

偏微分方程数值解第二次作业

计算数学 匡昱潼 202221130109

2023 年 4 月 4 日

1 书面作业

1. 计算 θ 格式的截断误差, \mathbb{L}^∞ 稳定性, \mathbb{L}^2 稳定性.

证明. θ 格式的截断误差:

当 $\theta = 0, 1$ 时, 即为显式格式与隐式格式.

当 $\theta \neq 0, 1$ 时, 我们定义截断误差如下:

$$\begin{aligned} Tu(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) &= \left(\frac{\delta_t u(x_j, t_{m+\frac{1}{2}})}{\tau} - \theta \frac{\delta_x^2 u(x_j, t_{m+1})}{h^2} - (1-\theta) \frac{\delta_x^2 u(x_j, t_m)}{h^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

利用 u 在点 $(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) = (jh, (m + \frac{1}{2})\tau)$, (x_j, t_{m+1}) , (x_j, t_m) 的 Taylor 展开式, 有:

$$\delta_t u(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) = \tau \partial_t u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \tau^3 \partial_{ttt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^5) \quad (1.2)$$

$$\delta_x^2 u(x_j, t_{m+1}) = h^2 \partial_{xx} u_{j,m+1} + \frac{1}{12} h^4 \partial_{xxxx} u_{j,m+1} + O(h^6) \quad (1.3)$$

$$\delta_x^2 u(x_j, t_m) = h^2 \partial_{xx} u_{j,m} + \frac{1}{12} h^4 \partial_{xxxx} u_{j,m} + O(h^6) \quad (1.4)$$

将式(1.2)-(1.4)带入(1.1)得到:

$$\begin{aligned} Tu(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{24} \tau^2 \partial_{ttt} u_{j,m+\frac{1}{2}} - \theta \left(\partial_{xx} u_{j,m+1} + \frac{1}{12} h^2 \partial_{xxxx} u_{j,m+1} \right) \\ &\quad - (1-\theta) \left(\partial_{xx} u_{j,m} + \frac{1}{12} h^2 \partial_{xxxx} u_{j,m} \right) + \partial_{xx} u_{j,m+\frac{1}{2}} \\ &\quad + O(\tau^4 + h^4). \end{aligned} \quad (1.5)$$

再将 $\partial_{xx} u_{j,m+1}$, $\partial_{xx} u_{j,m}$, $\partial_{xxxx} u_{j,m+1}$, $\partial_{xxxx} u_{j,m}$ 在 $(x_j, t_{m+\frac{1}{2}})$ Taylor 展开:

$$\partial_{xx} u_{j,m+1} = \partial_{xx} u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \tau \partial_{xxt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \tau^2 \partial_{xxtt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^3), \quad (1.6)$$

$$\partial_{xx} u_{j,m} = \partial_{xx} u_{j,m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \tau \partial_{xxt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \tau^2 \partial_{xxtt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^3), \quad (1.7)$$

$$\partial_{xxxx} u_{j,m+1} = \partial_{xxxx} u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \tau \partial_{xxxxt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (1.8)$$

$$\partial_{xxxx} u_{j,m} = \partial_{xxxx} u_{j,m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \tau \partial_{xxxxt} u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^2). \quad (1.9)$$

注意由于 $u_t = u_{xx}$, 故在问题的分析中可以将空间二阶导数和时间一阶导数相互转化, 如: $\partial_{xxt}u_{j,m+\frac{1}{2}} = \partial_{tt}u_{j,m+\frac{1}{2}}$. 从而将式(1.6)-(1.9)带入(1.5)得到:

$$\begin{aligned} Tu(x_j, t_{m+\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{2}(2\theta - 1)\tau\partial_{tt}u_{j,m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}\tau^2\partial_{ttt}u_{j,m+\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{12}h^2\partial_{xxxx}u_{j,m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}(2\theta - 1)\tau h^2\partial_{ttt}u_{j,m+\frac{1}{2}} \\ &\quad + O(\tau^3 + \tau^2h^2 + h^4). \end{aligned} \quad (1.10)$$

则 $\theta = \frac{1}{2}$ 时,

$$T_j^{m+\frac{1}{2}} = O(\tau^2 + h^2).$$

$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\mu}$ 时,

$$\begin{aligned} T_j^{m+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{12}\tau^2\partial_{ttt}u_{j,m+\frac{1}{2}} + \frac{1}{144}h^4\partial_{ttt}u_{j,m+\frac{1}{2}} + O(\tau^3 + \tau^2h^2 + h^4) \\ &= O(\tau^2 + h^4). \end{aligned}$$

$\theta =$ 其它时,

$$T_j^{m+\frac{1}{2}} = O(\tau + h^2).$$

θ 格式的 \mathbb{L}^∞ 稳定性:

由 θ 格式的等价形式:

$$\begin{aligned} (1 + 2\mu\theta)U_j^{m+1} &= (1 - 2\mu(1 - \theta))U_j^m + \mu(1 - \theta)(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m) \\ &\quad + \mu\theta(U_{j-1}^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

选定 U_j^{m+1} 为最大值原理描述中的 U_j , 则 θ 格式满足最大值原理的条件是

$$2\mu(1 - \theta) \leq 1.$$

此时, 其误差方程为:

$$\begin{aligned} (1 + 2\mu\theta)e_j^{m+1} &= (1 - 2\mu(1 - \theta))e_j^m + \mu(1 - \theta)(e_{j-1}^m + e_{j+1}^m) \\ &\quad + \mu\theta(e_{j-1}^{m+1} + e_{j+1}^{m+1}) - \tau T_j^{m+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

注: 此处之所以使用 $T_j^{m+\frac{1}{2}}$ 而不是 T_j^{m+1} 是因为我们是通过中心差商来定义 T 的. 因此, 即使在使用最大值原理时我们将 U_j 取为 U_j^{m+1} ,

在写误差方程时仍应使用 $T_j^{m+\frac{1}{2}}$.

由此, 当 $2\mu(1-\theta) \leq 1$ 时, 上式右端各项系数均为正数且其和等于左端系数. 我们可以递推地得到逼近误差满足:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq N-1} |e_j^{m+1}| &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq j \leq N} |e_j^0|, \max_{1 \leq l \leq m} \max \left\{ |e_0^l|, |e_N^l| \right\} \right\} \\ &\quad + \tau \sum_{l=0}^m T^{l+\frac{1}{2}}, \quad \forall m \geq 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

其中 $T^{l+\frac{1}{2}} = \max_{1 \leq j \leq N-1} |T_j^{l+\frac{1}{2}}|$.

从而有以下的 $\mathbb{L}^\infty(\Omega_{t_{\max}})$ 稳定性:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{t_{\max}}} \leq \max_{0 \leq j \leq N} |e_j^0| + \max_{0 < m\tau \leq t_{\max}} \max \{|e_0^m|, |e_N^m|\} + t_{\max} \|T\|_{\infty, \Omega_{\max}} \quad (1.14)$$

θ 格式的 \mathbb{L}^2 稳定性:

将 Fourier 波型 $U_j^m = \lambda_k^m e^{\frac{ik\pi j}{N}}$ 带入 θ 格式, 得:

$$\lambda_k = \frac{1 - 4(1-\theta)\mu \sin^2 \frac{k\pi}{2N}}{1 + 4\theta\mu \sin^2 \frac{k\pi}{2N}}. \quad (1.15)$$

由 von Neumann 条件可得 θ 格式 \mathbb{L}^2 稳定性的必要条件:

$$\begin{cases} 2\mu(1-2\theta) \leq 1, & \text{当 } 0 \leq \theta < 1/2 \text{ 时,} \\ \mu < \infty, \text{ 即无条件,} & \text{当 } 1/2 \leq \theta \leq 1 \text{ 时.} \end{cases} \quad (1.16)$$

尽管 von Neumann 条件是充要条件, 但由于书上只证明了这是一个必要条件, 因此我们接下来我们证明其充分性.

当式(1.16)成立时, 由 $|\lambda_k| \leq 1$ 和 Parseval 恒等式得:

$$\begin{aligned} \|U^{m+1}\|_2^2 &= \left\| \widehat{(U^{m+1})} \right\|_2^2 = \sum_{k=-N+1}^N \left| \lambda_k^{m+1} \widehat{(U^0)}_k \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=-N+1}^N \left| \lambda_k^m \widehat{(U^0)}_k \right|^2 = \left\| \widehat{(U^m)} \right\|_2^2 = \|U^m\|_2^2. \end{aligned}$$

将 θ 格式记做 $AU^{m+1} = BU^m$. 上式说明 $\|A^{-1}BU^m\|_2 \leq \|U^m\|_2$. 于是, 由式(1.12)得:

$$\begin{aligned} \|e^{m+1}\|_2 &= \|A^{-1}Be^m - \tau A^{-1}T^m\|_2 \leq \|e^m\|_2 + \tau \|A^{-1}\| \|T^m\|_2 \\ &\leq \|e^0\|_2 + \tau \|A^{-1}\| \sum_{l=0}^m \|T^l\|_2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

即 θ 格式解在 \mathbb{L}^2 范数意义下连续地依赖于初值和源项. 这说明条件(1.16)是 θ 格式 \mathbb{L}^2 稳定性的充分必要条件. \square

2 上机作业-抛物型方程

2.1 初值光滑的零边值问题

2.1.1 问题描述

我们考虑带有齐次 Dirichlet 边界条件的热传导方程标准模型问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \Omega, t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $\Omega = (0, 1)$. 方程(2.1)的精确解为:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x).$$

下面分别采用显式格式, 隐式格式和 Crank-Nicolson 格式来求解方程并给出相应的分析.

2.1.2 显式格式

在时间上用一阶向前差商 $\frac{\Delta_{+t}}{\Delta t}$ 近似一阶微商 $\frac{\partial}{\partial t}$, 在空间上用二阶中心差商 $\frac{\delta_x^2}{(\Delta x)^2}$ 近似二阶微商 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 我们得到如下显式格式:

$$\begin{cases} \frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\tau} = \frac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{h^2}, & 1 \leq j \leq N-1, m \geq 0, \\ U_j^0 = u_j^0, & 0 \leq j \leq N, \\ U_0^m = U_N^m = 0, & m \geq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

显式格式可以通过第 m 个时间层上的网格函数值 $U^m = \{U_j^m\}_{j=0}^N$ 直接计算出第 $m+1$ 个时间层上的网格函数值. 计算方法如下:

$$U^{m+1} = AU^m.$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\mu & \mu & & & \\ \mu & 1-2\mu & \mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu & 1-2\mu & \mu \\ & & & & \mu & 1-2\mu \end{bmatrix}.$$

定义截断误差算子:

$$T_{(h,\tau)} = \left(\frac{\Delta_{+t}}{\tau} - \frac{\delta_x^2}{h^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

利用 Taylor 展开式有:

$$Tu(x, t) = \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\tau - \frac{1}{12}u_{xxxx}(x, t)h^2 + O(\tau^2 + h^4). \quad (2.3)$$

方程(2.2)及其误差方程的等价形式为:

$$U_{j+1}^{m+1} = (1-2\mu)U_j^m + \mu U_{j+1}^m + \mu U_{j-1}^m, \quad (2.4)$$

$$e_{j+1}^{m+1} = (1-2\mu)e_j^m + \mu e_{j+1}^m + \mu e_{j-1}^m - \tau T_j^m. \quad (2.5)$$

下面分析方程的 \mathbb{L}^∞ 收敛性. 当 $\mu \leq 1/2$ 时方程满足最大值原理的条件, 最大值原理成立, 而且可以归纳地得到以下的 \mathbb{L}^∞ 稳定性:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}} \leq \max_{0 \leq j \leq N} |e_j^0| + \max_{0 < m\tau \leq tmax} \max\{|e_0^m|, |e_N^m|\} + tmax \|T\|_{\infty, \Omega_{tmax}}. \quad (2.6)$$

结合式(2.3)和式(2.6), 当 M_{tt} 和 M_{xxxx} 为有界量时有:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}} \leq C(M_{tt}\tau + M_{xxxx}h^2).$$

也可以表示为:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}} \leq \tau \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12\mu} \right) M_{xxxx} tmax.$$

或者

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}} \leq h^2 \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{12} \right) M_{xxxx} tmax.$$

这说明整体误差 $\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}}$ 与局部截断误差有相同的收敛阶 $O(\tau + h^2)$.

下面我们分析方程的 \mathbb{L}^2 收敛性. 将 $U_j^{(k)m} = \lambda_k^m e^{ik\pi j \Delta x}$ 代入齐次差分格式得到增长因子

$$\lambda_k = 1 - 4\mu \sin^2 \frac{k\pi \Delta x}{2}$$

利用 von Neumann 条件可知 $\mu \leq \frac{1}{2}$ 是显式格式 \mathbb{L}^2 稳定性的充分必要条件. 记差分格式(2.2)为 $U^{m+1} = \mathcal{N}(U^m)$, 此时我们有以下的 \mathbb{L}^2 稳定性:

$$\|e^{m+1}\|_2 = \|\mathcal{N}(e^m) - \tau T^m\|_2 \leq \|e^m\|_2 + \tau \|T^m\|_2 \leq \|e^0\|_2 + \tau \sum_{l=0}^m \|T^l\|_2. \quad (2.7)$$

注意到

$$\|T^l\|_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=-N+1}^N |T_j^l|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

结合式(2.3),(2.7)和(2.8)可以得到:

$$\|e^{m+1}\|_2 = O(\tau + h^2).$$

即解的误差在 \mathbb{L}^2 范数意义下与局部截断误差有相同的收敛阶.

2.1.3 显式格式数值实验

选取网格比 $\mu = \frac{1}{4}$, $t_{\max} = 1$, 图 2.1给出了所求数值解与真解的对比. 保持 $\mu = \frac{1}{4}$ 不变, 改变网格步长的大小. 在表 2.1, 表 2.2 和图 2.2 中展示了误差的 \mathbb{L}^∞ 范数和 \mathbb{L}^2 范数随空间步长的变化, 从表中可以看出随着空间步长的减小, 误差是不断减小的, 减小速率约为 $O(h^2)$, 符合理论分析, 同时我们注意到在 \mathbb{L}^∞ 范数和 \mathbb{L}^2 范数下的误差阶是相同的, 这是因为尽管采用了不同的范数计算误差, 但我们所使用的数值解是相同的, 因此在计算收敛阶的时候不会出现差别. 注意, 由于在这里我们固定 μ 不变, 此时空间步长和时间步长可以看成是一个变量, 因此仅需验证空间方向上的误差阶.

当然我们也可以考虑固定 h 不变, 通过变化 μ 的方式来使得 τ 变化来单独分析关于 τ 的收敛阶. 但注意这个时候我们不能通过 $\log_{\frac{h_2}{h_1}} \frac{\|e_{h_2}\|_\infty}{\|e_{h_1}\|_\infty}$ 来计算收敛阶, 因为此时空间方向上的误差会干扰到时间误差, 从而得不到 1 阶收敛性. 但我们可以通过类似第一次作业计算没有精确解时的收敛阶的方法来计算. 我们有如下关系:

$$U_{\tau,j} = u_j + C_1\tau + C_2h^2 + o(\tau + h^2),$$

从而有:

$$\|U_\tau - U_{\frac{\tau}{2}}\| \approx \frac{1}{2}C_1\tau.$$

这样我们就巧妙的消去了空间误差的影响. 相关的数值实验也验证了通过这样的办法可以得到时间方向上的一阶收敛性, 但这不是我们的重点, 限于篇幅, 我们不展示相关的数值结果.

下面我们考虑不稳定的情况, 令 $\mu = 0.502$ (如果 μ 选的比较大, 显式格式会以极快的速度发散到无穷, 不利于我们观察数值震荡过程, 因此我们选取接近 $\frac{1}{2}$ 的 μ). 图 2.3 展现了此时取不同 N 时的计算结果, 注意由于我们都是取 $t_{max} = 1$, 因此在 N 变大的时候, $h = \frac{1}{N}$ 减小, 从而 $\tau = h^2$ 减小, 这相当于我们走过了更多的时间步数. 我们可以看到, 在 $N = 32$ 时数值结果还基本保持稳定, 但随着 N 的增大, 逐渐出现了越来越剧烈的数值震荡, 最终在 $N = 256$ 的时候数值结果已经完全发散到了无穷. 这也与我们的理论分析相符.

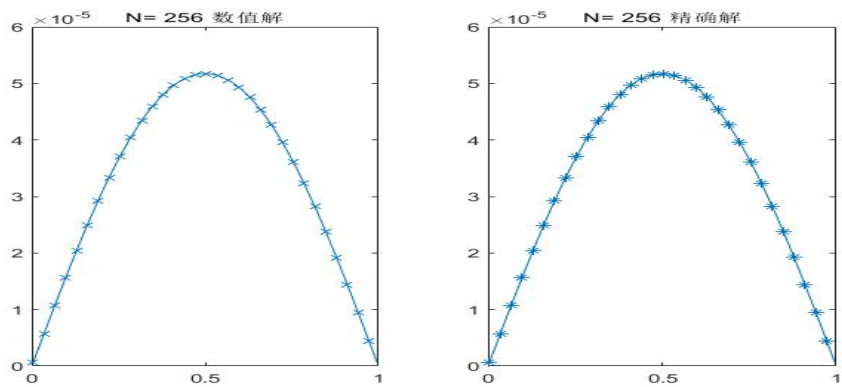
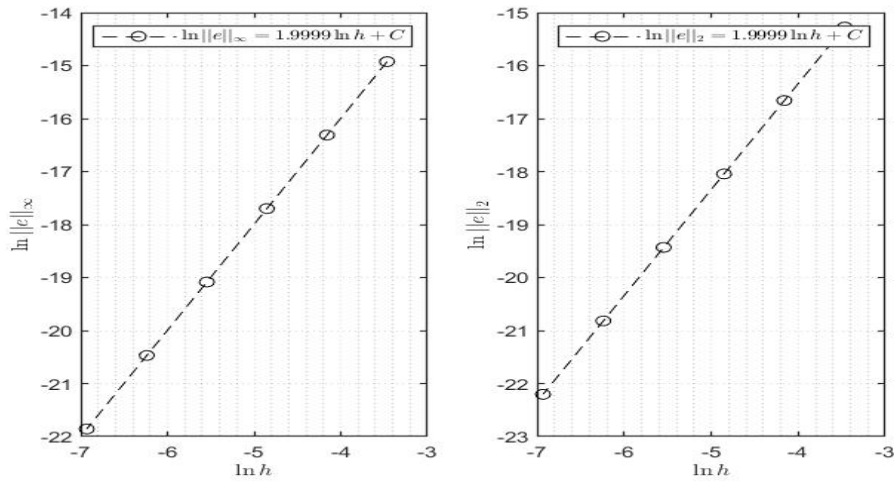


图 2.1: $N = 256$ 时使用显式格式得到的 $t=1$ 时刻的数值解和精确解

表 2.1: $\ e\ _\infty$ 随 h 变化						
空间步长 h	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _\infty$	$3.295e^{-7}$	$8.240e^{-8}$	$2.060e^{-8}$	$5.151e^{-9}$	$1.288e^{-9}$	$3.219e^{-10}$
收敛阶		1.9996	1.9999	2.0000	2.0000	2.0000

表 2.2: $\|e\|_2$ 随 h 变化

空间步长	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _2$	$2.330e^{-7}$	$5.827e^{-8}$	$1.457e^{-8}$	$3.642e^{-9}$	$9.105e^{-10}$	$2.276e^{-10}$
收敛阶		1.9996	1.9999	2.0000	2.0000	2.0000

图 2.2: $\ln \|e\|_\infty$ 和 $\ln \|e\|_2$ 随 $\ln h$ 的变化

2.1.4 隐式格式

在时间上用一阶向后差商 $\frac{\Delta_{-t}}{\Delta t}$ 近似一阶微商 $\frac{\partial}{\partial t}$, 在空间上用二阶中心差商 $\frac{\delta_x^2}{(\Delta x)^2}$ 近似二阶微商 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. 我们得到如下隐式格式 (简写版):

$$\frac{U_i^{m+1} - U_i^m}{\tau} = \frac{U_i^{m+1} - 2U_i^{m+1} + U_{i-1}^{m+1}}{h^2}. \quad (2.9)$$

隐式格式的求解需要求解如下线性方程组:

$$AU^{m+1} = U^m.$$

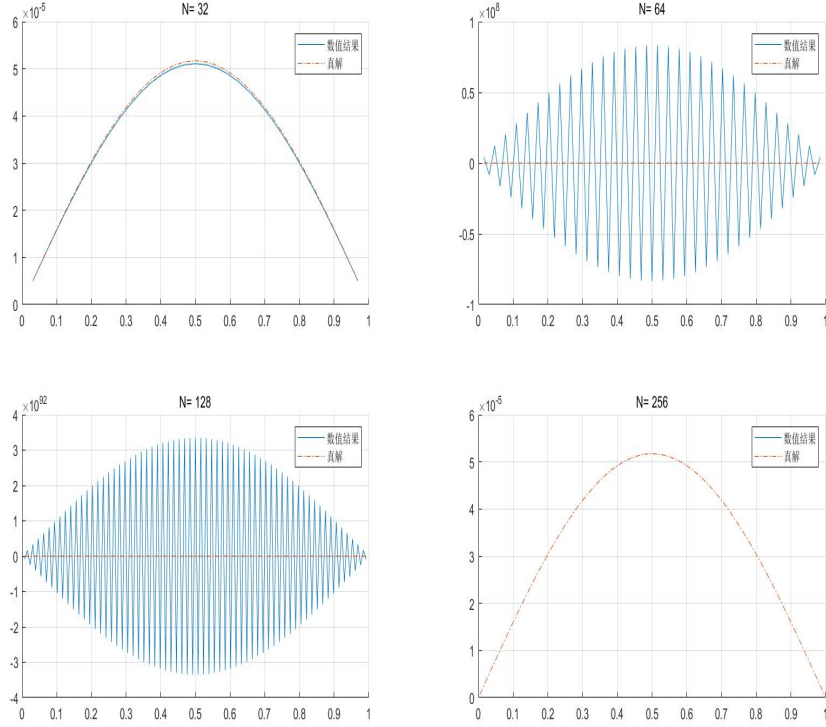


图 2.3: $\mu=0.502$ 时不同 N 值数值计算结果和精确解的对比

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\mu & -\mu & & & \\ -\mu & 1+2\mu & -\mu & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\mu & 1+2\mu & -\mu \\ & & & & -\mu & 1+2\mu \end{bmatrix}.$$

定义截断误差算子:

$$T_{(h,\tau)} = \left(\frac{\Delta_{-t}}{\tau} - \frac{\delta_x^2}{h^2} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

利用 Taylor 展开式, 其截断误差算子为:

$$Tu(x, t) = -\frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\tau - \frac{1}{12}u_{xxxx}(x, t)h^2 + O(\tau^2 + h^4). \quad (2.10)$$

将方程(2.9)及其误差方程写为等价形式:

$$(1 + 2\mu)U_j^{m+1} = U_j^m + \mu(U_{j-1}^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}), \quad (2.11)$$

$$(1 + 2\mu)e_j^{m+1} = e_j^m + \mu(e_{j-1}^{m+1} + e_{j+1}^{m+1}) - \tau T_j^{m+1}. \quad (2.12)$$

注意到对任意的 $\mu > 0$, 方程的右端系数为正且其和等于左端系数, 由此知方程无条件满足最大值原理, 类似显式格式的推导过程 (实际上在第 1 节关于 θ 格式的证明中已经将此涵盖), 可得方程具有 \mathbb{L}^∞ 稳定性, 进而得到如下的 \mathbb{L}^∞ 收敛性:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{t_{\max}}} \leq h^2 \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{12} \right) M_{xxx} t_{\max}.$$

也即 $\|e\|_{\infty, \Omega_{t_{\max}}} = O(\tau + h^2)$.

将 $U_j^m = \lambda_k^m e^{ik\pi j \Delta x}$ 代入差分格式可以得到增长因子为:

$$\lambda_k = \frac{1}{1 + 4\mu \sin^2 \frac{k\pi \Delta x}{2}}$$

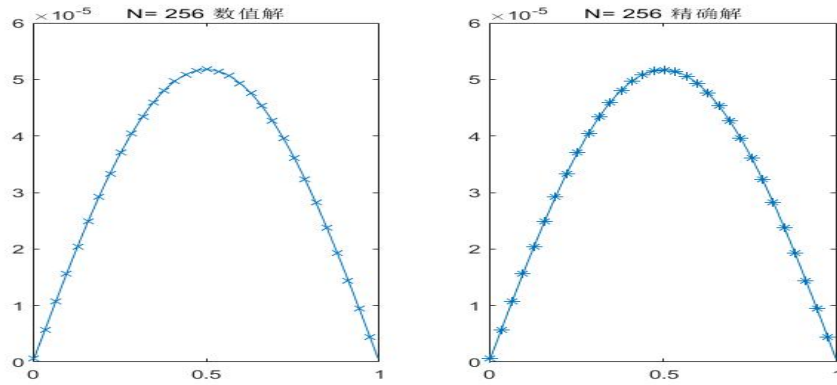
由第 1 节的证明我们知道 von Neumann 条件对于隐式格式也是充要的. 因此隐格式是无条件 \mathbb{L}^2 稳定的. 从而类似显式格式的分析我们有:

$$\|e^{m+1}\|_2 = O(\tau + h^2).$$

2.1.5 隐式格式数值实验

选取网格比 $\mu = \frac{1}{4}$, $t_{\max} = 1$, 图 2.4 给出了所求数值解与真解的对比. 保持 $\mu = \frac{1}{4}$ 不变, 改变网格步长的大小. 在表 2.3, 表 2.4 和图 2.5 中展示了误差的极大范数随空间步长的变化, 从图表中可以看出随着空间步长的减小, 误差是不断减小的, 减小速率约为 $O(h^2)$, 符合理论分析. 同显式格式一样, 我们只分析空间方向上的收敛阶.

同时, 由于隐式格式的无条件稳定性, 即使我们将 μ 选的很大, 依然可以得到收敛的数值结果. 图 2.6 给出了 $\mu = 10$ 时的数值解和真解的对比, 可以看到数值结果是收敛的, 符合我们的理论分析.

图 2.4: $N = 256$ 时使用隐式格式得到的 $t=1$ 时刻的数值解和精确解表 2.3: $\|e\|_\infty$ 随 h 变化

空间步长 h	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _\infty$	$9.084e^{-7}$	$2.256e^{-7}$	$5.631e^{-8}$	$1.407e^{-8}$	$3.517e^{-9}$	$8.793e^{-10}$
收敛阶		2.0095	2.0024	2.0006	2.0001	2.0000

2.1.6 Crank-Nicolson 格式

在 $(x, t + \frac{1}{2}\Delta t)$ 点处, 采用关于时间的二阶中心差商代替微商, 用 $(x, t + \Delta t)$ 和 (x, t) 两点关于空间的二阶中心差商 $\frac{\delta_x^2}{(\Delta x)^2}$ 平均值代替二阶微商, 得到如下 CN 格式 (简化版):

$$\frac{U_j^{m+1} - U_j^m}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{m+1} - 2U_j^{m+1} + U_{j-1}^{m+1}}{h^2} \right).$$

表 2.4: $\|e\|_2$ 随 h 变化

空间步长	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _2$	$6.423e^{-7}$	$1.595e^{-7}$	$3.982e^{-8}$	$9.950e^{-9}$	$2.487e^{-9}$	$6.218e^{-10}$
收敛阶		2.0095	2.0024	2.0006	2.0001	2.0000

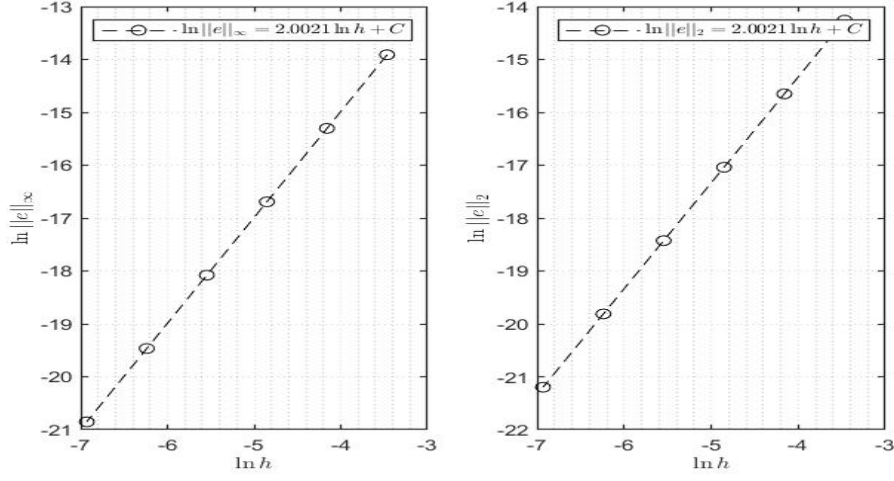


图 2.5: $\ln ||e||_\infty$ 和 $\ln ||e||_2$ 随 $\ln h$ 的变化

CN 格式的求解需要求解以下线性方程组:

$$AU^{m+1} = BU^m.$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \mu & -\frac{1}{2}\mu & & & \\ -\frac{1}{2}\mu & 1 + \mu & -\frac{1}{2}\mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{2}\mu & 1 + \mu & -\frac{1}{2}\mu \\ & & & -\frac{1}{2}\mu & 1 + \mu \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \mu & \frac{1}{2}\mu & & & \\ \frac{1}{2}\mu & 1 - \mu & \frac{1}{2}\mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2}\mu & 1 - \mu & \frac{1}{2}\mu \\ & & & \frac{1}{2}\mu & 1 - \mu \end{bmatrix}.$$

利用 u 在 $(x_j, t_{m+\frac{1}{2}})$ 的 Taylor 展开式可得到 CN 格式的局部截断误差:

$$T_j^{m+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12} [u_{ttt}\tau^2 + u_{xxxx}h^2]_j^{m+\frac{1}{2}} + O(\tau^4 + h^4).$$

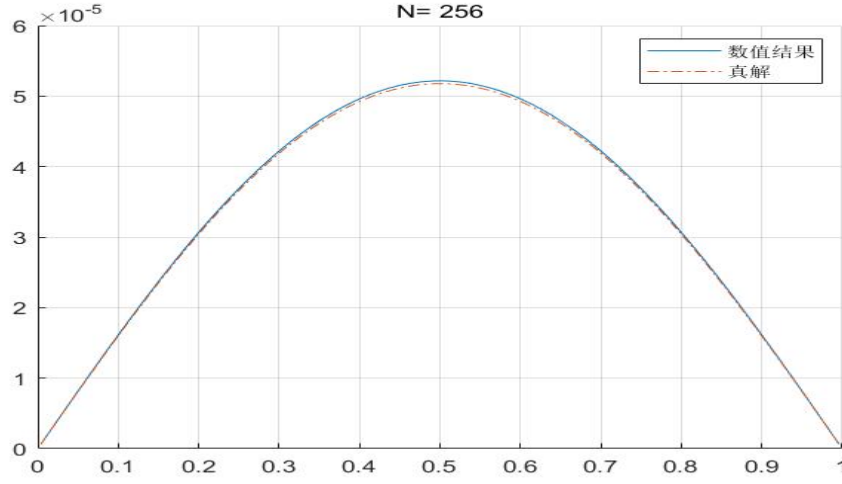


图 2.6: $\mu = 10, N = 256$ 时的数值解和精确解

类似第 1 节的分析, CN 格式及其误差方程的等价形式为:

$$\begin{aligned} (1 + \mu)U_j^{m+1} &= (1 - \mu)U_j^m + \frac{\mu}{2}(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m + U_{j-1}^{m+1} + U_{j+1}^{m+1}), \\ (1 + \mu)e_j^{m+1} &= (1 - \mu)e_j^m + \frac{\mu}{2}(e_{j-1}^m + e_{j+1}^m + e_{j-1}^{m+1} + e_{j+1}^{m+1}) - \tau T_j^{m+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

同样, 由第 1 节分析, 将 θ 取为 $\frac{1}{2}$, 我们知道当 $\mu \leq 1$ 时, CN 格式满足最大值原理条件. 方程具有 \mathbb{L}^∞ 稳定性, 进而得到如下的 \mathbb{L}^∞ 收敛性:

$$\|e\|_{\infty, \Omega_{tmax}} = O(\tau^2 + h^2).$$

将 Fourier 波型 $U_j^m = \lambda_k^m e^{ik\pi j\Delta x}$ 代入差分格式可以得到增长因子为:

$$\lambda_k = \frac{1 - 2\mu \sin^2 \frac{k\pi\Delta x}{2}}{1 + 2\mu \sin^2 \frac{k\pi\Delta x}{2}}.$$

可以看出 CN 格式是无条件 \mathbb{L}^2 稳定的. 进而由第 1 节分析知 CN 格式的无条件 \mathbb{L}^2 收敛性:

$$\|e^{m+1}\|_2 = O(\tau^2 + h^2).$$

但需要注意的是, 尽管无条件 \mathbb{L}^2 稳定, 这并不意味着我们可以直接使用非常大的 μ 来计算. 从 CN 格式 \mathbb{L}^2 稳定性的角度来看, 我们需要注意到在 μ 比较大的时候, 尽管 $|\lambda_k| \leq 1$ 仍然成立, 但对于某些频率较高的波 (即 k

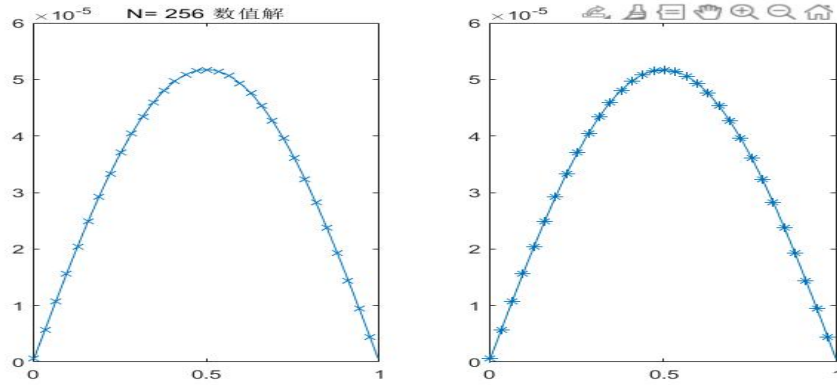
较大), 由于此时 $\sin^2 \frac{k\pi\Delta x}{2}$ 较大, 再乘以一个比较大的 μ 会使得 $\lambda_k < 0$, 并且 λ_k 接近 -1 . 那么此时如果初值含有较为明显的高频项 (比如初值不光滑时), λ_k 作用在相应的波型上, 就会产生局部数值振荡, 尽管在算了足够多的时间步长之后, 由于 $|\lambda_k| \leq 1$, 这些引起局部震荡的高频项会渐渐被磨光, 但这仍不是我们希望看到的. 因此应该先采用较小的 μ (即较小的时间步长), 当数值解变化比较平缓时, 再采用较大的 μ , 以提高效率. 需要说明的是, 尽管在 $\mu > \frac{1}{2}$ 时就可能出现 $\lambda_k < 0$ 的情况, 但在 $\mu \leq 1$ 的时候对满足 $\lambda_k < 0$ 的 k 我们有 $|\lambda_k| \ll 1$, 因此此时并不会出现很大的数值振荡, 因此我们的分析与方程的 \mathbb{L}^∞ 稳定性并不矛盾. 我们会在之后的数值实验中看到相关的数值结果.

2.1.7 Crank-Nicolson 格式数值实验

选取网格比 $\mu = \frac{1}{4}, t_{\max} = 1$, 图 2.7给出了所求数值解与真解 (这里的真解是在稳定情况下算出来的数值解) 的对比. 保持 $\mu = \frac{1}{4}$ 不变, 改变网格步长的大小. 在表 2.5, 表 2.6 和图 2.8中展示了误差的极大范数随空间步长的变化, 从图表中可以看出随着空间步长的减小, 误差是不断减小的, 减小速率约为 $O(h^2)$, 符合理论分析.

对于 CN 格式, 由我们的理论分析, 如果将 μ 取得很大, 有可能在计算过程中出现剧烈的数值振荡, 图给出了 $\mu = 100$ 时的计算结果, 可以看到在我们所选的光滑初值的情况下, 即使我们将 μ 取得很大, 也并没有观测到数值震荡, 推测可能是所选函数不含有高频波所导致的. 我们将在下一节关于非光滑初值的计算中观测到不同的数值结果. 注意, 尽管看上去在 N 较小的时候数值解和精确解不重合, 但这是由于此时的精确解本身的数值就很小 (比 N 较小的时候 h^2 的数量级还小), 因此尽管从图片上能看出数值解和精确解的差别, 但实际上是满足收敛阶的, 并不与理论分析矛盾.

表 2.5: $\ e\ _\infty$ 随 h 变化						
空间步长 h	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _\infty$	$2.865e^{-7}$	$7.142e^{-8}$	$1.784e^{-8}$	$4.460e^{-9}$	$1.115e^{-9}$	$2.787e^{-10}$
收敛阶		2.0042	2.0010	2.0003	2.0001	2.0000

图 2.7: $N = 256$ 时使用 CN 格式得到的 $t=1$ 时刻的数值解和精确解表 2.6: $\|e\|_2$ 随 h 变化

空间步长	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024
误差 $\ e\ _2$	$2.026e^{-7}$	$5.050e^{-8}$	$1.262e^{-8}$	$3.153e^{-9}$	$7.883e^{-10}$	$1.971e^{-10}$
收敛阶		2.0042	2.0010	2.0003	2.0001	2.0000

2.2 初值不光滑的零边值问题

2.2.1 问题描述

将式(2.1)中的初值替换为以下的非光滑初值:

$$u_0(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ -4x + 2 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ -4x + 4 & \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

式(2.13)如图 2.10所示. 下面我们将对以此为初值的零边值问题进行数值分析, 可以看到这个初值包含较为明显的高频项. 由于前文已经详细的叙述了相关理论, 因此本节我们直接进入数值实验.

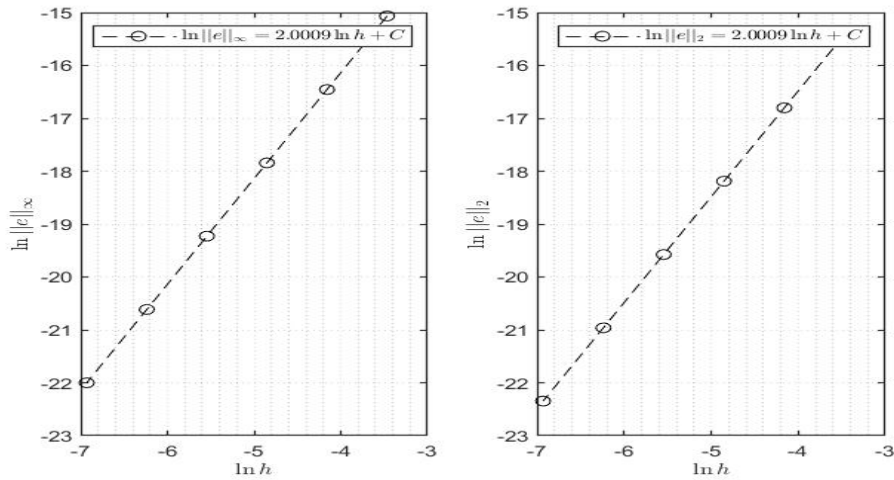


图 2.8: $\ln ||e||_\infty$ 和 $\ln ||e||_2$ 随 $\ln h$ 的变化

2.2.2 数值实验

此时我们仍然取 $t_{\max} = 1$. 实际上非光滑初值问题的计算结果除了 CN 格式, 与光滑初值基本都是类似的, 比如图 2.11和图 2.12所计算的显式格式不稳定情形和隐式格式 μ 较大的情形都与之前的光滑初值具有相似的数值特性, 区别只在显式格式在时间步数更少的时候振荡就已经比较剧烈(这也符合我们的分析, 因为非光滑初值含有的高频项更多). 唯一需要注意的是由于此处未知真解, 收敛阶的分析需要用第一次作业未知真解情形的 $\ln ||U_h - U_{h/2}||$ 来进行. 但这并非我们的重点, 因此由于篇幅原因, 我们不在这里放上这些不重要的数值结果. 本节的重点在于观察 μ 较大的时候 CN 格式计算结果所出现的数值振荡.

下面我们来观察 CN 格式的计算结果, 图 2.13是在 $\mu = 100$ 时 CN 格式的计算结果, 可以看到与光滑初值不同的是此时在 N 较小的时候出现了较为剧烈的数值振荡, 随着 N 越来越大(即时间步数越来越多), 逐渐向精确解靠近, 最后在 $N = 512$ 的时候数值振荡已经基本消失. 而这也与我们的理论分析是相符合的.

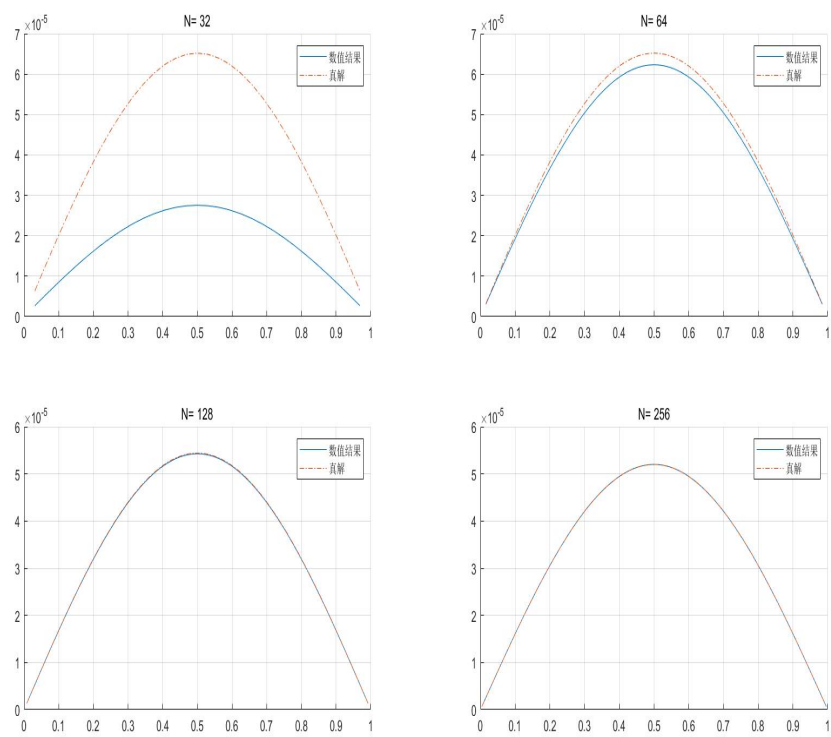


图 2.9: $\mu=100$ 时不同 N 值数值计算结果和精确解的对比

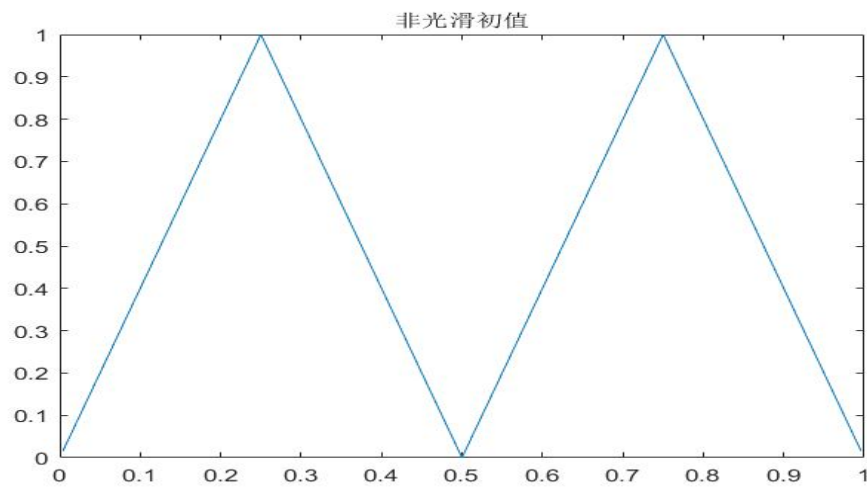


图 2.10: 非光滑初值的图像

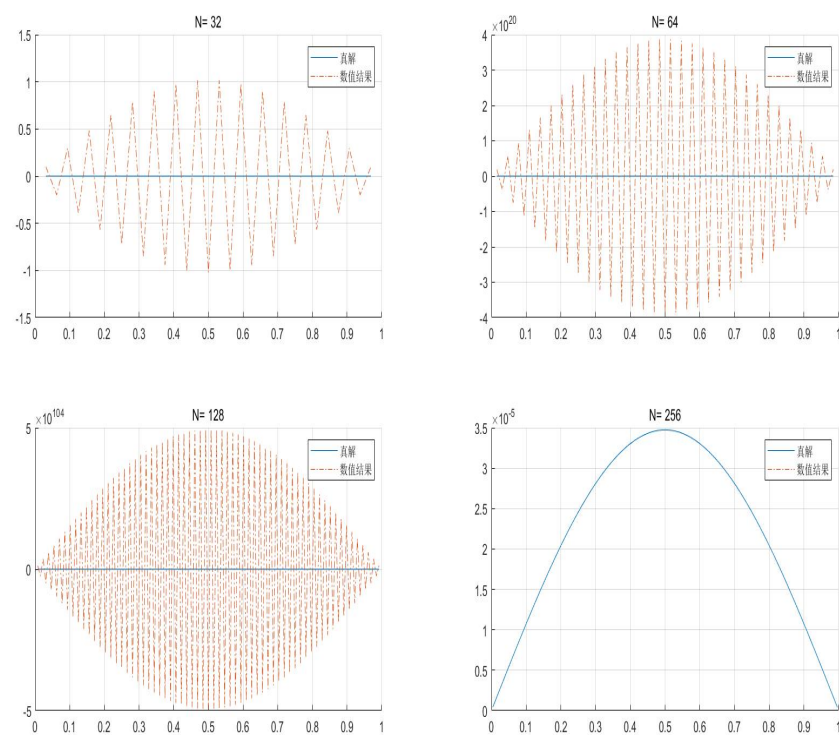


图 2.11: $\mu=0.502$ 时显式格式数值结果和精确解的对比

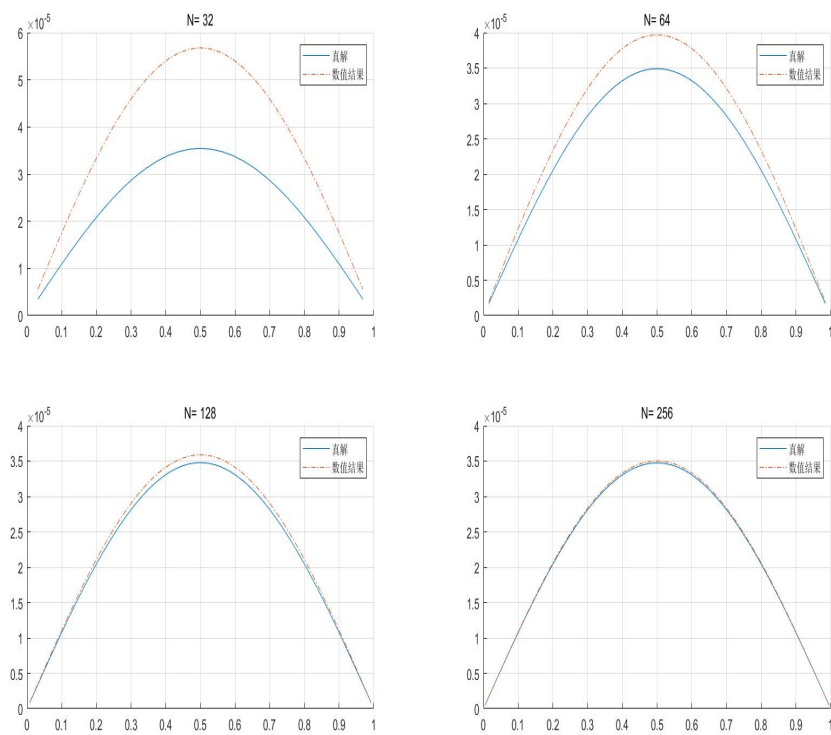


图 2.12: $\mu=10$ 时隐式格式数值结果和精确解的对比

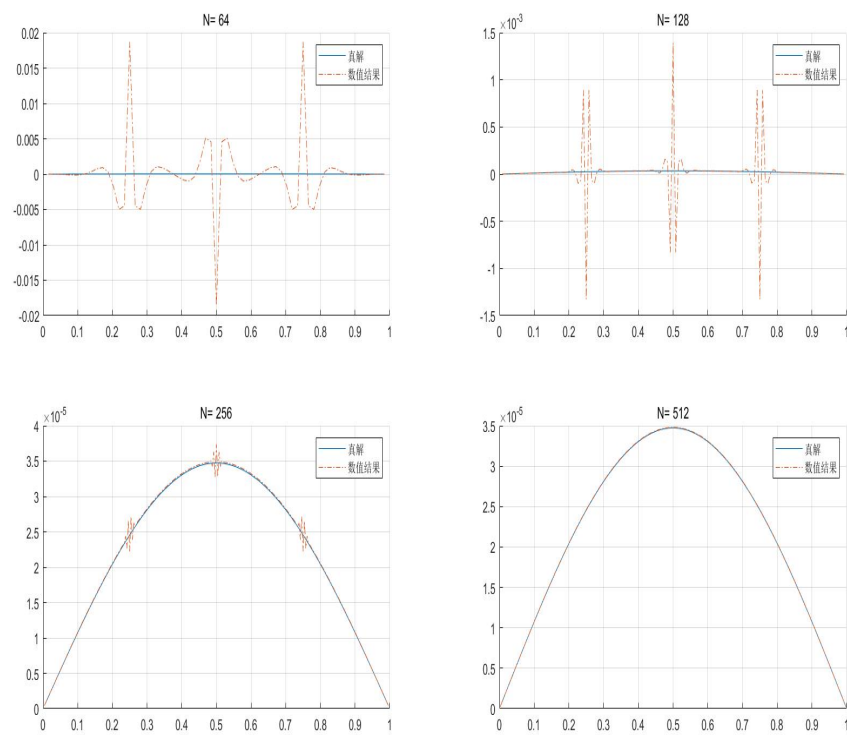


图 2.13: $\mu=100$ 时 CN 格式数值结果和精确解的对比