偏微分方程数值解第一次作业

计算数学 匡昱潼 202221130109

2023 年 3 月 14 日

1 书面作业

1. 推导九点差分格式, 并证明它的逼近精度为四阶.

方法一 (待定系数法):

证明. 我们可以采用待定系数法来推导九点差分格式, 首先将各项在 (x_i, y_j) 点 Taylor 展开到四阶 (如果要严格证明九点差分格式的逼近精度为四阶, 则此种方法需要展开到六阶, 但过于繁琐, 本文将在方法二给出一种更好的方法). 为了表述方便, 仅展示 $u_{i+1,j}, u_{i+1,j+1}$ 两项:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \partial_x u_{i,j} h + \frac{1}{2}\partial_{xx} u_{i,j} h^2 + \frac{1}{6}\partial_{xxx} u_{i,j} h^3 + \frac{1}{24}\partial_{xxxx} u_{i,j} h^4 + o(h^4)$$

$$\begin{aligned}
u_{i+1,j+1} &= u_{i,j} + [(\partial_x + \partial_y)u]_{i,j} h + \frac{1}{2}[(\partial_x + \partial_y)^2 u]_{i,j} h^2 + \frac{1}{6}[(\partial_x + \partial_y)^3 u]_{i,j} h^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}[(\partial_x + \partial_y)^4 u]_{i,j} h^4 + o(h^4) \\
&= u_{i,j} + \partial_x u_{i,j} h + \partial_y u_{i,j} h + \frac{1}{2!}\partial_{xx} u_{i,j} h^2 + \frac{2}{2!}\partial_{xy} u_{i,j} h^2 + \frac{1}{2!}\partial_{yy} u_{i,j} h^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\partial_{xxx} u_{i,j} h^3 + \frac{3}{3!}\partial_{xxy} u_{i,j} h^3 + \frac{3}{3!}\partial_{xyy} u_{i,j} h^3 + \frac{1}{3!}\partial_{yyy} u_{i,j} h^3 + \\
&\quad \frac{1}{4!}\partial_{xxxx} u_{i,j} h^4 + \frac{4}{4!}\partial_{xxxy} u_{i,j} h^4 + \frac{6}{4!}\partial_{xxyy} u_{i,j} h^4 + \frac{4}{4!}\partial_{xyyy} u_{i,j} h^4 \\
&\quad + \frac{1}{4!}\partial_{yyyy} u_{i,j} h^4 + o(h^4)
\end{aligned}$$

在原方程中, 我们有:$(-\triangle u)_{i,j} = f_{i,j}$. 对两端再进行一次 *Laplace* 运算, 得到:

$$-(\partial_{xxxx} u_{i,j} + 2\partial_{xxyy} u_{i,j} + \partial_{yyyy} u_{i,j}) = \triangle f_{i,j}$$

为了得到收敛阶数为 $O(h^4)$ 的格式, 我们需要让 $\triangle f_{i,j}$ 与 4 阶导数项抵消, 由待定系数法, 可设差分方程左端为:

$$\begin{aligned}
-(k_1 U_{i+1,j+1} + k_2 U_{i+1,j-1} + k_3 U_{i-1,j+1} + k_4 U_{i-1,j-1} + k_5 U_{i,j} \\
+ k_6 U_{i+1,j} + k_7 U_{i-1,j} + k_8 U_{i,j+1} + k_9 U_{i,j-1})
\end{aligned}$$

将各项的 *Taylor* 展开代入, 按照各阶导数消去的关系 (注意, 并不是全都为 0, 有的导数需要让其存在与 $f_{i,j}, \triangle f_{i,j}$ 相抵消), 得到如下九点

差分格式:

$$\frac{20U_{i,j}-4U_{i+1,j}-4U_{i-1,j}-4U_{i,j+1}-4U_{i,j-1}-U_{i+1,j+1}-U_{i+1,j-1}-U_{i-1,j+1}-U_{i-1,j-1}}{6h^2}$$
$$= f_{i,j}+\tfrac{h^2}{12}\triangle f_{i,j}$$

但注意到这种方法只是凑出了九点差分法的系数, 并没有本质上证明这是一个 4 阶的格式 (这需要展开到 6 阶), 因此下面给出一种更好的方法. □

方法二:

证明. 我们从五点差分格式出发构造九点差分格式. 对于五点差分格式 L_h, 在计算其截断误差的时候, 需要将 $L_h u_{i,j}$ 的每一项在 (x_i, y_j) 点 $Taylor$ 展开, 我们有:

$$\begin{aligned} L_h u_{i,j} &= \triangle u_{i,j} + \frac{1}{12}h^2(\partial_{xxxx}u_{i,j} + \partial_{yyyy}u_{i,j}) + O(h^4) \\ &= -f_{i,j} + \frac{1}{12}h^2(\partial_{xx}+\partial_{yy})(\partial_{xx}u_{i,j}+\partial_{yy}u_{i,j}) - \frac{1}{6}h^2\partial_{xxyy}u_{i,j} \\ &\quad +O(h^4) \\ &= -f_{i,j} - \frac{h^2}{12}\triangle f_{i,j} - \frac{1}{6}h^2\partial_{xxyy}u_{i,j} + O(h^4) \end{aligned} \tag{1}$$

现在的关键是 $\frac{1}{6}h^2\partial_{xxyy}u_{i,j}$ 这一项, 我们将 $\partial_{xxyy}u_{i,j}$ 看作 $(\frac{\partial^2\partial_{xx}u}{\partial y^2})_{i,j}$, 通过二阶中心差分展开:

$$\partial_{xxyy}u_{i,j} = \frac{\partial_{xx}u_{i,j+1} - 2\partial_{xx}u_{i,j} + \partial_{xx}u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{2}$$

并且, 再对 $\partial_{xx}u_{i,j+1}, \partial_{xx}u_{i,j}, \partial_{xx}u_{i,j-1}$ 三项应用二阶中心差分, 我们有:

$$\partial_{xx}u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\partial_{xxxx}u_{i,j+1} + O(h^4) \tag{3}$$
$$\partial_{xx}u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\partial_{xxxx}u_{i,j} + O(h^4) \tag{4}$$
$$\partial_{xx}u_{i,j-1} = \frac{u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12}\partial_{xxxx}u_{i,j-1} + O(h^4) \tag{5}$$

将 (3) − (5) 式带入 (2), 得到:

$$\begin{aligned} \partial_{xxyy}u_{i,j} &= \frac{1}{h^4}[4u_{i,j} - 2u_{i,j+1} - 2u_{i,j-1} - 2u_{i+1,j} - 2u_{i-1,j} \\ &\quad +u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}] - \\ &\quad \frac{1}{12}[\partial_{xxxx}u_{i,j+1} - 2\partial_{xxxx}u_{i,j} + \partial_{xxxx}u_{i,j-1}] + O(h^2) \end{aligned} \tag{6}$$

再将 $\partial_{xxxx}u_{i,j+1}, \partial_{xxxx}u_{i,j-1}$ 两式在 (x_i, y_j) 点 $Taylor$ 展开, 有:

$$\partial_{xxxx}u_{i,j+1} - 2\partial_{xxxx}u_{i,j} + \partial_{xxxx}u_{i,j-1} = h^2(\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2})_{i,j} + O(h^4) \tag{7}$$

将 (7) 式带入 (6) 式, 有:

$$\begin{aligned}\partial_{xxyy}u_{i,j} &= \frac{1}{h^4}[4u_{i,j} - 2u_{i,j+1} - 2u_{i,j-1} - 2u_{i+1,j} - 2u_{i-1,j} \\ &\quad + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}] + O(h^2)\end{aligned} \tag{8}$$

将 (8) 式带入 (1) 式, 得到:

$$\begin{aligned}L_h u_{i,j} &= -f_{i,j} - \frac{h^2}{12}\triangle f_{i,j} - \frac{1}{6h^2}[4u_{i,j} - 2u_{i,j+1} - 2u_{i,j-1} - 2u_{i+1,j} \\ &\quad -2u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}] + O(h^4)\end{aligned} \tag{9}$$

将 (9) 式整理, 我们得到了具有 4 阶精度的九点差分格式:

$$\begin{aligned}&\frac{20U_{i,j} - 4U_{i+1,j} - 4U_{i-1,j} - 4U_{i,j+1} - 4U_{i,j-1} - U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1}}{6h^2} \\ &= f_{i,j} + \frac{h^2}{12}\triangle f_{i,j}\end{aligned} \tag{10}$$

记为 $-L_h^{(9)}U_{i,j}$. 并且由 (9) 可知,$-L_h^{(9)}U_{i,j}$ 的截断误差 $T_{i,j}$ 为:

$$T_{i,j} = L_h^{(9)}u_{i,j} + f_{i,j} + \frac{h^2}{12}\triangle f_{i,j} = O(h^4) \tag{11}$$

□

2. 证明书上 (1.3.23) 是 $O(h^1)$ 的.

证明. 即证明下列格式的收敛阶为 $O(h^1)$:

$$\begin{aligned}&-[\frac{2}{h_x + h_x^*}(\frac{U_{E^*} - U_P}{h_x^*} - \frac{U_P - U_W}{h_x}) \\ &+ \frac{2}{h_y + h_y^*}(\frac{U_{N^*} - U_P}{h_y^*} - \frac{U_P - U_S}{h_y})] = f_P\end{aligned} \tag{12}$$

其中各点的含义参考课本第 16 页图 1 − 1. 我们要验证:

$$L_h u_{i,j} + f_P = O(h^1) \tag{13}$$

其中 $-L_h$ 表示 (12) 式左端的差分格式. 下面我们将 $u_{E^*}, u_W, u_{N^*}, u_S$ 在 P 点 $Taylor$ 展开:

$$u_{E^*} = u_P + h_x^*(\frac{\partial u}{\partial x})_P + \frac{1}{2}(h_x^*)^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_P + \frac{1}{6}(h_x^*)^3(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_P + o((h_x^*)^3) \quad (14)$$

$$u_W = u_P - h_x(\frac{\partial u}{\partial x})_P + \frac{1}{2}(h_x)^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_P - \frac{1}{6}(h_x)^3(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_P + o((h_x)^3) \quad (15)$$

$$u_{N^*} = u_P + h_y^*(\frac{\partial u}{\partial y})_P + \frac{1}{2}(h_y^*)^2(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_P + \frac{1}{6}(h_y^*)^3(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3})_P + o((h_y^*)^3) \quad (16)$$

$$u_S = u_P - h_y(\frac{\partial u}{\partial y})_P + \frac{1}{2}(h_y)^2(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_P - \frac{1}{6}(h_y)^3(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3})_P + o((h_y)^3) \quad (17)$$

现在将 (14) − (17) 式带入 (13) 式左端进行运算, 有:

$$\begin{aligned} & L_h u_{i,j} + f_P \\ = & (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_P + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_P + \frac{1}{3}(h_x^* - h_x)(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_P \\ & + \frac{1}{3}(h_y^* - h_y)(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3})_P + o(h_x^* - h_x + h_y^* - h_y) + f_P \\ = & \frac{1}{3}(h_x^* - h_x)(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})_P + \frac{1}{3}(h_y^* - h_y)(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3})_P + o(h_x^* - h_x + h_y^* - h_y) \end{aligned}$$

从而格式 (12) 的收敛阶是 $O(h^1)$. □

2 上机作业-椭圆形方程

2.1 有精确解的 Dirichlet 边值问题

2.1.1 问题描述

考虑平面矩形区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 上的 *Poisson* 方程 *Dirichlet* 边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y) := 2 * \pi^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y), & \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = u_D(x,y) := \sin(\pi x)\cos(\pi y), & \forall (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

方程的精确解为 $u(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y)$, 下面采用五点差分法求解方程 (2.1).

2.1.2 五点差分格式

记 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 为平面上矩形区域. 在 x,y 方向上取空间步长 $\Delta x = \Delta y = h = 1/N$, 记 $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, (i,j = 0,1,2,\cdots,N)$. 由此定义的网格节点指标集为 $J = \{(i,j) : (x_i,y_j) \in \bar{\Omega}\}$. 记 *Dirichlet* 边界节点指标集为 $J_D = \{(i,j) : (x_i,y_j) \in \partial\Omega\}$, 内部节点指标集为 $J_\Omega = J \setminus J_D$. 将函数 u, f 和网格函数 U 在节点 (x_i,y_j) 上的取值分别记为 u_{ij}, f_{ij}, U_{ij}. 在不混淆的意义下, 我们将节点 (x_i,y_j) 简记为节点 (i,j).
分别用关于 x 和 y 的中心二阶差商近似二阶微商, 即

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \approx \partial_x^2 u, \quad \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} \approx \partial_y^2 u. \tag{2.2}$$

由此得到 Poisson 方程(2.1)的五点差分格式:

$$-L_h U_{ij} := \frac{4U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} - U_{i+1,j} - U_{i,j+1}}{h^2} = f_{i,j} \qquad \forall (i,j) \in J_\Omega. \tag{2.3}$$

根据边值问题 (2.1) 给出的 *Dirichlet* 边界条件, 我们有:

$$U_{i,j} = u_D(x_i,y_j) = \sin(\pi x_i)\cos(\pi y_j), \quad \forall (i,j) \in J_D. \tag{2.4}$$

将边界条件 (2.4) 代入差分格式 (2.3) 就得到差分逼近解 U 所应满足的 $(N-1) \times (N-1)$ 阶线性代数方程组.

2.1.3 求解线性方程组

将 (2.3) 式写成矩阵形式即为

$$T_{n-1}U + UT_{n-1} = h^2F + M, \tag{2.5}$$

其中

$$U = [U_{ij}], \quad F = [f_{ij}],$$

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(N-1)\times(N-1)}.$$

其中,U 为所要求得的数值解矩阵,F 为 $f(x, y)$ 在网格点上的取值,M 为代入的边界条件所组成的矩阵, 具有如下形式:

$$M = [m_{ij}] = \begin{bmatrix} u_{1,0} + u_{0,1} & u_{2,0} & \cdots & u_{N-2,0} & u_{N-1,0} + u_{N,1} \\ u_{0,2} & 0 & \cdots & 0 & u_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{0,N-2} & 0 & \cdots & 0 & u_{N,N-2} \\ u_{0,N-1} + u_{1,N} & u_{2,N} & \cdots & u_{N-2,N} & u_{N-1,N} + u_{N,N-1} \end{bmatrix}.$$

注意, 在这里我们为了使矩阵更贴合 Matlab 中 meshgrid 函数所得到的网格矩阵,i 代表矩阵元素的列,j 代表矩阵元素的行.

为了使之变为一个可以求解的线性方程组, 我们需要对 U, F 和 M 中的元素进行重排. 我们采取自然顺序排列, 即先按 j 由小到大排列,j 相同的按 i 由小到大排列.
例如 $N = 3$ 时, 将元素排列为 $\{u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{3,2}, u_{1,3}, u_{2,3}, u_{3,3}\}$, 对其重新编号, 就变为 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9\}$.

用自然顺序排列后得到的线性方程组具有如下的形状:

$$Au = h^2f + m, \tag{2.6}$$

其中,

$$A=\begin{bmatrix} T_{N-1}+2I_{N-1} & -I_{N-1} & & & \\ -I_{N-1} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -I_{n-1} \\ & & -I_{N-1} & T_{N-1}+2I_{N-1} \end{bmatrix}.$$

易知,A 是 $(N-1)^2$ 阶方阵. 如果顶点的排列次序变了,A 的形状也要改变,但可以证明 A 的特征值不变. 系数矩阵 A 具有以下几个特点:

- A 是块三对角矩阵, 共有五条对角线上有非零元素;
- A 是不可约对角占优的;
- A 是对称正定的, 而且是稀疏的.

由此, 问题 (2.6) 可以使用 $Jacobi$ 迭代法,$G-S$ 迭代法, 共轭梯度法进行求解. 容易验证 T_{N-1} 的特征值为 $\lambda_j=2(1-\cos\frac{j\pi}{N})$, 对应的单位特征向量为:

$$z_j=\left(\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{j\pi}{N},\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{2j\pi}{N},\cdots,\sqrt{\frac{2}{N}}\sin\frac{(N-1)j\pi}{N}\right)^{\mathrm{T}}.$$

利用 (2.5) 式, 可以推出 A 的特征值为:

$$\lambda_{pq}=\lambda_p+\lambda_q=2\left(2-\cos\frac{p\pi}{N}-\cos\frac{q\pi}{N}\right),$$

对应的特征向量 v_{pq} 为矩阵 $z_pz_q^T$ 按列" 拉直" 得到的 $(n-1)^2$ 维向量, 即

$$v_{pq}=\sqrt{\frac{2}{N}}\left(\sin\frac{q\pi}{N}z_p^{\mathrm{T}},\sin\frac{2q\pi}{N}z_p^{\mathrm{T}},\cdots,\sin\frac{(N-1)q\pi}{N}z_p^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

由以上分析, 我们可以得出, 若使用 Jacobi 迭代法计算问题 (2.6), 其迭代矩阵为 $B=I-\frac{1}{4}A$, 所以 B 的特征值为:

$$\mu_{pq}=1-\frac{1}{4}\lambda_{pq}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{p\pi}{N}+\cos\frac{q\pi}{N}\right),$$
$$p,q=1,\cdots,N-1.$$

于是 $\rho(B)=\cos\frac{\pi}{N}=\cos h\pi$, 这样我们就得到了用 $Jacobi$ 迭代法时的渐进收敛速度:

$$R_\infty(B)=-\ln\rho(B)=-\ln\cos h\pi\sim\frac{1}{2}\pi^2h^2,\quad h\to 0.$$

类似地分析,$G-S$ 迭代法在此问题上的渐进收敛速度为:

$$R_\infty\left(L_1\right)=-\ln\rho\left(L_1\right)=-2\ln\rho(B)\sim\pi^2h^2,\quad h\to 0.$$

2.1.4 差分格式的收敛性分析

记误差 $e=\{e_{i,j}\}=\{U_{i,j}-u_{i,j}\}$, 利用方程 (2.3) 可知:

$$-L_he_{i,j}=-L_hU_{i,j}+L_hu_{ij}=f_{i,j}+L_hu_{i,j}=-(Lu)_{i,j}+L_hu_{i,j}:=T_{i,j}.$$

$T_{i,j}$ 为差分格式(2.3)的局部截断误差. 将 $u(x,y)$ 在 (i,j) 点处 $Taylor$ 展开, 代入中心差商(2.2)得:

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}=\frac{\partial^2u(i,j)}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4u(i,j)}{\partial x^4}h^2+\frac{1}{360}\frac{\partial^6u(i,j)}{\partial x^6}h^4+O(h^6)\quad(2.7)$$
$$\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{h^2}=\frac{\partial^2u(i,j)}{\partial y^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4u(i,j)}{\partial y^4}h^2+\frac{1}{360}\frac{\partial^2u(i,j)}{\partial y^6}h^4+O(h^6)\quad(2.8)$$

将式 (2.7) 和 (2.8) 代入 $T_{i,j}$ 中可以得到:

$$T_{i,j}=\frac{1}{12}(\frac{\partial^4u(i,j)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4u(i,j)}{\partial y^4})h^2+O(h^4).\qquad(2.9)$$

由式 (2.9) 可知局部截断误差 $\|T_h\|_\infty=O(h^2)$. 据此我们称差分格式 (2.3) 具有相容性, 并且逼近精度是二阶的.

下面我们通过课本定理 1.4 和定理 1.5 来分析差分格式的收敛性. 我们记

$$\Phi(x,y)=\frac{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2}{4},$$

则不难验证 Φ 非负且满足:

$$L_h\Phi_{i,j}=1,\forall(i,j)\in J_\Omega,$$

并且

$$\max_{(i,j)\in J_D}\Phi_{i,j}=\frac{1}{8}.$$

显然我们有 L_h 满足定理 1.2 的条件 (1) 和 (2), 因此我们有

$$\|U_{i,j}\|_\infty \le \max_{(i,j)\in J_D} |u(i,j)| + \frac{1}{8}\max_{(i,j)\in J_\Omega} |f_{i,j}| \tag{2.10}$$

$$\|e\|_\infty \le \max_{(i,j)\in J_D} |e_{i,j}| + \frac{1}{8}\|T_h\|_\infty = \frac{1}{8}\|T_h\|_\infty. \tag{2.11}$$

由式 (2.10) 知差分格式在 $\mathbb{L}^\infty$ 范数意义下是稳定的.

由式 (2.11) 和式 (2.9) 可以得到

$$\|e\|_\infty = \max_{(i,j)} |e_{i,j}| \le Ch^2. \tag{2.12}$$

C 与 $\max_{(i,j)} \partial_x^4 u, \max_{(i,j)} \partial_y^4 u$ 相关. 故差分解在 $\mathbb{L}^\infty$ 意义下二阶收敛.

2.1.5 数值实验 1

图 2.1是 $N = 32, 128, 512$ 时求解差分方程 (2.6) 得到的数值解. 图 2.2 是当网格格数为 $N = 32, 128, 512$ 时 精确解的图像. 可以发现两图非常接近.

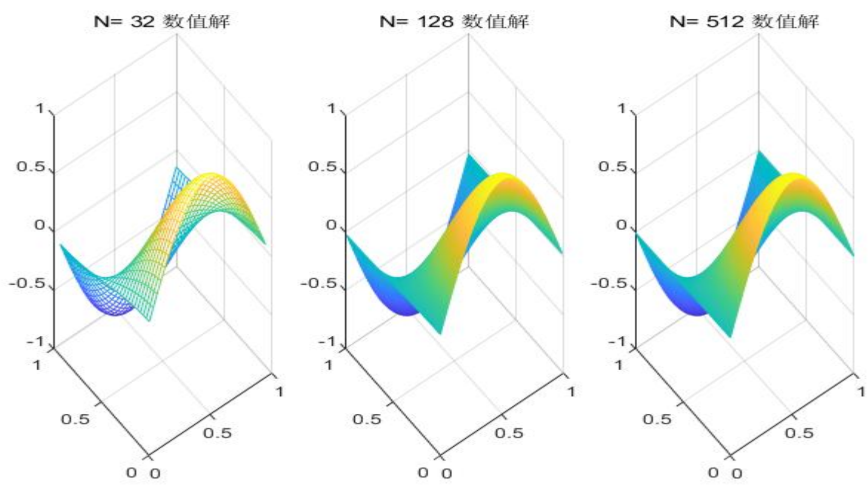

图 2.1: N = 32, 128, 512 时使用空间五点差分离散得到的数值解

表 2.1中, 可以看到随着 h 的减小 e 逐渐减小. 并且收敛阶 $\log_{\frac{h_2}{h_1}} \frac{\|e_{h_2}\|_\infty}{\|e_{h_1}\|_\infty} \approx 2$. 在图 2.3中可以看出 $\ln e$ 随 $\ln h$ 近似线性变化, 斜率约为 1.995, 符合式 (2.12) 的估计.

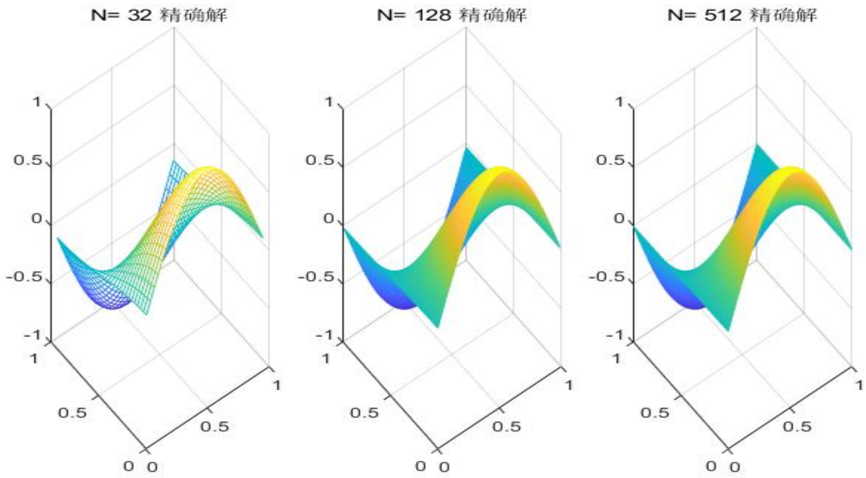

图 2.2: N = 32, 128, 512 时对应网格上的精确解

2.2 没有精确解的 Dirichlet 边值问题

2.2.1 问题描述

考虑平面矩形区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 上未知精确解的 *Poisson* 方程 *Dirichlet* 边值问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y) := (x^2+y^2)e^{x+y}, & \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = x^2+y^2, & \forall (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

方程 (2.13) 的精确解未知, 但是 Laplace 算子的离散和边界条件的处理都是相同的, 这里我们不再赘述.

2.2.2 数值实验 2

此时, 由于未知精确解, 我们通过后验误差估计来估计误差主项的阶. 首先, 我们知道

$$U_{h,j} = u_j + C_j h^\alpha + o(h^\alpha),$$

其中 C_j 是与 h 无关的网格函数,$\alpha > 0$ 是差分格式待定的误差主项的阶, 则我们有

$$U_{h,j} - U_{h/2,j} = (1-2^{-\alpha})C_j h^\alpha + o(h^\alpha).$$

表 2.1: 误差随 h 变化

空间步长 h	误差 e	收敛阶 $order(\log_{\frac{h_2}{h_1}}\frac{\|\|e_{h_2}\|\|_\infty}{\|\|e_{h_1}\|\|_\infty})$
$\frac{1}{4}$	$1.6989e^{-2}$	\
$\frac{1}{8}$	$4.2373e^{-3}$	2.00340621725972
$\frac{1}{16}$	$1.0697e^{-3}$	1.98599376809116
$\frac{1}{32}$	$2.7077e^{-4}$	1.98201087697368
$\frac{1}{64}$	$6.7693e^{-5}$	1.99999962651966
$\frac{1}{128}$	$1.6928e^{-5}$	1.99958547802008
$\frac{1}{256}$	$4.2326e^{-6}$	1.99981253275627
$\frac{1}{512}$	$1.0581e^{-6}$	1.99999334473163

因此, 当 h 充分小时, 我们有

$$||U_h - u|| \approx Ch^\alpha, \quad ||U_h - U_{h/2}|| \approx (1-2^\alpha)Ch^\alpha,$$

以上第二个式子两边取对数可得:

$$\ln ||U_h - U_{h/2}|| \approx \ln\big((1-2^{-\alpha}C)\big) - \alpha \ln h^{-1}. \tag{2.14}$$

这里 $||\cdot||$ 取极大范数.

在表格 2.2中, 我们看到随着 h 的增大 $||U_h - U_{h/2}||$ 是不断减小的. 在图 2.5中我们绘制了 $\ln ||U_{h/2} - U_h||$ 随 $\ln h$ 的变化曲线, 曲线斜率约为 1.9674, 根据式 (2.14) 可知收敛阶为二阶的, 符合理论分析.

表 2.2: 误差随 h 变化

空间步长 $h/2$	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
$\|\|U_h - U_{h/2}\|\|$	$2.14e^{-2}$	$6.26e^{-3}$	$1.60e^{-3}$	$4.03e^{-4}$	$1.01e^{-4}$	$2.52e^{-5}$	$6.31e^{-6}$

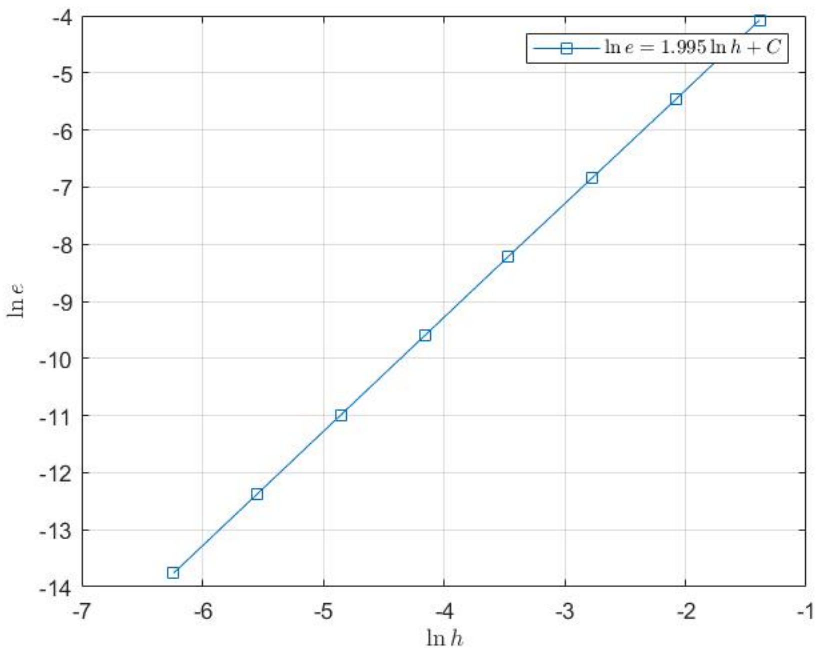

图 2.3: $\ln e$ 随 $\ln h$ 的变化

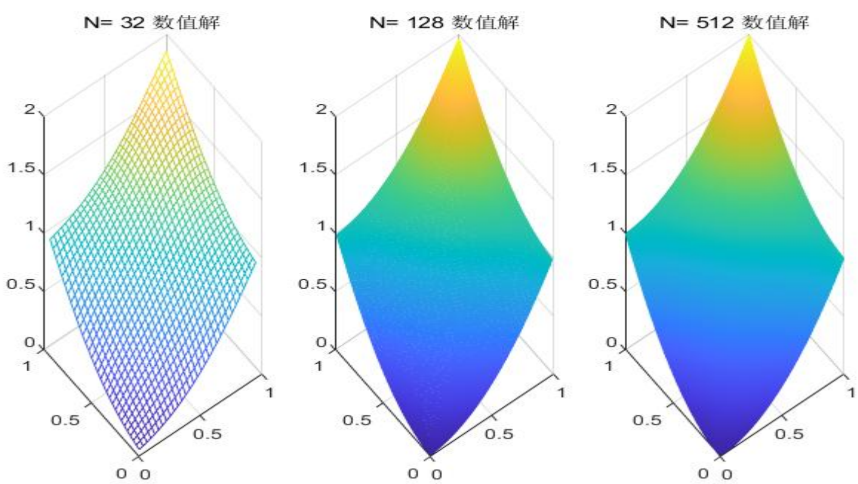

图 2.4: 未知初值情况下 N = 32, 128, 512 时使用空间五点差分离散得到的数值解

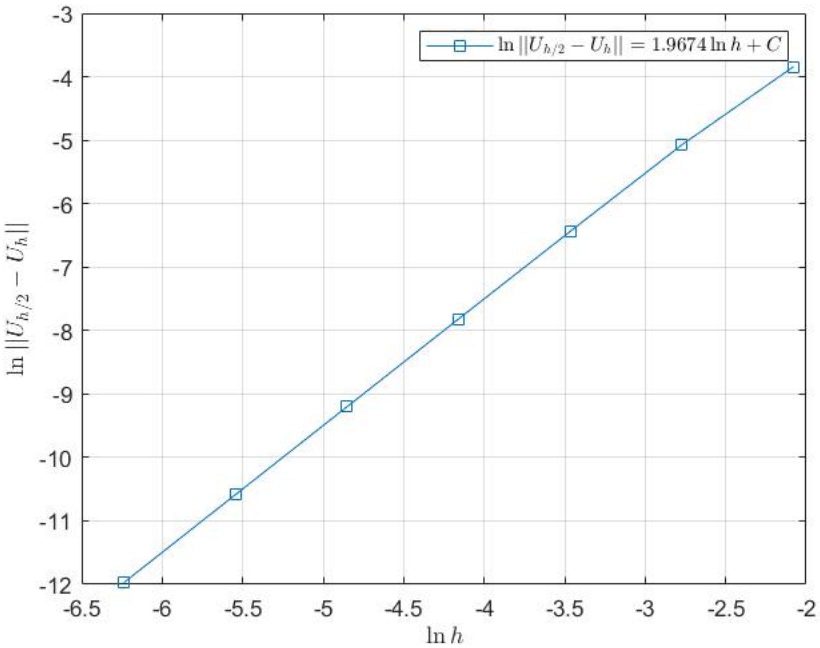

图 2.5: $\ln||U_{h/2}-U_h||$ 随 $\ln h$ 的变化