

# 偏微分方程数值解第三次作业

计算数学 匡昱潼 202221130109

2023 年 4 月 25 日

# 1 书面作业

1. 计算迎风格式, Lax-Wendroff 格式, Beam-Warming 格式的色散.

证明. 迎风格式的色散:

将离散 Fourier 波型  $U_j^m = \lambda_k^m e^{ikjh}$  带入迎风格式得到其增长因子为:

$$\lambda_k = (1 - |v|) + |v|e^{-\operatorname{sgn}(a)ikh}, \quad (1.1)$$

从而其相位移为:

$$\arg \lambda_k = -\operatorname{sgn}(a) \arctan \left[ \frac{|v| \sin kh}{(1 - |v|) + |v| \cos kh} \right]. \quad (1.2)$$

当  $kh \ll 1$ , 我们有:

$$\begin{aligned} |v| \cos kh &= |v| - \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4), \\ 1 - |v| + |v| \cos kh &= 1 - \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4). \end{aligned} \quad (1.3)$$

从而由(1.3)我们有:

$$\frac{1}{1 - |v| + |v| \cos kh} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4)}. \quad (1.4)$$

由  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$ , 将  $\frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4)$  视为  $x$ , 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - |v| + |v| \cos kh} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4) + O\left(\left(\frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}|v|k^2h^2 + O(k^4h^4). \end{aligned} \quad (1.5)$$

同时:

$$|v| \sin kh = |v|kh - \frac{1}{6}|v|k^3h^3 + O(k^5h^5). \quad (1.6)$$

由(1.5)(1.6), 我们有:

$$\frac{|v| \sin kh}{(1 - |v|) + |v| \cos kh} = |v|kh - \frac{1}{6}|v|k^3h^3 + \frac{1}{2}|v|^2k^3h^3 + O(k^5h^5). \quad (1.7)$$

又由  $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$ , 有:

$$\arctan \left[ \frac{|v| \sin kh}{(1 - |v|) + |v| \cos kh} \right] = |v|kh - \frac{1}{6}|v|k^3h^3 + \frac{1}{2}|v|^2k^3h^3 - \frac{1}{3}|v|^3k^3h^3 + O(k^4h^4). \quad (1.8)$$

再将  $|v|h = |a|\tau$  带入(1.8), 得:

$$\begin{aligned} \arg \lambda_k &= -\operatorname{sgn}(a) \arctan \left[ \frac{|v| \sin kh}{(1 - |v|) + |v| \cos kh} \right] \\ &= -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}k^2h^2 + \frac{1}{2}|v|k^2h^2 - \frac{1}{3}|v|^2k^2h^2 + O(k^3h^3) \right] \\ &= -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}(1 - |v|)(1 - 2|v|)k^2h^2 + O(k^3h^3) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

从而, 迎风格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .

**Lax-Wendroff 格式的色散:**

此时,

$$\lambda_k = 1 - iv \sin kh - 2v^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh, \quad (1.10)$$

从而其相位移为:

$$\arg \lambda_k = -\arctan \left[ \frac{v \sin kh}{1 - 2v^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} \right]. \quad (1.11)$$

我们有:

$$\sin^2 \frac{1}{2}kh = \frac{1}{4}k^2h^2 + O(k^4h^4), \quad (1.12)$$

从而由(1.12)可得:

$$\frac{1}{1 - 2v^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}v^2k^2h^2 + O(k^4h^4)} = 1 + \frac{1}{2}v^2k^2h^2 + O(k^4h^4). \quad (1.13)$$

同时, 还有:

$$v \sin kh = vkh - \frac{1}{6}vk^3h^3 + O(k^5h^5), \quad (1.14)$$

从而, 结合(1.13)和(1.14), 得到:

$$\frac{v \sin kh}{1 - 2v^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} = vkh - \frac{1}{6}vk^3h^3 + \frac{1}{2}v^3k^3h^3 + O(k^5h^5). \quad (1.15)$$

从而由(1.15)可得 ( $vh = a\tau$ ):

$$\begin{aligned}
 \arg \lambda_k &= -\arctan \left[ \frac{v \sin kh}{1 - 2v^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} \right] \\
 &= -vkh + \frac{1}{6}vk^3h^3 - \frac{1}{2}v^3k^3h^3 + \frac{1}{3}v^3k^3h^3 + O(k^4h^4) \\
 &= -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}k^2h^2 + \frac{1}{2}v^2k^2h^2 - \frac{1}{3}v^2k^2h^2 + O(k^3h^3) \right] \\
 &= -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}(1 - v^2)k^2h^2 + O(k^3h^3) \right].
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

从而,Lax-Wendroff 格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .

**Beam-Warming 格式的色散:**

当  $a > 0$  时, 有:

$$\lambda_k = e^{-ikh} \left[ 1 - 2(1 - v)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh + i(1 - v) \sin kh \right], \tag{1.17}$$

(注: 实际上在这里我们也可以像迎风格式那样计算不讨论  $a$  正负的整体情况, 只需要将  $\lambda_k$  改为

$$\lambda_k = e^{-\text{sgn}(a)ikh} \left[ 1 - 2(1 - |v|)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh + i(1 - |v|) \sin kh \right]$$

即可, 但计算过程是一样的, 因此我们仅计算  $a > 0$  的情形.)

此时:

$$\arg \lambda_k = -kh + \arctan \left[ \frac{(1 - v) \sin kh}{1 - 2(1 - v)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} \right]. \tag{1.18}$$

我们有:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - 2(1 - v)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} &= 1 + \frac{1}{2}(1 - v)^2 k^2 h^2 + O(k^4 h^4), \\
 (1 - v) \sin kh &= (1 - v)kh - \frac{1}{6}(1 - v)k^3 h^3 + O(k^5 h^5).
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

从而, 由(1.19)我们有:

$$\begin{aligned}
 \frac{(1 - v) \sin kh}{1 - 2(1 - v)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} &= (1 - v)kh - \frac{1}{6}(1 - v)k^3 h^3 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(1 - v)^3 k^3 h^3 + O(k^5 h^5).
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

故由(1.18)和(1.20), 有  $(vh = a\tau)$ :

$$\begin{aligned}
 \arg \lambda_k &= -kh + \arctan \left[ \frac{(1-v) \sin kh}{1 - 2(1-v)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh} \right] \\
 &= -vkh + (1-v)kh - \frac{1}{6}(1-v)k^3h^3 + \frac{1}{2}(1-v)^3k^3h^3 \\
 &\quad - \frac{1}{3}(1-v)^3k^3h^3 + O(k^5h^5) \\
 &= -vkh - \frac{1}{6}(1-v)(1 - (1-v)^2)k^3h^3 + O(k^5h^5) \\
 &= -vkh - \frac{1}{6}v(2-v)(1-v)k^3h^3 + O(k^5h^5) \\
 &= -ak\tau \left[ 1 + \frac{1}{6}(2-v)(1-v)k^2h^2 + O(k^4h^4) \right].
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

从而 Beam-Warming 格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .

□

## 2 上机作业

### 2.1 初值光滑的周期边值问题

#### 2.1.1 问题描述

我们考虑周期边界条件的一维一阶线性双曲方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) = \sin(2\pi x), & x \in \Omega, \\ u(0, t) = u(1, t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

这里  $\Omega = (0, 1)$ . 方程(2.1)的精确解为:

$$u(x, t) = \sin(2\pi(x - t)). \quad (2.2)$$

接下来我们分别用迎风格式, Lax-Wendroff 格式, Beam-Warming 格式求解方程(2.1)并分析三种格式的精度.

#### 2.1.2 特征线与 CFL 条件

在理论分析部分, 由于双曲方程的理论与系数  $a$  有一些联系, 我们考虑如下更一般的一维一阶齐次线性双曲型方程:

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

其中  $I$  是  $\mathbb{R}$  中的开区间, 系数  $a$  对应于对流的速度, 是  $(x, t)$  的函数. 方程(2.3)的特征线由如下的特征线方程的解给出:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad x \in I, \quad t > 0 \quad (2.4)$$

设  $a(x, t)$  关于  $t$  是连续的, 关于  $x$  是 Lipschitz 连续的, 则由常微分方程处置问题解的存在唯一性定理知, 过区域  $I \times \mathbb{R}_+$  中每一点有且仅有一条特征线. 方程(2.3)的解沿着每条特征线为常数. 由此我们得出在给定初值  $u^0(x), x \in \mathbb{R}$  的情况下, 在时空中任意给定的点集  $\Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  上, 真解  $u$  的值仅依赖于集合 (此时假设  $a(x, t)$  为常数):

$$D(\Omega_T) = \{y \in \mathbb{R} : y = x - at, \forall (x, t) \in \Omega_T\}. \quad (2.5)$$

集合  $D(\Omega_T)$  称为方程(2.3)关于集合  $\Omega_T$  的依赖区域. 通过分析我们有以下的 CFL 条件:

- **CFL 条件:** 偏微分方程的数值解沿一个加密路径收敛于真解的必要条件是真解的依赖区域至少在极限的意义下包含于数值解的依赖区域.

CFL 条件也为我们接下来将要分析的三种格式提出了收敛的必要条件.

### 2.1.3 迎风格式

用关于时间的向前差分算子  $\frac{\Delta_{+t}}{\Delta t}$  逼近  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 根据  $a$  的符号分别用关于空间的向前或向后差分算子  $\frac{\Delta_{+x}}{\Delta x}$  或  $\frac{\Delta_{-x}}{\Delta x}$  逼近  $\frac{\partial}{\partial x}$  后得到如下迎风格式:

$$U_j^{m+1} = \begin{cases} U_j^m - \nu_j^m \Delta_+ U_j^m, & a_j^m \leq 0, \\ U_j^m - \nu_j^m \Delta_- U_j^m, & a_j^m \geq 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

其中  $\nu_j^m = a_j^m \tau / h$ , 或等价的:

$$U_j^{m+1} = \begin{cases} (1 + \nu_j^m) U_j^m - \nu_j^m U_{j+1}^m, & a_j^m \leq 0 \\ (1 - \nu_j^m) U_j^m + \nu_j^m U_{j-1}^m, & a_j^m \geq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

现在设  $a$  为常数, 对流方程(2.3)的解  $u$  充分光滑, 则利用 Taylor 展开式得到迎风格式的局部截断误差:

$$\begin{aligned} T_j^m &= \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{h} - \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^m \\ &= \frac{1}{2} [\tau u_{tt} + a h u_{xx}]_j^m + \frac{1}{6} [\tau^2 u_{ttt} + a h^2 u_{xxx}]_j^m + \cdots \\ &= \left[ \frac{1}{2} a h (1 + \nu) u_{xx} + \frac{1}{6} a h^2 (1 - \nu^2) u_{xxx} + \cdots \right]_j^m, \quad a \leq 0; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} T_j^m &= \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + a \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} - \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^m \\ &= \frac{1}{2} [\tau u_{tt} - a h u_{xx}]_j^m + \frac{1}{6} [\tau^2 u_{ttt} + a h^2 u_{xxx}]_j^m + \cdots \\ &= - \left[ \frac{1}{2} a h (1 - \nu) u_{xx} + \frac{1}{6} a h^2 (1 - \nu^2) u_{xxx} + \cdots \right]_j^m, \quad a \geq 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

因此, 我们有:

$$T_h = \max \{|T_j^m|\} = O(\tau + h) \quad (2.10)$$

当迎风格式满足 CFL 条件, 即  $|\nu| \leq 1$  时, 因此我们可以归纳的得到其  $\mathbb{L}^\infty$  稳定性:

$$\begin{aligned} E^{m+1} &\triangleq \max_j |e_j^{m+1}| \leq E^m + \tau \max_j |T_j^m| \leq E^0 + t_{\max} \max_{m,j} |T_j^m| \\ &\forall (m+1)\tau \leq t_{\max}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

因此, 当对流方程(2.3)的解  $u$  的二阶导数有界时, 沿着任意满足 CFL 条件的加密路径迎风格式都是收敛的, 且具有一阶逼近精度.

迎风格式的增长因子为:

$$\lambda_k = (1 - |\nu|) + |\nu|e^{-\operatorname{sgn}(a)ikh}, \quad (2.12)$$

从而,

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4|\nu|(1 - |\nu|)\sin^2 \frac{1}{2}kh. \quad (2.13)$$

因此, 当  $|\nu| \leq 1$  时, 恒有  $|\lambda_k| \leq 1$ , 从而满足 CFL 条件时, 迎风格式具有  $\mathbb{L}^2$  稳定性. 只要真解保持适当的相容性, 就可以得到迎风格式的  $\mathbb{L}^2$  收敛性.

下面从 Fourier 波型特解的振幅误差和相位误差的角度考查迎风格式(2.6)的精度. 连续 Fourier 波型

$$u(x, t) = e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.14)$$

满足

$$\omega(k) = -ak, \quad (2.15)$$

则它是对流方程(2.3)的一个特解, 在一个时间步  $\tau$  中该特解的相位移为  $\omega(k)\tau = -ak\tau$ . 而由第一部分的结果(1.9), 我们知道离散 Fourier 波形  $U_j^m$  的相位移为:

$$\arg \lambda_k = -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}(1 - |\nu|)(1 - 2|\nu|)k^2h^2 + O(k^3h^3) \right]. \quad (2.16)$$

因此除了  $|\nu| = 1$  和  $|\nu| = \frac{1}{2}$  的没有相位误差的特殊情况, 迎风格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .



对于迎风格的振幅误差, 由(2.13)可知除了  $|\nu| = 1$  的情形, 相应的波型一般都会有衰减, 并且高频的波形会迅速衰减. 而对频率较低的波形则有每一时间步的振幅衰减系数为  $1 - O(k^2 h^2)$ . 因此当  $h \rightarrow 0$ , 波型  $U_j^m$  的振幅衰减幅度为:

$$\begin{aligned} (1 - O(k^2 h^2))^{\tau^{-1} t_{\max}} &= 1 - \tau^{-1} t_{\max} O(k^2 h^2) \\ &= 1 - a \nu^{-1} t_{\max} h^{-1} O(k^2 h^2) = 1 - O(h) \end{aligned} \quad (2.17)$$

因此, 迎风格式关于振幅的整体逼近误差是  $O(h)$ .

#### 2.1.4 迎风格式数值实验

下面我们使用迎风格式求解方程(2.1), 网格取为  $\{U_0, \dots, U_N\}$ . 在使用三种格式处理边界的时候需要涉及到一些不在网格之中的点, 我们引入虚拟节点  $U_{-2}, U_{-1}, U_{N+1}, U_{N+2}$ , 并通过周期边界条件, 我们有:

$$U_{-2} = U_{N-2}, U_{-1} = U_{N-1}, U_{N+1} = U_1, U_{N+2} = U_2. \quad (2.18)$$

接下来的 Lax-Wendroff 格式与 Beam-Warming 格式我们同样这样处理周期边界条件.

固定  $\nu = 0.8$  不变, 不断减小空间步长, 得到  $t = 1$  时误差随空间步长的变化见表 2.1 和表 2.2, 以及图 2.1 给出了  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化. 可以看到, 迎风格式具有一阶收敛性.

图 2.2 和 2.3 展示了  $N = 512 (h = \frac{1}{N})$  时  $\nu = 0.8$  和  $\nu = 1.5$  计算得到的数值解随时间的变化. 可以看到  $\nu = 0.8$  满足 CFL 条件时, 波以特征速度  $a = 1$  向前传播,  $t = 0.5$  和  $t = 1$  时分别前进了半个周期和一个周期. 而  $\nu = 1.5$  不满足 CFL 条件时数值是不稳定的.

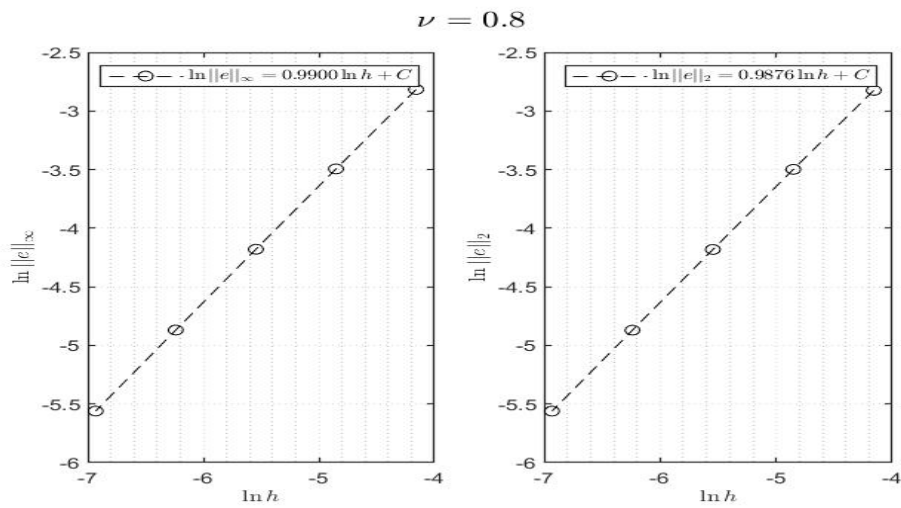
为了观察迎风格的耗散与色散情况, 我们选定  $N = 128, \nu = 0.8$ , 计算较长的时间步长, 图 2.4 给出了计算较长时间步时迎风格的耗散与色散情况, 可以看到迎风格的耗散比色散明显很多, 在  $t = 50$  的时候耗散已经非常明显, 这符合我们的理论分析.

表 2.1: 迎风格式  $\|e\|_\infty$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _\infty$	$5.982e^{-2}$	$3.037e^{-2}$	$1.530e^{-2}$	$7.681e^{-3}$	$3.848e^{-3}$
收敛阶		0.9779	0.9889	0.9944	0.9972

表 2.2: 迎风格式  $\|e\|_2$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _2$	$5.937e^{-2}$	$3.026e^{-2}$	$1.527e^{-2}$	$7.674e^{-3}$	$3.846e^{-3}$
收敛阶		0.9725	0.9862	0.9931	0.9965

图 2.1: 迎风格式  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化 ( $t = 1$ )

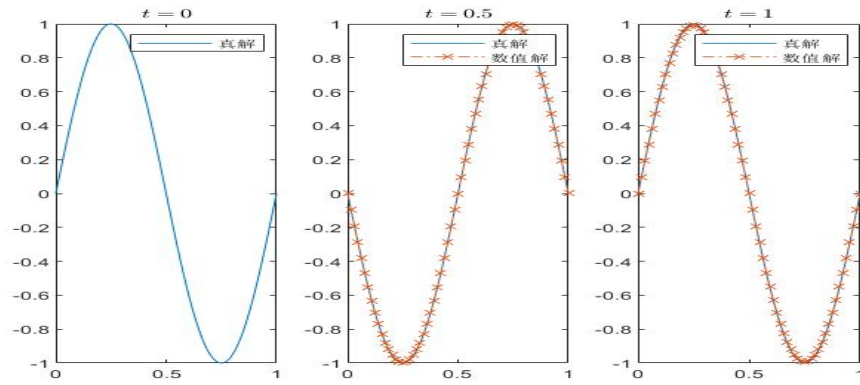


图 2.2: 迎风格式:  $\nu = 0.8$ ,  $N = 512$  时数值解随时间的变化 (满足 CFL 条件)

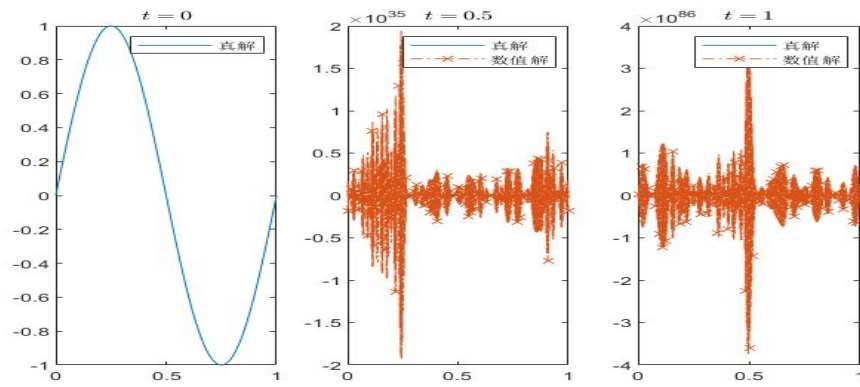


图 2.3: 迎风格式:  $\nu = 1.5$ ,  $N = 512$  时数值解随时间的变化 (不满足 CFL 条件)

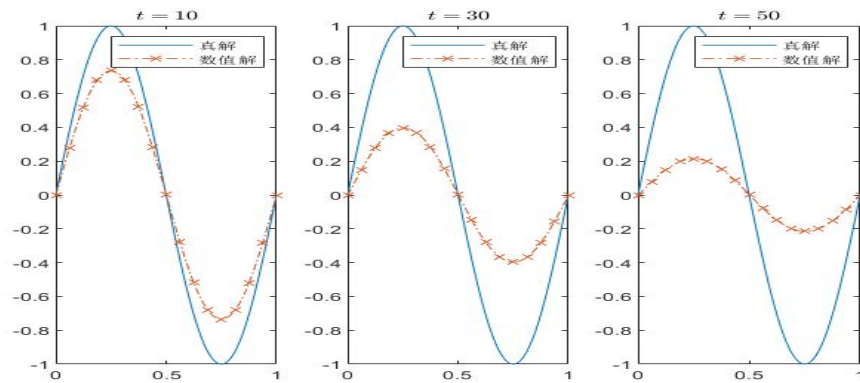


图 2.4: 迎风格式:  $\nu = 0.8$ ,  $N = 128$  时的耗散与色散情况

### 2.1.5 Lax-Wendroff 格式

为了得到更高的逼近精度, 结合特征线法使用高次插值逼近 (也可以从误差主项或者 Taylor 展开式的角度来导出, 详见教材), 取  $A = (x_{j+1}, t_m)$ ,  $B = (x_j, t_m)$ ,  $C = (x_{j-1}, t_m)$  三个节点的二次插值来计算需要得到的数值解  $U(P)$  在第  $m$  层对应的真解  $U(Q)$ , 就可以得到 Lax-Wendroff 格式 (简单起见, 不妨设  $a > 0$ , 实际上 Lax-Wendroff 格式不依赖于  $a$  的符号):

$$U_j^{m+1} = -\frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j+1}^m + (1-\nu^2)U_j^m + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j-1}^m. \quad (2.19)$$

由于 Lax-Wendroff 格式右端系数不可能同号, 因此无法满足最大值原理, 故尽管其截断误差的确比迎风格式具有更高的阶 ( $O(h^2)$ ), 但其不具备  $\mathbb{L}^\infty$  稳定性, 下面我们分析其  $\mathbb{L}^2$  稳定性.

Lax-Wendroff 格式的增长因子为:

$$\lambda_k = 1 - i\nu \sin kh - 2\nu^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh. \quad (2.20)$$

由此我们有:

$$|\lambda_k|^2 = 1 - 4\nu^2 (1 - \nu^2) \sin^4 \frac{1}{2}kh \quad (2.21)$$

当网格比满足 CFL 条件, 即  $|\nu| \leq 1$  时,  $|\lambda_k| \leq 1$ , Lax-Wendroff 格式是  $\mathbb{L}^2$  稳定的.

下面分析 Lax-Wendroff 格式的色散与耗散. 由第一部分的结果(1.16), 我们知道离散 Fourier 波形  $U_j^m$  的相位移为:

$$\arg \lambda_k = -ak\tau \left[ 1 - \frac{1}{6}(1 - \nu^2)k^2h^2 + O(k^3h^3) \right]. \quad (2.22)$$

由此可知, 除了  $|\nu| = 1$  时没有相位误差的特殊情形外, Lax-Wendroff 格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .

对于 Lax-Wendroff 格式的振幅误差, 由式(2.21)知, 除了  $|\nu| = 1$  的特殊情形, 相应的 Fourier 波型都会有衰减, 并且对于频率较低的波型, 每一时间步的振幅衰减系数为  $1 - O(k^4h^4)$ . 因此当  $h \rightarrow 0$ , 波型  $U_j^m$  的振幅衰减幅度为:

$$\begin{aligned} (1 - O(k^4h^4))^{\tau^{-1}t_{\max}} &= 1 - \tau^{-1}t_{\max}O(k^4h^4) \\ &= 1 - a\nu^{-1}t_{\max}h^{-1}O(k^4h^4) = 1 - O(h^3). \end{aligned} \quad (2.23)$$

因此, Lax-Wendroff 格式关于振幅的整体逼近误差是  $O(h^3)$ .

### 2.1.6 Lax-Wendroff 格式数值实验

下面我们使用 Lax-Wendroff 格式求解方程(2.1), 固定  $\nu = 0.8$  不变, 不断减小空间步长, 得到  $t = 1$  时误差随空间步长的变化见表 2.3和表 2.4, 以及图 2.5给出了  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化. 可以看到,Lax-Wendroff 格式具有二阶收敛性.

图 2.6和 2.7展示了  $N = 512$  时  $\nu = 0.8$  和  $\nu = 1.5$  计算得到的数值解随时间的变化. 可以看到  $\nu = 0.8$  满足 CFL 条件时, 波以特征速度  $a = 1$  向前传播, $t = 0.5$  和  $t = 1$  时分别前进了半个周期和一个周期. 而  $\nu = 1.5$  不满足 CFL 条件时数值是不稳定的.

为了观察 Lax-Wendroff 格式的耗散与色散情况, 我们选定  $N = 128, \nu = 0.8$ , 计算较长的时间步长, 图 2.8给出了计算较长时间步时 Lax-Wendroff 格式的耗散与色散情况, 可以看到 Lax-Wendroff 格式的色散比较明显明显, 在  $t = 150$  的时候能看到较为明显的相位落后, 这符合我们的理论分析, 即 Lax-Wendroff 格式的相位误差阶数比振幅误差要小.

表 2.3: Lax-Wendroff 格式  $\|e\|_\infty$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _\infty$	$3.628e^{-3}$	$9.081e^{-4}$	$2.271e^{-4}$	$5.677e^{-5}$	$1.419e^{-5}$
收敛阶		1.9985	1.9996	1.9999	2.0000

表 2.4: Lax-Wendroff 格式  $\|e\|_2$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _2$	$3.659e^{-3}$	$9.118e^{-4}$	$2.275e^{-4}$	$5.683e^{-5}$	$1.420e^{-5}$
收敛阶		2.0046	2.0026	2.0014	2.0007

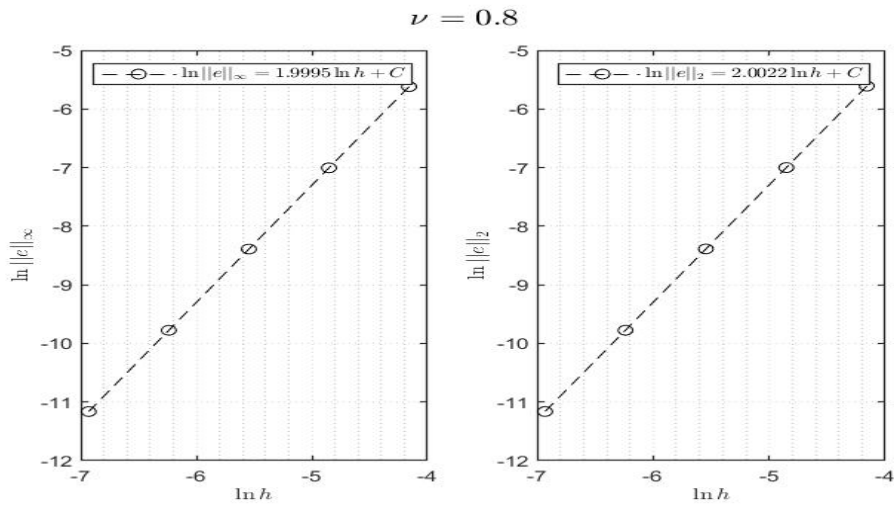


图 2.5: Lax-Wendroff 格式  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化 ( $t = 1$ )

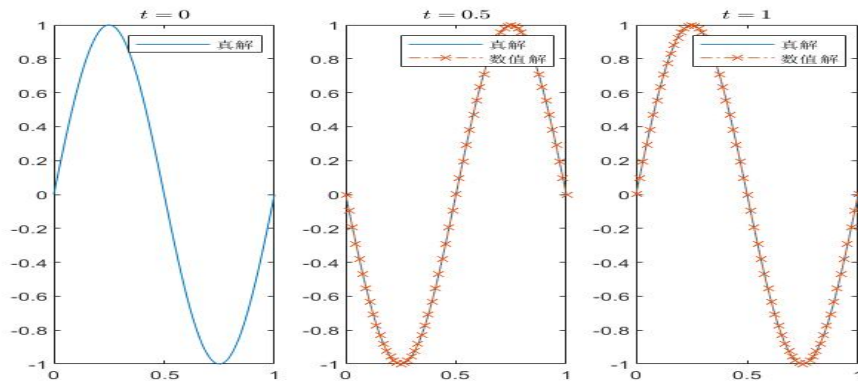


图 2.6: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 0.8$ ,  $N = 512$  时数值解随时间的变化 (满足 CFL 条件)

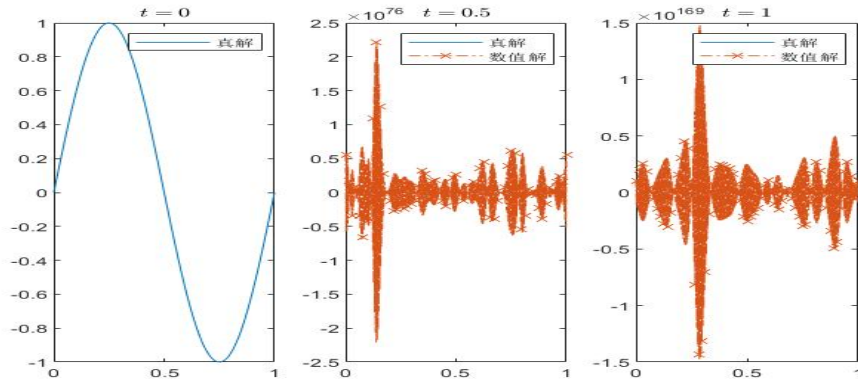


图 2.7: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 1.5$ ,  $N = 512$  时数值解随时间的变化 (不满足 CFL 条件)

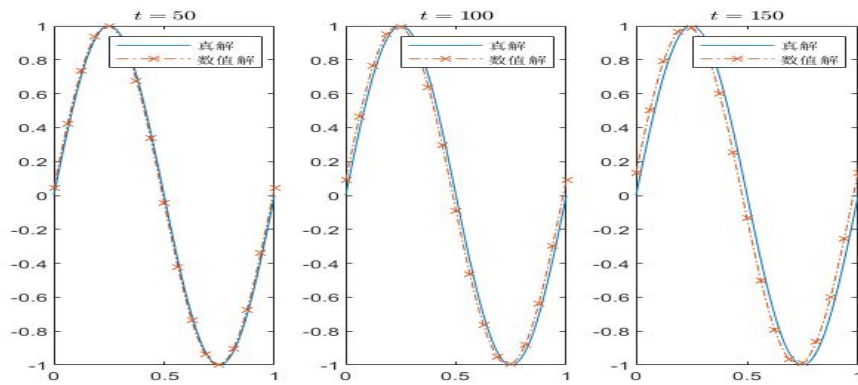


图 2.8: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 0.8$ ,  $N = 128$  时的耗散与色散情况

### 2.1.7 Beam-Warming 格式

取  $B = (x_j, t_m), C = (x_{j-1}, t_m), D = (x_{j-2}, t_m)$  三个节点的二次插值来计算需要得到的数值解  $U(P)$  在第  $m$  层对应的真解  $U(Q)$ , 就可以得到 Beam-Warming 格式 (简单起见, 不妨设  $a > 0$ ):

$$U_j^{m+1} = \frac{1}{2}(1-\nu)(2-\nu)U_j^m + \nu(2-\nu)U_{j-1}^m - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)U_{j-2}^m. \quad (2.24)$$

同 Lax-Wendroff 格式一样, Beam-Warming 格式无法满足最大值原理, 不具备  $\mathbb{L}^\infty$  稳定性, 下面我们分析其  $\mathbb{L}^2$  稳定性.

Beam-Warming 格式的增长因子为:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 1 - \nu + \nu e^{-ikh} - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)e^{-ikh}(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}) \\ &= e^{-ikh} \left[ 1 - 2(1-\nu)^2 \sin^2 \frac{1}{2}kh + i(1-\nu) \sin kh \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

由此我们有:

$$\begin{aligned} |\lambda_k|^2 &= 1 - 4(1-\nu)^2(1-(1-\nu)^2) \sin^4 \frac{kh}{2} \\ &= 1 - 4\nu(2-\nu)(1-\nu)^2 \sin^4 \frac{kh}{2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

当网格比满足 CFL 条件, 即  $0 \leq \nu \leq 2$  时,  $|\lambda_k| \leq 1$ , Beam-Warming 格式是  $\mathbb{L}^2$  稳定的.

下面分析 Beam-Warming 格式的色散与耗散. 由第一部分的结果(1.21), 我们知道离散 Fourier 波形  $U_j^m$  的相位移为:

$$\arg \lambda_k = -ak\tau \left[ 1 + \frac{1}{6}(2-\nu)(1-\nu)k^2h^2 + O(k^4h^4) \right]. \quad (2.27)$$

由此可知, 除了  $\nu = 1$  时没有相位误差的特殊情形外, Beam-Warming 格式的相对相位误差是  $O(k^2h^2)$ .

对于 Beam-Warming 格式的振幅误差, 由式(2.26)知, 除了  $|\nu| = 1$  等特殊情形, 相应的 Fourier 波型都会有衰减, 并且对于频率较低的波型, 每一时间步的振幅衰减系数为  $1 - O(k^4h^4)$ . 因此当  $h \rightarrow 0$ , 波型  $U_j^m$  的振幅衰减幅度为:

$$\begin{aligned} (1 - O(k^4h^4))^{\tau^{-1}t_{\max}} &= 1 - \tau^{-1}t_{\max}O(k^4h^4) \\ &= 1 - a\nu^{-1}t_{\max}h^{-1}O(k^4h^4) = 1 - O(h^3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

因此, Beam-Warming 格式关于振幅的整体逼近误差是  $O(h^3)$ .



### 2.1.8 Beam-Warming 格式数值实验

下面我们使用 Beam-Warming 格式求解方程(2.1), 固定  $\nu = 0.8$  不变, 不断减小空间步长, 得到  $t = 1$  时误差随空间步长的变化见表 2.5和表 2.6, 以及图 2.9给出了  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化. 可以看到, Beam-Warming 格式具有二阶收敛性.

图 2.10和 2.11展示了  $N = 512$  时  $\nu = 1.5$  和  $\nu = 2.5$  计算得到的数值解随时间的变化. 可以看到  $\nu = 1.5$  满足 CFL 条件时, 波以特征速度  $a = 1$  向前传播,  $t = 0.5$  和  $t = 1$  时分别前进了半个周期和一个周期. 而  $\nu = 2.5$  不满足 CFL 条件时数值是不稳定的.

为了观察 Beam-Warming 格式的耗散与色散情况, 我们选定  $N = 128, \nu = 0.8$ , 计算较长的时间步长, 图 2.12给出了计算较长时间步时 Beam-Warming 格式的耗散与色散情况, 可以看到 Beam-Warming 格式的色散比较明显明显, 在  $t = 250$  的时候能看到较为明显的相位超前, 这符合我们的理论分析, 即 Beam-Warming 格式的相位误差阶数比振幅误差要小.

表 2.5: Beam-Warming 格式  $\|e\|_\infty$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _\infty$	$2.421e^{-3}$	$6.055e^{-4}$	$1.514e^{-4}$	$3.785e^{-5}$	$9.462e^{-6}$
收敛阶		1.9993	1.9998	2.0000	2.0000

表 2.6: Beam-Warming 格式  $\|e\|_2$  随  $h$  变化 ( $t = 1$ )

空间步长 $h$	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
网格比 $\nu$	0.8				
误差 $\ e\ _2$	$2.440e^{-3}$	$6.079e^{-4}$	$1.517e^{-4}$	$3.789e^{-5}$	$9.467e^{-6}$
收敛阶		2.0049	2.0026	2.0014	2.0007

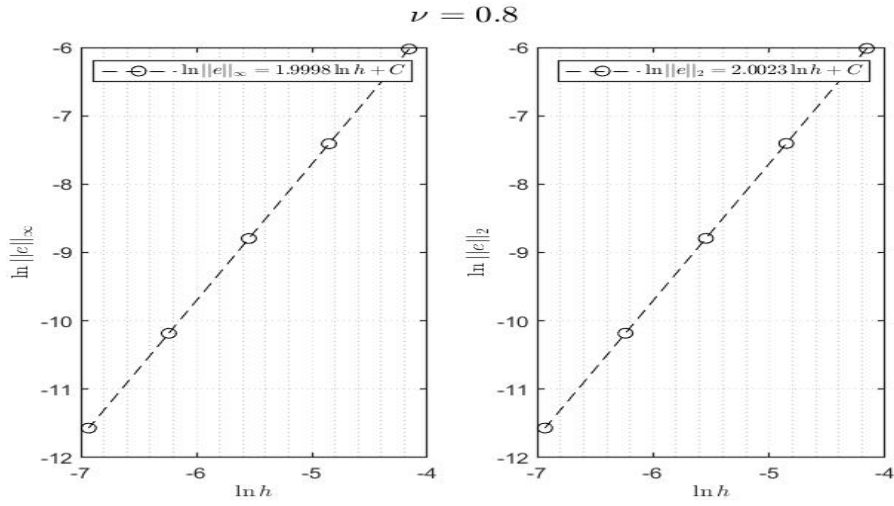


图 2.9: Beam-Warming 格式  $\ln \|e\|_\infty$  和  $\ln \|e\|_2$  随  $\ln h$  的变化 ( $t = 1$ )

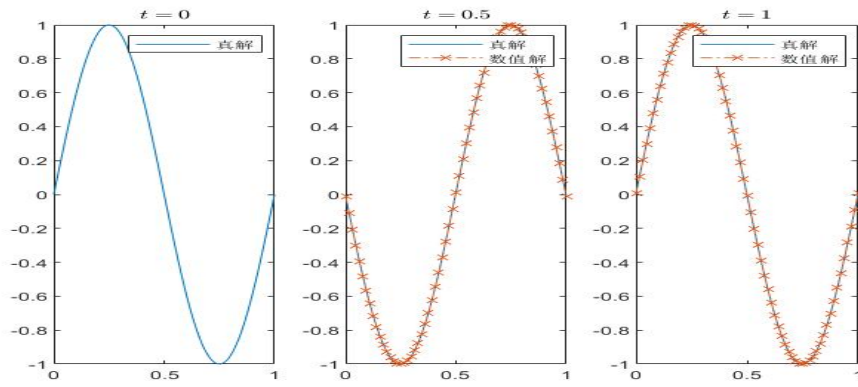


图 2.10: Beam-Warming 格式:  $\nu = 1.5$ ,  $N = 512$  时数值解随时间的变化 (满足 CFL 条件)

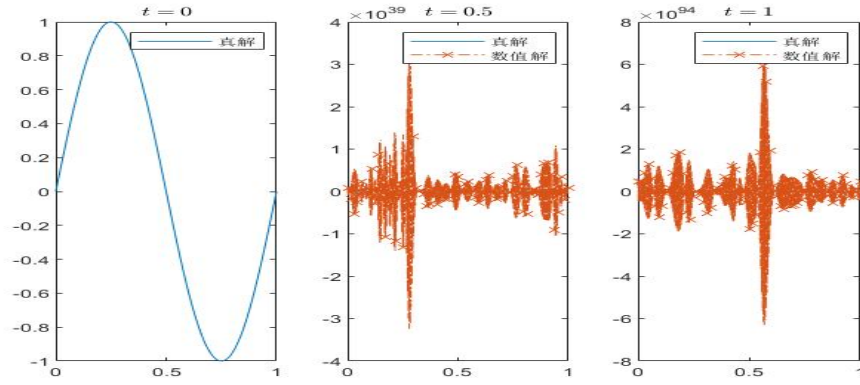


图 2.11: Beam-Warming 格式:  $\nu = 2.5, N = 512$  时数值解随时间的变化 (不满足 CFL 条件)

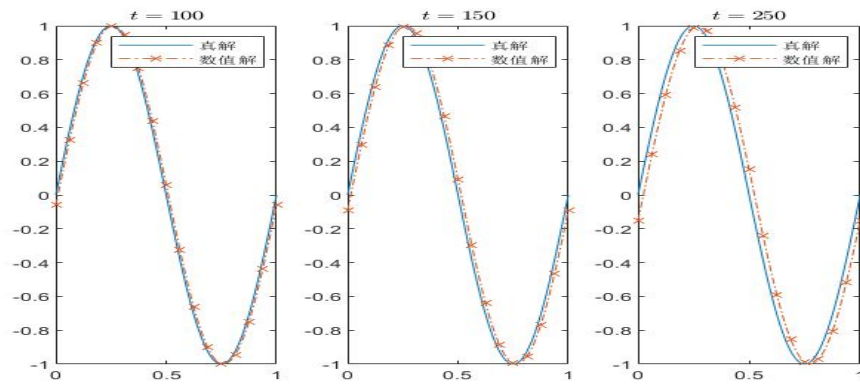


图 2.12: Beam-Warming 格式:  $\nu = 0.8, N = 128$  时的耗散与色散情况

## 2.2 方波初值和三角波初值的零边值问题

### 2.2.1 问题描述

我们考虑零边界条件的一维一阶线性双曲方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & x \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \Omega, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

这里  $\Omega = (0, +\infty)$ . 其中, 我们接下来分别考虑用三种格式求解方波初值和三角波初值的方程(2.29). 方波初值(2.30)和三角波初值(2.31)如下所示:

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \text{ 且 } x \leq 1, \\ 0, & x \in \Omega, \text{ 且 } x > 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

$$u^0(x) = \begin{cases} x, & x \in \Omega, \text{ 且 } x \leq 1, \\ 2 - x, & x \in \Omega, \text{ 且 } 1 < x \leq 2, \\ 0, & x \in \Omega, \text{ 且 } x > 2. \end{cases} \quad (2.31)$$

### 2.2.2 数值实验 1——方波初值

我们考虑在一个给定的区间  $(0, M)$  上求解使用方波初值(2.30)的方程(2.29). 此时, 通过引入虚拟节点的方式使用零阶外推公式处理边界.

我们使用三种格式求解方程, 此时  $M = 150$ , 此时  $N$  表示在一个单位区间上所划分的段数 (即网格点数  $= N \times M + 1$ ). 为了视觉效果, 我们展示的图例仅放上了靠近当前时间层方波位置的数值解和真解.

图 2.13展示了  $\nu = 0.8, N = 256$  时迎风格式数值解随时间变化, 可以观测到迎风格式具有较为明显的振幅衰减, 符合理论分析.

图 2.14展示了  $\nu = 0.8, N = 256$  时 Lax-Wendroff 格式数值解随时间变化, 可以观测到 Lax-Wendroff 格式的相位误差更加明显, 在较长时间之后出现相位滞后. 并且出现了较为剧烈的数值振荡, 这是由于 Lax-Wendroff 格式不满足最大值原理, 符合理论分析.

图 2.15展示了  $\nu = 0.8, N = 256$  时 Beam-Warming 格式数值解随时间变化, 可以观测到 Beam-Warming 格式的相位误差也比较明显, 在较长时间之后出现相位超前. 并且出现了较为剧烈的数值振荡, Beam-Warming 格式同样不满足最大值原理, 符合理论分析.

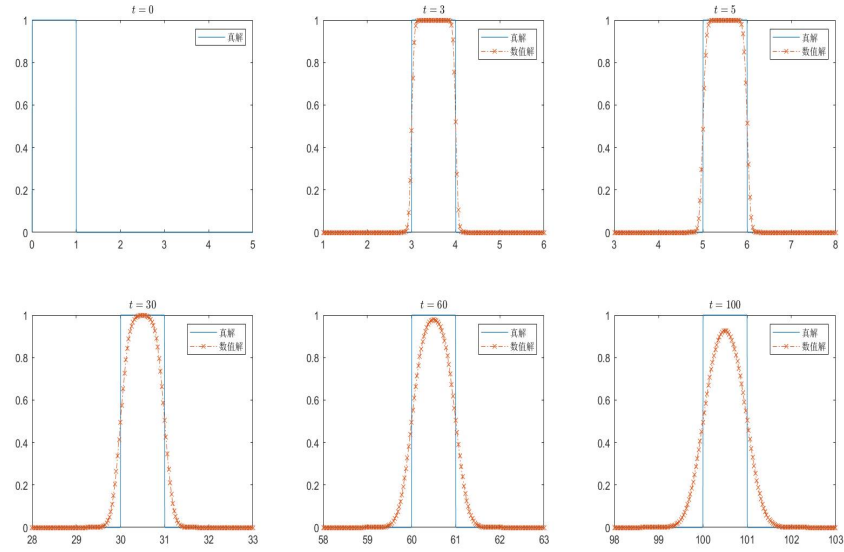


图 2.13: 迎风格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时方波初值数值解随时间变化 (振幅衰减)

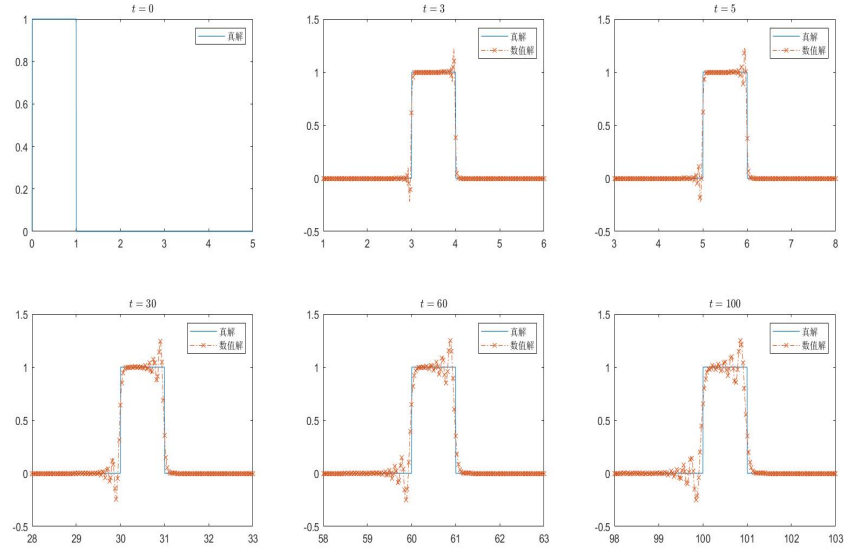


图 2.14: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时方波初值数值解随时间变化 (相位滞后)

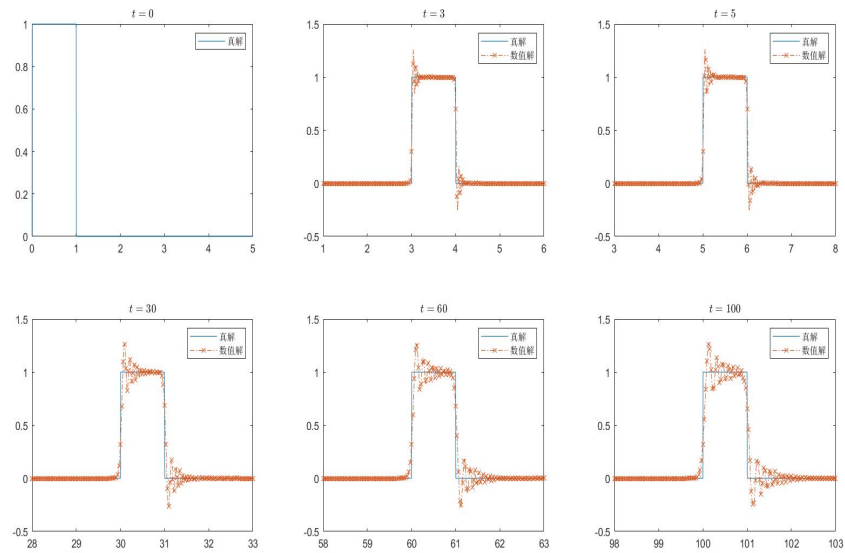


图 2.15: Beam-Warming 格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时方波初值数值解随时间变化 (相位超前)

### 2.2.3 数值实验 2——三角波初值

我们考虑在一个给定的区间  $(0, M)$  上求解使用三角波初值(2.31)的方程(2.29). 此时, 通过引入虚拟节点的方式使用零阶外推公式处理边界.

我们使用三种格式求解方程, 此时  $M = 350$ (因为在三角波初值的情况下我们想要更好地观测到相位误差需要计算更多的时间步). 同方波初值一样, 为了视觉效果, 我们展示的图例仅放上了靠近当前时间层方波位置的数值解和真解.

图 2.16展示了  $\nu = 0.8, N = 256$  时迎风格式数值解随时间变化, 可以观测到迎风格式具有较为明显的振幅衰减, 符合理论分析.

图 2.17,2.18和图 2.19,2.20展示了  $\nu = 0.8, N = 256$  或  $N = 64$  时 Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式数值解随时间变化, 在较长时间之后, 特别是取的网格比较大的时候, 可以观测到 Lax-Wendroff 格式的相位误差有一定的滞后, Beam-Warming 格式的相位误差有一定的超前. 并且出现了一定的数值振荡, 这是由于两种格式不满足最大值原理, 符合理论分析.

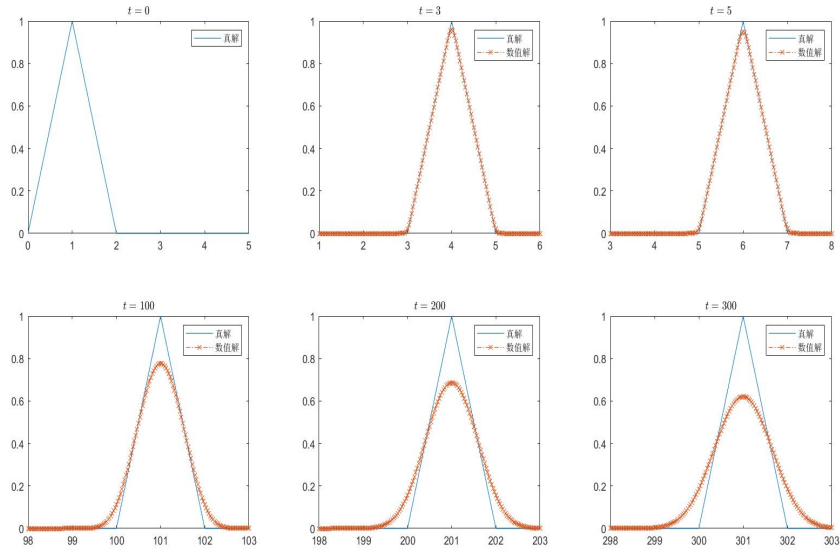


图 2.16: 迎风格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时三角波初值数值解随时间变化 (振幅衰减)

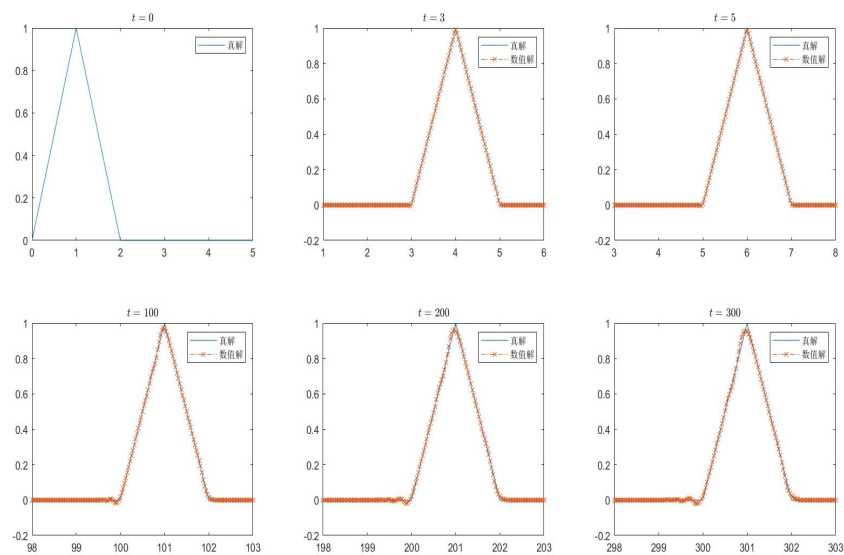


图 2.17: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时三角波初值数值解随时间变化 (相位滞后)

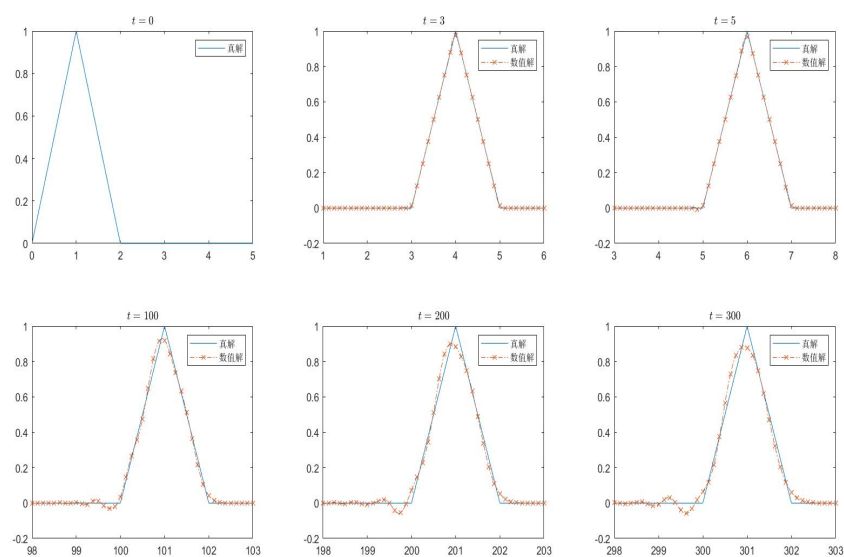


图 2.18: Lax-Wendroff 格式:  $\nu = 0.8, N = 64$  时三角波初值数值解随时间变化 (相位滞后)



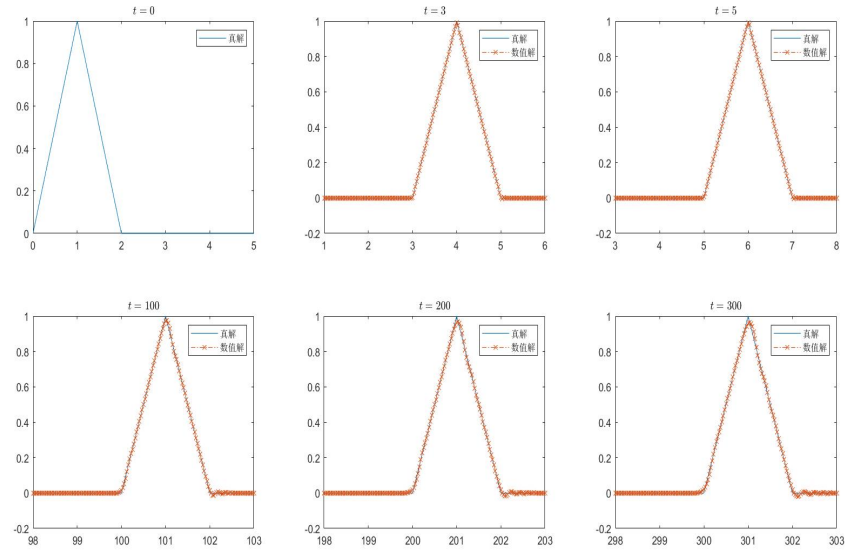


图 2.19: Beam-Warming 格式:  $\nu = 0.8, N = 256$  时三角波初值数值解随时间变化 (相位超前)

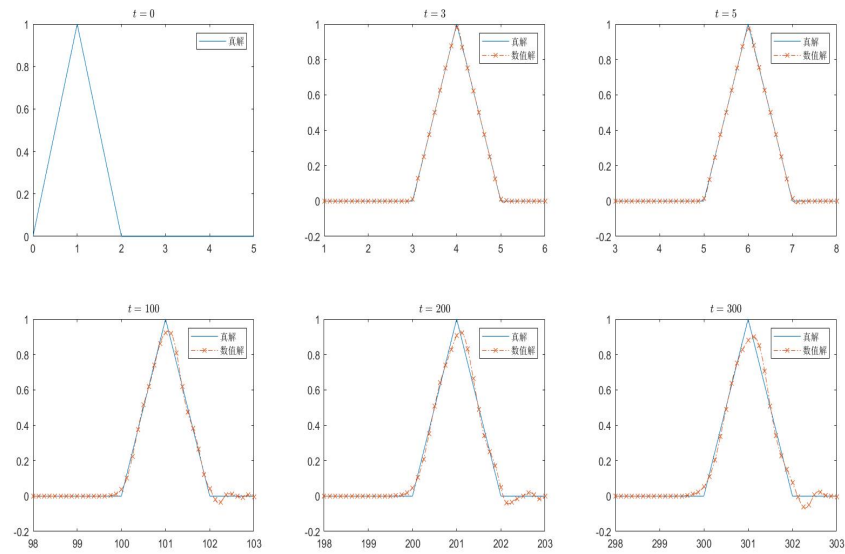


图 2.20: Beam-Warming 格式:  $\nu = 0.8, N = 64$  时三角波初值数值解随时间变化 (相位超前)