \mathbf{H}^\wedge)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H}^\wedge)$$

来作为损失函数, 衡量各不同阶次模型与输入输出数据之间拟合的好坏。其中  $\mathbf{H}^\wedge$  为某一阶次模型下的参数估计量,  $\mathbf{E}$  为残差向量。残差包含了关于参数向量拟合偏差和附加噪声两个方面的信息。显然  $J$  是模型参数和阶次的函数。

对实际系统进行辨识时, 输入输出数据的个数  $N$  必须大大超过模型参数的个数。这时, 随着模型阶次的增加, 损失函数  $J$  的值先是显著地下降, 当模型的阶次大于真实的系统阶次  $n_0$  时,  $J$  值的下降速度显著减慢或者只有很小的下降。利用这一原理即可以确定模型的阶次。具体的做法是, 首先根据某种参数估计方法, 估计出在不同的模型阶次  $n = 1, 2, 3, \dots$  下相应模型参数的估计量  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \dots$ 。然后计算出相应于各参数估计量  $\hat{\theta}$  的目标函数值  $J_1, J_2, J_3, \dots$ 。最后, 作出损失函数  $J$  和模型阶次  $n$  的关系图, 如图 13 .1 所示。如果这一关系曲线是随着阶次  $n$  的增加, 曲线一直下降, 在  $n = \hat{n} - 1$  时  $J$  最后一次出现显著下降, 以后  $J$  便大致保持不变, 或者只有很小的下降, 则取  $\hat{n}$  为合适的模型阶次。

在输入输出数据受到噪声的污染时, 损失函数  $J$  的下降将不象没有噪声时那么明显。这时  $J$  的极小值将取决于噪声的方差, 因而阶的变化引起的  $J$  改变有可能比噪声的方差对  $J$  的影响小。

图 13 .1 损失函数和模型阶次的关系

【例 13 .2】 考虑以下二阶系统

$$\begin{aligned} y(k) - 1.5 y(k - 1) + 0.7 y(k - 2) = & u(k - 1) + 0.5 u(k - 2) + e(k) \\ & - e(k - 1) + 0.2 e(k - 2) \end{aligned}$$

采用幅值为  $\pm 1$  的伪随机二位式序列  $u(k)$ , 零均值, 方差为 1 的白噪声序列  $e(k)$  对以上系统



进行仿真,得到  $N = 1000$  组输入输出数据。利用 ARMAX 模型

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

根据以上输入输出数据,分别令模型阶次为 1, 2, 3 进行参数估计,得到的结果如表 13 .1 所示。

表 13 .1 [例 13 .2] 的参数估计结果

模型阶次	损失函数值	参 数	参数真值	参数估计值
1	1713	$a$		- 0.822
		$b$		0.613
		$c$		0.389
2	526.3	$a_1$	- 1.5	- 1.502
		$a_2$	0.7	0.703
		$b_1$	1.0	0.938
		$b_2$	0.5	0.550
		$c_1$	- 1.0	- 0.975
		$c_2$	0.2	0.159
		$a_1$		- 0.834
		$a_2$		- 0.291
3	524.3	$a_3$		0.462
		$b_1$		0.942
		$b_2$		1.151
		$b_3$		0.420
		$c_1$		- 0.308
		$c_2$		- 0.455
		$c_3$		0.069

由表中可见当  $n = 2$  时损失函数有一个显著的下降,但  $n = 3$  时损失函数几乎保持不变。因此,取  $n = 2$  作为模型的阶次是适合的。

2.F 检验法

为了判断损失函数的下降是否显著,进一步提出了利用数理统计中的统计检验的方法来确定模型阶次的问题,1968 年 K.J.Astrom 引入了一个统计量  $t$  作为检验  $J$  是否因模型阶次  $n$  增加而显著减少的准则

$$t(n_1, n_2) = \frac{J_1 - J_2}{J_2} \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)}$$

式中,  $N$  为输入输出数据组的样本个数,  $J_1$  和  $J_2$  分别是模型阶次为  $n_1$  和  $n_2$  时损失函数的最小值。当  $N$  充分大时,统计量  $t$  渐近地服从自由度  $f_1 = 2(n_2 - n_1)$ ,  $f_2 = N - 2n_2$  的  $F(f_1, f_2)$  分布。

对于单输入单输出系统,在一定的观测值个数  $N$  下,若当每次令系统模型的阶次增加 1,即  $n_2 - n_1 = 1$  时,相应的模型参数的个数增加 2 个,则  $J$  值和统计量  $t$  的值都随  $n$  的增加而下降。根据 F 分布表可知,在置信度  $\alpha = 0.05$  下,当  $N > 100$  时,若模型阶次  $n$  增加 1,则  $t$  至少应大于 3,  $J$  值的差别才是显著的,或  $J$  值的下降才是显著的。

于是,在确定单输入单输出系统模型的阶次时,可令  $n$  逐次地增加,即  $n = 1, 2, \dots$ ,对相应的模型参数进行估计,并算出其相应的损失函数值  $J_1, J_2, \dots$  和统计量  $t_1, t_2, \dots$ 。当模型的阶次由  $n_0$  增加到  $n_0 + 1$  时,如有  $t(n_0 - 1, n_0) > 3$ ,而且  $t(n_0, n_0 + 1) > 3$ ,它表示模型的阶次由  $n_0$  增加到  $n_0 + 1$  时,  $J$  值的减少量  $J = J_{n_0} - J_{n_0+1}$  已不显著,也就是说,可以确定该系统合适的模型阶次为  $n_0$ 。这就是用 F 检验法检验模型阶次的步骤。

**【例 13 3】** 对于[例 13 .2] 所示的参数估计的结果,根据表 13 .1,我们可以计算出  $t(1, 2) = 345, t(2, 3) = 1.889$ 。根据 F 检验法,可以确定合适的模型阶次为 2。

### 3 .AIC 准则

AIC 准则是 Average Information Criterion 的字头,又称平均信息判据,1972 年由日本学者 Akaike 提出,是一个基于信息量判据提出的准则。AIC 准则的定义是

$$AIC(n) = - 2\ln L(\hat{\theta}_{ML}, n) + 2 n$$

式中,  $n$  为对应于  $n$  阶模型的参数个数,  $L(\hat{\theta}_{ML}, n)$  为极大似然函数估计量  $\hat{\theta}_{ML}$  下的似然函数。

对阶次不同的模型,分别计算它们的 AIC 准则,对应于 AIC 取最小值者,即为所求系统的模型阶次。

AIC 准则用来确定时间序列模型效果较好,但在使用时计算工作量较大。有人证明了 AIC 准则和 F 检验是渐近等价的。但也有学者认为由 AIC 准则所确定的模型阶次往往偏高。因此,后来也有学者对 AIC 准则进行了适当的修正。

## 13 .4 .2 时滞的确定

许多工业过程通常都具有不可忽视的时滞,正确地估计出过程的时滞非常重要。事实上,我们前面所考虑的参数估计方法,也适用于具有时滞的待辨识对象。例如对于 ARMAX 模型:

$$A(q^{-1}) y(k) = \Phi(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) e(k) \tag{13 .15}$$

若令其中

$$\Phi(q^{-1}) = \phi_0 q^{-d} + \phi_{d+1} q^{-(d+1)} + \dots + \phi_n q^{-n}$$

则它就描述了时滞为  $d$  的系统。为方便起见,也可以在模型中明确地表示出时滞,即令

$$\Phi(q^{-1}) = q^{-d} B(q^{-1})$$

将式(13 .15) 写成

$$A(q^{-1}) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) e(k) \tag{13 .16}$$

这样,模型的结构就取决于模型阶次  $n$  和时滞  $d$  两个参数。

对时滞的估计方法主要有以下三类:

(1) 单独测试。例如先在待辨识对象上以阶跃或脉冲输入作测试信号,根据所得到的阶跃响应曲线或脉冲响应曲线以确定时延  $\tau$ ,再取  $d = \frac{\tau}{T}$ ,其中  $T$  为采样周期。

(2) 先设  $d = 0$ ,预选一个尽可能高的阶次  $n$ ,进行参数估计。再检验参数估计量,并找出满足下述条件的  $d$  值。

$$|\hat{b}_0|, |\hat{b}_1|, \dots, |\hat{b}_p| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{b}_i|$$

而且

$$|\hat{b}_{p+1}| \leq |\hat{b}_p|$$

这时就取  $d = p$ 。

(3) 也可以把系统模型的阶次  $n$  和时滞  $d$  的确定结合起来, 以判定最合适的  $n$  和  $d$ 。设  $J$  为损失函数, 我们可将  $J$  作为是  $n$  与  $d$  的二元函数  $J(n, d)$ , 并且在范围  $1 \leq n \leq n_{\max}$  和  $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$  内对  $n$  和  $d$  进行搜索。如发现当  $n$  增大时,  $J(n+1, \hat{d})$  相对于  $J(n, \hat{d})$  不再有显著的下降, 而且  $J(n, \hat{d})$  小于  $J(n, \hat{d} \pm 1)$ , 这时阶次  $n$  和时滞  $\hat{d}$  即为所求的值。

## § 13.5 模型检验

模型检验是系统辨识不可缺少的步骤之一。前面我们已经指出, 系统辨识就是要在—类模型集合中选出一个与待辨识系统的观测数据拟合得最好的模型。模型检验的目的就是看这一“最好”的模型是有用的还是无效的。具体来说, 我们要考虑以下三个方面的问题:

- (1) 模型是否与观测数据一致?
- (2) 模型是否满足应用的目的?
- (3) 模型是否完整地描述了真实的系统?

在这三个问题中, 问题(3)十分复杂, 并且在一定意义上来说是一个不可能回答的问题。对我们来说, 不应该期望也不可能找到一个和实际系统完全一致的模型。辨识所得到的模型只能是系统的近似描述。对于第二个问题, 是我们真正所关心的。建模的最终目的是实际应用, 它可能应用于系统控制、系统仿真和预报。不论何种用途, 只要实际应用结果是满意的, 例如如果依赖于所辨识的模型进行系统综合所得到的控制系统能够得到满意的控制效果, 就可以认为所建立的模型是可靠的。但是, 由于实际应用中的某些限制, 测试所有的模型是否满足应用的目的几乎是不可能的, 或者是代价十分昂贵的。我们必须采用其它的方法来筛选模型。一般说来, 模型检验主要是解答以上的第一个问题。

关于模型检验, 没有一般的方法可循。通常我们可以选用如下几个方法:

- (1) 比较实际系统输出与各个不同模型之间输出的残差。如果残差序列可以近似为零均值的白噪声序列, 则认为模型是可靠的。
- (2) 如果能较方便地得到实际系统的幅相频率曲线(Bode图), 则可以同系统模型的幅相频率曲线进行比较。如果两者比较一致, 即可认为模型是可靠的。
- (3) 采用交叉检验法。即在对系统进行数据采集时, 独立地进行几次试验, 多采集几组样本。利用其中的一组数据来建立系统的数学模型, 另外一组或几组数据用来检验模型。选出在这种交叉试验中适应性较好的模型。即如果在检验时, 模型的输出与实际系统输出之间的误差较小, 且损失函数也没有明显的变化, 则认为模型是可靠的。

除此以外, 如有可能, 还必须对所有的假定进行检验。包括以下几个方面的内容:

- (1) 线性程度的检验。如果可能, 利用幅值不同的另一组输入信号对待辨识对象进行辨识试验, 以检验待辨识对象的线性程度。例如在做阶跃响应试验时, 先进行正向阶跃输入试验后, 再进行反向阶跃输入试验。如果系统的非线性因素较强的话, 就不能用线性模型。
- (2) 时不变性质的检验。检验系统时不变性的一个较方便的方法是采集在不同时间区段内的几组数据(也可以将所采集的数据分成两个区段), 利用一组数据辨识系统的模型, 而用另外一组(或几组)数据进行检验(即进行交叉试验)。如果待辨识对象是时不变的, 则所辨识的模型应当能够通过这样的交叉试验。

如果所辨识的模型没有通过模型检验, 在应用中它的效果会较差。产生这样的问题, 可能有下面的一些原因。

- (1) 模型结构选择不正确。
- (2) 所采集的数据信息量不够, 不能据此得到可用的模型。
- (3) 辨识算法选择不妥。
- (4) 由于数值计算方面的原因, 造成计算误差太大。

应该仔细寻找原因, 并找出克服方法, 并重新进行系统辨识, 以建立新的数学模型。

模型检验受主观因素影响较大。模型使用者对待辨识对象的直观了解, 通常也起很大的作用。最后模型的好坏取决于在预定的应用场合是否满意。

### § 13 .6 闭环系统辨识

在许多实际问题中, 系统辨识不一定能在开环状态下进行, 其原因是:

- (1) 待辨识对象只能在闭环状态下运行。如开环不稳定对象; 待辨识对象输出需要保持在工作点附近的一个小范围内; 待辨识对象的被控制变量必须跟随设定值变化等。
- (2) 系统辨识是自适应控制系统的一个组成部分。
- (3) 待辨识对象本身就存在有内在的, 固有的反馈。

前面所介绍的关于系统辨识的方法, 都是基于待辨识对象在开环状态下进行的实验所得到的数据而进行的, 因此在用于闭环系统辨识时, 有可能造成一些问题。为此, 本节将讨论闭环系统可辨识条件, 辨识方法和开环辨识方法在闭环系统中的应用等问题。

对闭环系统的辨识首先有一个可辨识性的问题。下面例子说明在某些情况下, 有可能产生闭环系统不可辨识的情况。

**【例 13 .4】** 设待辨识系统为:

$$y(k) + ay(k - 1) = bu(k - 1) + e(k) \tag{13 .17}$$

其中,  $u(k)$  和  $y(k)$  分别为系统输入和输出,  $e(k)$  为白噪声。

设系统控制作用为比例反馈控制

$$u(k) = gy(k) \tag{13 .18}$$

采集了  $N$  组输入输出数据  $\{u(k), y(k)\}, k = 1, \dots, N$  后, 用最小二乘法进行参数估计。并假定  $\hat{a}, \hat{b}$  为最小二乘估计, 即  $\hat{a}, \hat{b}$ , 使得

$$J_1 = \sum_{k=1}^N (y(k) + \hat{a}y(k - 1) - \hat{b}u(k - 1))^2$$

为极小。但这个参数  $\hat{a}, \hat{b}$  不是唯一的, 如选择另一组参数,  $\hat{a} = \hat{a} + rg, \hat{b} = \hat{b} + r$ , 其中  $r$  为任意常数, 则对应的性能指标

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{k=1}^N [y(k) + (\hat{a} + rg)y(k - 1) - (\hat{b} + r)u(k - 1)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^N [y(k) + \hat{a}y(k - 1) + rgy(k - 1) - \hat{b}u(k - 1) - ru(k - 1)]^2 \\ &= J_1 \end{aligned}$$

在上式中, 我们利用了关系式(13 .15)。可见  $\hat{a}, \hat{b}$  也使得残差平方和为最小, 从而也是系统的

最小二乘估计值。这样,由式(13.14)和式(13.15)组成的闭环系统的最小二乘估计值不唯一。为使闭环系统的辨识仍然能够成功地进行,需要加上一些补充的条件,或者设计新的算法。一个简便的附加的条件是:预先定出参数  $a$  的估计值  $\hat{a}_1$ ,则上述系统就可以辨识了。

关于闭环系统辨识方法有多种,我们介绍间接辨识法和直接辨识法。

### 13.6.1 间接辨识法

间接辨识法的基本思想是首先辨识出闭环系统模型,然后利用控制器模型,从中推导出被控对象的数学模型。显然,这一方法要求控制器模型是已知的。

考虑图 13.2 所示的闭环控制系统,其中  $e(k)$  是前向通道噪声,  $v(k)$  是反馈通道噪声;  $v(k)$  和  $e(k)$  都是均值为零,方差分别为  $\sigma_v^2$  和  $\sigma_e^2$  的互不相关平稳随机噪声。 $r(k)$  是系统给定,通常假设为零;  $y(k)$  是系统输出,  $u(k)$  是受控对象的输入。

图 13.2 闭环控制系统

设
 
$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n_a}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n_b}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n_c}$$

$$R(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \dots + r_n q^{-n_r}$$

$$W(q^{-1}) = w_0 + w_1 q^{-1} + \dots + w_n q^{-n_w}$$

由图 13.2 已知,当  $v(k) = 0$  时,闭环系统输出  $y$  与噪声  $e(k)$  之间满足

$$y(k) = \frac{C(q^{-1}) R(q^{-1})}{A(q^{-1}) R(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) W(q^{-1})} e(k)$$
 令
 
$$(q^{-1}) = \frac{A(q^{-1}) R(q^{-1})}{A(q^{-1}) R(q^{-1}) + q^{-d} B(q^{-1}) W(q^{-1})} = 1 + \dots + q^{-l}$$

$$(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1}) R(q^{-1})}{C(q^{-1}) R(q^{-1})} = 1 + \dots + q^{-m}$$

则上式可写成

$$(q^{-1}) y(k) = (q^{-1}) e(k)$$

将  $e(k)$  作为系统输入,  $y(k)$  作为系统输出,则若以上系统是稳定的,且  $C(q^{-1})$  和  $(q^{-1})$  无公因子(即反馈不引起零极点的相消),那么根据所采集的关于  $e(k)$  和  $y(k)$  的  $N$  组数据,利用最小二乘法或者其它的开环辨识方法即可获得关于  $(q^{-1})$  和  $(q^{-1})$  的估计值,记为  $\hat{(q^{-1})}$  和  $\hat{(q^{-1})}$ 。如果反馈通道的控制器模型参数  $R(q^{-1})$  和  $W(q^{-1})$  已知,则在满足一定条件的前提下,可以由  $\hat{(q^{-1})}$  和  $\hat{(q^{-1})}$  中唯一解出  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$ 。这个条件决定了关于受控对象模型参数的唯一性,它也就是间接辨识法所需的可辨识性条件,它与控制器的阶次密切相关。我们将它归结为以下定理。

**定理 13.1** 对图 13.2 所示的闭环系统,若反馈通道上没有扰动信号,即  $v(k) = 0$ ,且  $(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  无公因子,则闭环系统是可辨识的条件是:控制器的参数满足

$$n_r \geq n_b \text{ 或 } n_w \geq n_a - d \tag{13.19}$$

以上定理表明当控制器阶次不低于受控对象阶次时,可以由  $\hat{(q^{-1})}$  和  $\hat{(q^{-1})}$  的估计值唯一确定受控对象的模型。从而闭环系统是可辨识的。显然当受控对象存在有时滞时,闭环系

统可辨识条件更容易满足。

当反馈通道扰动信号不为零, 即  $v(k) \neq 0$  时, 同样可以采用间接辨识法进行系统辨识, 并且可辨识条件与定理 13.1 相同。不过在这种情况下, 采用直接辨识法更好。

### 13.6.2 直接辨识法

直接辨识法的原理是忽略反馈通道的反馈作用, 就象在开环系统辨识中的那样, 直接利用前向通道的输入输出数据, 建立前向通道数学模型。它不象间接辨识法那样必须事先知道反馈通道控制器的模型, 但它需要受控对象的输入  $u(k)$  和输出  $y(k)$  是可以直接测量的。

仍考虑图 13.2 所示的闭环系统, 设  $v(k) = 0$ , 且  $u(k)$  和  $y(k)$  均可测量。由图 13.2 知, 受控对象的数学模型为

定义

$$\begin{aligned} A(q^{-1})y(k) &= q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \\ &= [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]^T \cdot \\ \mathbf{h}^T(k) &= [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-d-1) \quad \dots \\ &\quad u(k-d-n_b) \quad \hat{e}(k-1) \quad \dots \quad \hat{e}(k-n_c)]^T \end{aligned}$$

写成线性回归形式:

$$\hat{e}(k) = y(k) - \mathbf{h}^T(k) \hat{\theta}_{k-1}$$

而  $\hat{\theta}_{k-1}$  是  $(k-1)$  时刻的参数估计值,  $e(k)$  为预估误差。为了能对  $\theta$  进行估计, 无论采用何种开环辨识方法, 其先决条件都必须保证数据向量  $\mathbf{h}(k)$  中的元素  $y(k-i)$ ,  $u(k-d-i)$  和  $\hat{e}(k-i)$  等都不是  $\mathbf{h}(k)$  中其它元素的线性组合。显然, 由于反馈作用的影响, 可能会出现  $u(k-d-i)$  的元素是其它元素线性组合的情况。根据反馈通道控制器的方程, 我们有

$$\begin{aligned} u(k-d-i) &= -r_1 u(k-d-i-1) - \dots - r_{n_r} u(k-d-n_r-i) \\ &\quad + w_0 y(k-d-i) + \dots + w_{n_w} y(k-d-n_w-i) \end{aligned} \tag{13.20}$$

如果  $n_r = n_b - 1$  及  $n_w = n_a - d - 1$ , 根据上式, 这时  $u(k-d-1)$  必是  $\mathbf{h}(k)$  中向量  $y(k-1), \dots, y(k-n_a); u(k-d-2), \dots, u(k-d-n_0)$  等元素的线性组合。从而在最小二乘估计的  $\mathbf{H}$  阵中, 将出现线性相关的列, 使得  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  不可逆, 从而无法使用开环辨识方法来直接估计模型参数。只有当  $n_r = n_b, n_w = n_a - d$  时, 这样的线性相关性才不会出现, 这时所有的开环辨识方法都可以直接运用。换句话说, 定理 13.1 中的式(13.16)也是这种情况下闭环直接辨识法的可辨识条件。

当反馈通道的扰动  $v(k) \neq 0$  时, 对于  $u(k-d-i)$  的计算, 在式(13.17)的基础上还应加一噪声项  $v(k-d+i)$ , 这样就使得它不会与  $\mathbf{h}(k)$  中其它元素相关, 保证了开环辨识方法在这里的应用。因此, 这时闭环系统辨识不受定理 13.1 中的条件式(13.16)的约束。

总的说来, 闭环系统的可辨识性, 依赖于待辨识对象的性质, 模型类的选择, 辨识算法和数据等。我们应该对具体情况作具体分析。

## 习 题

13.1 简述在选择辨识试验输入信号时应注意的问题。

13.2 在递推最小二乘估计中, 如果对输入  $\{u(k)\}$  有幅值约束  $|u(k)| < \dots$ , 我们可以通过优化过程

$$\min_{|u(n+N+1)|} \det(P_{N+1})$$

来选择最优试验输入  $u(n+N+1)$ , 其中  $P_{N+1}$  是式(11.32) 所定义的误差协方差阵。试阐明这一方法的原理。

13.3 如果由于条件限制, 在待辨识对象上作试验的时间不能太长, 则我们应该根据什么原则选择采样周期?

13.4 如果在待辨识对象上测试的数据的个数受到限制, 则我们应该根据什么原则选择采样周期?

13.5 对于以线性回归方程形式表示的模型

$$y(k) = \mathbf{h}^T(k) \boldsymbol{\theta} + (k) \quad k = 1, 2, \dots$$

其中,  $\boldsymbol{\theta}$  是描述  $y(k)$  的非零均值的待估计参数,  $(k)$  为白噪声过程。若已取得  $N$  组数据集  $\{y(k), \mathbf{h}(k)\}, k = 1, \dots, N$ 。试证明  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  和  $\hat{\sigma}^2$  的最小二乘估计为:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \right)^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{h}(k) y(k)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)^2 - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \quad \bar{\mathbf{h}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{h}(k)$$

$$\tilde{y}(k) = y(k) - \bar{y} \quad \tilde{\mathbf{h}}(k) = \mathbf{h}(k) - \bar{\mathbf{h}}$$

- 13.6 确定模型阶次有些什么方法? 它们各有什么特点?
- 13.7 为什么要进行模型检验, 如何进行模型检验?
- 13.8 闭环系统辨识有些什么方法, 要注意一些什么问题?

### 参 考 文 献

- 1 方崇智, 萧德云编著. 过程辨识. 北京: 清华大学出版社, 1988.
- 2 吴广玉主编. 系统辨识与自适应控制. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1987.
- 3 夏天长著, 熊光楞, 李芳芸译. 系统辨识. 北京: 清华大学出版社, 1983.
- 4 刘宏才. 系统辨识. 北京: 冶金工业出版社, 1995.
- 5 徐南荣, 宋文忠, 夏安邦. 系统辨识. 南京: 东南大学出版社, 1991.
- 6 Goodwin G C, Sin K S. Adaptive filtering predication and control. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.
- 7 Eykhoff P. System identification. New York: wiley - Interscience, 1970.
- 8 Ljung L, Söderström T. Theory and practice of recursive identification. Cambridge: MIT Press, 1983.
- 9 Ljung L. System identification: Theory for the user. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1997.
- 10 Aström K J, Eykhoff P. System identification - A survey. Automatica, 1971, 7: 123 ~ 167.
- 11 Strejc V. Least squares parameter estimation. Automatica. 1980, 16: 535 ~ 550.
- 12 肖建, 杜申华. 良好非线性模型的广义最小二乘辨识. 西南交通大学学报, 1996, 31: 383 ~ 387.
- 13 Söderström T. Convergence properties of the generalized least squares identification method. Automatica, 1974, 10: 617 ~ 626.
- 14 Young P C. An instrumental variable method for real - time identification of a noisy process. Automatica, 1970, 6(271 ~ 287).
- 15 Hsia T C. On least squares algorithm for system parameter identification. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976,

- 16 Gustovsson I .Comparison of different methods for identification of industrial processes .Automatica, 1972, 8:127 ~ 142 .
- 17 Hsia T C .On multistage least squares approach to systems identification .proc .6th IFAC world congress Boston USA, 1975 .
- 18 Saridis G N .Comparison of six on - line identification algorithms .Automatica, 1974, 10:69 ~ 79 .
- 19 Mehra R K .Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems-survey and new results .IEEE Trans Automat .Contr ., 1974, 19:753 ~ 768 .
- 20 Astr m K J, Wittenmark B .Problems of identification and control J .of Math Anal, Appl .1971, 34:90 ~ 113 .
- 21 Van den Hof P .Closed - loop issues in system identification .Proc, 11th IFAC Symposium on System Identification, Kitakyushu Japan, 1997 .4:1651 ~ 1664 .
- 22 S derst rm T, Stoica P .System identification .Englewood Cliffs:Prentice Hall, 1989 .
- 23 Guardabassi G, Xiao J .Gonstrained least squares identification of deterministic nicely nonlinear models .Proc . IFAC 12th world congress, 1993, 3:507 ~ 510 .
- 24 Van Overschee P, De Moor B .Subspace identification for linear systems Dordrecht:Kluwer, 1996 .
- 25 Forssell U, Liung L .Closed - loop identification revisited .Automatica, 1999, 35(5):1215 ~ 1241 .
- 26 Guardabassi G, Geromel J Xiao J .Parameter estimation under distributed constraints: two algorithms for convex semi - infinite quadratic programming problems .Recent trends in Optimization theory and applications, 1995 .



## 第四篇 自适应控制

### 概 述

在前面的章节中,我们知道,最优控制的主要思想就是在受控对象数学模型的基础上,根据控制要求所确定的性能指标,利用数学寻优的方法来设计控制器。

但是,对任何一个实际受控对象,要建立精度很高的模型是很困难的。其次,受控对象的特性也通常发生事先无法确定的变化,如工作情况改变或者环境的变化引起的系统参数改变。这方面的典型例子有机械手的动态特性随机机械手的伸展在很大范围内变化,飞行器在低空和高空的飞行动力学性质相差很大等。这种受控对象在大范围内的变化,有可能使得按最初的数学模型设计出来的控制系统不能适应变化了的情况。

为了克服外界环境对系统的干扰和系统特性的变化以及数学模型不精确等各种原因所带来的控制品质恶化这一问题,人们提出了一些控制方案,其中最常用的包括鲁棒控制和自适应控制。

鲁棒控制是在反馈控制的基础上发展起来的。它的基本思想是将受控对象动态特性变化和参数变化看作是对对象数学模型中的不确定性,在进行控制系统设计时就考虑到受控对象模型的这种不确定性,保证在最不利的情况下控制系统也能够满意地工作。前面所介绍的  $H$  控制就是鲁棒控制系统的一种设计方法。

自适应控制的基本思想则是在控制系统工作过程中,不断地测量受控对象的状态,性能或参数,从而“认识”或“掌握”系统当前的运行状况,并将系统当前的性能指标与期望的指标相比较,根据比较结果作出决策,来改变控制器的结构、参数或根据自适应的规律来改变控制作用,以保证系统运行在某种意义下最优或次优的状态。

从字面上来看,自适应控制系统就是能改变自己本身的特性以适应过程及噪声的动态特性改变的控制系统。因为通常的反馈控制也是由于这一目的而引入的,我们不禁要问自适应控制与反馈控制之间有些什么样的差别?这一问题牵涉到自适应控制系统的定义。1961年,在一次关于自适应控制的研讨会上,通过长时间的讨论后,提出了以下的定义:“任何按自适应观点设计的物理系统均为自适应系统”。按照这个定义,许多控制系统都可包括在自适应控制系统这一范畴内。例如带有对环境影响的补偿环节的系统或带有滤波补偿环节的反馈控制系统等都对可预期的环境变化具有一定的适应能力。但是它们对系统参数的调整或附加的控制信号,都不是根据当时系统的特性、性能和参数变动的实际情况而决定的,而是事先确定下来的。因此,有许多人认为,这类系统不应属于自适应控制系统的范畴。由于这些原因,1973年美国IEEE协会试图再次给出自适应控制的定义,但仍然没有得到广泛的认可。

一般说来,自适应控制系统在反馈控制的基本控制回路加上自适应机构构成。自适应机构具有三方面的功能。

- (1)在线辨识:不断地在线检测受控对象的当前状态,并加以处理,即辨识对象。
- (2)决策过程:将当前系统的性能与期望的或者最优的性能相比较,并作出使系统趋向期

望或最优性能的决策。

(3)在线修正:对控制器进行适当的修正,以驱使整个闭环系统走向最优状态。

一般说来,自适应控制系统可以分成三大类:

(1)简单自适应系统:这类系统只是克服环境干扰而使系统的性能成为可以接受,即系统能正常运行。一般都不建立受控对象的数学模型,也不进行复杂的优化计算,而是采用一些简单的搜索方法。

(2)参考模型自适应控制系统:它是在确定性的伺服控制系统基础上发展起来的。这类系统由参考模型、受控对象、反馈控制器和自适应控制器组成。参考模型的输出表示系统所希望的动态响应,将受控对象的输出与参考模型的输出相比较,按其偏差来调整控制动作。

(3)自校正控制系统:也称参数自适应系统。它是在随机控制的基础上发展起来的。它也有两个环路,一个环路由调节器与受控对象组成,称为内环,即通常的反馈控制环;另一个环路由在线辨识器和调节器参数设计组成,称为外环。运行时,根据在线辨识的结果修改调节器参数以消除受控对象参数扰动对控制系统的影响。

自适应控制系统大约在 50 年代即已开始发展,当时大都是针对具体对象设计方案的讨论,尚未形成理论体系。70 年代以来,对于自适应控制系统的控制方案,结构、稳定性、收敛性和鲁棒性等方面的研究都有一定的实质性的进展,从而把自适应控制理论推向一个前所未有的发展阶段。与此同时,微处理器的迅猛发展为自适应控制的实际应用创造了条件,自适应控制目前广泛应用于航空、过程控制、航海、机器人,以及其它的工业控制等领域中。自适应控制在大多数场合大大地提高了闭环系统的控制性能,但是也有一些场合,它的优势并不明显。目前关于自适应控制的深入讨论还在继续进行,它的应用场合也日益广泛。

# 第十四章 参考模型自适应控制系统

参考模型自适应控制系统是一类重要的自适应控制系统。它的基本结构如图 14.1 所示。它由两个环路组成,内环由调节器与受控对象组成可调系统,外环则由参考模型与自适应机构组成。参考模型的输出  $y_m$  代表了在给定信号下控制系统的理想输出。当受控对象的输出  $y$  不等于参考模型输出  $y_m$  时,就产生了广义误差  $e$ 。根据广义误差  $e$ ,通过自适应机构,按照一定的自适应规律产生反馈作用,以修改调节器的参数或产生一个辅助控制信号,促使广义误差  $e$  趋向极小值或减少至零。通常我们假定内环的响应速度快于外环。

图 14.1 参考模型自适应控制

参考模型自适应控制的关键问题是如何选择自适应机构的自适应算法,以确保系统有足够的稳定性,同时又能使广义误差得以消除。这种自适应系统的本质是要使受控闭环系统的特性和参考模型的特性一致,这就往往需要在受控系统的闭环回路内实现零极点的对消,因此它通常只能运用于最小相位系统。

通常有三类分析与设计参考模型自适应控制系统的方法,它们是梯度法、李雅普诺夫函数法和超稳定性法。本章将分别介绍这三种方法。

## § 14.1 基于局部参数最优化技术的设计方法

基于局部参数最优化技术的设计方法,也称梯度法,是参考模型自适应系统最早的一种设计方法。在这类系统中包含有若干个可调参数,如可调增益,反馈补偿网络中的可调参数等,记这些可调参数为  $\theta$ 。当受控对象的特性由于外界环境的改变或其它干扰的影响发生变化时,则自适应机构即对这些可调参数进行调整,以补偿这种影响。显然,若定义性能指标  $J$  为广义误差的函数的话,则  $J$  亦为可调参数  $\theta$  的函数,记为  $J(\theta)$ 。梯度法就是利用数学规划中的优化算法寻找使得  $J(\theta)$  取最小值时的  $\theta$ 。一般我们采用梯度法这一优化算法。另外也可以用其它的寻优方法,如牛顿 — 拉夫森法、共轭梯度法、变尺度法等。这种方法是首先由 MIT 仪表实验室的工作人员提出来的,故也称 MIT 法。

14 .1 .1 具有可调增益的参考模型自适应系统

具有可调增益的参考模型自适应系统结构图如图 14 2 所示。其中  $K_p \frac{Q(s)}{P(s)}$  为受控对象的传递函数, 假定受到干扰后, 增益  $K_p$  将发生变化, 且  $K_p$  的变化是不可测量的。 $K_c$  是可调增益, 它是用来克服  $K_p$  的位移。 $K_m \frac{Q(s)}{P(s)}$  是参考模型的传递函数。我们的目的是通过自适应机构来调节增益  $K_c$ , 使得  $K_c$  与  $K_p$  的乘积始终与模型的增益  $K_m$  相一致。

设  $Q(s) = b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_1 s + b_0$   
 $P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$   
 $e = y_m - y$

图 14 2 具有可调增益的参考模型自适应系统

其中, 广义误差  $e$  表示当系统输入信号为  $r(t)$  时, 受控系统的响应与参考模型的响应之间的偏差。选性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^2(\tau) d\tau \tag{14 .1}$$

为能利用梯度法调整  $K_c$  使  $J$  最小, 首先求出  $J$  对  $K_c$  的梯度

$$\frac{J}{K_c} = \int_{t_0}^t e \frac{e}{K_c} d\tau$$

根据梯度法可知, 使  $J$  下降的方向是它的负梯度方向, 由之求出新的参数为:

$$\begin{aligned} K_c &= K_{c0} - B \frac{J}{K_c} \\ &= K_{c0} - B \int_{t_0}^t e \frac{e}{K_c} d\tau \end{aligned} \tag{14 .2}$$

式中,  $B > 0$  为步长,  $K_{c0}$  为  $K_c$  的初值。上式两端对  $t$  取导得:

$$\dot{K}_c = - B e(t) \frac{e(t)}{K_c} \tag{14 .3}$$

上式就是可调增益  $K_c$  的自适应调整规律。由于

$$\frac{e}{K_c} = \frac{y_m}{K_c} - \frac{y}{K_c} = - \frac{y}{K_c} \tag{14 .4}$$

代入式(14 .3), 可得

$$\dot{K}_c = B e \frac{y}{K_c} \tag{14 .5}$$

式中  $\frac{y}{K_c}$  称为受控系统对可调参数的敏感度函数。由于它不易直接得到, 我们需要寻找与它等效而又容易获得的量。为此, 由图 14 .2, 先求得由输入  $r(t)$  到广义误差  $e(t)$  的开环传递函数。

$$\frac{E(s)}{R(s)} = (K_m - K_c K_p) \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{14 .6}$$

令  $D = \frac{d}{dt}$  为微分算子, 则式(14 .6) 可转化为微分方程时域算子的形式

$$P(D) e(t) = (K_m - K_c K_p) Q(D) r(t) \quad (14.7)$$

上式两边对  $K_c$  求导得

$$P(D) \frac{e(t)}{K_c} = -K_p Q(D) r(t) \quad (14.8)$$

或 
$$P(D) \frac{y}{K_c} = K_p Q(D) r(t) \quad (14.9)$$

而另一方面根据参考模型的传递函数,可以得到它的微分方程时域算子形式方程

$$P(D) y_m(t) = K_m Q(D) r(t) \quad (14.10)$$

将式(14.9)和式(14.10)比较可知,  $\frac{y(t)}{K_c}$  是与  $y_m(t)$  成比例,即

$$\frac{y(t)}{K_c} = \frac{K_p}{K_m} y_m(t) \quad (14.11)$$

代入式(14.5),可得

$$\dot{K}_c = B \frac{K_p}{K_m} e(t) y_m(t) = B e(t) y_m(t) \quad (14.12)$$

这就是可调增益  $K_c$  的调节规律,式中  $B = B \frac{K_p}{K_m}$ 。显然,在工程上完成这种运算只需一个乘法器和一个积分器,自适应控制器的结构如图 14.2 所示。

根据 MIT 法综合出来的可调增益自适应控制系统的数学模型可归纳为下列一组方程:

$$P(D) e(t) = (K_m - K_p K_c) Q(D) r(t) \quad (14.13)$$

$$P(D) y_m(t) = K_m Q(D) r(t) \quad (14.14)$$

$$\dot{K}_c = B e(t) y_m(t) \quad (14.15)$$

在以上所述的一组数学模型中,式(14.13)为关于开环广义误差的开环系统方程;式(14.14)为参考模型方程;式(14.15)的参数调节方程,亦即自适应调整规律。凡是用可调增益来构成的自适应系统都可套用上述数学模型。这种设计方法的优点是自适应控制器所需的信号  $e(t)$  和  $y_m(t)$  都很容易获得。但是,它的缺点是所设计的自适应控制系统(对  $e$  而言)不能保证闭环系统的渐近稳定性。因此,在求得自适应规律后,尚需进行稳定性的检验,以确保广义误差  $e$  在闭环回路中能收敛于某一个允许的数值。

**【例 14.1】** 设二阶系统

$$K_p \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{K_p}{a^2 s^2 + a_1 s + 1}$$

参考模型

$$K_m \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{K_m}{a^2 s^2 + a_1 s + 1}$$

由式(14.13) ~ 式(14.15)即可求得可调增益自适应控制系统为

$$a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e} + e = (K_m - K_p K_c) r \quad (14.16)$$

$$a_2 \ddot{y}_m + a_1 \dot{y}_m + y_m = K_m r \quad (14.17)$$

$$\dot{K}_c = B e y_m \quad (14.18)$$

对式(14.16)两边求导得:

$$a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e}_m + e = -K_p \dot{K}_c r \quad (14.19)$$

代入式(14.18) 可得

$$a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e} + e = -B K_p r e y_m \quad (14.20)$$

设  $r(t)$  为幅值为  $A$  的阶跃输入, 并假定  $y_m$  的动态响应比  $e$  的自适应调整过程快得多。由于参考模型是稳定的, 这样在讨论  $e$  的调节过程时, 可以认为由方程式(14.14) 得出  $y_m$  已达到稳态值  $K_m A$ 。这样式(14.20) 可简化为:

$$a_2 \ddot{e} + a_1 \dot{e} + e + B K_p K_m A^2 e = 0$$

根据劳斯稳定判据, 上述系统为渐近稳定的充要条件是

$$\frac{a_1}{a_2} > K_m K_p B A^2$$

由此可见, 如果输入的幅值  $A$  或自适应增益  $B$  过大时, 都可能使系统不稳定。为此, 必须限制输入信号的幅值范围。同时, 自适应增益亦不能过大。显然, 这在另一方面又可能使得自适应速度过低。

## 14.1.2 模型跟踪自适应控制系统

考虑一般情况下的单输入单输出受控对象

$$y(t) = \frac{B(D)}{A(D)} u(t) \quad (14.21)$$

其中,  $u$  为控制输入,  $y$  为输出信号。参考模型为:

$$y_m(t) = \frac{B_m(D)}{A_m(D)} r(t) \quad (14.22)$$

$r(t)$  为系统给定。假定我们采用线性控制器:

$$R(D) u(t) = T(D) r(t) - S(D) y(t) \quad (14.23)$$

在以上各式中,  $A, B, A_m, B_m, R, T, S$  均为微分算子  $D$  的多项式,  $A$  为首 1 多项式。并假定  $B$  的所有零点都在开的左半平面内, 即  $B$  为稳定的多项式。将式(14.23) 代入式(14.21) 即可得闭环系统方程为:

$$(AR + BS)y = BTr \quad (14.24)$$

为了能得到理想的闭环响应, 比较式(14.24) 及式(14.22), 我们知道, 若令

$$AR + BS = A_m B A_0 \quad (14.25a)$$

$$T = A_0 B_m \quad (14.25b)$$

则闭环系统与参考模型完全一致, 这就是模型跟踪的原理。方程式(14.25a) 称为 Diophantine 方程, 根据 Diophantine 方程的性质, 式(14.25a) 有解的条件是  $A, B$  为互质的多项式, 并且它的解  $R$  还应满足等式  $R = BR_1$ 。因此式(14.25a) 还可写成

$$AR_1 + S = A_0 A_m \quad (14.26)$$

虽然以上的方法能够给出理想的模型跟踪, 但是由于环境和干扰等原因将引起受控对象参数的漂移, 使得闭环系统输出  $y$  偏移理想输出  $y_m$ , 从而产生广义误差  $e = y_m - y$ 。为了能补偿这种漂移, 我们必须引入自适应机构。

由式(14.24) 可得闭环系统方程

$$y = \frac{BT}{AR + BS} r \quad (14.27)$$

代入式(14.23) 可得  $u$  与  $r$  的关系

$$u = \frac{AT}{AR + BS} r \quad (14.28)$$

设

$$R(D) = r_k D^k + r_{k-1} D^{k-1} + \dots + r_1 D + 1$$

$$S(D) = s_l D^l + s_{l-1} D^{l-1} + \dots + s_1 D + s_0$$

$$T(D) = t_m D^m + t_{m-1} D^{m-1} + \dots + t_1 D + t_0$$

则可以求出广义误差关于各可调参数  $r_i$ ,  $s_i$  和  $t_i$  的导数, 即敏感度函数为:

$$\frac{e}{r_i} = - \frac{y}{r_i} = \frac{BTA}{(AR + BS)^2} D^i r = \frac{BD^i}{AR + BS} u \quad i = 1, \dots, k \quad (14.29)$$

$$\frac{e}{s_i} = - \frac{y}{s_i} = \frac{BTB}{(AR + BS)^2} D^i r = \frac{BD^i}{AR + BS} y \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (14.30)$$

$$\frac{e}{t_i} = - \frac{y}{t_i} = - \frac{B}{AR + BS} D^i r \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (14.31)$$

在以上的推导中我们利用了式(14.27) 和式(14.28)。在以上各式中包含了受控对象的参数如  $A$ ,  $B$  等, 而这些参数在系统工作过程中由于干扰或环境的变动等原因会产生漂移, 从而成为未知量。因此, 不可能由以上各式计算得到误差关于可调参数的梯度。有几种计算这些量的方法, 其中之一是利用式(14.25 a), 得到

$$\frac{e}{r_i} = \frac{D^i}{A_0 A_m} u \quad i = 1, \dots, k \quad (14.32)$$

$$\frac{e}{s_i} = \frac{D^i}{A_0 A_m} y \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (14.33)$$

$$\frac{e}{t_i} = - \frac{D^i}{A_0 A_m} r \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (14.34)$$

利用梯度法, 立即可以得到调节器参数的自适应调整规律为:

$$r_i = - \epsilon \frac{D^i}{A_0 A_m} u \quad i = 1, \dots, k \quad (14.35)$$

$$s_i = - \epsilon \frac{D^i}{A_0 A_m} y \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (14.36)$$

$$t_i = \epsilon \frac{D^i}{A_0 A_m} r \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (14.37)$$

其中,  $\epsilon > 0$  为步长。为了实现以上自适应调整规律可以利用积分器先作滤波器  $\frac{1}{A_0 A_m}$  的三个状态方程实现, 然后分别求出各量。设

$$A_0 A_m = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

则式(14.36) 中的敏感度函数  $\frac{D^i}{A_0 A_m} y$  可以由图 14.3 的方式实现。而其它各敏感度函数可类似导出。在此基础上可以很容易地实现自适应调整律式(14.35) ~ 式(14.37)。

按照局部参数最优化设计自适应系统, 应注意以下几点:

(1) 参数最优化的方法很多, 采用不同的性能指标或者采用不同的寻优方法, 将得到不同的自适应规律。

(2) 由于参数最优方法总要对参数进行不断地进行寻优, 需要一定的搜索时间, 亦即需要一定的自适应调整时间。

(3) 应用参数最优化方法设计的自适应系统,应尽可能使初始参数误差较小,否则在自适应调整的起始阶段过强的调整作用容易使系统产生较大的波动。

(4) 参数最优化方法不是以稳定性理论为依据的,因此,应当检验最终得到的自适应控制系统的稳定性。同时自适应增益不能选得太大,否则将会导致系统的不稳定。

**【例 14 2】** 考虑一阶受控对象

$$y = - ay + bu$$

图 14 .3 求敏感度函数的模型

其中,  $y$  为输出,  $u$  为输入。设参考模型为

$$y_m = - a_m y_m + b_m r$$

式中  $r$  为系统给定,  $y_m$  为参考模型输出。采用调节器:

$$u = t_0 r - s_0 y$$

其中根据模型跟踪的原则,我们选择了  $t_0 = \frac{b_m}{b}$ ,  $s_0 = \frac{a_m - a}{b}$ 。注意,若  $a_m < a$ ,即若参考模型的动态过程慢于受控对象,则  $s_0$  为负,控制器将产生正反馈,有可能引起闭环系统不稳定。若受控对象的参数  $a, b$  产生漂移,为保证广义误差  $e = y_m - y$  趋向于零,引入调节器的可调参数  $t_0, s_0$  的自适应调节结构。根据闭环系统时域微分算子方程

$$y = \frac{bt_0}{D + a + bs_0} r$$

其中  $D$  为微分算子,代入  $s_0 = \frac{a_m - a}{b}$  可得

$$D + a + bs_0 = D + a_m$$

根据式(14 .36) 和式(14 .37) 可得  $s_0$  和  $t_0$  的自适应调节律为:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{D + a_m} r e \\ s_0 &= - \frac{1}{D + a_m} y e \end{aligned}$$

## § 14 .2 基于李雅普诺夫稳定性理论的设计方法

上一节所叙述的梯度法采用寻优的方法寻找广义误差的最小值,但是它不能保证误差系统的稳定性,即不能保证误差最终将趋向于零。另外一类方法是对误差系统直接利用稳定性理论,直接保证误差最终将趋向于零。基于李雅普诺夫稳定性理论的设计方法就是这类方法其中之一。

### 14 .2 .1 采用可调系统状态变量构成自适应规律的设计方法

用状态变量构成自适应控制律的自适应控制系统结构图如图 14 .4 所示。

图中所示的参考模型为:

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{r} \tag{14 .38}$$



其中,  $\mathbf{A}_m$  为稳定的,  $\mathbf{r}$  是给定。受控对象的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (14.39)$$

其中,  $\mathbf{u}$  为控制输入。 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  中的元素将由干扰等影响产生漂移, 它们本身往往不便于直接调节。为此, 引入可调的前馈增益阵  $\mathbf{K}_c$  和反馈增益阵  $\mathbf{K}_v$ , 构成调节器。

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_v\mathbf{x} + \mathbf{K}_c\mathbf{r} \quad (14.40)$$

受控对象与调节器一起构成可调系统。将式 (14.40) 代入式 (14.39) 可得可调系统方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_v)\mathbf{x} + \mathbf{BK}_c\mathbf{r} \quad (14.41)$$

定义广义误差为参考模型状态与受控对象状态之差:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x} \quad (14.42)$$

对式 (14.42) 两边微分, 并代入式 (14.38) 和式 (14.41) 可得

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m\mathbf{e} + [\mathbf{A}_m - \mathbf{A} - \mathbf{BK}_v]\mathbf{x} + [\mathbf{B}_m - \mathbf{BK}_c]\mathbf{r} \quad (14.43)$$

令  $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_m - \mathbf{A} - \mathbf{BK}_v$ ,  $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_m - \mathbf{BK}_c$  分别为  $n \times n$  维和  $n \times m$  维矩阵, 与  $\mathbf{r}$  表示参考模型参数与可调系统参数的匹配误差, 则式 (14.43) 可写成

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_e\mathbf{e} + \mathbf{B}_e\mathbf{x} + \mathbf{B}_e\mathbf{r} \quad (14.44)$$

定义李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} V &= \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \text{Tr} \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \right] \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (14.45)$$

其中,  $\mathbf{e}_i$  和  $\mathbf{r}_i$  分别是  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{r}$  的第  $i$  列,  $\mathbf{P}$  为对称正定矩阵。显然,  $V$  是正定的。求得  $V$  关于时间的导数

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{e} + \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \dot{\mathbf{e}}_i) + \sum_{i=1}^m (\dot{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i) \\ &= \mathbf{e}^T (\mathbf{A}_e^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_e) \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{B}_e \mathbf{x} + \mathbf{B}_e \mathbf{r}) + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (14.46)$$

因为  $\mathbf{A}_m$  是稳定的, 必存在有正定矩阵  $\mathbf{Q}$  满足李雅普诺夫方程:

$$\mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_m = -\mathbf{Q}$$

代入式 (14.46) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} (\mathbf{B}_e \mathbf{x} + \mathbf{B}_e \mathbf{r}) + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{r}_i \\ &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i x_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i r_i \right) + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (14.47)$$

其中,  $x_i$  和  $r_i$  分别是向量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{r}$  的第  $i$  分量。如果我们选择

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i x_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i r_i \right) + \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{r}}_i^T \mathbf{r}_i = 0$$

即取

$$\dot{x}_i^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14.48)$$

$$\dot{r}_i^T = -\mathbf{e}^T \mathbf{P} r_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14.49)$$

则由式(14.47)可得

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}$$

为负定。从而广义误差系统式(14.43)为渐近稳定,保证了广义误差收敛到原点。因此,式(14.48)和式(14.49)构成的自适应调整律,保证了闭环系统的渐近稳定性。

**【例 14.3】** 考虑[例 14.2]所示的自适应控制系统。

它的可调系统方程为:

$$y = -(a + s_0)y + bt_0 r$$

显然,当  $s_0$  和  $t_0$  为其最优值  $s_0^*$  和  $t_0^*$  时,即有  $a + s_0^* = a_m$  和  $bt_0^* = b_m$ ,这时可调系统的输出与参考模型输出  $y_m$  一致。令广义误差  $e = y_m - y$ ,则误差系统方程为:

$$\begin{aligned} e &= y_m - y = -a_m y_m + b_m r + (a + bs_0)y - bt_0 r \\ &= -a_m e + (-a_m + a + bs_0)y + (b_m - bt_0)r \end{aligned}$$

选李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{b} (bs_0 + a - a_m)^2 + \frac{1}{b} (bt_0 - b_m)^2$$

显然,该函数仅当  $e$  为 0,且所有的可调参数等于其最优值时才为零。 $V$  关于时间  $t$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= ee + \frac{1}{b} (bs_0 + a - a_m) \dot{s}_0 + \frac{1}{b} (bt_0 - b_m) \dot{t}_0 \\ &= -a_m e^2 + \frac{1}{b} (bs_0 + a - a_m) (s_0 + ye) + \frac{1}{b} (bt_0 - b_m) (t_0 - re) \end{aligned}$$

如果选择

$$\begin{aligned} \dot{t}_0 &= -re \\ \dot{s}_0 &= -ye \end{aligned}$$

则有

$$\dot{V} = -a_m e^2$$

为负定。因此广义误差将趋向于零。但是,除非另有条件,它并不能保证  $t_0$  和  $s_0$  收敛到它们的最优值  $t_0^*$  和  $s_0^*$ 。我们可以将本例题关于  $s_0$  和  $t_0$  的自适应调整律与[例 14.2]的相应结论进行比较。

这种自适应调整律需要系统的所有状态变量是可以直接量测的,这对许多实际受控对象来说,往往是不现实的。这时,可以利用受控对象的输入和输出来直接设计自适应控制系统。

### 14.2.2 采用受控对象输入输出构成自适应规律的设计方法

利用受控对象输入输出构成自适应规律的设计方法,可以分为两种类型。一种是根据受控对象的输入输出或者系统的广义误差向量,设计自适应控制器,调节某一特定结构控制器的可调参数,使得由控制器和受控对象组成的可调系统与给定的参考模型相匹配。这种方法称为直接法。另一种是利用对象的输入输出设计一个自适应观测器,实时地给出受控对象未知参数和状态的估计,然后利用这些估计值再来设计自适应调整律,使可调系统的传递函数或动态特性与参考模型相一致,这种方法称为间接法。

图 14.5 具有可调增益的参考模型自适应系统

考虑图 14 .5 所示的具有可调增益的参考模型自适应系统。若受控对象放大倍数  $K_p$  由于干扰的影响而发生变化,则产生广义误差  $e = y_m - y$ 。误差传递函数为:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = (K_m - K_c K_p) \frac{Q(s)}{P(s)} = \text{琡} \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{14 50}$$

式中

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0} \tag{14 51}$$

$$\text{琡} = K_m - K_c K_p \tag{14 52}$$

作出式(14 .50) 所示误差系统的状态方程实现为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_v &= \mathbf{A} \mathbf{e}_v + \text{琡} \mathbf{C} r \\ e &= \mathbf{h}^T \mathbf{e}_v \end{aligned} \tag{14 53}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_v &= [e \quad e - c_1 r \quad \dots \quad e^{(n-1)} - c_1 r^{(n-2)} - \dots - c_{n-1} r]^T \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_{n-1} \\ c_2 & p_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & 1 & \dots & q_0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{h}^T &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \end{aligned}$$

要设计一个稳定的自适应控制器,就是要找出一个适当的李雅普诺夫函数,然后由它设计出自适应控制器。为此,取李雅普诺夫函数

$$V = \mathbf{e}_v^T \mathbf{P} \mathbf{e}_v + \text{琡}^2 \tag{14 54}$$

式中,  $\mathbf{P}$  是对称正定矩阵, 为大于零的实数。求  $V$  对时间的导数

$$\dot{V} = \mathbf{e}_v^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{e}_v + 2 \mathbf{e}_v^T \mathbf{P} \mathbf{C} \text{琡} + 2 \text{琡} \dot{\text{琡}} \tag{14 55}$$

因为参考模型总是稳定的,  $\mathbf{A}$  是稳定阵, 我们总可以选择正定矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = - \mathbf{Q}$$

代入式(14 .54) 可得

$$\dot{V} = - \mathbf{e}_v^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_v + 2 \mathbf{e}_v^T \mathbf{P} \mathbf{C} r \text{琡} + 2 \text{琡} \dot{\text{琡}}$$

当选择自适应调整律

$$\dot{\text{琡}} = - \frac{1}{\text{琡}} \mathbf{e}_v^T \mathbf{P} \mathbf{C} r \tag{14 56}$$

或

$$\dot{K_c} = \frac{1}{K_p} \mathbf{e}_v^T \mathbf{P} \mathbf{C} r \tag{14 57}$$

则式(14.55)中后两项之和为零,从而 $\dot{V}$ 负定。对任意分段连续的输入量 $r$ ,能够保证自适应系统全局渐近稳定。式(14.57)所示的自适应调整律依赖于整个误差向量 $\mathbf{e}$ ,也就是说,它不仅与广义误差 $e$ 有关,而且与 $e$ 的各阶导数 $\dot{e}, \ddot{e}, \dots, e^{(n-1)}$ 等都有关系。这在应用上很不方便。但如果我们在选择李雅普诺夫函数中的正定矩阵 $\mathbf{P}$ 时,若使得 $\mathbf{P}$ 满足条件 $\mathbf{P}\mathbf{C} = \mu\mathbf{h}, \mu > 0$ ,则这时式(14.57)所示的自适应规律就只与 $e$ 有关,而与它的各阶导数无关了。这时的自适应规律为:

$$\dot{K}_c = -\frac{\mu}{K_p}e(t)r(t) \tag{14.58}$$

### § 14.3 基于超稳定性理论的设计方法

用李雅普诺夫稳定性理论设计自适应控制系统的主要缺点是对具体系统难以选择合适的李雅普诺夫函数,从而不易获得较好的自适应规律。用超稳定性理论来设计模型参考自适应控制系统,可对稳定性问题提供系统的解答,从而可以提供一族自适应规律,有利于结合实际系统比较灵活地选择较合适的自适应规律。

#### 14.3.1 超稳定性理论

超稳定性理论是波波夫(Popov)在研究非线性系统的绝对稳定性时提出来的。考虑图14.6所示的多变量非线性反馈系统。其中前向通道方块 $\mathbf{G}(s)$ 为线性时不变的动态系统,反馈通道方块 $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ 为时变的非线性环节。我们要考虑的是当 $\mathbf{G}(s)$ 和 $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ 分别满足什么条件时,非线性反馈系统是稳定的。

波波夫考虑满足如下

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}^T(\tau) \mathbf{f}(\mathbf{y}(\tau)) d\tau \geq -\frac{\epsilon}{2}, \quad t_1 > t_0 \tag{14.59}$$

称为波波夫积分不等式约束的非线性反馈系统。若对所有满足式(14.59)不等式约束的反馈通道方块,图14.6所示系统均是全局稳定的,则称系统为超稳定的。为了能具体地定义稳定性,我们先作出前馈通道方块 $\mathbf{G}(s)$ 的状态方程实现,假定 $\mathbf{r} = 0$ ,将图14.6所示的非线性反馈控制系统,用以下的数学形式描述

前向通道方块:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{w} \tag{14.60}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{J}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{J}\mathbf{w} \tag{14.61}$$

反馈通道方块

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \tag{14.62}$$

式中, $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ 分别是前向通道方块的 $n$ 维状态向量, $m$ 维输入向量和 $m$ 维输出向量; $\mathbf{w}$ 是反馈通道方块的 $m$ 维输出向量,假定 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 完全能控, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 完全能观测。

**定义14.1** 由式(14.60)~式(14.62)所描述的,图14.6所示的非线性反馈系统。若其前向方块状态方程式(14.60)的解 $\mathbf{x}[\mathbf{x}(0), t]$ ,对所有满足波波夫积分不等式(14.59)约束的反馈通道方块,都能满足不等式

$$\mathbf{x}(t) < (\mathbf{x}(0) + \mathbf{0}); \quad t > 0 \quad (14.63)$$

其中,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ; 则称这个闭环系统为超稳定。

**定义 14.2** 若图 14.6 所示系统为超稳定, 并且对所有满足波波夫积分不等式 (14.59) 的反馈方块, 还成立

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$$

则称这个闭环系统为渐近超稳定。

满足以上定义的闭环系统的前向通道方块  $\mathbf{G}(s)$  称为超稳定方块, 超稳定方块的充要条件是它的传递函数必须是正实或严格正实的。

对由式 (14.60) ~ 式 (14.62) 所描述的闭环系统, 令  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{J}$ , 我们可以利用以下的定理判定它的超稳定性。

**定理 14.1** 方程式 (14.60) ~ 式 (14.62) 所描述的闭环系统是超稳定的充要条件是前向方块传递函数  $\mathbf{G}(s)$  是正实的。

**定理 14.2** 方程式 (14.60) ~ 式 (14.62) 所描述的闭环系统是渐近超稳定的充要条件是前向方块的传递函数  $\mathbf{G}(s)$  是严格正实的。

在以上定理中, 我们引用了有理函数矩阵  $\mathbf{G}(s)$  的正实性这一概念。它的确切定义如下:

**定义 14.3** 设  $\mathbf{G}(s)$  是一个  $m \times m$  维实有理函数矩阵, 如果:

(1) 在闭的右半平面  $\text{Re}(s) \geq 0$  内,  $\mathbf{G}(s)$  的所有元素都是解析的 (即在闭的右半平面内无极点)。

(2) 对所有的实数  $\omega$ , 矩阵  $\mathbf{G}(j\omega) + \mathbf{G}^*(j\omega)$  是正定赫米特 (Hermite) 矩阵, 则称  $\mathbf{G}(s)$  是严格正实的。

**定义 14.4** 设  $\mathbf{G}(s)$  是一个  $m \times m$  维实有理函数矩阵, 如果

(1) 在开的右半平面  $\text{Re}(s) > 0$  内,  $\mathbf{G}(s)$  的所有元素都是解析的 (即  $\mathbf{G}(s)$  在开的右半平面内无极点)。

(2) 在虚轴  $\text{Re}(s) = 0$  上,  $\mathbf{G}(s)$  中的任何元素可能具有的极点都是孤立的, 与这些极点所对应的  $\mathbf{G}(s)$  的留数矩阵都是半正定的赫米特矩阵。

(3) 对于不是  $\mathbf{G}(s)$  的任何元素的极点的任意实值  $\omega$ , 矩阵  $\mathbf{G}(j\omega) + \mathbf{G}^*(j\omega)$  是半正定赫米特矩阵。则称  $\mathbf{G}(s)$  是正实矩阵。

### 14.3.2 用超稳定性原理设计参考模型自适应系统

应用超稳定性理论设计参考模型自适应系统的基本思想是使得误差模型为渐近超稳定。这样, 不论误差的初始值如何, 整个参考模型自适应控制系统都是全局渐近稳定的。具体设计步骤为:

(1) 将参考模型自适应系统等价为非线性反馈系统的标准形式, 即由线性的前向通道方块和一个非线性反馈通道方块构成。

(2) 使等价的反馈通道方块满足波波夫积分不等式, 并确定合适的自适应规律的部分解。

(3) 确定等价系统前向通道方块成为严格正实或正实所必须的附加条件, 从而确定另一部分的自适应机构。

(4) 如果设计结果满意, 将等价系统返回到原系统, 即以显式形式实现自适应规律, 完成整个参考模型自适应系统的设计。

设参考模型的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{u}$$

受控对象和控制器一起构成的可调系统的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s \mathbf{x} + \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad (14.64)$$

式中,  $\mathbf{x}_m$  和  $\mathbf{x}$  分别是参考模型和可调系统的  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  是  $m$  维外部输入向量。为用超稳定理论设计自适应系统, 我们先求得等价的非线性反馈系统。令广义状态误差

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x} \quad (14.65)$$

由式(14.63) 和式(14.64) 可得误差系统方程为:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_m - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + [\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_s] \mathbf{u} + (\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_s) \mathbf{x} \quad (14.66)$$

根据超稳定性理论的要求, 将误差系统分解成由  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e}$  构成的前向通道方块和由  $[\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_s] \mathbf{u} + (\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_s) \mathbf{x}$  构成的非线性反馈通道方块所组成。为满足超稳定性的要求, 前向通道方块必须是严格正实的。为了达到这一要求, 往往需要在前向通道中串入一线性补偿器  $\mathbf{D}$ , 它的输入输出关系为

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (14.67)$$

在反馈通道中,  $\mathbf{A}_s$  和  $\mathbf{B}_s$  均是受环境和干扰影响而变化, 同时它们又受自适应机构的调节作用而力图使它们各自维持在与  $\mathbf{A}_m$  和  $\mathbf{B}_m$  相近的数值。显然  $\mathbf{A}_s$  和  $\mathbf{B}_s$  应是  $t$  和  $\mathbf{y}$  的函数。为了使得当  $\mathbf{y}(t) = 0$  时仍能保持调节作用, 我们采用以下比例加积分调节律

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{y}, t) = \int_0^t \mathbf{A}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{A}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{A}_{s0} \quad (14.68)$$

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{y}, t) = \int_0^t \mathbf{B}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{B}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}_{s0} \quad (14.69)$$

其中  $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$  和  $\mathbf{B}_1$ 、 $\mathbf{B}_2$  分别是  $n \times n$  维和  $n \times m$  维矩阵,  $\mathbf{A}_{s0}$  和  $\mathbf{B}_{s0}$  分别是时变矩阵  $\mathbf{A}_s$  和  $\mathbf{B}_s$  的初始值。自适应控制系统设计的目标为:

(1) 决定  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$ , 使得对任意初始条件  $\mathbf{x}_m(0)$ ,  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{A}_m - \mathbf{A}_{s0}$ ,  $\mathbf{B}_m - \mathbf{B}_{s0}$  以及对任意分段连续函数  $\mathbf{u}$  均有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 。

(2) 找出附加的条件, 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{A}_s(\mathbf{y}, t) = \mathbf{A}_m, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{B}_s(\mathbf{y}, t) = \mathbf{B}_m \quad (14.70)$$

成立。

下面我们按前面所述的步骤分步进行设计:

### 1. 等价为非线性反馈系统形式

对照图 14.6 所示的非线性反馈系统的结构, 假定  $\mathbf{r} = 0$ , 根据式(14.66) 和式(14.68) ~ 式(14.69) 我们可以选择:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{u} \quad (14.71)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{D} \mathbf{e} \quad (14.72)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = -\mathbf{u} = & \int_0^t \mathbf{A}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{A}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{A}_{s0} - \mathbf{A}_m \mathbf{x} \\ & + \int_0^t \mathbf{B}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{B}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}_{s0} - \mathbf{B}_m \mathbf{u} \end{aligned} \quad (14.73)$$

构成等价的非线性反馈系统。

## 2. 找出使得反馈回路满足波波夫不等式的条件

将式(14.73)代入波波夫不等式(14.59),并令积分下限  $t_0 = 0$ ,可得

$$(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} \mathbf{p}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{A}_{s0} - \mathbf{A}_m \mathbf{x} d t \\ + \int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} \mathbf{p}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}_{s0} - \mathbf{B}_m \mathbf{u} d t - \frac{1}{2} \quad (14.74)$$

为使上式得到满足,可以使该式左边两项分别满足同样形式的不等式

$$(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} \mathbf{p}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{A}_{s0} - \mathbf{A}_m \mathbf{x} d t - \frac{1}{2} \quad (14.75)$$

$$(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \int_0^{t_1} \mathbf{p}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}_{s0} - \mathbf{B}_m \mathbf{u} d t - \frac{1}{2} \quad (14.76)$$

由于以上两式形式相同,只要讨论式(14.75)即可。将式(14.75)分解成两个不等式:

$$\int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_1(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{A}_{s0} - \mathbf{A}_m \mathbf{x} d t - \frac{1}{2} \quad (14.77)$$

$$\int_0^{t_1} \mathbf{p}_2(\mathbf{y}, t) + \mathbf{B}_{s0} - \mathbf{B}_m \mathbf{u} d t - \frac{1}{2} \quad (14.78)$$

设  $\mathbf{p}_i$  和  $\mathbf{a}_i$  分别为  $n$  维方阵  $\mathbf{p}_i$  和  $\mathbf{A}_{s0} - \mathbf{A}_m$  的第  $i$  列,记

$$\mathbf{p}_i = [p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}]^T, \quad \mathbf{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}]^T \quad (14.79)$$

令  $\mathbf{p}_i$  具有形式  $\mathbf{p}_i = \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{y}(\tau) x_i(\tau)$ , 其中  $\mathbf{F}_a$  为待定的函数矩阵,则式(14.77)可写成:

$$\int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_i(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{a}_i d t - \frac{1}{2} \quad (14.80)$$

上式成立的一个充分条件是该式左边每一项都满足同样类型不等式:

$$\int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \int_0^t \mathbf{p}_i(\mathbf{y}, t, \tau) d\tau + \mathbf{a}_i d t - \frac{1}{2} \quad (14.81)$$

在上式中,若令  $\mathbf{y}(\tau) x_j(\tau) = \mathbf{f}(\tau)$ ,并适当选择积分核  $\mathbf{F}_a(t - \tau)$ ,使得  $\mathbf{F}_a(t - \tau)$  是正定积分核,即它是正实函数  $\mathbf{F}_a(s) = L[\mathbf{F}_a(t)]$  的原函数。这样,我们可以把  $\int_0^t \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau$  看成是某一具有正实传递函数  $\mathbf{F}_a(s)$  的系统,在输入信号为  $\mathbf{f}(t)$  时的输出。而  $\mathbf{a}_i$  则看成是同一系统  $t = 0$  时的输出,它等价于某有限常数向量  $\mathbf{f}(-t_0)$  为输入信号时作用的结果。即

$$\mathbf{a}_i = \int_{-t_0}^0 \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{f}(-t_0) d\tau; \quad t_0 < \infty, \quad \mathbf{f}(-t_0) < \infty \quad (14.82)$$

引入符号

$$\mathbf{p}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t) & t \geq 0 \\ \mathbf{f}(-t_0) & -t_0 \leq t < 0 \end{cases}$$

则式(14.81)中方括号内各项可合并写成  $\int_{-t_0}^t \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau$ , 这时不等式(14.81)左边可写成

$$\int_0^{t_1} \mathbf{p}^T(t) \int_{-t_0}^t \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{p}(\tau) d\tau d t \\ - \int_{-t_0}^0 \mathbf{p}^T(-t_0) \int_{-t_0}^t \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{p}(-t_0) d\tau d t \quad (14.83)$$

在上式中,  $\mathbf{F}_a(t - \tau)$  是一个传递函数为正实矩阵的系统的脉冲响应阵,它是一个正定的积分

核,且  $\mathbf{F}_a(t - \tau)$  中的元素都是有界的,设其上界为  $M_j$ ,则式(14.83)左边第一项大于或等于零,又因  $\mathbf{y}^T(t - t_0) < 0$ ,故第二项为:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-t_0}^0 \mathbf{y}^T(t - t_0) \int_{-t_0}^t \mathbf{F}_a(t - \tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau d t = - \int_{-t_0}^0 \int_{-t_0}^t M_j \mathbf{f}(t - t_0)^2 d\tau d t \\
 & = - M_j \int_{-t_0}^0 \int_{-t_0}^t d\tau d t \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{t_0^2}{2} \mathbf{1}_j, \quad 0 < M_j < \infty
 \end{aligned}
 \tag{14.84}$$

这样,我们就有结论

$$\mathbf{V}_j(0, t_1) = - \frac{t_0^2}{2} \mathbf{1}_j
 \tag{14.85}$$

因此,选择  $\mathbf{V}_j(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}_a(t - t_0) \mathbf{y}(t) x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  是合适的。由式(14.80)和式(14.85)可知,若取

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_1(\mathbf{y}, t) &= [x_1 \dots x_n]^T \\
 &= \mathbf{F}_a(t - t_0) \mathbf{y}(t) [x_1(t) \dots x_n(t)]^T \\
 &= \mathbf{F}_a(t - t_0) \mathbf{y}(t) \mathbf{x}^T(t)
 \end{aligned}$$

时,能使式(14.80)成立。另一方面,如果我们令

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}_a(t) \mathbf{y}(t) \mathbf{x}^T(t)
 \tag{14.86}$$

其中,  $\mathbf{F}_a(t)$  为半正定矩阵,则有

$$\mathbf{V}_2(0, t_1) = \int_0^{t_1} \mathbf{y}^T \mathbf{F}_a \mathbf{y} \mathbf{x}^T \mathbf{x} d t \geq 0
 \tag{14.87}$$

这样,我们就保证了积分不等式(14.75)的成立。

因为式(14.76)与式(14.75)具有相同的形式,如果我们选择

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}_b(t - t_0) \mathbf{y}(t) \mathbf{u}^T(t), \quad t \geq t_0
 \tag{14.88}$$

$$\mathbf{V}_2(\mathbf{y}, t) = \mathbf{F}_b(t) \mathbf{y}(t) \mathbf{u}^T(t)
 \tag{14.89}$$

其中,  $\mathbf{F}_b$  是正定的积分核,  $\mathbf{F}_b$  是半正定矩阵,就可保证式(14.76)成立。这样所得的等价反馈通道方块的特性就满足了波波夫积分不等式。

根据前面的叙述,为保证波波夫积分不等式成立,只要使得  $\mathbf{F}_a$  和  $\mathbf{F}_b$  为正定积分核,  $\mathbf{F}_a$  和  $\mathbf{F}_b$  为半正定矩阵就行。这样,对  $\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b, \mathbf{F}_a, \mathbf{F}_b$  可以有很多种选择。最简单的情况可取

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_a(t - \tau) &= \mathbf{F}_a > 0 & \mathbf{F}_a(t) &= \mathbf{F}_a > 0 \\
 \mathbf{F}_b(t - \tau) &= \mathbf{F}_b > 0 & \mathbf{F}_b(t) &= \mathbf{F}_b > 0
 \end{aligned}$$

即选择  $\mathbf{F}_a$  和  $\mathbf{F}_b$  为对称正定常矩阵,  $\mathbf{F}_a$  和  $\mathbf{F}_b$  为半正定常矩阵。或者选取

$$\mathbf{F}_a(t - \tau) = \mathbf{F}_a > 0 \quad \mathbf{F}_b(t - \tau) = \mathbf{F}_b > 0$$

$$\mathbf{F}_a(t) = \mathbf{F}_b(t) = K_2 \text{diag} \frac{1}{|y_i|}$$

$$\text{则} \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{y}, t) = K_2 \mathbf{x}^T \text{sgn}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{y}, t) = K_2 \mathbf{u}^T \text{sgn}(\mathbf{y})$$

其中  $K_2 > 0$ ,于是可得到积分加继电型控制律。

### 3.确定前向通道方块为严格正实的条件

当等价反馈通道方块满足波波夫积分不等式后,要使系统成为超稳定系统,则要求式(14.71)和式(14.72)形成的等价前向通道传递函数矩阵  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{D}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_m)^{-1}\mathbf{I}$  为严格正实的。为达到这一目的,可以根据正实引理求出  $\mathbf{D}$ 。由于参考模型为渐近稳定的,我们可以找出对称正定矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ,满足李雅普洛夫方程



$$\mathbf{P}\mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (14.90)$$

选择  $\mathbf{D} = \mathbf{P}$ , 则能保证  $\mathbf{G}(\mathbf{s})$  的严格正实性。这样就保证了参考模型自适应控制系统的全局渐近稳定和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 。

#### 4. 完成整个参考模型自适应控制系统的设计

整个参考模型自适应控制系统的结构如图 14.7 所示。这样, 我们就完成了整个自适应控制系统的设计。

为了能使式(14.70)成立, 即保证可调系统的参数分别收敛到参考模型参数, 必须要使外部输入变量  $\mathbf{u}$  和状态变量  $\mathbf{x}$  是线性独立的。

换句话说, 要求参考模型完全能控, 并且  $\mathbf{u}$  的每个分量均线性独立, 而且要包含有多于

$\frac{n}{2}$  个不同频率的正弦信号。

以上所讨论的利用超稳定性原理设计的参考模型自适应系统, 需要利用可调系统的全部状态变量来构造自适应调整律, 这对许多实际系统来说往往是不易实现的。为此人们又提出了利用输入输出测量值设计的参考模型自适应控制系统。感兴趣的读者可参考有关文献。

超稳定性理论已成功地应用于设计稳定的参考模型自适应系统。它在进行设计时可避免选择李雅普诺夫函数, 并且可以得到一大类自适应规律。因此, 在应用方面显得更为灵活与方便。

参考模型自适应系统是一个时变非线性系统, 要对它进行详尽的理论分析十分困难。我们前面所介绍的几种自适应调整律都是在一定的假设条件下求得的。在实际应用中, 有可能出现一些事先难以确切计及的某些因素, 如附加的高频特性等, 这些因素的存在有可能严重损坏自适应控制系统的控制特性, 甚至引起闭环系统的不稳定。因此, 参考模型自适应控制系统存在着一个鲁棒性的问题有待于解决。它也是近年来引起广泛重视的问题。

## 习 题

14.1 设有一个三阶系统, 参考模型的时域算子方程为

$$(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + 1) y_m(t) = K_r(t)$$

并联可调增益的微分算子方程为:

$$(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + 1) y(t) = K_c K_v r(t)$$

其中,  $K_v$  是受环境影响缓慢时变的参数,  $K_c$  为可调增益。试用局部参数优化方法设计  $K_c$  的自适应规律, 并确定使系统稳定所需的参数条件。

14.2 考虑参考模型

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}_m + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} r$$

受控对象

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

调节器

$$u = K_v \mathbf{x} + K_c$$

组成的参考模型自适应控制系统, 试用李雅普诺夫稳定性理论设计该系统的自适应控制律, 并画出框图。

14.3 考虑由参考模型

$$\ddot{y} + 1.2 \dot{y}_m + y_m = r(t)$$

和可调系统

$$\ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \alpha_0 r$$

其中  $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_0$  均为可调参数, 组成的参考模型自适应控制系统, 试用李雅普诺夫稳定性理论设计该系统的自适应控制律。

14.4 对题 14.2 所示系统, 试用超稳定性理论设计它的自适应控制律。

14.5 对题 14.3 所示系统, 试用超稳定性理论设计它的自适应控制律。

# 第十五章 自校正控制

自校正控制器(Self-tuning regulator)是一种将参数的在线估计和调节器(控制器)参数的在线自动整定相结合的自适应控制系统。它可用于结构已知而参数未知或缓慢时变的随机系统。自校正控制的典型结构如图 15.1 所示。它由参数估计,控制器设计和反馈控制器等三部分构成。参数估计部分的作用是根据受控对象的输入输出信息,利用在线辨识算法,估计受控对象的参数。控制器设计部分根据对象参数的在线估计值 $\hat{\theta}$ ,在线校正控制器参数,保证系统运行的性能指标满足设计要求。

自校正控制器是将受控对象未知参数的估计和控制器设计这两个部分分离来进行的,也就是说,它利用了确定性等价原理(Certainty equivalence principle),即当将系统中所有未知参数,用它们相应的估计值代替后,其控制规律的形式恰与对应的参数已知时的随机最优控制规律的形式相同。这样一来,它就没有考虑未知参数的估计值是否等于真值,也没有考虑它与真值的偏离程度。因此,一般来说,这时自校正控制规律可能不一定是渐近最优的。

图 15.1 自校正控制的结构图

在自校正控制器的参数估计中,有两种方式,一种是先估计受控系统的模型本身参数,然后再计算控制器,这种方法称为显式算法。但由于这种方法不直接得到控制器参数,故又称间接算法。另一种方法是直接估计控制器的参数,它称为隐式算法或直接算法。显然,在设计控制器时,显式算法要比隐式计算法多一道手续,所以一般要费时一些。

自校正控制器的控制规律可以采用不同的方案,如最小方差控制,二次型最优控制,极点配置等。采用什么样的方案依赖于对闭环系统性能的要求。

自校正控制通常是通过数字计算机来实现的,因此,我们通常在离散时间领域内来讨论自校正控制,但是连续时间的自校正控制算法也有一定的市场。

## § 15.1 最小方差自校正控制

考虑以 ARMAX 模型表示的线性随机离散系统:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \quad (15.1)$$

式中,  $y(k)$  和  $u(k)$  分别表示系统的输出和输入。 $d$  表示系统的时滞,并假定它是计算机采样周期的整数倍,即  $d$  为整数。 $\{e(k)\}$  是零均值,方差为  $\sigma^2$  的白噪声序列。

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}$$

最小方差控制的基本思想是,根据在  $k$  时刻已经测得的信息,预报  $(k + d)$  时刻的输出

$\hat{y}(k+d|k)$ 。然后, 根据预报输出  $\hat{y}(k+d|k)$  计算适当的控制作用  $u(k)$  来补偿随机扰动在  $k+d$  时刻对输出的影响。之所以要提前  $d$  步进行预报, 是因为输入输出通道的滞后作用, 使得现时的控制作用  $u(k)$  要滞后  $d$  个采样周期才能对输出产生影响, 所以要提前  $d$  步对输出量进行预测。这样, 通过连续不断地进行预测和调节, 就能始终保持输出量的稳态方差为最小。由之可见, 实现最小方差控制的关键在于预报。

### 15.1.1 最小方差预测

设在  $k$  时刻已观测到输出值  $y(k), y(k-1), \dots$  等, 而我们想由之得到预测值  $\hat{y}(k+d|k)$ 。由式(15.1), 我们有

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) \quad (15.2)$$

设  $A(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  所有的零点都是稳定的, 即都位于单位圆内。式(15.2) 右边是  $u(k), u(k-1), \dots; e(k+d), e(k+d-1), \dots, e(k+1), e(k), e(k-1), \dots$  等变量的线性组合, 其中系统输入  $u(k), u(k-1), \dots$  等是可以直接测量的。随机变量  $e(k), e(k-1), \dots$  等均可以根据在  $k$  时刻为止的关于系统输入和输出值而计算得到。但是随机变量  $e(k+1), \dots, e(k+d)$  等是系统在  $k$  时刻以后的干扰输入, 与直到  $k$  时刻为止的系统输入输出观测值无关。为了能有效地利用直到  $k$  时刻为止的关于系统输入输出的观测值进行预测, 我们必须将随机干扰

中这两类变量区分开来。为此, 将  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$  分成两部分:

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (15.3)$$

其中

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)} \\ G(q^{-1}) &= g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-(n-1)} \end{aligned}$$

$F$ 和 $G$ 可通过对  $\frac{C}{A}$  进行长除法得到, 这时  $F$ 为商, 而  $q^{-d}G(q^{-1})$ 为余因子。也可以通过将式(15.3) 写成

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (15.4)$$

然后比较两边的系数, 令  $q^{-1}$  的同次幂系数相等, 得到关于未知量  $f_i$  和  $g_i$  的方程组, 联立这一方程组求解而得到。根据式(15.3) 可将方程式(15.2) 右边的噪声项写成

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = F(q^{-1}) e(k+d) + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (15.5)$$

这样就将噪声分成了在  $k$ 时刻已知的  $\frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k)$  和未知的  $F(q^{-1}) e(k+d)$  两部分。代入式(15.2) 可得

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + F(q^{-1}) e(k+d) + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \quad (15.6)$$

由式(15.1) 可解得

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})} q^{-d} u(k) \quad (15.7)$$

代入式(15.6) 可得

$$y(k+d) = F(q^{-1})e(k+d) + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - \frac{G(q^{-1})q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(k) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \quad (15.8)$$

利用式(15.4) 可将上式化简成

$$y(k+d) = F(q^{-1})e(k+d) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) \quad (15.9)$$

记基于  $k$  时刻的观测值对  $y(k+d)$  的预报为  $\hat{y}(k+d/k)$ , 显然, 它必须是  $k$  时刻及以前的输入和输出的函数。若对预测的要求是使预测的误差平方即系统误差的方差为最小, 记  $E\{\cdot\}$  表示求数学期望, 则损失函数可表示为

$$\begin{aligned} J &= E\{[\hat{y}(k+d/k) - y(k+d)]^2\} \\ &= E\left\{\hat{y}(k+d/k) - F(q^{-1})e(k+d) - \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) - \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k)\right\}^2 \end{aligned} \quad (15.10)$$

因为  $u(k)$  是  $y(k), y(k-1), \dots$  的函数,  $\hat{y}(k+d/k)$  由基于  $k$  时刻及其以前的观测值构成, 故也是  $y(k), y(k-1), \dots$  等的线性函数。在上式中  $F(q^{-1})e(k+d)$  项是  $e(k+1), \dots, e(k+d)$  等的线性组合, 所以它与其它项均不相关。另外由于  $\{e(k)\}$  是零均值的白噪声序列, 我们可以将式(15.10) 写成两项之和。

$$\begin{aligned} J &= E\{[F(q^{-1})e(k+d)]^2\} \\ &\quad + E\left\{\hat{y}(k+d/k) - \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) - \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k)\right\}^2 \end{aligned} \quad (15.11)$$

上式中第一项与  $\hat{y}(k+d/k)$  的选择无关。因此, 要使预报误差的方差最小, 只有使第二项等于零。这样, 最小方差预测为:

$$\hat{y}(k+d/k) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) \quad (15.12)$$

最小方差预测估计的误差:  $\hat{e}(k+d/k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d/k)$  的方差为:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\hat{e}(k+d/k)\} &= E\{[F(q^{-1})e(k+d)]^2\} \\ &= (1 + f_1^2 + \dots + f_{d-1}^2)^2 \end{aligned} \quad (15.13)$$

为了便于计算机递推计算, 可将式(15.12) 写成差分方程的形式

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+d/k) &= -c_1 \hat{y}(k+d-1/k-1) - \dots - c_n \hat{y}(k+d-n/k-n) + g_0 y(k) \\ &\quad + g_1 y(k-1) + \dots + g_{n-1} y(k-n+1) + b_0 u(k) + (b_1 + b_0 f_1) u(k-1) \\ &\quad + (b_1 f_1 + b_2 + b_0 f_2) u(k-2) + \dots + (b_{n-1} f_{d-1}) u(k-n-d+2) \end{aligned} \quad (15.14)$$

## 15.1.2 最小方差控制

最小方差控制的目的是要确定  $u(k)$ , 使得输出的方差为最小。由于  $u(k)$  最早只能影响到  $y(k+d)$ , 我们选择性能指标函数

$$J = E\{y(k+d)^2\} \quad (15.15)$$

设在 ARMAX 模型式(15.1) 中,  $A, B, C$  均为阶次确定的稳定多项式,  $d$  为确定值。将式(15.15) 改写成

$$\begin{aligned} J &= E\{y(k+d)^2\} = E\{[\hat{y}(k+d/k) + \text{残}(k+d/k)]^2\} \\ &= E\{\hat{y}(k+d/k)^2\} + E\{\text{残}(k+d/k)^2\} \end{aligned} \quad (15.16)$$

在上式中,  $\text{残}(k+d/k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d/k)$  是预测误差, 它为  $e(k+1), \dots, e(k+d)$  的线性组合,  $\hat{y}(k+d/k)$  则是  $y(k), y(k-1), \dots; u(k), u(k-1), \dots$  的线性函数, 因此二者不相关。显然, 使式(15.16)所示的性能指标取最小值的充要条件是

$$\hat{y}(k+d/k) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) = 0 \quad (15.17)$$

由之即可得最小方差控制律

$$B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) = -G(q^{-1})y(k) \quad (15.18)$$

这时系统输出的方差为:

$$\begin{aligned} E\{y(k+d)^2\} &= E\{\text{残}(k+d/k)^2\} \\ &= (1 + f_1^2 + \dots + f_{d-1}^2)^2 \end{aligned} \quad (15.19)$$

由式(15.17)可见, 最小方差控制律可以通过先求出输出提前  $d$  步的预测值  $\hat{y}(k+d/k)$ , 然后令  $\hat{y}(k+d/k)$  等于理想输出值  $y_r$  (这里  $y_r = 0$ ) 而得到。因此, 最小方差控制问题可以分离成两个问题, 一个是预测问题, 另一个是控制问题, 满足分离原理。

**【例 15.1】** 考虑以下随机离散系统

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-d) + C(q^{-1})e(k)$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

首先考虑时滞  $d = 1$  的情况。这时显然有  $F(q^{-1}) = 1$ , 设

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1}$$

由式(15.4)可得:

$$(1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}) = (1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}) + q^{-1}(g_0 + g_1q^{-1})$$

比较两边同次幂的系数得:

$$1.5 = -1.7 + g_0$$

$$0.9 = 0.7 + g_1$$

解得  $g_0 = 3.2, g_1 = 0.2$ 。由式(15.18)可得最小方差控制:

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})}y(k) = -\frac{3.2 + 0.2q^{-1}}{1 + 0.5q^{-1}}y(k)$$

或

$$u(k) = -0.5u(k-1) - 3.2y(k) - 0.2y(k-1)$$

这时输出的方差  $\text{Var}[y(k)] = \sigma^2$ , 其中  $\sigma^2$  是白噪声序列  $\{e(k)\}$  的方差。

其次考虑  $d = 2$  的情况, 这时, 设  $G(q^{-1})$  与前面一致, 而

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1}$$

则由式(15.4)得:

$$(1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}) = (1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2})(1 + f_1q^{-1}) + q^{-2}(g_0 + g_1q^{-1})$$

比较两边同次幂的系数得

$$1.5 = -1.7 + f_1$$

$$0.9 = 0.7 - 1.7f_1 + g_0$$

$$0 = 0.7f_1 + g_1$$

联立解得:  $f_1 = 3.2$ ,  $g_0 = 5.64$ ,  $g_1 = -2.24$ 。最小方差控制为:

$$u(k) = -5.64y(k) + 2.24y(k-1) - 3.7u(k-1) - 1.6u(k-2)$$

输出方差  $\text{Var}[y(k)] = (1 + f_1^2)^2 = 11.24^2$

显然, 当时滞  $d$  增加时, 输出的方差有相当大数量的增加。

将式(15.18) 代入式(15.1), 可得最小方差控制的闭环系统方程为:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})C(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1})}e(k) \quad (15.20)$$

当  $B(q^{-1})$  为稳定多项式, 即式(15.1) 所描述的系统是最小相位时, 上式中的分母和分子中的  $B(q^{-1})$  可以对消, 这时利用式(15.3), 可以将式(15.20) 简化为:

$$y(k) = F(q^{-1})e(k) \quad (15.21)$$

可见最小方差控制的实质, 就是用控制器的极点去对消受控对象的零点。要能实现控制器和受控对象之间的零极点相消,  $B(q^{-1})$  必须是稳定的多项式。即系统式(15.1) 是最小相位系统。因此, 最小方差控制只能用于最小相位系统。

另外由式(15.21) 可见, 闭环系统输出  $y(k)$  是白噪声序列  $\{e(k)\}$  的  $d$  阶滑动平均。因此, 必然成立

$$E\{y(k)y(k+d)\} = 0, \quad \text{当 } d \text{ 时}$$

利用这一特性可以考察控制器设计得是否合适, 即对一个运行中的系统, 根据以上条件, 检查所用的控制是否是最小方差控制。

### 15.1.3 最小方差自校正控制

前面所讨论的都是当受控对象模型式(15.1) 中  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  等各参数均为已知时的最小方差控制策略。当受控对象参数未知或缓慢时变时, 则必须采用自校正控制。最小方差自校正控制也有隐式算法和显式算法两种形式。

显式算法就是在递推的每一步中, 先采用系统辨识的方法, 估计模型式(15.1) 中的各参数, 得到  $\hat{A}(q^{-1})$ ,  $\hat{B}(q^{-1})$  和  $\hat{C}(q^{-1})$ 。然后, 将式(15.3) 中的  $A(q^{-1})$ 、 $B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  分别用它们的估计值代替, 求得  $\hat{F}(q^{-1})$  和  $\hat{G}(q^{-1})$ , 最后利用最小方差控制律式(15.18), 得到最小方差自校正控制:

$$\hat{B}(q^{-1})\hat{F}(q^{-1})u(k) = -\hat{G}(q^{-1})y(k) \quad (15.22)$$

在这种算法的递推计算中, 每步都必须进行受控对象模型参数的估计, 然后通过最小方差控制规律, 计算控制器的输出, 计算比较繁琐。

隐式算法的特点是在递推计算的每步中都通过系统辨识的方法, 直接辨识出控制器的参数, 从而计算十分简捷, 得到了广泛的应用。

由最小方差控制的原理可知, 最小方差是通过置输出的  $d$  步预测值  $\hat{y}(k+d|k)$  为零而实现的。因此, 最小方差控制的核心是预测。

根据受控对象的预测模型式(15.12) 和最小方差控制律式(15.18), 若令

$$\begin{aligned} (q^{-1}) &= G(q^{-1}) = 0 + 1q^{-1} + \dots + n_{-1}q^{-(n-1)} \\ (q^{-1}) &= B(q^{-1})F(q^{-1}) = 0 + 1q^{-1} + \dots + n_{n+d-2}q^{-(n+d-1)} \end{aligned}$$

则最小方差控制律式(15.18)可以写成

$$(q^{-1})u(k) = - (q^{-1})y(k) \quad (15.23)$$

或

$$u(k) = -\frac{1}{a_0}y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_{n-1}y(k-n+1) \\ + b_1u(k-1) + \dots + b_{n+d-1}u(k-n-d+1) \quad (15.24)$$

显然,若能直接估计出参数  $a_i$  和  $b_i$ ,则可由上式立即得到最小方差控制。为了能估计参数  $a_i$  和  $b_i$ ,我们设定一个具有白噪声  $e(k)$  干扰的预测模型:

$$y(k+d) = (q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) + e(k+d) \quad (15.25)$$

这个预测模型的参数  $a_i$  和  $b_i$ ,即最小方差控制律式(15.24)中的参数,因此,一旦它被求出,则可直接得到控制律。由式(15.12),系统的  $k$  步最优预测为

$$C(q^{-1})\hat{y}(k+d/k) = G(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) \quad (15.26)$$

预测误差

$$\text{璁}(k+d/k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d/k) \\ = F(q^{-1})e(k+d) \quad (15.27)$$

根据以上两式,我们有

$$y(k+d) = G(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})F(q^{-1})u(k) - [C(q^{-1}) - 1]\hat{y}(k+d/k) \\ + \text{璁}(k+d/k) \\ = (q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) - [C(q^{-1}) - 1]\hat{y}(k+d/k) + \text{璁}(k+d/k) \quad (15.28)$$

因为自校正最小方差控制律是通过置最优预测值,  $\hat{y}(k+d-j/k-j) = 0$  而得到的,因此,在式(15.27)中,  $[C(q^{-1}) - 1]\hat{y}(k+d/k)$  项将消失,而  $\text{璁}(k+d/k) = F(q^{-1})e(k+d)$  是不相关于前面两项的。这样,式(15.28)就与设定的预测模型式(15.25)一致。根据系统辨识原理可知,这时采用最小二乘法等方法即可得到  $(q^{-1})$  和  $(q^{-1})$  的无偏估计。因为这一辨识过程是在闭环的情况下进行的,必须采用闭环系统辨识的相应方法。为了保证预测模型各参数  $a_i$  和  $b_i$  的闭环可辨识性要求,通常设定多项式  $(q^{-1})$  的首项系数  $a_0$  为一合理的常数  $\hat{a}_0$ 。这一设定不会影响辨识递推算法的收敛性。定义得到辨识参数向量  $\mathbf{h}^T(k)$  为

$$\mathbf{h}^T = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n+d-1}] \quad (15.29)$$

$$\mathbf{h}^T(k) = [y(k) \quad y(k-1) \quad \dots \quad y(k-n+1) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n-d+1)] \quad (15.30)$$

则预测模型式(15.25)可以写成线性回归的形式

$$y(k+d) - \hat{a}_0 u(k) = \mathbf{h}^T(k) + e(k+d) \quad (15.31)$$

利用参数估计算法即可由上式得到  $\hat{a}_0$  的估计值  $\hat{a}_0$ 。考虑到受控对象的时变性质和克服数据饱和现象,可以采用渐消记忆递推最小二乘估计。得到估计值  $\hat{a}_0$  后,立即可以得到自校正最小方差控制为:

$$u(k) = -\frac{1}{\hat{a}_0} \mathbf{h}^T(k) \quad (15.32)$$

可以证明,若  $(q^{-1})$  和  $(q^{-1})$  无公因子,且其估计值收敛于真值,则自校正最小方差控制律



式(15.32)收敛到最小方差控制律。

## § 15.2 广义最小方差自校正控制

最小方差自校正控制具有简单,易于理解和易于实现等优点,但是它只适用于最小相位系统,并且控制量往往过大,使调节过程过于猛烈。为了克服这些缺点,1975年英国的 Clark 和 Gawthrop 提出了广义最小方差控制算法。它的基本思想是在性能指标中引入了伺服输入项 ( $y_r \neq 0$ ) 和对控制作用的加权项,从而可实现渐近跟踪,并限制了控制作用过大的增长。另外,适当地选择各加权项,还可以应用于非最小相位系统。这种算法还保留了最小方差自校正控制算法简单的特点,从而得到了广泛的应用。

### 15.2.1 广义最小方差控制

考虑受控对象:

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \quad (15.33)$$

各系数多项式如上节所定义。设性能指标  $J$  为

$$J = E\{[P(q^{-1})y(k+d) - R(q^{-1})w(k)]^2 + [Q(q^{-1})u(k)]^2\} \quad (15.34)$$

其中,  $w(k)$  为已知的参考输入序列;  $P(q^{-1})$ ,  $R(q^{-1})$  和  $Q(q^{-1})$  分别为对实际输出, 参考输入和控制输入的加权多项式。由上式可知, 设计的目的即是使得系统输出  $y(k)$  尽可能地跟踪参考输入  $w(k)$ , 且同时使得控制作用  $u(k)$  尽可能小。

根据上一节的结果可求出  $y(k+d)$  的  $d$  步最优预报为:

$$\hat{y}(k+d|k) = C^{-1}(q^{-1})[G(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})F(q^{-1})u(k)] \quad (15.35)$$

其中,  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  由式(15.4)给出。

预报误差为

$$\text{璦}(k+d|k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k) = F(q^{-1})e(k+d) \quad (15.36)$$

将以上两式代入  $J$  中可得:

$$J = E\{[P(q^{-1})[\hat{y}(k+d|k) + \text{璦}(k+d|k)] - R(q^{-1})w(k)]^2 + [Q(q^{-1})u(k)]^2\} \quad (15.37)$$

显然,  $P(q^{-1})$  只对  $\hat{y}(k+d|k)$  和  $\text{璦}(k+d|k)$  的第一个时标进行运算, 因而  $P(q^{-1})\text{璦}(k+d|k)$  不相关于  $y(k-i)$ ,  $u(k-i)$ ;  $i \geq 0$ 。若记  $a^2 = E\{[P(q^{-1})\text{璦}(k+d|k)]^2\}$ , 并注意到  $\hat{y}(k+d|k)$  和  $w(k)$  都是确定性变量, 则可将  $J$  写成三项之和

$$J = [P(q^{-1})\hat{y}(k+d|k) - R(q^{-1})w(k)]^2 + [Q(q^{-1})u(k)]^2 + a^2 \quad (15.38)$$

根据

$$\frac{\partial J}{\partial u(k)} = 2[P(q^{-1})\hat{y}(k+d|k) - R(q^{-1})w(k)]b_0 + 2q_0Q(q^{-1})u(k) = 0 \quad (15.39)$$

其中,  $b_0$  和  $q_0$  分别是多项式  $B(q^{-1})$  和  $Q(q^{-1})$  中的常数项, 可得到使  $J$  为最小的广义最小方差控制

$$P(q^{-1})\hat{y}(k+d|k) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) = 0 \quad (15.40)$$

式中,  $Q(q^{-1}) = \frac{1}{b_0}q_0Q(q^{-1})$ 。或写成

$$u(k) = Q^{-1}(q^{-1})[R(q^{-1})w(k) - P(q^{-1})\hat{y}(k+d|k)] \quad (15.41)$$

式中,  $d$  步最优预测值  $\hat{y}(k+d|k)$  由式(15.35) 给出。

另一种方法是直接求变量

$$(k+d) = P(q^{-1})y(k+d) \quad (15.42)$$

的  $d$  步最优预测  $\hat{y}(k+d|k)$ 。为此, 采用类似求  $\hat{y}(k+d|k)$  的方法, 先将  $P(q^{-1})C(q^{-1})$  分解成

$$P(q^{-1})C(q^{-1}) = E(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}D(q^{-1}) \quad (15.43)$$

其中

$$\begin{aligned} E(q^{-1}) &= 1 + e_1 q^{-1} + \dots + e_{d-1} q^{-(d-1)} \\ D(q^{-1}) &= d_0 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n-1+n_p} q^{-(n-1+n_p)} \end{aligned}$$

$n_p$  为多项式  $P(q^{-1})$  的次数。

则类似上一节中由式(15.6) 到式(15.8) 的推导过程可得

$$\begin{aligned} (k+d) &= P(q^{-1})y(k+d) \\ &= \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})E(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) + E(q^{-1})e(k+d) \end{aligned} \quad (15.44)$$

其中  $E(q^{-1})e(k+d)$  与方程右边其它项均不相关。

再利用与上一节中由式(15.10) 到式(15.12) 类似的推理过程, 可以得到  $(k+d)$  的  $d$  步最优预测为

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{E(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) \quad (15.45)$$

最优预测误差为

$$\text{珙}(k+d|k) = (k+d) - \hat{y}(k+d|k) = E(q^{-1})e(k+d)$$

利用  $\hat{y}(k+d|k)$ , 可以将广义最小方差控制律式(15.40) 写成

$$\hat{y}(k+d|k) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) = 0 \quad (15.46)$$

或

$$u(k) = Q^{-1}(q^{-1})[R(q^{-1})w(k) - \hat{y}(k+d|k)] \quad (15.47)$$

Clark 和 Gawthrop 提出一种辅助系统的设计方法, 把求系统指标  $J$  的优化问题, 转化为求解广义输出方差为最小的问题, 从而可以利用上节关于最小方差调节器的结论。为此, 定义广义输出

$$(k+d) = (k+d) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) \quad (15.48)$$

利用  $\hat{y}(k+d|k)$ , 立即可以得到  $(k)$  的  $d$  步最优预测值

$$\hat{y}(k+d|k) = \hat{y}(k+d|k) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) \quad (15.49)$$

它的最优预测误差  $\text{珙}(k+d|k)$  也就等于  $(k)$  的  $d$  步预测的最优预测误差  $\text{珙}(k+d|k)$ 。

与求解最小方差控制的思想一样, 令关于广义输出  $(k)$  的  $d$  步最优预测值  $\hat{y}(k+d|k)$  为零, 即可得广义最小方差控制律

$$\hat{y}(k+d|k) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) = 0 \quad (15.50)$$

显然, 它与直接通过优化过程而得到的广义最小方差控制律式(15.46) 完全一致。将式

(15.45) 代入式(15.49), 有

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{E(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) + Q(q^{-1})u(k) - R(q^{-1})w(k) \quad (15.51)$$

式(15.51) 可简写成

$$C(q^{-1})\hat{y}(k+d|k) = (q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) + (q^{-1})w(k) \quad (15.52)$$

其中

$$\begin{aligned} (q^{-1}) &= D(q^{-1}) \\ (q^{-1}) &= B(q^{-1})E(q^{-1}) + C(q^{-1})Q(q^{-1}) \\ (q^{-1}) &= -C(q^{-1})R(q^{-1}) \end{aligned}$$

由  $\hat{y}(k+d|k) = 0$ , 立即可得到与式(15.50) 等价的广义最小方差控制律

$$(q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) + (q^{-1})w(k) = 0 \quad (15.53)$$

它也可写成

$$u(k) = - (q^{-1})[ (q^{-1})y(k) + (q^{-1})w(k)] \quad (15.54)$$

将式(15.54) 代入受控对象的模型式(15.33), 可得到采用广义最小方差控制后的闭环系统模型

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{q^{-d}B(q^{-1})R(q^{-1})}{A(q^{-1})Q(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1})} w(k) \\ &+ \frac{B(q^{-1})E(q^{-1}) + C(q^{-1})Q(q^{-1})}{A(q^{-1})Q(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1})} e(k) \end{aligned} \quad (15.55)$$

闭环系统的特征方程为:

$$T(q^{-1}) = A(q^{-1})Q(q^{-1}) + B(q^{-1})P(q^{-1}) = 0 \quad (15.56)$$

显然, 这是一个 Diophantine 方程。适当选择权多项式  $Q(q^{-1})$  和  $P(q^{-1})$ , 可以配置闭环系统的极点。因此,  $Q(q^{-1})$  和  $P(q^{-1})$  的选择, 将影响到闭环系统的稳定性。当  $Q(q^{-1}) = 0$  时, 闭环特征方程为:

$$T(q^{-1}) = P(q^{-1})B(q^{-1}) = 0 \quad (15.57)$$

这时,  $B(q^{-1})$  的零点将成为闭环特征方程的根, 当受控对象为非最小相位系统时, 闭环系统就不稳定了。从性能指标式(15.34) 来看,  $Q(q^{-1}) = 0$  相当于在性能指标中不包括对控制作用的约束, 广义最小方差控制退化为最小方差控制。因此它不适用于非最小相位系统。而加上  $Q(q^{-1})$  以后, 适当地选择  $Q(q^{-1})$  不但可使广义最小方差控制适用于非最小相位的受控对象, 保证闭环系统的稳定性, 还可保证  $u(k)$  不致于过大。

**【例 15.2】** 已知受控对象为:

$$(1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y(k) = q^{-1}(1 + 0.5q^{-2})u(k) + (1 + 0.5q^{-1})e(k)$$

性能指标为

$$J = E\{[y(k) - w(k)]^2 + 0.5u^2(k)\}$$

试确定广义最小方差控制律。

将  $A(q^{-1}) = (1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})$ ,  $C(q^{-1}) = (1 + 0.5q^{-1})$ ,  $d = 1$  代入式(15.43) 可得

$$1 - 0.5q^{-1} = (1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})E(q^{-1}) + q^{-1}D(q^{-1})$$

可解得:

$$E(q^{-1}) = 1, \quad D(q^{-1}) = 1 - 0.7q^{-1}$$

代入式(15.54) 即可得广义最小方差控制律为

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{(1 - 0.5q^{-1})w(k) - (1 - 0.7q^{-1})y(k)}{1 + 0.5q^{-1} + 0.5(1 - 0.5q^{-1})} \\ &= \frac{1}{1.5}[-0.25u(k-1) - y(k) + 0.7y(k-1) + w(k) - 0.5w(k-1)] \end{aligned}$$

**【例 15.3】** 考虑非最小相位的受控对象

$$(1 - 0.95q^{-1})y(k) = q^{-2}(1 + 2q^{-1})u(k) + (1 - 0.7q^{-1})e(k)$$

设性能指标为:

$$J = E\{[y(k+2) - w(k)]^2 + [Qu(k)]^2\}$$

试确定加权因子  $Q$  及广义最小方差控制律。

因为受控对象是非最小相位的, 我们首先通过确定  $Q$  来保证闭环系统的稳定性。由式(15.56), 闭环系统的特征方程为:

$$T(q^{-1}) = QA(q^{-1}) + B(q^{-1}) = 0$$

代入  $A(q^{-1}) = (1 - 0.95q^{-1})$  和  $B(q^{-1}) = (1 + 2q^{-1})$  可得

$$T(q^{-1}) = Q(1 - 0.95q^{-1}) + (1 + 2q^{-1}) = 0$$

由之可解得闭环特征根为

$$q_1 = \frac{2 - 0.95Q}{Q + 1}$$

闭环系统的稳定性要求  $|q_1| < 1$ , 由之求得

$$Q > 0.514$$

取  $Q = 0.515$ 。利用式(15.43), 由  $C(q^{-1}) = (1 - 0.7q^{-1})$  和  $P(q^{-1}) = 1$  求解

$$(1 - 0.7q^{-1}) = (1 - 0.95q^{-1})E(q^{-1}) + q^{-2}D(q^{-1})$$

可以得出

$$E = 1 + 0.25q^{-1} \quad D(q^{-1}) = 0.24$$

代入式(15.52) 即可得广义最小方差控制律

$$u(k) = \frac{1}{1.52}[-1.9u(k-1) - 0.5u(k-2) - 0.24y(k) + w(k) - 0.7w(k-1)]$$

### 15.2.2 广义最小方差自校正控制

广义最小方差自校正控制的算法也有两种。

第一种算法是根据式(15.46), 利用  $(k+d)$  最优  $d$  步预测值来实现的。注意到在式(15.46) 中,  $R(q^{-1})$  和  $Q(q^{-1})$  均是权多项式, 一旦性能确定, 它们就是确定的了, 而  $w(k)$  为外加输入, 因此只要确定了最优预测值  $\hat{y}(k+d/k)$ , 即可确定控制量  $u(k)$ 。将  $(k)$  的  $d$  步最优预测方程式(15.45) 改写成线性回归的形式。

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+d/k) &= D(q^{-1})y(k) + M(q^{-1})u(k) - \sum_{j=1}^n c_j \hat{y}(k+d-j/k-j) \\ &= \mathbf{h}^T(k) \end{aligned} \tag{15.58}$$

其中

$$\begin{aligned} M(q^{-1}) &= E(q^{-1})B(q^{-1}) = m_0 + m_1q^{-1} + \dots + m_{n+d+1}q^{-1} \\ \mathbf{h}^T &= [d_0 \quad d_1 \quad \dots \quad d_{n-1+n_p} \quad m_0 \quad m_1 \quad \dots \quad m_{n+d-1} \quad c_1 \quad \dots \quad c_n] \\ \mathbf{h}^T(k) &= [y(k) \quad \dots \quad y(k-n-n_p+1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-n-d+1)] \end{aligned}$$

$$- (k + d - 1 / k - 1) \dots - \hat{\wedge}(k + d - n / k - n)]$$

采用带有遗忘因子 的渐消记忆递推最小二乘估计法,可得到对于 的估计

$$\hat{\wedge}_k = \hat{\wedge}_{k-1} + \mathbf{K}_k [y(k) - \mathbf{h}^T(k-d) \hat{\wedge}_{k-1}] \quad (15.59)$$

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1} \mathbf{h}(k-d)}{\mathbf{h}^T(k-d) \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{h}(k-d)} \quad (15.60)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{h}^T(k-d) \mathbf{P}_{k-1}] \quad (15.61)$$

在广义最小方差自校正控制的每一步中,根据式(15.59) ~ 式(15.61)得到关于 的估计值  $\hat{\wedge}_k$  后,再由式(15.58)即可得出  $\hat{\wedge}(k+d/k)$ ,代入式(15.47)即得广义最小方差自校正控制。具体的计算步骤为:

广义最小方差自校正控制器算法 1

(1) 在第  $k$  个采样时刻,读取采样数据  $y(k)$ ,  $w(k)$ 。

(2) 根据  $y(k-d), \dots, y(k-n-n_p+1-d)$ ,  $u(k-d), \dots, u(k-n-2d+1)$ , 以及关于  $(k)$  的最优预测值的历史数据  $\hat{\wedge}(k-1/k-1-d), \dots, \hat{\wedge}(k-n/k-n-d)$  等构造数据向量  $\mathbf{h}(k-d)$ 。

(3) 利用式(15.59) ~ 式(15.61) 计算关于参数 的最新估计  $\hat{\wedge}_k$

(4) 根据式(15.58), 计算  $\hat{\wedge}(k+d/k) = \mathbf{h}^T(k) \hat{\wedge}_k$

(5) 根据式(15.47) 得出广义最小方差控制所对应的  $u(k)$

在每一个采样周期内重复以上步骤。

第二种算法中的控制律是通过受控对象的输出反馈来实现的,即它基于控制律式(15.54)式。和类似推导最小方差自校正控制的隐式算法中所采取的步骤一样,我们首先将广义输出的最优预测模型式(15.52) 写成

$$\hat{\wedge}(k+d/k) = (q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) + (q^{-1})w(k) + [1 - C(q^{-1})]\hat{\wedge}(k+d/k) \quad (15.62)$$

若  $C(q^{-1}) = 1$ , 则上式可写成线性回归的形式:

$$\begin{aligned} \hat{\wedge}(k+d/k) &= (q^{-1})y(k) + (q^{-1})u(k) + (q^{-1})w(k) \\ &= \mathbf{h}^T(k) \end{aligned} \quad (15.63)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^T(k) &= [0 \quad 1 \quad \dots \quad n-1+n_p \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad n+d-1 \quad r_0 \quad r_1 \quad \dots \quad r_{n+n_r}] \\ &= [y(k) \quad \dots \quad y(k-n-n_p+1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-n-d+1) \\ &\quad w(k) \quad \dots \quad w(k-n-n_r)] \end{aligned}$$

$n_r$  为  $R(q^{-1})$  的阶次。对式(15.63)中的 可以采用渐消记忆的递推最小二乘法等递推辨识算法进行估计。因为

$$\begin{aligned} (k+d) &= \hat{\wedge}(k+d/k) + \text{珙}(k+d/k) \\ &= \mathbf{h}^T(k) + \text{珙}(k+d/k) \\ &= \mathbf{h}^T(k) + E(q^{-1})e(k+d) \end{aligned}$$

其中  $E(q^{-1})e(k+d)$  与  $\mathbf{h}^T(k)$  中各项均是不相关的,因此,参数估计是无偏的。

若  $C(q^{-1}) \neq 1$ , 则定义参数向量

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^T(k) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad r_0 \quad \dots \quad r_{n+n_r} \quad c_1 \quad \dots \quad c_n] \\ &\quad [y(k) \quad \dots \quad y(k-n-n_p+1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-n-d+1) \quad w(k) \\ &\quad \dots \quad w(k-n-n_r) \quad \hat{\lambda}(k+d-1/k-1) \quad \dots \quad \hat{\lambda}(k+d-n/k-n)] \end{aligned}$$

同样可以将式(15.62) 写成线性回归形式

$$\hat{\lambda}(k+d/k) = \mathbf{h}^T(k) \quad (15.64)$$

但这时若采用最小二乘法实现对参数  $\lambda$  的估计, 则估计的结果往往是有偏的。但是 Clark 和 Gawthrop 已经证明, 只要参数估计是收敛的, 自校正控制律就会渐近地趋向于最优控制律。这一结果与最小方差自校正控制的情况是一样的。

综上所述, 可得这种自校正控制算法步骤为

广义方差自校正控制器算法 2

(1) 在第  $k$  个采样时刻, 读取采样数据  $y(k)$ ,  $w(k)$

(2) 构造数据向量  $\mathbf{h}(k-d)$

(3) 根据式(15.49) 和式(15.45) 计算广义输出:

$$\hat{\lambda}(k) = P(q^{-1})y(k) + Q(q^{-1})u(k-d) - R(q^{-1})w(k-d)$$

(4) 利用渐消记忆的递推最小二乘算法估计参数向量  $\hat{\lambda}_k$

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_{k-1} + \mathbf{K}_k[\hat{\lambda}(k) - \mathbf{h}^T(k-d)\hat{\lambda}_{k-1}] \quad (15.65)$$

其中,  $\mathbf{K}_k$  和  $\mathbf{P}_k$  分别由式(15.60) 和式(15.61) 确定。

(5) 根据  $\hat{\lambda}_k$  立即可得广义最小方差自校正控制律

$$u(k) = \frac{-1}{0} \sum_{j=0}^{n-1+n_p} y(k-j) + \sum_{j=0}^{n+n_r} r_j w(k-j) + \sum_{j=1}^{n+d-1} j u(k-j) \quad (15.66)$$

对每一个采样周期内重复以上步骤。

虽然广义最小方差自校正控制可以用于非最小相位系统的控制, 但在实际工程应用中, 如何适当选择  $Q(q^{-1})$  仍存在一定的困难。当  $Q(q^{-1})$  取得太小时, 广义最小方差控制就接近于最小方差控制, 难以保证闭环系统的稳定性。若  $Q(q^{-1})$  选得太小时, 则有可能限制了控制作用, 使得系统几乎在开环情况下运行, 达不到最小方差控制的目的。因此, 人们近年来还在不断地探讨新的算法。

## § 15.3 极点配置自校正控制

前面所介绍的自校正控制器的设计方法都是基于对某一性能指标的优化。其中最小方差调节器的性能指标是输出的方差, 广义最小方差控制器的性能指标是输出与控制的二次函数。在前面的章节中, 我们阐明了极点配置作为控制器设计的一个基本方法, 它可以将闭环系统的极点配置在理想的位置, 从而保证系统具有较快的过渡过程时间, 并可以用来控制非最小相位系统。保持自适应控制中的自校正思想, 即在控制过程中不断地修改调节器的参数, 而控制的目标则是借用闭环极点配置的原理, 则构成了本节要叙述的极点配置自校正控制。

设受控对象的模型为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \lambda(k) \quad (15.67)$$

其中,  $y(k)$  和  $u(k)$  分别是系统的输出和输入,  $(k)$  为扰动。如果系统有纯滞后因子  $q^{-d}$ , 则可把它并入  $B(q^{-1})$  中。假定系统的参考输入为  $w(k)$ , 且要求系统从参考输入  $w(k)$  到理想的系统输出响应  $y_m(k)$  之间的关系满足

$$A_m(q^{-1})y_m(k) = B_m(q^{-1})w(k) \quad (15.68)$$

采用以下的控制器

$$R(q^{-1})u(k) = T(q^{-1})w(k) - S(q^{-1})y(k) \quad (15.69)$$

代入式(15.67) 可得闭环系统方程

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + B(q^{-1})S(q^{-1})}w(k) + \frac{R(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + B(q^{-1})S(q^{-1})}(k) \quad (15.70)$$

为了获得所希望的输入—输出动态特性, 下列条件必须成立

$$\frac{B(q^{-1})T(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + B(q^{-1})S(q^{-1})} = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (15.71)$$

将多项式  $B(q^{-1})$  分解成

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \quad (15.72)$$

其中,  $B^+(q^{-1})$  是  $B(q^{-1})$  中稳定的和阻尼良好的零点所对应的因子组成的首 1 多项式。这些零点可以与控制器的极点相对消而不影响闭环系统的渐近稳定性。既然  $B^+(q^{-1})$  被对消, 所以它必为闭环特征多项式的因子。闭环特征多项式的其它因子应该是  $A_m(q^{-1})$  和  $A_0(q^{-1})$ , 其中  $A_0(q^{-1})$  是指定的观测器多项式, 它也是一个稳定的多项式。综合以上考虑, 可以得到以下形式的 Diophantine 方程

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + B(q^{-1})S(q^{-1}) = A_0(q^{-1})A_m(q^{-1})B^+(q^{-1}) \quad (15.73)$$

因为  $A(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  互质, 根据 Diophantine 方程的性质知  $B^+(q^{-1})$  应能整除  $R(q^{-1})$ , 因此根据式(15.73) 有:

$$R(q^{-1}) = R_1(q^{-1})B^+(q^{-1}) \quad (15.74)$$

$$A(q^{-1})R_1(q^{-1}) + B^-(q^{-1})S(q^{-1}) = A_0(q^{-1})A_m(q^{-1}) \quad (15.75)$$

解以上 Diophantine 方程, 即可实现闭环极点配置。为了使控制律式(15.69) 为物理可实现的, 若式(15.74) 和式(15.75) 的解  $R(q^{-1})$  和  $S(q^{-1})$  具有形式

$$R(q^{-1}) = q^{-l}(r_l + r_{l+1}q^{-1} + \dots + r_n q^{-(n-r-l)})$$

$$S(q^{-1}) = -q^{-m}(s_m + s_{m+1}q^{-1} + \dots + s_n q^{-(n-s-m)})$$

则必须成立  $l \leq m$ 。

极点配置自校正控制的算法也有显式算法和隐式算法两种形式。显式算法是最直观的方法, 它在每一个采样周期内先估计式(15.67) 中各参数, 然后通过解 Diophantine 方程得到控制器的参数, 最后计算本采样时刻的控制量  $u(k)$ 。具体步骤为

极点配置自校正控制显式算法

(1) 利用适合的闭环递推估计算法, 估计受控对象模型式(15.67) 中的各个参数  $\hat{A}(q^{-1})$  和  $\hat{B}(q^{-1})$ 。

(2) 利用第 1 步所得到的估计值, 将  $\hat{B}(q^{-1})$  分解成  $\hat{B}^-(q^{-1})\hat{B}^+(q^{-1})$ , 求解方程

$$\hat{A}(q^{-1}) R_1(q^{-1}) + \hat{B}^-(q^{-1}) S(q^{-1}) = A_0(q^{-1}) A_m(q^{-1})$$

得到  $R_1(q^{-1})$  和  $S(q^{-1})$  后, 根据

$$R(q^{-1}) = B^+(q^{-1}) R_1(q^{-1})$$

得出  $R(q^{-1})$ , 由

$$T(q^{-1}) = A_0(q^{-1}) B_m(q^{-1}), \quad B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1}) B_m(q^{-1}) \text{ 算出 } T(q^{-1}).$$

(3) 根据式(15.69) 算出控制信号  $u(k)$

在每个采样周期内重复以上各步。

以上显式算法在具体应用中可能会遇上一些困难。首先是由于控制器的参数与受控对象的参数估计值之间的关系实际上是一个很复杂的关系, 因此, 关于该算法所构成的闭环系统的稳定性的分析比较困难, 只能在个别的情况下可以对这种算法进行稳定性分析。其次, 在当被估计的对象模型有重合的极点和零点时, 以极点配置为基础的设计方法就会出现奇异点。所以在求解极点配置设计问题之前, 应把公共的极点和零点消去。

为保证参数估计收敛到真值, 模型结构必须正确, 过程输入必须持续激励, 系统必须满足闭环可辨识条件。

极点配置自校正控制的另一类算法是隐式算法, 它要求将过程模型重新参数化。为此, 将式(15.75) 两边同乘以  $y(k)$  得

$$\begin{aligned} A_0(q^{-1}) A_m(q^{-1}) y(k) &= R_1(q^{-1}) A(q^{-1}) y(k) + B^-(q^{-1}) S(q^{-1}) y(k) \\ &= R_1(q^{-1}) [B(q^{-1}) u(k) + (k)] + B^-(q^{-1}) S(q^{-1}) y(k) \\ &= B^-(q^{-1}) [R(q^{-1}) u(k) + S(q^{-1}) y(k)] + R_1(q^{-1}) (k) \end{aligned}$$

即

$$A_0(q^{-1}) A_m(q^{-1}) y(k) = R^*(q^{-1}) u(k) + S^*(q^{-1}) y(k) + R_1(q^{-1}) (k) \quad (15.76)$$

其中

$$\begin{aligned} R^*(q^{-1}) &= B^-(q^{-1}) R(q^{-1}) \\ S^*(q^{-1}) &= B^-(q^{-1}) S(q^{-1}) \end{aligned}$$

显然,  $R^*(q^{-1})$  和  $S^*(q^{-1})$  之间有一个公因子, 在计算控制律之前应把它消去。极点配置自校正控制的隐式算法可以归纳如下:

极点配置自校正控制隐式算法

(1) 采用参数估计的方法, 估计式(15.76) 中的多项式  $R^*(q^{-1})$  和  $S^*(q^{-1})$ 。

(2) 根据上一步所得的估计值  $\hat{R}^*(q^{-1})$  和  $\hat{S}^*(q^{-1})$ , 对消它们之间可能存在的公因子, 得到  $R(q^{-1})$  和  $S(q^{-1})$ 。

(3) 根据式(15.69), 算出控制信号  $u(k)$ 。

在每个采样周期, 重复以上各步骤。

在以上算法中, 由于  $B^-(q^{-1})$  的原因, 被估计的参数的数目大于所需要估计的参数数目。

并且在其第 2 步中求  $\hat{R}^*(q^{-1})$  和  $\hat{S}^*(q^{-1})$  的公因子的计算工作量也较大。

对于以随机扰动为主的调节器问题, 若采用自校正控制, 通常最简单有效的方法是最小方差和广义最小方差控制策略。若遇到非最小相位的受控对象, 最小方差控制策略有可能产生不稳定, 这时可采用极点配置控制。它虽不能获得最小方差调节, 但可获得较佳的动态响应和稳



定性。而对确定性的伺服跟踪问题,极点配置控制方法直观、简单,并有很好的动态响应,因而目前获得较广泛的应用。

## 习 题

15.1 考虑受控对象

$$(1 + 5q^{-1} + 7q^{-2} + 8q^{-3} + 9q^{-4})y(k) = (1 + 3q^{-1} + q^{-2} + 3q^{-3} + 2q^{-4})u(k) + (1 - 5q^{-1})e(k)$$

试问能否对该对象采用最小方差控制?为什么?

15.2 设有一受控对象为

$$y(k) - 1.3y(k-1) + 0.4y(k-2) = u(k-2) + 0.5u(k-3) + e(k) - 0.65e(k-1) + 0.1e(k-2)$$

其中,  $e(k)$  是零均值, 方差为 0.1 的白噪声。试设计该系统的最小方差控制器, 并计算其输出方差。

15.3 设受控对象为

$$(1 + a_1q^{-1} + a_2q^2)y(k) = q^{-2}(b_0 + b_1q^{-1})u(k) + (1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2})e(k)$$

设各系数  $a_1, a_2, b_0, b_1, c_1, c_2$  等未知, 试设计它的最小方差自校正控制器。利用题 15.2 的受控对象模型, 在计算机上对所设计的最小方差校正控制器进行仿真实验, 并绘出  $y(k)$  和  $u(k)$  的曲线。

15.4 设受控对象的 ARMAX 模型为:

$$(1 - 1.8q^{-1} + 0.8q^{-2})y(k) = 0.8u(k-5) + (1 - 0.6q^{-1})e(k)$$

取加权多项式  $P(q^{-1}) = 1 - 0.1086q^{-1}, R(q^{-1}) = 0.891,$

$$Q(q^{-1}) = 0.6262 + 0.4141q^{-1} + 0.2444q^{-2} + 0.1086q^{-3},$$

试设计它的广义最小方差控制器。

15.5 设受控对象的 ARMAX 模型为:

$$(1 - 1.2q^{-1} + 0.35q^{-2})y(k) = (0.5q^{-2} - 0.8q^{-3})u(k) + (1 - 0.95q^{-1})e(k)$$

设性能指标为:

$$J = E\{[y(k+1) - w(k)]^2 + Qu^2(k)\}$$

试确定权系数  $Q$  的范围, 并设计广义最小方差控制律。

15.6 试针对题 15.3 所示的受控对象模型[假定参考输入  $w(k) = 0$ ], 设计广义最小方差自校正控制律。

15.7 考虑受控对象模型

$$(1 - 0.8q^{-1})y(k) = q^{-1}(1 + 1.5q^{-1})u(k) + e(k)$$

取  $A_m(q^{-1}) = (1 - 0.6q^{-1})$ , 试设计它的极点配置调节器, 并进行相应的极点配置自校正控制仿真实验。实验时给定信号为周期方波信号。

## 参 考 文 献

1 韩曾晋编著. 自适应控制. 北京: 清华大学出版社, 1995.  
2 李清泉编著. 自适应控制系统理论、设计与应用. 北京: 科学出版社, 1990.

- 3 Astr m K J, Wittenmark B .Adaptive control .Workingham:Addison - Wesley,1989 .
- 4 冯纯伯,史维编著 .自适应控制 北京:电子工业出版社,1986 .
- 5 Goodwin G C, Sin K S .Adaptive filtering prediction and control .Englewood Cliffs:Prentice - Hall,1984 .
- 6 Landau I D .Adaptive control - the model reference approach .New York:Marcel Dekker Inc .,1983 .
- 7 Narendra K S, Annaswamy A M .Stable adaptive systems .Englewood Cliffs:Prentice - Hall,1989 .
- 8 Popov V M .Hyperstability of control systems .New York:Springer - Verlag,1973 .
- 9 Sastry S, Bodson M .Adaptive control - stability, convergence and robustness .Englewood Cliffs: Prentice - Hall, 1983 .
- 10 Lindoff D P, Corroll R L .Survey of adaptive control using Liapunov design .Int J .control,1973 ,18:897 ~ 914 .
- 11 Corroll R L .New adaptive algorithms in Liapunov synthesis .IEEE Trans .Automat .Contr .,1976 ,21:246 ~ 249 .
- 12 Hang C C, Parks P C .Comparative studies of model reference adaptive systems, IEEE Trans Automat .Contr ., 1973 ,18:419 ~ 428 .
- 13 Landau I D .Combining model referenve adaptive controllers and stochastic self - tuning regulators Automatica, 1982,18(1):77 ~ 84 .
- 14 Astr m K J .Self - tuning regulator design principles and application .New York:Academic Press .1980 .
- 15 Astr m K J .Theory and application of adaptive control - A survey .Automatica,1983 ,19(3):471 ~ 486 .
- 16 Astr m K J, Wittenmark B .On self - tuning regulators Automatica,1973,9:185 ~ 199 .
- 17 Clark D W, Gawthrop P J Self - tuning controller .proc .IEEE,1975 ,122(9):929 ~ 934 .
- 18 Astr m K J, Wittenmark B .Self - tuning controllers based on pole - zero placement .Proc IEEE,1980 ,127(1): 120 ~ 130 .
- 19 Astr m K J, Hagander P, Sternby .Zeros of sampled systems Automatica,1984,20(1):31 ~ 38 .
- 20 Astr m K J, Witternmark B .Computer controlled systems - theory and design .Englewood Cliffs:Prentice - Hall, 1984 .

## 附录 向量与矩阵的导数

在自动控制理论中常会遇到函数和自变量是向量或矩阵的情况,我们在此介绍一些向量、矩阵的求导运算的部分内容。

当矩阵(或向量)的元素中至少有一个是自变量的函数时,就构成函数矩阵(向量)。若函数矩阵(向量)中的每一个元素都是连续可微的,则称该矩阵(向量)具有连续可微性。本附录中所涉及的函数矩阵(向量)都是连续可微的。

### 1. 向量和矩阵对标量的导数

若列向量  $\mathbf{z}(t)$  和矩阵  $\mathbf{F}(t)$  都是标量  $t$  的函数,则

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dz_1(t)}{dt} & \frac{dz_2(t)}{dt} & \cdots & \frac{dz_m(t)}{dt} \end{bmatrix}^T \\ \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{df_{11}(t)}{dt} & \frac{df_{12}(t)}{dt} & \cdots & \frac{df_{1n}(t)}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_{m1}(t)}{dt} & \frac{df_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \frac{df_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中  $z_i(t)$  是  $\mathbf{z}(t)$  的第  $i$  分量,  $f_{ij}(t)$  是  $\mathbf{F}(t)$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素。根据以上定义,显然成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{F}(t) \pm \mathbf{G}(t)] &= \frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) \pm \frac{d}{dt}\mathbf{G}(t) \\ \frac{d\mathbf{F}(t)\mathbf{G}(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt}\mathbf{G}(t) + \mathbf{F}(t)\frac{d\mathbf{G}(t)}{dt} \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{F}(t)$  和  $\mathbf{G}(t)$  是适当维数的矩阵。

### 2. 标量对向量的导数

多元函数  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是以列向量  $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  为自变量的标量函数。定义  $f(\mathbf{x})$  对列向量自变量  $\mathbf{x}$  的导数为:

$$\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{f}{x_1} & \frac{f}{x_2} & \cdots & \frac{f}{x_n} \end{bmatrix}^T$$

它也称为  $f$  对  $\mathbf{x}$  的梯度,记为  ${}_x f(\mathbf{x})$  或  $\text{grad } f(\mathbf{x})$ 。若  $f(\mathbf{x})$  和  $g(\mathbf{x})$  均是相应于列向量  $\mathbf{x}$  的标量函数,成立:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})] &= \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \pm \frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \\ \frac{d}{d\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] &= \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\frac{dg(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \end{aligned}$$

### 3. 向量对向量的导数

设  $m$  维列向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \ f_2(\mathbf{x}) \ \dots \ f_m(\mathbf{x})]^T$  是  $n$  维列向量变量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  的函数向量。定义  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  对其列向量自变量  $\mathbf{x}$  的导数为:

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n} \\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f_m}{x_1} & \frac{f_m}{x_2} & \cdots & \frac{f_m}{x_n} \end{matrix}$$

它是一个  $(m \times n)$  维矩阵, 称为雅可比 (Jacobi) 阵。另方面, 也可以定义  $m$  维行向量函数  $\mathbf{f}^T(\mathbf{x})$  对  $n$  维列向量自变量  $\mathbf{x}$  的导数为:

$$\frac{d\mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_2}{x_1} & \cdots & \frac{f_m}{x_1} \\ \frac{f_1}{x_2} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_m}{x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{f_1}{x_n} & \frac{f_2}{x_n} & \cdots & \frac{f_m}{x_n} \end{matrix}$$

它是一个  $(n \times m)$  维矩阵。显然成立:

$$\frac{d\mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \left( \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right)^T$$

设  $m$  维向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  均是  $n$  维向量自变量  $\mathbf{x}$  的函数, 则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{g}(\mathbf{x})] &= \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \pm \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \\ \frac{d}{d\mathbf{x}}[\mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})] &= \frac{d\mathbf{f}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \frac{d\mathbf{g}^T(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

#### 4. 标量对向量的二阶导数

设  $f(\mathbf{x})$  是  $n$  维列向量  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  的标量函数, 则  $f(\mathbf{x})$  关于  $\mathbf{x}$  的二阶导数为一矩阵, 定义为

$$\frac{d^2 f(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} = \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{matrix}$$

#### 5. 复合函数的导数

设标量函数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  是  $n$  维向量函数  $\mathbf{x}(t)$  和  $m$  维向量函数  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  的复合函数, 其中  $m$  维向量函数  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  是  $n$  维向量函数  $\mathbf{x}(t)$  的函数。通过直接推导, 可以得到以下复合函数的求导公式:

$$\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{d\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{y}^T(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}} \frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{y}} + \frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned}\frac{df(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{dt} &= \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{y}^T(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}} \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{y}}^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &+ \frac{f^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{t}\end{aligned}$$

设  $r$  维向量函数  $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  是  $n$  维向量函数  $\mathbf{x}(t)$  和  $m$  维向量函数  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  的复合函数, 其中  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  和  $\mathbf{x}(t)$  同前所定义。则有:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{d\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{x}} \\ \frac{d\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{dt} &= \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)}{t} \\ &+ \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{t}\end{aligned}$$

## 6. 台劳展开

设标量函数  $f(\mathbf{x})$  是  $n$  维向量函数  $\mathbf{x}$  的函数,  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0$  附近有 2 阶连续偏导数。利用前面所定义的符号, 可以将  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}_0$  附近的台劳展开表达式写成

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{f^T(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &+ \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \frac{f^2(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x}^2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

其中  $R(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  是台劳展开式中的余项。