

基于运动学仿真与优化算法的烟幕干扰弹投放策略

摘要

针对问题一，我们在空间中精确地建立了综合导弹、无人机和烟幕弹的运动学模型，其中烟幕弹的轨迹涉及到抛体运动与起爆后烟幕云团的匀速下沉。在该问题中，我们认为有效遮蔽是指真目标完全被烟幕弹遮挡，依此将导弹对真目标的视线简化为到圆柱体轮廓边界上四个对径点的连线。最终，通过高精度离散时间步进的数值仿真方法，精确求解了在给定策略下的有效遮蔽时长 1.392s。

针对问题二，我们将单弹最优投放问题抽象为一个以无人机飞行速度、方向、投放时间及起爆延迟为决策变量的四维参数优化模型。由于目标函数高度非线性且无解析解，我们设计了一种两阶段混合随机优化算法。该算法首先通过大规模蒙特卡洛模拟进行全局探索，以快速定位高潜力解区域；随后，以此为基础进行多轮迭代式的局部搜索，逐步缩小邻域范围以精细化求解，最终寻得了最大化单弹遮蔽时间的最优策略，该策略下遮蔽过程可持续 4.589s。

针对问题三，为解决单架无人机投放三枚烟幕弹的八参数高维优化问题，我们引入了差分进化算法。算法通过模拟生物进化的“变异-交叉-选择”机制，在复杂的八维解空间中进行高效的全局搜索，有效避免了陷入局部最优解。我们还正确处理了多个烟幕云团遮蔽时间区间并集的计算方式，避免了重叠时长的重复累加的问题，最终获得了一套使总遮蔽时间最大化的最优投放时序策略，三枚烟幕弹总遮蔽区间达 7.6s。

针对问题四，为了解决三架无人机协同作战的十二维复杂问题，我们设计并实现了一种先进的协同进化算法。该算法将高维问题分解为三个与各无人机对应的四维子问题，并为每个子问题维护一个独立的进化种群。通过“协同适应度评估”机制，即单机策略的优劣取决于其与其它种群最优个体组合后的团队表现，实现了各种群的并行优化和隐式协同，成功解决了高维协同决策难题。最终有效烟幕弹遮挡可持续 11.6s。

针对问题五，为了求解这个四十个参数的庞大优化问题，我们首先通过分析无人机与导弹的初始空间方位确定无人机发射的每枚烟幕干扰弹与导弹之间的对应关系，理解烟幕弹对导弹合理的遮蔽顺序，将问题拆分为相对独立的烟幕弹-导弹子组合优化问题。我们对这些子问题分别利用局部爬山、网格采样等方法寻找最优解，最后将这些相对独立的最优解合并为相对准确的全局解，极大的提高了无人机投放烟幕干扰弹对多导弹系统的总体遮蔽时间，体系总对导弹遮蔽时长可达 43s。

关键词： 烟幕干扰；运动学建模；数值仿真；差分进化算法；协同进化算法

1 问题重述

1.1 问题背景

烟幕干扰弹是一种防御性装备，它通过燃烧或爆炸的方式，在指定区域或目标前方生成能够遮蔽视线和信号的烟雾或气溶胶。其核心功能是阻碍并干扰敌方导弹的制导系统，使其无法准确命中目标。这种装备因其较低的成本和高效的作战效能而备受青睐。在现代技术推动下，烟幕干扰弹的作战方式也更为先进，可以通过无人机等载具投送到精确的预定位置，并利用时间引信来精准控制引爆时机，进而实现对特定地点的有效干扰。

在本题情境中，假设无人机具备长时间续航能力，并能在接到命令后选择飞行方向和速度。无人机在匀速飞行过程中可择时投放烟幕干扰弹，干扰弹在释放后受到重力影响下落，并在延迟起爆后瞬间形成半径 10m 的球形烟幕云团。该烟幕会以 3m/s 匀速下沉，并在有限时间内对目标形成有效遮蔽。任务目标是通过合理的投放策略，使得来袭导弹无法在飞行过程中识别真实目标，从而实现防护效果。

1.2 问题要求

需要针对不同作战条件建立数学模型，设计无人机的投放策略，使真目标在导弹来袭过程中尽可能长时间处于有效遮蔽之下。需综合考虑无人机的飞行方向与速度、干扰弹的投放点、延迟起爆时间以及遮蔽效果等因素。具体问题如下所述：

问题一：在给定条件下（无人机 FY1 以固定航向和速度飞行，并按指定时间投放与起爆干扰弹），计算该干扰弹对导弹 M1 的有效遮蔽时间。

问题二：在单枚干扰弹的情形下，优化无人机 FY1 的飞行方向、速度、投放点和起爆时刻，使其对 M1 的遮蔽时间最大化。

问题三：无人机 FY1 投放 3 枚干扰弹，设计其投放与起爆方案，并将结果输出至 `result1.xlsx` 文件。

问题四：由 FY1、FY2、FY3 三架无人机分别投放 1 枚干扰弹，给出整体的投放策略，并将结果输出至 `result2.xlsx` 文件。

问题五：考虑 5 架无人机协同作战，每架最多投放 3 枚干扰弹，需对抗导弹 M1、M2、M3，设计整体投放方案，并将结果输出至 `result3.xlsx` 文件。

2 问题分析

2.1 问题一分析

问题一要求计算在特定条件下，利用无人机 FY1 投放的烟幕干扰弹对导弹 M1 的有效遮蔽时长。为此，我们首先建立了**运动状态模型**，描述了导弹、无人机和烟幕弹的运动轨迹。导弹和无人机被简化为匀速直线运动，而烟幕弹的运动则被分为两个阶段：脱离无人机后的抛体运动，以及起爆后的匀速下沉运动，这些都通过三维向量方程进行精确建模。

接着，我们构建了一个**分级物理遮蔽模型**，用以精确判断导弹的视线是否被烟幕云团有效阻挡。该模型首先进行第一优先级判断，即导弹本身是否已飞入烟幕云团内部，若导弹质心与云团球心的距离小于烟幕半径，则直接判定为有效遮蔽。仅当导弹在云团外部时，模型才启动第二优先级判断，即基于动态轮廓的外部遮蔽模型。为精确模拟视觉锁定，我们将目标简化为从导弹视角观察到的四个关键轮廓点，并利用向量投影原理进行判定。如果满足烟幕云真实地位于导弹与目标之间，且其球心到全部四条视线线段的最短距离均小于烟幕半径这一条件，方能认为遮蔽有效。

最后，我们通过**数值仿真**的方法，以极小的时间步长对整个过程进行模拟。通过不断更新各物体的实时位置，并持续检测遮蔽条件，我们累加了所有满足遮蔽条件的有效时间，最终求解出了总的有效遮蔽时长。

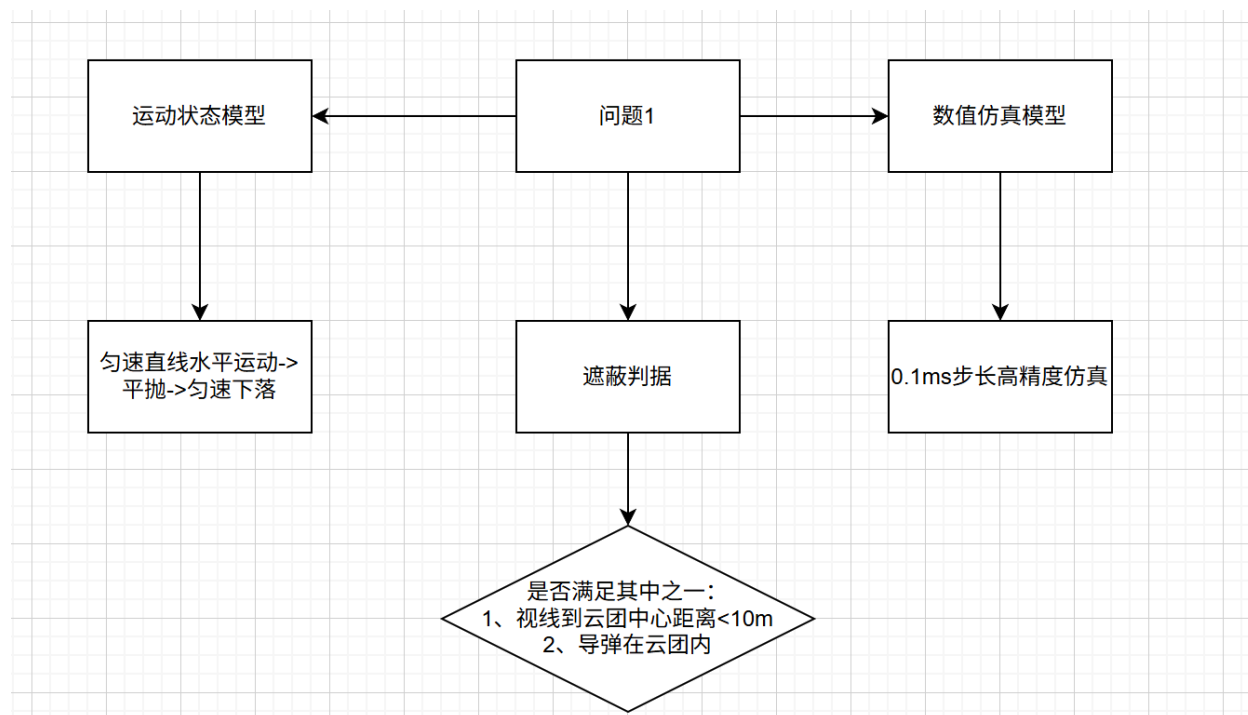


图 1: 问题一流程图

2.2 问题二分析

问题二的核心在于优化无人机的飞行策略，以实现对导弹 M1 的最长有效遮蔽时间。为了解决这个多变量优化问题，我们首先将问题转化为一个数学模型，其关键在于识别决策变量、定义目标函数以及设计优化算法。

首先，我们确定了四个核心**决策变量**：无人机的飞行速度、飞行方向、烟幕弹的投放时间以及起爆延迟。这些变量在给定的约束范围内可自由调整，它们的组合直接决定了遮蔽效果。

接着，我们构建了**目标函数**，即在特定策略下计算出的总有效遮蔽时间。该函数依赖于问题一中建立的运动学和几何模型，通过高精度仿真来量化每个策略的有效性。

最后，由于该优化问题高度非线性且无解析解，我们设计了一种**两阶段混合随机优化算法**来寻找最优解。第一阶段是全局探索，通过在整个解空间内进行大规模随机采样，以找到潜在最优解的大致区域。第二阶段是迭代式局部寻优，通过在第一阶段找到的最佳解周围逐步缩小搜索范围，进行更精细的采样，从而更准确地逼近最优解。这种方法有效地平衡了搜索广度和深度，确保了找到一个高质量的解决方案。

2.3 问题三分析

问题三将任务复杂度从问题二的基础上进行扩展，要求利用无人机 FY1 投放三枚烟幕干扰弹，实现对导弹 M1 的最大总有效遮蔽时间。为了应对决策变量维度的大幅增加，我们首先将问题建模为高维度的优化问题。决策变量从原来的 4 个扩展为 8 个，除了无人机的飞行速度和方向，还增加了三枚烟幕弹各自的投放时间间隔和起爆延迟。接着，我们重新构建了目标函数，该函数旨在最大化所有烟幕弹遮蔽时间段的并集长度，从而确保即使遮蔽时间存在重叠也能被正确计算。

面对如此高维度的解空间，常规的随机搜索算法效率低下。因此，我们引入了更强大的**差分进化算法**来求解。该算法通过模拟自然界的进化过程来寻找最优解。首先，它初始化一个包含多个随机解的种群。然后，在每一代进化中，算法对每个解进行变异、交叉和选择操作。**变异**通过随机选择三个解的向量差分来探索新的可能解；**交叉**则将变异后的新解与原有个体进行混合；**选择**则根据目标函数的适应度，保留更优的解进入下一代。通过这种迭代进化，算法能够高效地高维空间中收敛到最优解，从而找到一个使三枚烟幕弹总遮蔽时间最长的最佳投放策略。

2.4 问题四分析

为了解决这个复杂的协同优化问题，我们采用了**协同进化算法**。该算法将一个大型的复杂问题分解为多个子问题，并同时对其进行优化：

- **独立种群**：我们为每一架无人机建立一个独立的种群，每个种群中的个体代表各自的投放策略，包括飞行速度、飞行方向、投放时间以及起爆延迟。
- **协同评估**：每个个体的优劣不再是独立评判的。相反，在计算适应度时，算法会从其他无人机的种群中选取当前的最优个体，与待评估的个体组成一个“团队”。这个团队的整体表现（即总有效遮蔽时间）将作为该个体的适应度值。
- **独立进化**：每个种群都独立地进行差分进化，通过变异、交叉和选择操作来提升自身的适应度。然而，由于评估机制依赖于协同表现，这种进化过程会自然地引导每个种群中的个体向那些能够与其他无人机策略良好配合的解方向发展。

这种“独立进化，协同评估”的机制，使得我们能够有效地在庞大且相互关联的解空间中进行搜索，避免了将所有变量组合成一个巨大解向量的低效做法。最终，该算法能够找到一个由三套最优策略组成的组合，从而实现了三枚烟幕弹对导弹 M1 的最大总有效遮蔽时间。

2.5 问题五分析

问题五在前四个问题的基础上进一步拓展，涉及到多架无人机、多枚烟雾弹、多枚导弹的复杂系统的高维多峰优化问题。在 40 个变量的共同影响下，即使是进化算法也面临搜索空间过大的问题。

为了解决这个优化问题，我们首先从**空间分析**入手，注意到各无人机依次投放烟雾弹与遮蔽目标导弹的**时序对应关系**。如图 2，由于这些对应关系形成的烟雾弹-导弹组合两两发生的时间和空间距离相对较远，基本互相独立，我们就可以将整个 40 维空间拆分为分别对这些组合进行优化的子空间。

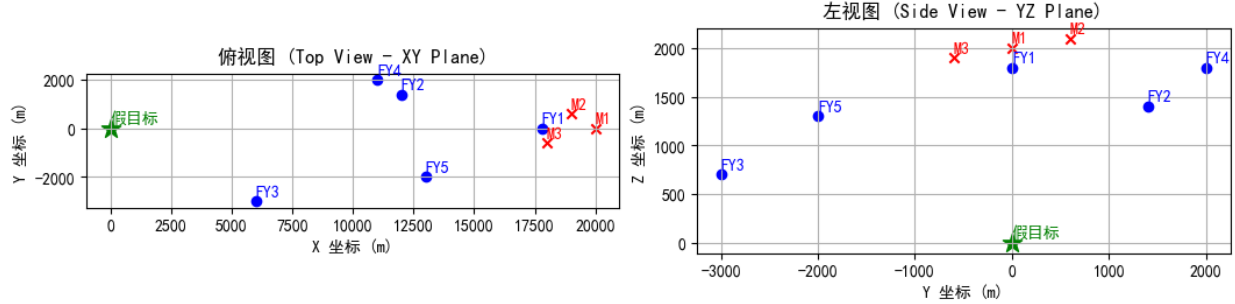


图 2: 导弹与无人机空间分布图

接下来，我们对每个组合进行局部优化，具体方法是通过**网格搜索法**确定宏观上最重要的无人机飞行速度和角度，得到一组基本的无人机参数，然后通过**局部爬山法**针对给定的无人机参数优化得到最合适的三枚烟雾弹投放参数。

最后，通过将这些烟雾弹-导弹遮蔽组合的优化结果结合起来并且剔除时间重复区间，我们就能够得到相对较优的烟幕干扰弹投放策略，得以大大提高在敌方导弹打击下对真目标的掩护时间。

3 模型假设

为简化问题，本文做出以下假设：

- **运动简化假设：**来袭导弹和无人机在各自的飞行阶段都视为理想质点，其运动轨迹为严格的直线。无人机受领任务后，其飞行方向和速度一旦确定便不再调整。无人机投放烟雾弹的瞬间，烟雾弹的速度与其保持一致。
- **物理效应简化假设：**烟雾弹脱离无人机后，只受重力影响，忽略空气阻力、风力等其他力。烟雾云团起爆后瞬间形成球形，且该球体的中心以恒定速度匀速下沉，忽略云团在形成过程中的动态扩散。烟雾云团的遮蔽能力被简化为完全遮蔽，即只要视线被烟雾云团完全阻挡，导弹就无法发现目标。
- **几何与遮蔽判定假设：**真目标被简化为理想圆柱体，其表面光滑，不考虑任何不规则形状。导弹对真目标的视线被简化为从导弹中心到真目标圆柱体轮廓边界四条直线的直线。烟雾云团被简化为理想球体，其半径恒定。当导弹本身已位处烟雾云团内部，或烟雾球体完全阻挡所有四条视线时，视为完全有效遮蔽。(参见图 3)

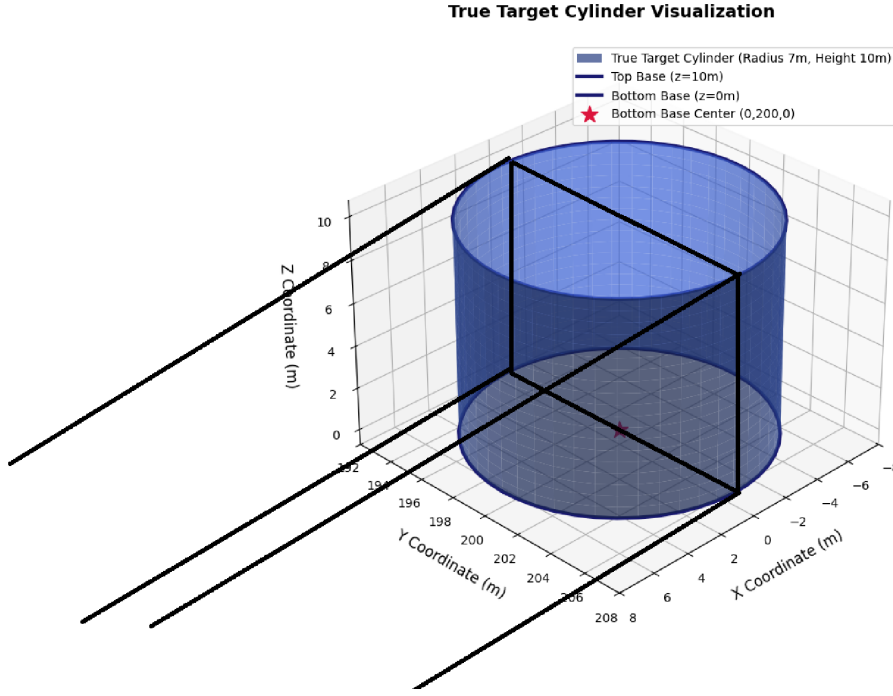


图 3: 真目标圆柱体及导弹从近似无穷远处观察得到的视线轮廓

- **协同与优化假设:** 在多无人机协同投放时, 各无人机之间的策略相互独立但协同作用, 其整体遮蔽效果可以通过叠加计算来评估。在优化过程中, 我们假设存在一个最优解, 并且所采用的优化算法 (如差分进化算法) 能够有效地在多维参数空间中搜索并收敛到该最优解。

4 符号说明

我们在表 1 中详细列出了本文中所有被使用符号的说明。

5 问题一的模型的建立和求解

问题一要求计算在特定飞行策略下, 由无人机 FY1 投放的单枚烟幕弹对来袭导弹 M1 的有效遮蔽时长。为解决此问题, 我们需建立一个三维动态仿真模型, 精确描述导弹、无人机、烟幕弹 (及其形成的烟幕云团) 和真假目标的时空关系, 并构建严格的几何遮蔽判定准则。

5.1 模型建立

我们首先建立一个以假目标为原点 $O(0, 0, 0)$ 的三维直角坐标系, 并对场景中的各个运动对象进行运动学建模。

表 1: 符号说明

符号	说明	单位
通用物理与时间符号		
t	仿真时间	s
$\vec{P}(t)$	某一物体在 t 时刻的位置向量	m
\vec{g}	重力加速度向量 (0, 0, -9.8)	m/s ²
导弹与无人机运动参数		
v_M	导弹的速率	m/s
\vec{v}_M	导弹的速度向量	m/s
v_U	无人机的飞行速率	m/s
\vec{v}_U	无人机的飞行速度向量	m/s
θ_U	无人机飞行方向与 x 轴正向的夹角	rad
烟幕弹与目标参数		
t_{drop}	烟幕弹的投放时刻	s
t_{delay}	烟幕弹的起爆延迟	s
t_{det}	烟幕弹的实际起爆时刻	s
$\Delta t_{d2}, \Delta t_{d3}$	连续投放烟幕弹的时间间隔	s
\vec{P}_{det}	烟幕弹的起爆点位置向量	m
\vec{v}_{sink}	烟幕云团的下沉速度向量 (0, 0, -3)	m/s
R_{smoke}	烟幕云团的半径	m
R_{target}	真目标的圆柱半径	m
H_{target}	真目标的高度	m
λ	几何遮蔽判定的投影参数	-
优化模型符号		
X	决策变量向量	-
T_{total}	总有效遮蔽时长 (目标函数)	s
$I(t, X)$	二进制遮蔽判定函数 (1 为遮蔽, 0 为不遮蔽)	-
N_p	优化算法的种群大小	-
G_{max}	优化算法的最大进化代数	-
F, CR	差分进化算法的缩放因子与交叉概率	-

5.1.1 运动学模型

导弹 M1 运动模型：导弹 M1 从初始位置 $P_{M0}(20000, 0, 2000)$ 出发，以 $v_M = 300m/s$ 的恒定速率直线飞向假目标 $P_{Fake}(0, 0, 0)$ 。其速度向量 \vec{v}_M 为：

$$\vec{v}_M = v_M \cdot \frac{P_{Fake} - P_{M0}}{|P_{Fake} - P_{M0}|}$$

因此，导弹在任意时刻 t 的位置 $P_M(t)$ 可表示为：

$$P_M(t) = P_{M0} + \vec{v}_M \cdot t$$

无人机 FY1 运动模型：无人机 FY1 从初始位置 $P_{U0}(17800, 0, 1800)$ 出发，以 $v_U = 120m/s$ 的速度等高度飞向假目标。其速度向量 \vec{v}_U 的计算方式为仅考虑水平方向的位移：

$$\vec{v}_U = v_U \cdot \frac{(P_{Fake,x}, P_{Fake,y}, P_{U0,z}) - P_{U0}}{|(P_{Fake,x}, P_{Fake,y}, P_{U0,z}) - P_{U0}|}$$

无人机在任意时刻 t 的位置 $P_U(t)$ 为：

$$P_U(t) = P_{U0} + \vec{v}_U \cdot t$$

烟幕弹/云团运动模型烟幕弹的运动分为两个阶段：

1. **抛体运动阶段：**于 $t_{drop} = 1.5s$ 时从无人机上投放，此时其初始位置为无人机的位置 $P_U(t_{drop})$ ，初始速度为无人机的速度 \vec{v}_U 。在重力 $\vec{g}(0, 0, -9.8)$ 作用下做抛体运动，直到 $t_{det} = t_{drop} + 3.6s = 5.1s$ 时起爆。在此期间任意时刻 t ($t_{drop} \leq t \leq t_{det}$) 的位置 $P_G(t)$ 为：

$$P_G(t) = P_U(t_{drop}) + \vec{v}_U \cdot (t - t_{drop}) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_{drop})^2$$

起爆点的位置即为 $P_{det} = P_G(t_{det})$ 。

2. **烟幕云团下沉阶段：**起爆后，烟幕云团瞬时形成一个半径 $R_{smoke} = 10m$ 的球体。云团中心以恒定的下沉速度 $\vec{v}_{sink}(0, 0, -3)$ 开始运动，有效遮蔽持续时间为 $20s$ 。因此，在 $t_{det} \leq t \leq t_{det} + 20s$ 范围内，烟幕云团中心的位置 $P_C(t)$ 为：

$$P_C(t) = P_{det} + \vec{v}_{sink} \cdot (t - t_{det})$$

5.1.2 几何遮蔽判定模型

有效遮蔽的判定标准是：导弹本身已位处烟幕云团内部，或从导弹位置出发，射向整个真实目标的视线均被烟幕云团所阻挡。

目标轮廓建模：真实目标是一个半径 $R_{target} = 7m$ 、高 $H_{target} = 10m$ 的圆柱体。从远处任意一点观察，其视觉轮廓为一个矩形。为确保整个目标被遮蔽，我们必须保证其视觉轮廓的四个关键顶点均被遮挡。在时刻 t ，这四个顶点 $P_{TL}(t), P_{TR}(t), P_{BL}(t), P_{BR}(t)$ （分别为左上、右上、左下、右下）是动态变化的，其位置取决于导弹 $P_M(t)$ 的位置。它们的计算方法如下：

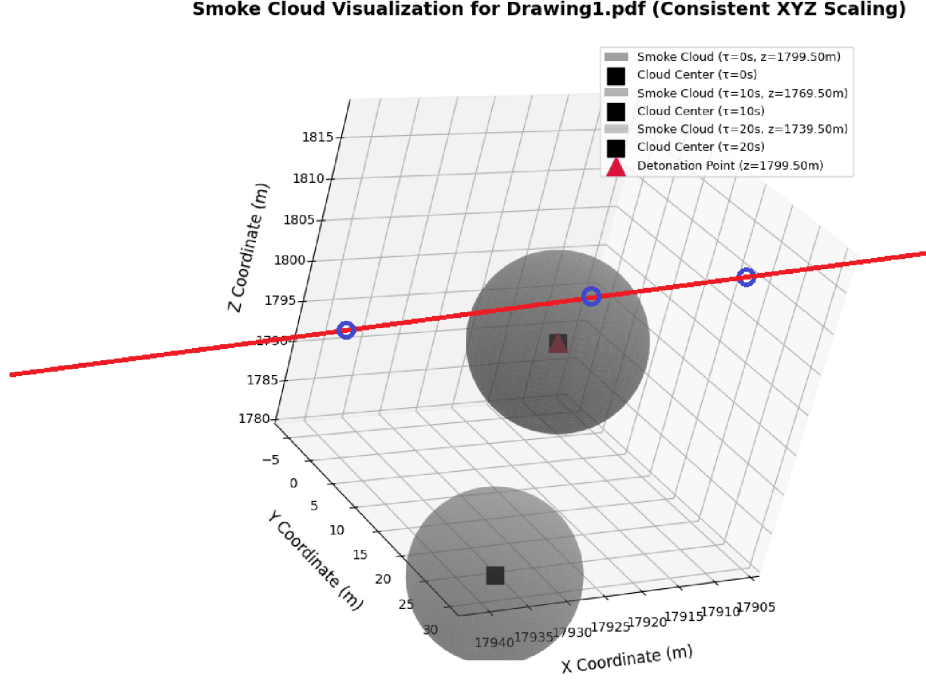


图 4: 烟幕云团与导弹穿过烟幕云团的 3 种相对位置情况示意图

1. 计算从导弹指向圆柱中心轴的水平向量 \vec{d}_{horz} 。
2. 通过叉乘或二维旋转构建一个与 \vec{d}_{horz} 垂直的水平单位向量 \vec{p}_{perp} 。
3. 轮廓点的位置由圆柱顶部和底部中心点沿 \vec{p}_{perp} 方向平移目标半径 R_{target} 得到。

遮蔽条件: 如图 5 所示, 遮蔽成立的条件是, 在时刻 t , 导弹本身已位处烟幕云团内部, 或烟幕云团球体必须同时与连接导弹和目标轮廓四个顶点的所有四条视线段相交。对于任意一条视线段 (例如从导弹 $P_M(t)$ 到目标左下角 $P_{BL}(t)$), 其被半径为 R_{smoke} 、中心为 $P_C(t)$ 的烟幕云团遮挡的充要条件为:

- 烟幕云团中心 $P_C(t)$ 到该视线段所在直线的最短距离 d 小于或等于烟幕半径 R_{smoke} 。
- $P_C(t)$ 在该视线段所在直线上的投影点必须位于线段内部 (包含端点)。这可以通过投影参数 λ 来判断, 其中 $\lambda = \frac{P_M P_C \cdot P_M \vec{P}_{BL}}{|P_M \vec{P}_{BL}|^2}$, 遮蔽要求 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

5.2 模型求解

由于遮蔽判定的几何条件与时间相关, 难以求出解析解, 我们采用高精度的离散时间步进仿真方法进行数值求解。

Step1. 关键参数计算: 首先, 根据问题描述中的参数计算出运动模型中的所有常量。

- **速度向量:** 计算导弹速度向量 \vec{v}_M 和无人机速度向量 \vec{v}_U 。
- **关键时间点:** 确定烟幕弹投放时间 $t_{drop} = 1.5s$ 和起爆时间 $t_{det} = 5.1s$ 。

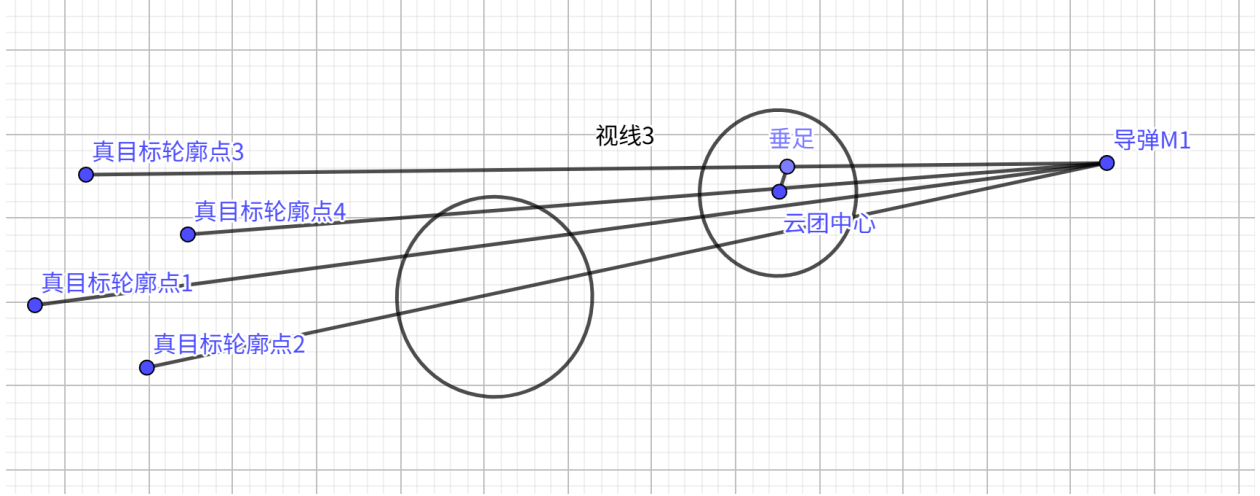


图 5: 右侧云团实现对真目标的有效遮蔽, 左侧云团未能遮蔽视线 3 从而未有效遮蔽真目标

- **起爆点坐标:** 利用抛体运动公式, 精确计算出烟幕弹在 t_{det} 时刻的起爆点坐标 P_{det} 。

Step2. 动态仿真循环: 建立一个时间循环, 从烟幕生效的起始时刻 $t_{start} = t_{det}$ 持续到结束时刻 $t_{end} = t_{det} + 20s$ 。设置一个足够小的时间步长 $\Delta t = 0.0001s$ 以保证计算精度。在每个时间步 t :

- **位置更新:** 根据运动学模型, 计算当前时刻导弹的位置 $P_M(t)$ 和烟幕云团中心的位置 $P_C(t)$ 。
- **轮廓确定:** 根据导弹的实时位置 $P_M(t)$, 动态计算出真实目标圆柱体的四个轮廓顶点 $P_{TL}(t), P_{TR}(t), P_{BL}(t), P_{BR}(t)$ 。
- **遮蔽判定:**
 - 对连接 $P_M(t)$ 与四个轮廓顶点的每一条视线段, 都进行几何遮蔽判定。
 - 计算烟幕云团中心 $P_C(t)$ 到视线段的最短距离 d 和投影参数 λ 。
 - 判断是否同时满足 $d \leq R_{smoke}$ 和 $0 \leq \lambda \leq 1$ 。
- **时长累加:** 如果全部四条视线段均满足遮蔽条件, 则将当前时间步长 Δt 累加到总有效遮蔽时长 T_{total} 中。

Step3. 结果输出: 循环结束后, 得到的累计时长 T_{total} 即为问题所求的最终结果。

5.3 求解结果

通过运行上述模型的仿真程序, 我们得到烟幕干扰弹对 M1 的详细遮蔽过程和最终时长。

仿真结果表明, 遮蔽从第 8.05 秒开始, 到第 9.44 秒结束。最终, 通过对仿真时长进行精确累加, 得到烟幕干扰弹对 M1 的总有效遮蔽时长为:

$$T_{total} = 1.392\text{秒}$$

表 2: 仿真过程中的关键数据点

Time(s)	Missile Coords (x,y,z)	Smoke Coords (x,y,z)	Max LOS Dist (m)	Screened?
1.50	(19552.23, 0.00, 1955.22)	(17620.00, 0.00, 1800.00)	N/A	No
...
5.10	(18477.59, 0.00, 1847.76)	(17188.00, 0.00, 1736.50)	22.76	No
...
8.05	(17596.99, 0.00, 1759.70)	(17188.00, 0.00, 1727.65)	10.03	No
8.06	(17594.00, 0.00, 1759.40)	(17188.00, 0.00, 1727.62)	9.98	Yes
...
9.44	(17182.05, 0.00, 1718.21)	(17188.00, 0.00, 1723.48)	7.95	Yes
9.45	(17179.07, 0.00, 1717.91)	(17188.00, 0.00, 1723.45)	10.51	No

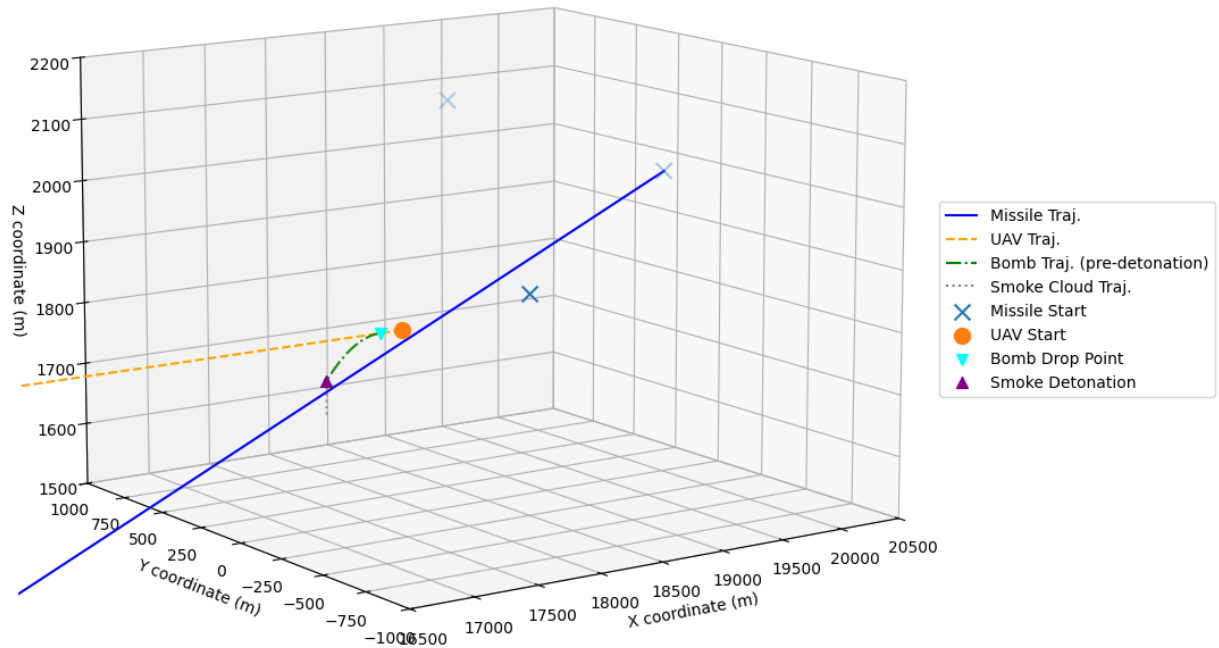


图 6: 问题一投放策略可视化

6 问题二的模型的建立和求解

问题二旨在为无人机 FY1 规划一个最优的飞行与投放策略，以最大化单枚烟幕弹对导弹 M1 的有效遮蔽时长。这是一个包含多个连续变量的复杂非线性优化问题。

6.1 模型建立

我们将此问题构建为一个多维参数寻优模型。模型的优化目标、决策变量和约束条件如下。

6.1.1 决策变量

无人机的整个策略可由四个核心的连续变量完全定义，这些变量构成了我们优化模型的决策变量向量 X ：

$$X = (v_U, \theta_U, t_{drop}, t_{delay})$$

其中：

- v_U ：无人机 FY1 的飞行速度，约束范围为 $v_U \in [70, 140] m/s$ 。
- θ_U ：无人机 FY1 的飞行方向（水平方位角），约束范围为 $\theta_U \in [0, 2\pi)$ 。
- t_{drop} ：烟幕弹的投放时刻（自任务开始计时），根据实际情况设定一个合理的搜索范围，如 $t_{drop} \in [0.1, 30] s$ 。
- t_{delay} ：烟幕弹自投放后的起爆延迟时间，约束范围为 $t_{delay} \in [0.1, 10] s$ 。

策略中的投放点 P_{drop} 和起爆点 P_{det} 是由这四个基本决策变量导出的因变量，无需作为独立的优化变量。

6.1.2 目标函数

优化的目标是最大化总有效遮蔽时长 T_{total} 。该时长是决策变量 X 的一个复杂函数，可以表示为对一个二进制遮蔽判定函数 $I(t, X)$ 在烟幕有效时间段内的积分：

$$\max_X T_{total}(X) = \int_{t_{det}}^{t_{det}+20} I(t, X) dt$$

其中， $t_{det} = t_{drop} + t_{delay}$ 。函数 $I(t, X)$ 定义如下：

$$I(t, X) = \begin{cases} 1, & \text{在时刻 } t \text{ 且策略为 } X \text{ 时, 目标被完全遮蔽} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

6.1.3 约束与状态模型

模型中的约束条件主要体现在用于计算目标函数的物理和几何模型中：

- **运动学模型**：导弹、无人机、烟幕弹和烟幕云团的运动轨迹完全由问题一中建立的运动学方程决定。然而，此时无人机的速度向量 \vec{v}_U 和关键时间点 t_{drop} 、 t_{det} 均是决策变量的函数，使得整个场景的动态演化依赖于策略 X 的选择。

- **几何遮蔽模型：**有效遮蔽的判定准则与问题一完全相同，即在任意时刻 t ，导弹本身已位处烟幕云团内部，或烟幕云团球体必须同时与连接导弹和目标轮廓四个动态顶点的所有四条视线段相交。该判定过程的每一次计算都依赖于由策略 X 决定的导弹和烟幕云团的实时位置。

由于目标函数 $T_{total}(X)$ 没有显式的解析表达式，且其函数形态高度非线性、非凸，并可能存在大量局部最优解，因此无法使用传统的解析方法或梯度下降法求解。

6.2 模型求解

针对上述模型的特点，我们设计并实现了一种结合全局探索和局部精细搜索的混合随机优化算法。

Step1. 全局探索：为了避免陷入局部最优解并对广阔的四维解空间有一个初步的探索，我们首先采用蒙特卡洛随机搜索方法进行全局寻优。

- 在决策变量的约束域内，随机生成 $N_{global} = 10000$ 组候选解（策略） $X_i = (v_{Ui}, \theta_{Ui}, t_{drop,i}, t_{delay,i})$ 。
- 对每一组候选解 X_i ，调用内置的动态仿真程序（即目标函数 $T_{total}(X_i)$ ），通过高精度的时间步进模拟，计算其对应的总有效遮蔽时长。
- 记录并持续更新获得最长遮蔽时长的解作为当前最优解 X_{best} 及其对应的时长 T_{best} 。

此阶段的目标是以较高的计算成本为代价，找到一个或多个高质量解所在的“潜力区域”。

Step2. 迭代式局部搜索：在全局探索找到一个较优解 X_{best} 后，我们以此解为中心，进行多轮迭代式的局部精细化搜索，以进一步提升解的质量。

- 算法共进行 $R_{local} = 4$ 轮局部搜索。
- 在第一轮中，围绕当前最优解 X_{best} 的各个分量，定义一个较大的邻域（例如，为总约束范围的 20%）。在此邻域内，随机生成 $N_{local} = 2500$ 组新的候选解并进行评估，若发现更优解则更新 X_{best} 。
- 在后续每一轮中，将邻域范围按比例缩小（在我们的代码中，缩小为上一轮的 60%），并重复上述随机搜索过程。

这种“由粗到细”的搜索策略，能够在全局最优解的大致邻域内进行更密集的采样，从而精确地逼近最优解。图 7 展示了一次全局-局部迭代式随机搜索算法搜索中样本点的可视化。

Step3. 结果输出：优化过程结束后，算法输出最终的最优决策变量组合 $X^* = (v_U^*, \theta_U^*, t_{drop}^*, t_{delay}^*)$ 和对应的最大有效遮蔽时长 T_{max} 。随后，根据最优决策变量，利用运动学模型可以计算出具体的投放点和起爆点坐标。

6.3 求解结果

通过执行上述优化算法，我们得到了无人机 FY1 干扰导弹 M1 的最优投放策略，其具体参数如下表所示：

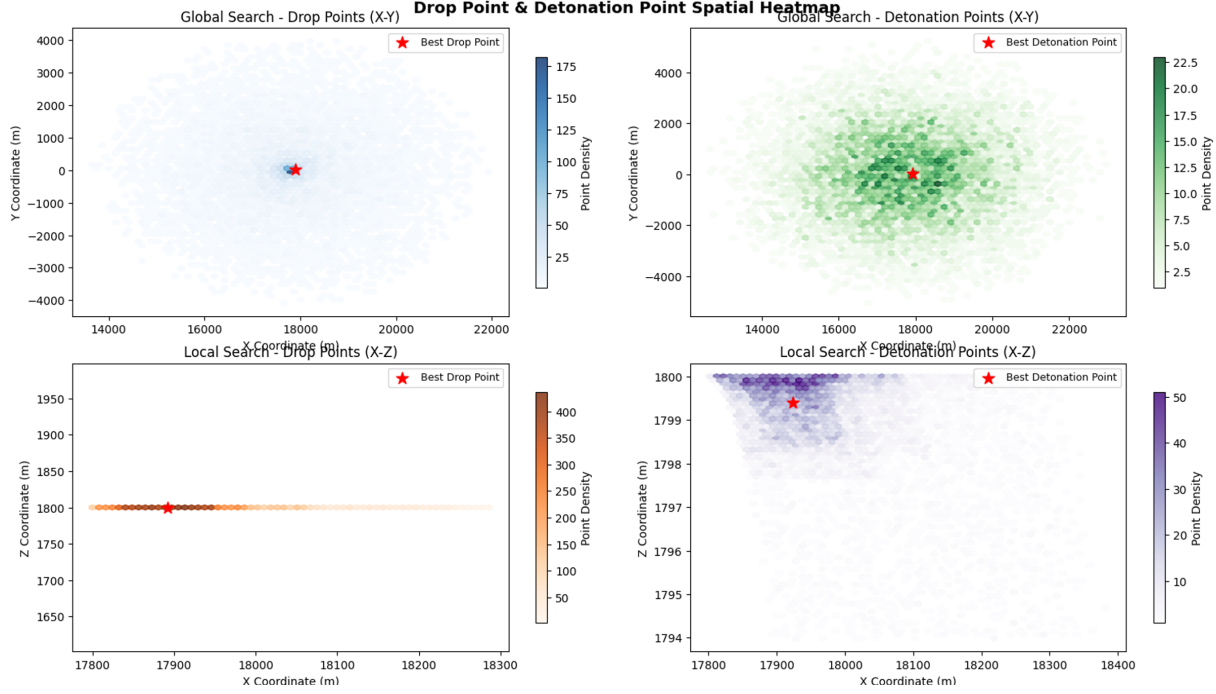


图 7: 烟幕弹投掷点位置热力图 (左), 烟幕弹起爆点位置热力图 (右)

表 3: 问题二最优投放策略求解结果

参数类别	参数名称	最优值
决策变量	无人机飞行速度 (v_U)	139.7458 m/s
	无人机飞行方向 (θ_U)	0.0948 rad (5.43 度)
	烟幕弹投放时间 (t_{drop})	0.5713 s
	烟幕弹起爆延迟 (t_{delay})	0.3191 s
派生坐标	烟幕弹投放点坐标	(17879.48, 7.56, 1800.00)
	烟幕弹起爆点坐标	(17923.86, 11.78, 1799.50)
优化目标	最大有效遮蔽时长	4.589 s

该策略表明, 为了获得最长的遮蔽时间, 无人机应以最大速度飞行, 并选择一个特定的方向和时机组合, 使得烟幕云团能在关键时间窗口内最有效地遮蔽导弹对真实目标的视线。

7 问题三的模型的建立和求解

问题三要求利用单架无人机 FY1 投放 3 枚烟幕弹对导弹 M1 进行干扰, 目标是设计一套包含无人机飞行参数和 3 枚烟幕弹投放、起爆时序的完整策略, 以实现最大化的总有效遮蔽时间。

7.1 模型建立

此问题是问题二的扩展, 决策变量的维度更高, 目标函数的计算也更复杂, 因为需要考虑多个烟幕云团的协同与时间重叠效应。

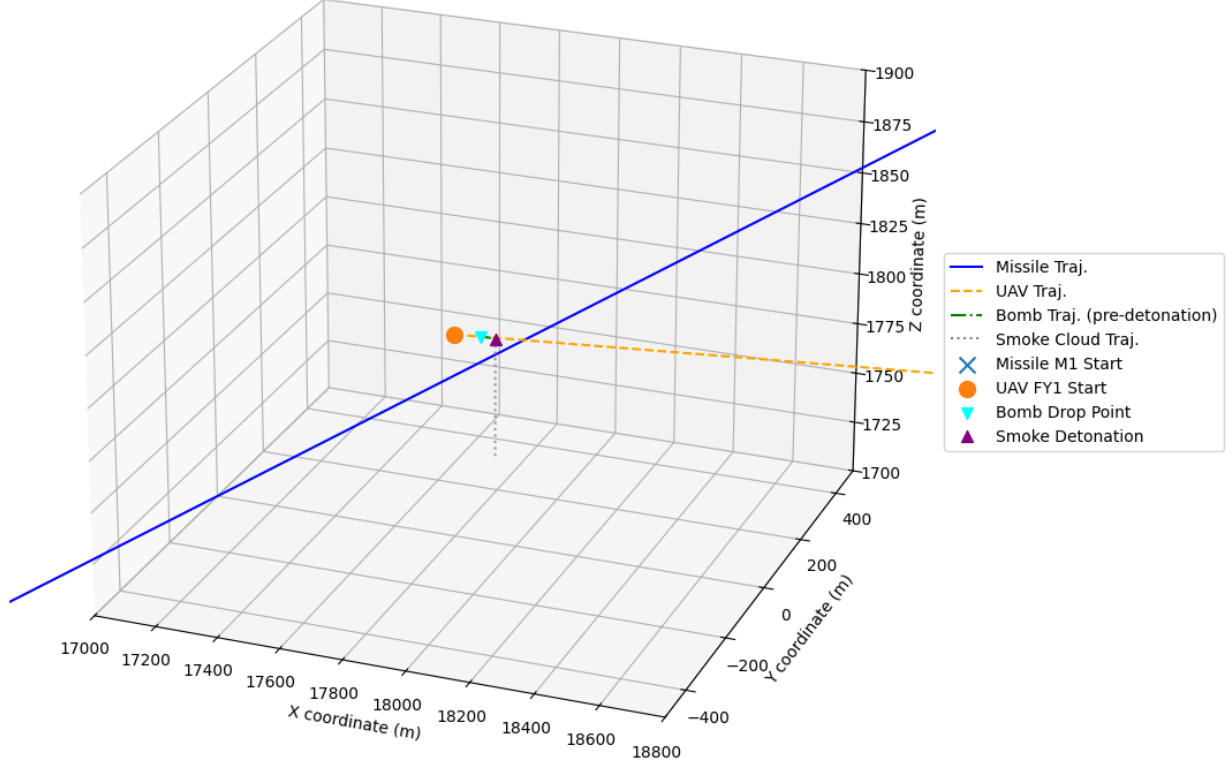


图 8: 问题二投放策略可视化

7.1.1 决策变量

为了完整描述一个投放策略，模型需要优化 8 个核心参数，这些参数构成了决策变量向量 \mathbf{X} ：

$$\mathbf{X} = (v_U, \theta_U, t_{d1}, t_{delay1}, \Delta t_{d2}, t_{delay2}, \Delta t_{d3}, t_{delay3})$$

其中：

- v_U ：无人机的飞行速度 (m/s)。
- θ_U ：无人机的飞行方向 (弧度)。
- t_{d1} ：首枚烟幕弹的投放时刻 (s)。
- t_{delay1} ：首枚烟幕弹的起爆延迟 (s)。
- Δt_{d2} ：第二枚相对于第一枚的投放时间间隔 (s)，根据题目要求，必须满足 $\Delta t_{d2} \geq 1s$ 。
- t_{delay2} ：第二枚烟幕弹的起爆延迟 (s)。
- Δt_{d3} ：第三枚相对于第二枚的投放时间间隔 (s)，同样需满足 $\Delta t_{d3} \geq 1s$ 。
- t_{delay3} ：第三枚烟幕弹的起爆延迟 (s)。

实际的第二、三枚烟幕弹的投放时刻可由以上变量导出： $t_{d2} = t_{d1} + \Delta t_{d2}$ ， $t_{d3} = t_{d2} + \Delta t_{d3}$ 。

7.1.2 目标函数

优化的目标是最大化所有烟幕云团产生的总有效遮蔽时长 T_{total} 。这里的总时长定义为存在至少一个烟幕云团能够有效遮蔽目标的时间段的并集长度。这意味着，如果多个云团的遮蔽时间发生重叠，重叠部分不重复计算。目标函数可表示为：

$$\max_{\mathbf{X}} T_{total}(\mathbf{X}) = \text{length} \left(\bigcup_{i=1}^3 [t_{start,i}, t_{end,i}] \right)$$

其中， $[t_{start,i}, t_{end,i}]$ 是第 i 枚烟幕弹产生的有效遮蔽时间区间，该区间本身通过高精度仿真计算得出。

7.1.3 约束与状态模型

模型的基础依然是问题一和问题二中建立的运动学和几何遮蔽模型。

- **运动学模型：**无人机和导弹的运动模型不变。三枚烟幕弹共享无人机的飞行轨迹，但它们各自在不同的投放时刻 t_{d1}, t_{d2}, t_{d3} 脱离无人机，并开始独立的抛体运动，最终在各自的起爆点形成烟幕云团，并开始下沉。
- **几何遮蔽模型：**在仿真过程的任意时刻 t ，需要对每一个处于有效期的烟幕云团（共 k 个， $k \in \{1, 2, 3\}$ ）都进行一次遮蔽判定。只要其中任意一个云团满足对目标轮廓的完全遮蔽条件，则认为该时刻 t 是有效遮蔽的。

7.2 模型求解

该 8 维优化问题的解空间复杂，且目标函数无法求导，因此我们采用差分进化算法进行全局寻优。差分进化算法是一种高效的群体智能优化算法，尤其适合处理复杂的连续变量优化问题。

Step1. 种群初始化：算法开始时，随机生成一个包含 $N_p = 200$ 个个体的“种群”。每个个体都是一个 8 维向量 \mathbf{X}_i ，代表一套完整的投放策略。向量中的每个参数都在其预设的约束范围内（如速度 $v_U \in [70, 140]$ ，投放间隔 $\Delta t \in [1, 10]$ 等）随机生成。

Step2. 迭代进化：算法通过设定的最大代数 $G_{max} = 700$ 进行迭代。在每一代中，通过“变异”、“交叉”和“选择”三个核心操作，不断优化种群中的个体。

- **变异：**对种群中的每个个体 \mathbf{X}_i ，从种群中随机选择三个不同的个体 $\mathbf{X}_{r1}, \mathbf{X}_{r2}, \mathbf{X}_{r3}$ ，通过差分策略生成一个变异向量 $\mathbf{V}_i = \mathbf{X}_{r1} + F \cdot (\mathbf{X}_{r2} - \mathbf{X}_{r3})$ 。其中，缩放因子 $F = 0.8$ 用于控制扰动幅度。
- **交叉：**将变异向量 \mathbf{V}_i 与原个体 \mathbf{X}_i 的参数进行混合，生成一个试验向量 \mathbf{U}_i 。该过程由交叉概率 $CR = 0.9$ 控制，以增加种群的多样性。
- **选择：**通过完整的动态仿真计算试验向量 \mathbf{U}_i 的适应度（即总遮蔽时长 $T_{total}(\mathbf{U}_i)$ ）。如果试验向量的适应度优于原个体 \mathbf{X}_i ，则在下一代种群中用 \mathbf{U}_i 替换 \mathbf{X}_i ；否则，保留原个体 \mathbf{X}_i 。

Step3. 收敛与结果输出：在整个进化过程中，持续追踪并记录全局最优个体 \mathbf{X}_{gbest} 。在达到最大进化代数后，算法终止，此时的全局最优个体即为问题所求的最优策略。最后，根据该最优策略向量，通过运动学公式计算出每枚烟幕弹的精确投放点和起爆点坐标。

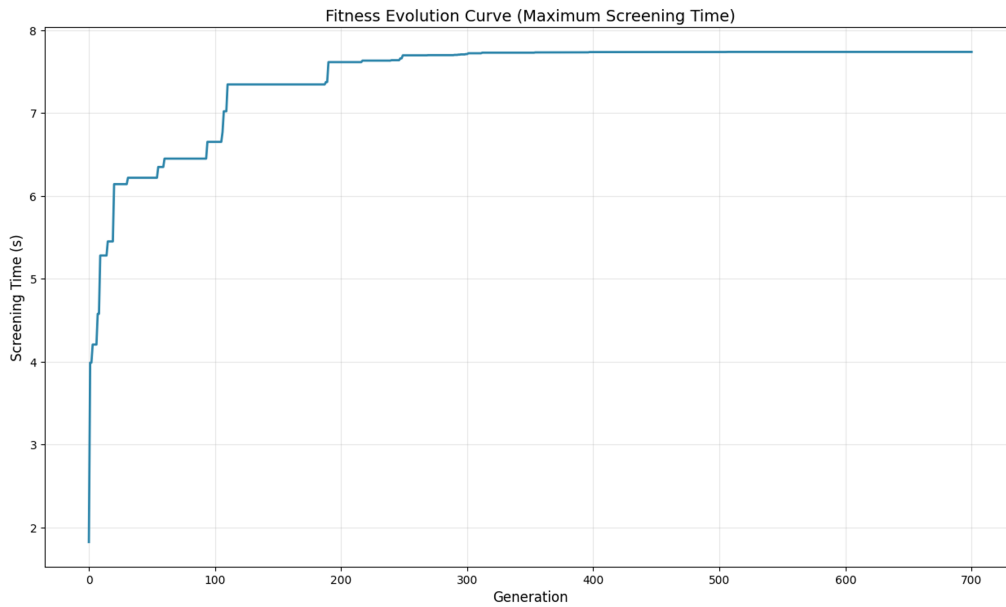


图 9: 差分进化算法的一个收敛示例

7.3 求解结果

通过运行差分进化算法程序，我们得到了无人机 FY1 投放 3 枚烟幕弹的最优策略，其参数和结果如下。

最优策略参数：

- 无人机飞行速度: 140.00 m/s
- 无人机飞行方向: 3.1354 rad (179.65°)
- 烟幕弹 1 投放时间: 0.00 s
- 烟幕弹 1 起爆延迟: 3.61 s
- 烟幕弹 2 投放间隔: 3.65 s
- 烟幕弹 2 起爆延迟: 5.38 s
- 烟幕弹 3 投放间隔: 1.92 s
- 烟幕弹 3 起爆延迟: 6.05 s

在此策略下，可获得的最大有效遮蔽时间为: 7.6 s

result1.xlsx 文件内容参见表 4。

表 4: 问题三最优策略结果

方向 (°)	速度 (m/s)	编号	投放点 x	投放点 y	投放点 z	起爆点 x	起爆点 y	起爆点 z	总时长 (s)
179.65	140.00	1	17800.00	0.00	1800.00	17294.61	3.13	1736.14	7.6010
		2	17289.01	3.16	1800.00	16535.82	7.77	1658.17	
		3	17020.21	4.83	1800.00	16173.23	10.07	1620.65	

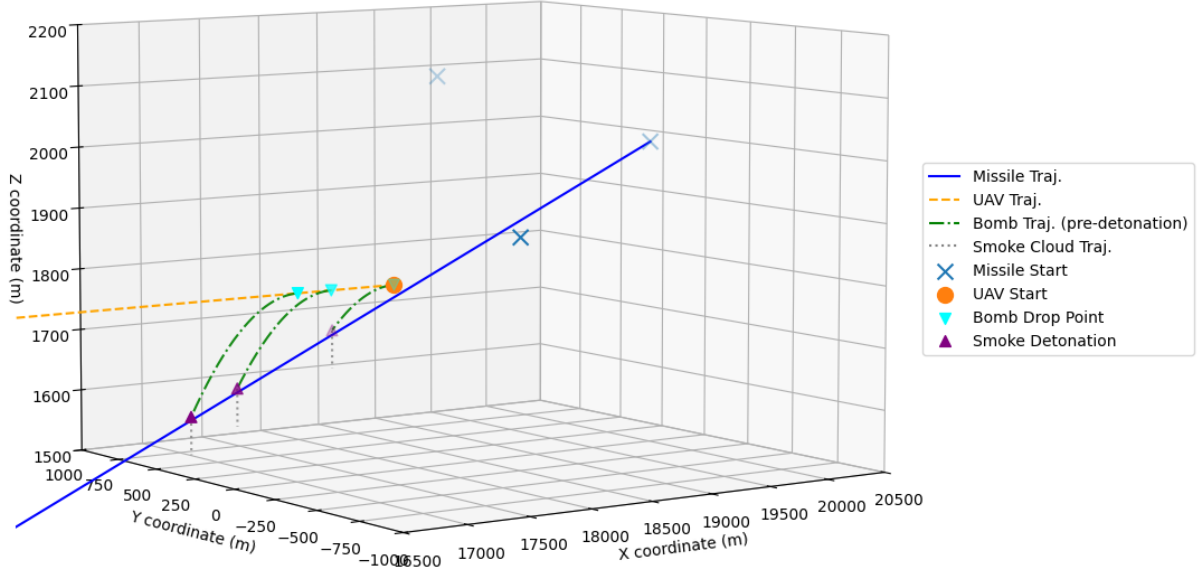


图 10: 问题三投放策略可视化

8 问题四的模型的建立和求解

问题四要求利用 FY1、FY2、FY3 三架无人机各投放一枚烟幕弹，协同对来袭导弹 M1 进行干扰，目标是最大化总有效遮蔽时长。这是一个高维度的多智能体协同策略优化问题，其复杂性远超前述问题。

8.1 模型建立

为解决此问题，我们将模型扩展为一个包含 12 个决策变量的协同优化模型。模型的目标是通过寻找一组最优的协同策略，使得三个烟幕云团共同产生的总遮蔽时间最长。

8.1.1 决策变量

整个协同策略由三架无人机各自的独立策略参数共同组成。对于每架无人机 $i \in \{1, 2, 3\}$ ，其策略包含 4 个核心参数。因此，总决策变量向量 X 是一个 12 维的向量：

$$X = (v_{U1}, \theta_{U1}, t_{d1}, t_{delay1}, v_{U2}, \theta_{U2}, t_{d2}, t_{delay2}, v_{U3}, \theta_{U3}, t_{d3}, t_{delay3})$$

其中，对于第 i 架无人机：

- v_{Ui} : 飞行速度，约束范围为 $v_{Ui} \in [70, 140] m/s$ 。

- θ_{U_i} : 飞行方向 (水平方位角), 约束范围为 $\theta_{U_i} \in [0, 2\pi)$ 。
- t_{di} : 烟幕弹的投放时刻 (s)。
- $t_{delay,i}$: 烟幕弹的起爆延迟时间 (s)。

8.1.2 目标函数

优化的目标是最大化由三枚烟幕弹共同产生的总有效遮蔽时长 T_{total} 。与问题三类似, 该时长是所有独立遮蔽时间区间的并集长度, 重叠部分不重复计算。

$$\max_X T_{total}(X) = \text{length} \left(\bigcup_{i=1}^3 [t_{start,i}, t_{end,i}] \right)$$

其中, $[t_{start,i}, t_{end,i}]$ 是由无人机 i 的策略分量所产生的有效遮蔽时间区间。该目标函数 $T_{total}(X)$ 的计算需要通过一个完整的动态仿真来实现, 输入为 12 维的决策变量向量 X 。

8.1.3 约束与状态模型

模型中的物理和几何约束与之前的问题一致, 但现在需要同时处理三个独立的无人机-烟幕弹系统。

- **运动学模型:** 导弹 M1 的运动轨迹不变。三架无人机分别从各自的初始位置 $P_{U0,i}$ 出发, 根据其独立的策略参数 (v_{U_i}, θ_{U_i}) 进行匀速直线运动。三枚烟幕弹也分别在各自的投放时刻 t_{di} 脱离对应的无人机, 开始独立的抛体运动和随后的烟幕云团下沉。
- **几何遮蔽模型:** 在仿真过程的任意时刻 t , 需要对每一个处于有效期的烟幕云团进行遮蔽判定。只要其中有任何一个云团能够完全遮蔽导弹对真实目标的视线, 该时刻 t 就被计为有效遮蔽。

8.2 模型求解

由于决策变量的维度高达 12 维, 解空间巨大且复杂, 常规的优化算法容易陷入“维度灾难”。因此, 我们采用了一种“分而治之”的协同进化算法。

Step1. 问题分解与种群初始化: 我们将 12 维的优化问题分解为 3 个独立的 4 维子问题, 每个子问题对应一架无人机的策略 $(v_{U_i}, \theta_{U_i}, t_{di}, t_{delay,i})$ 。接着, 为每个子问题分别创建一个独立的种群, 每个种群包含 $N_p = 200$ 个随机生成的 4 维策略个体。

Step2. 协同适应度评估与差分进化: 协同进化算法的关键在于适应度评估。单个无人机的策略 (一个个体) 无法独立评估其优劣, 必须在与其他无人机协同的背景下进行。

- **协同评估:** 为了评估第一架无人机 (FY1) 种群中的某一个体 $X_{1,j}$ 的适应度, 需要将它与第二和第三架无人机种群中当前已知的最优个体 $X_{2,best}$ 和 $X_{3,best}$ 组合成一个完整的 12 维策略向量 $(X_{1,j}, X_{2,best}, X_{3,best})$ 。然后, 通过完整仿真计算这个组合策略的总遮蔽时长, 并将该时长作为个体 $X_{1,j}$ 的适应度值。对 FY2 和 FY3 种群中个体的评估也依此类推。
- **差分进化:** 每个子种群都独立地执行标准的差分进化 (DE) 操作 (变异、交叉、选择), 如问题三所述。在 DE 的“选择”步骤中需要评估新生成的试验个体的适应度时, 就采用上述的协同评估方法。

通过这种方式，每个无人机的策略都在与其他无人机的“最佳拍档”协同工作的背景下进行优化和演进。

Step3. 全局最优解的更新与收敛：在 $G_{max} = 1000$ 代的进化过程中，算法会持续追踪由三个子种群的最优个体组合 $(X_{1,best}, X_{2,best}, X_{3,best})$ 构成的全局最优解。当所有迭代完成后，这个全局最优解即为问题所求的最优协同策略。

8.3 求解结果

通过执行上述协同进化算法，我们得到了三架无人机协同干扰导弹 M1 的最优投放策略，其具体参数与结果如下。

各无人机最优策略参数：

- 无人机 FY1:
 - 飞行速度: 139.74 m/s
 - 飞行方向: 0.0948 rad (5.43°)
 - 投放时间: 0.57 s
 - 起爆延迟: 0.32 s
- 无人机 FY2:
 - 飞行速度: 139.52 m/s
 - 飞行方向: 5.2371 rad (300.06°)
 - 投放时间: 6.43 s
 - 起爆延迟: 4.83 s
- 无人机 FY3:
 - 飞行速度: 139.37 m/s
 - 飞行方向: 1.5355 rad (87.98°)
 - 投放时间: 18.24 s
 - 起爆延迟: 4.05 s

在此协同策略下，可获得的最大有效遮蔽时间为: 11.6 s。

事实上，由于最优策略下各机遮蔽窗口互不重叠，也可将问题简化为三个独立的单机优化任务。通过直接组合各无人机的最优解，也能获得近似于协同进化算法的高效策略。

result2.xlsx 文件内容参见表 5。

9 问题五的模型的建立和求解

问题五在前期问题基础上，进一步扩展为多架无人机 (FY2、FY3、FY4、FY5)、多枚烟雾弹与多枚导弹 (M1、M2、M3) 的复杂系统优化问题。每系统涉及 40 个决策变量，需通过协同优化实现对多枚导弹的总遮蔽时间最大化，属于高维多峰优化问题。

表 5: 问题四最优策略结果

无人机	方向 (°)	速度 (m/s)	投放点 x	投放点 y	投放点 z	起爆点 x	起爆点 y	起爆点 z	遮蔽时长 (s)
FY1	5.43	139.74	17879.29	7.54	1800.00	17923.81	11.77	1799.50	4.5882
FY2	300.06	139.52	12449.42	623.58	1400.00	12787.01	40.35	1285.69	3.9851
FY3	87.98	139.37	6089.71	-459.47	700.00	6109.63	104.62	619.63	3.0540

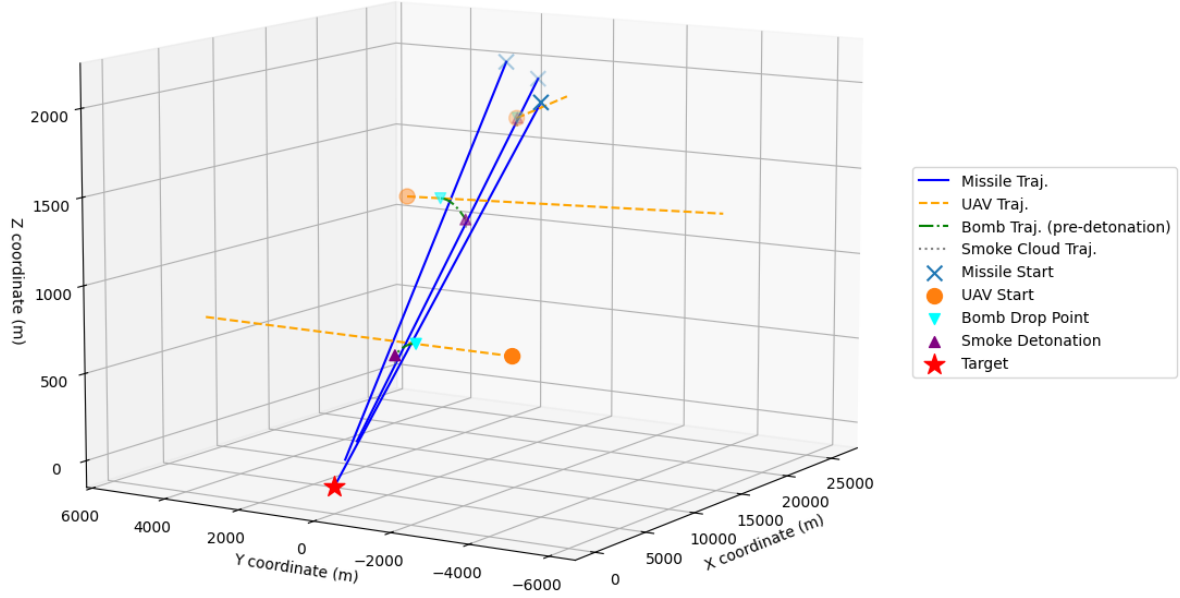


图 11: 问题四投放策略可视化

9.1 模型建立

我们需要针对多无人机协同干扰多导弹的场景，构建包含多维度决策变量、时空约束及总遮蔽时间最大化目标的优化模型。

9.1.1 决策变量

总决策变量向量由 4 架无人机的独立参数构成，每架无人机携带 3 枚烟雾弹，因此总维度为 40 维（含无人机速度、角度及每枚烟雾弹的投放时间、延迟时间）：

$$X = (v_2, \theta_2, t_{d21}, t_{\text{delay}21}, t_{d22}, t_{\text{delay}22}, t_{d23}, t_{\text{delay}23}, \dots, v_5, \theta_5, t_{d51}, t_{\text{delay}51}, t_{d52}, t_{\text{delay}52}, t_{d53}, t_{\text{delay}53})$$

其中，对于第 i 架无人机 ($i = 2, 3, 4, 5$)：

- v_i ：飞行速度，约束为 $v_i > 0$ m/s；
- θ_i ：飞行方向角（水平方位角），约束为 $\theta_i \in [0, 360)$ 度；
- t_{dij} ：第 j 枚烟雾弹的投放时刻 ($j = 1, 2, 3$)，约束为 $t_{dij} \geq 0$ s；

- $t_{\text{delay}ij}$: 第 j 枚烟雾弹的起爆延迟时间, 约束为 $t_{\text{delay}ij} \geq 0.1 \text{ s}$ 。

同时, 每架无人机的烟雾弹与目标导弹存在固定映射关系 (如 FY2 的 3 枚烟雾弹分别对应 M2、M1、M3), 见代码中 `target_map` 定义。

9.1.2 目标函数

优化目标为最大化所有烟雾弹对各自目标导弹的总有效遮蔽时间, 需合并时间重叠区间 (重叠部分不重复计算):

$$\max_X T_{\text{total}} = \sum_{m=1}^3 T_m$$

其中, T_m 为导弹 m (M1、M2、M3) 被所有对应烟雾弹遮蔽的总有效时间, 即:

$$T_m = \text{length} \left(\bigcup_{k \in K_m} [t_{\text{start},k}, t_{\text{end},k}] \right)$$

K_m 为针对导弹 m 的烟雾弹集合, $[t_{\text{start},k}, t_{\text{end},k}]$ 为第 k 枚烟雾弹对导弹 m 的遮蔽时间区间, 通过动态仿真计算 (如代码中 `calculate_grenade_missile_screening` 函数)。

9.1.3 约束与状态模型

- **运动学模型:** 所有无人机和导弹的运动轨迹均遵循问题一中建立的运动学方程。每架无人机从其唯一的初始位置出发, 执行由其策略参数定义的匀速直线飞行。
- **遮蔽判定模型:** 遮蔽判定准则与问题一增补后的分级模型一致。首先判断导弹是否进入任一有效烟幕云团内部; 若否则启动外部遮蔽判定, 即判断烟幕云团是否完全阻挡导弹到目标轮廓的全部四条视线。

9.2 模型求解

针对高维优化难题, 采用“分而治之”的分层优化策略, 结合网格搜索与局部爬山法, 降低求解复杂度。

步骤一: 问题分解与子空间划分

根据烟雾弹-导弹的固定映射关系及时空独立性, 将 40 维优化空间分解为 4 个独立子空间 (每架无人机对应一个子空间), 每个子空间包含 8 个决策变量 (速度、角度及 3 枚烟雾弹的投放时间、延迟时间)。子空间间通过目标导弹的遮蔽时间叠加产生关联, 但因时空距离较远, 近似为独立优化。

步骤二: 子空间优化

无人机参数粗优化 (网格搜索): 对每架无人机的速度 v_i 和角度 θ_i 进行网格搜索。速度搜索范围为 $(0, 150] \text{ m/s}$, 步长 5 m/s ; 角度搜索范围为 $[0, 360)$ 度, 步长 5 度。计算不同 (v_i, θ_i) 组合下的初始总遮蔽时间, 筛选出性能较优的参数作为初始值。

烟雾弹参数精优化 (局部爬山法): 基于网格搜索法粗优化得到的无人机参数, 固定 v_i 和 θ_i , 对 3 枚烟雾弹的投放时间 t_{dij} 和延迟时间 $t_{\text{delay}ij}$ 进行局部爬山优化: - 初始步长: 投放时间 0.5 s , 延迟时间

0.2 s；- 搜索方向：对每个参数分别尝试增加/减少步长，计算总遮蔽时间，保留更优解；- 步长调整：当连续 5 次迭代无改进时，步长乘以缩减因子 0.5，最多缩减 5 次；- 收敛条件：步长缩减至最小且连续 10 次迭代无改进时停止（如代码中 `hill_climbing_optimization` 函数）。

步骤三：全局结果合并与区间去重

将 5 架无人机的优化结果汇总，对每枚导弹的所有遮蔽区间进行合并（如代码中 `merge_intervals` 函数），剔除重叠部分，计算最终总遮蔽时间 T_{total} 。

9.3 求解结果

通过上述分层优化策略，得到各无人机的最优参数（表 6）及导弹遮蔽效果结果（表 7）如下。该体系下对三枚导弹的遮蔽时长总和可达 43s。

`result3.xlsx` 文件内容参见表 8。

表 6: 各无人机最优策略参数

无人机	速度 (m/s)	方向 (rad)	烟幕弹 1 (s)		烟幕弹 2 (s)		烟幕弹 3 (s)	
			投放时间	起爆延迟	投放间隔	起爆延迟	投放间隔	起爆延迟
FY1	140.00	3.1354	0.00	3.61	3.65	5.38	1.92	6.05
FY2	139.75	3.7525	6.08	6.67	2.02	8.75	4.21	8.81
FY3	110.12	2.2689	27.22	8.16	1.26	8.51	1.43	8.19
FY4	138.25	3.7529	8.05	13.07	2.48	14.01	3.51	14.07
FY5	139.31	2.4435	13.26	5.15	2.50	6.94	4.49	5.80

优化结果表明，通过子空间分解与分层优化，有效降低了高维问题的求解难度，实现了多无人机对多导弹的协同遮蔽，显著提升了真目标的防护时长。

10 模型的评价

本次建模工作从一个确定性的仿真问题出发，逐步扩展到多维度、多智能体的协同优化问题，形成了一套完整且层层递进的解决方案。模型整体上兼具物理真实性、算法先进性和实际应用价值，但也存在一些理想化假设和可改进之处。

10.1 模型的优点

- **物理与几何模型的精确性：**模型的核心建立在严谨的运动学和三维几何关系之上。无人机与导弹的匀速直线运动、烟幕弹的抛体运动均采用了经典的动力学方程描述。特别地，遮蔽判定模型没有将目标简化为质点，而是动态地计算了圆柱体目标在导弹视角下的视觉轮廓，并通过判断视线段与烟幕球体的相交关系来进行遮蔽判定，这极大地提升了仿真的准确性和现实意义。
- **优化算法的先进性与递进性：**针对不同复杂度的问题，模型采用了逐步升级的优化算法策略，体现了良好的建模思想。

表 7: 详细仿真结果-有效遮蔽区间

无人机	烟幕弹	对 M1 遮蔽区间	对 M2 遮蔽区间	对 M3 遮蔽区间
FY1	1	[5.20 s, 9.03 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	2	[9.03 s, 11.62 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	3	[11.62 s, 12.80 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
FY2	1	无有效遮蔽	[16.28 s, 19.90 s]	无有效遮蔽
	2	[20.53 s, 24.08 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	3	无有效遮蔽	无有效遮蔽	[21.83 s, 25.05 s]
FY3	1	无有效遮蔽	无有效遮蔽	[35.38 s, 37.58 s]
	2	[37.22 s, 39.64 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	3	无有效遮蔽	[38.10 s, 40.35 s]	无有效遮蔽
FY4	1	无有效遮蔽	[22.96 s, 26.22 s]	无有效遮蔽
	2	[27.95 s, 31.13 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	3	无有效遮蔽	无有效遮蔽	[28.11 s, 30.90 s]
FY5	1	无有效遮蔽	无有效遮蔽	[18.41 s, 21.79 s]
	2	[22.86 s, 26.38 s]	无有效遮蔽	无有效遮蔽
	3	无有效遮蔽	[26.13 s, 29.32 s]	无有效遮蔽
总遮蔽时长 (并集):		累计 19.0474 s	累计 12.2256 s	累计 11.5995 s

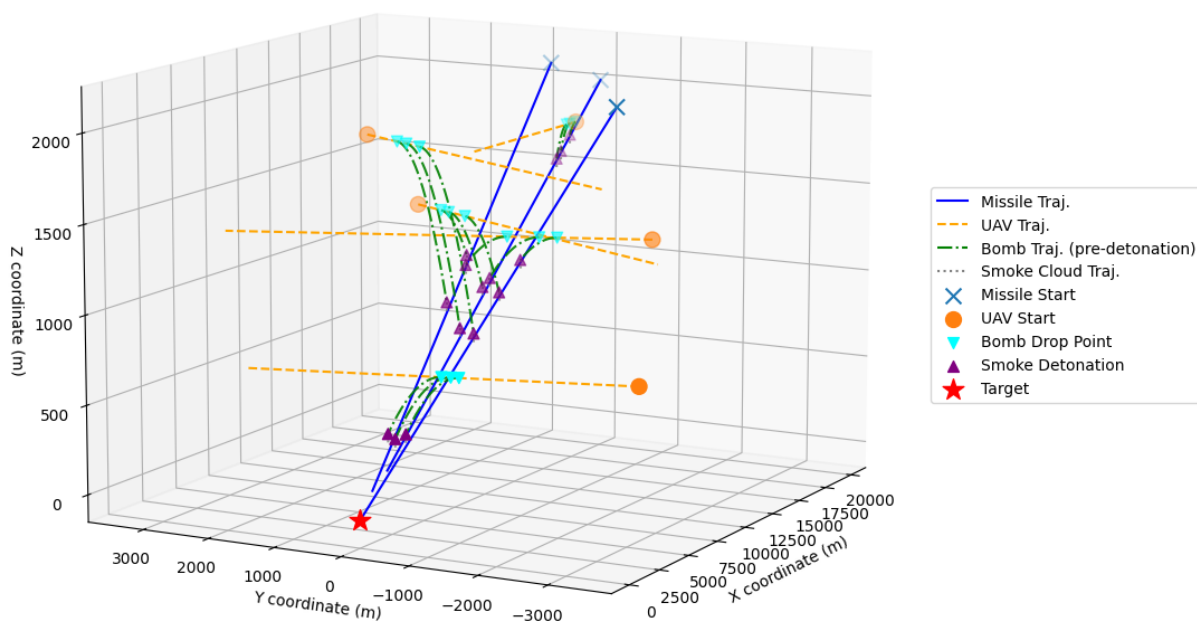


图 12: 问题五投放策略可视化

表 8: 问题五最优策略结果

无人机	方向 (°)	速度 (m/s)	烟幕弹	投放点坐标 (m)			起爆点坐标 (m)			遮蔽时长 (s)	遮蔽导弹
				x	y	z	x	y	z		
FY1	179.6452	140.0000	1	17800.00	0.00	1800.00	17294.61	3.13	1736.14	3.8326	M1
			2	17289.01	3.16	1800.00	16535.82	7.83	1658.17	2.5936	M1
			3	17020.21	4.83	1800.00	16173.23	10.07	1620.65	1.1782	M1
FY2	215.0024	139.7500	1	11304.00	912.61	1400.00	10540.47	377.93	1182.00	3.6161	M2
			2	11072.77	750.69	1400.00	10071.13	49.27	1024.84	3.5497	M1
			3	10590.84	413.20	1400.00	9582.33	-293.02	1019.68	3.2178	M3
FY3	129.9984	110.1200	1	4073.33	-703.75	700.00	3495.75	-15.39	373.73	2.2043	M3
			2	3984.15	-597.46	700.00	3381.80	120.43	345.14	2.4163	M1
			3	3882.93	-476.83	700.00	3303.23	214.07	371.33	2.2522	M2
FY4	215.0253	138.2500	1	10088.64	1361.26	1800.00	8608.95	324.19	962.96	3.2628	M2
			2	9807.87	1164.48	1800.00	8221.76	52.82	838.23	3.1746	M1
			3	9410.49	885.97	1800.00	7817.59	-230.44	829.97	2.7923	M3
FY5	140.0022	139.3100	1	11584.88	-812.67	1300.00	11035.26	-351.52	1170.04	3.3847	M3
			2	11318.07	-588.81	1300.00	10577.43	32.62	1064.00	3.5182	M1
			3	10838.90	-186.76	1300.00	10219.91	332.58	1135.16	3.1866	M2

- **问题二 (4 维优化):** 采用了“全局探索 + 局部搜索”的混合随机搜索策略,能够在较小的维度空间中快速定位一个高质量的解。
- **问题三 (8 维优化):** 升级为差分进化算法。差分进化算法是一种强大的全局优化元启发式算法,非常适合处理像问题三这样维度更高、解空间更复杂的连续变量优化问题。
- **问题四 (12 维优化):** 面对多无人机协同带来的“维度灾难”,模型创造性地采用了协同进化框架。通过将 12 维问题分解为 3 个独立的 4 维子问题,并让各子种群在协同评估适应度的背景下分别进行差分进化,有效地解决了高维空间的搜索难题。
- **问题五 (超高维复杂优化):** 面对多无人机、多导弹、多烟幕弹场景下的 40 维参数优化难题,模型通过“问题解耦-子问题寻优-全局整合”的分层策略突破维度限制,通过先验知识和子问题独立性假设大大降低待搜索空间复杂度,相对高效地克服了超高维优化问题的难点。
- **模型的可解释性与实用价值:** 模型的决策变量(飞行速度、方向、投放/起爆时间)和输出结果(坐标点、遮蔽时长)均为具有明确物理意义的参数,使得优化结果能够直接转化为可执行的无人机作战指令。最终结果按照题目要求生成了标准格式的表格文件,具备很强的实用性和可操作性。

10.2 模型的缺点

- **环境模型的理想化假设:** 整个模型建立在一个确定性的理想环境中。现实中的烟幕扩散会受到风场、大气湍流等随机因素的显著影响,其形状也并非完美球体。同时,模型未考虑导弹的末端制导与机动规避能力,以及无人机与导弹初始位置的速度、姿态测量误差。这些理想化假设简化了问题,但也限制了模型在真实复杂战场环境下的直接适用性。
- **优化算法的固有局限性:** 模型采用的随机搜索、差分进化等算法均为元启发式算法。虽然它们在解决复杂非线性问题上表现出色,但理论上不保证能收敛到全局最优解。最终结果的质量依赖于种群大小、迭代次数等算法参数的选择,以及计算资源的投入。不同的随机种子可能会产生略有差异但适应度相近的策略。
- **搜索空间的预先简化:** 在问题三和问题四的代码实现中,对部分决策变量(如无人机飞行方向)的搜索范围进行了大幅度的预先缩减。在问题五的代码中,我们的工作也依赖于导弹-烟幕弹可以较独立地两两配对这一假设,并且通过空间分析借鉴了大量关于可能的最优策略的先验信息。这虽然能显著提高算法的收敛速度和效率,但这种简化依赖于未在模型中明确阐述的先验知识或预分析。一个完全开放的全局搜索将面临更大的挑战,当前模型在该方面进行了一定的妥协。

10.3 模型的改进与推广

- **引入随机因素与鲁棒性分析:** 为提升模型的现实意义,可以引入随机风场模型来影响烟幕云团的漂移和扩散,并将无人机/导弹的初始状态设置为概率分布而非固定值。在此基础上,优化目标可以从最大化“单次确定性仿真”的遮蔽时长,转变为最大化“多次随机仿真”的期望遮蔽时长或成功遮蔽概率,从而得到鲁棒性更强的投放策略。

- **建立动态对抗模型：**当前模型中导弹的飞行路径是固定的。未来的改进可以为导弹引入制导律（如比例导引法），使其在丢失目标视野后能够进行机动，尝试重新捕获目标。这将把问题从单向优化问题升级为动态的博弈对抗问题，可能需要借助强化学习等方法进行求解。
- **向多目标与大规模场景推广：**
 - **多目标优化：**除了最大化遮蔽时间，还可以引入其他优化目标，如最小化无人机飞行时间（燃油消耗）、最小化无人机暴露风险等。这可以构建为一个多目标优化模型，提供丰富的优化指标供决策者权衡选择。
 - **大规模协同作战：**问题四中采用的协同进化框架具有良好的可扩展性。该模型可以方便地推广至更多无人机、对抗多枚来袭导弹的复杂场景，只需增加相应的子种群即可，为大规模无人机集群的协同任务规划提供了坚实的建模基础。

参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型 (第四版). 高等教育出版社, 2010.
- [2] 司守奎, 孙玺菁. 数学建模算法与应用 (第二版). 国防工业出版社, 2015.
- [3] Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. *Introduction to Operations Research (10th ed.)*. McGraw-Hill Higher Education, 2015.
- [4] Kall, P., & Wallace, S. W. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [5] Burden, R. L., & Faires, J. D. *Numerical Analysis (9th ed.)*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
- [6] Greenwood, D. T. *Advanced Dynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [7] McCoy, R. L. *Modern exterior ballistics: the launch and flight dynamics of symmetric projectiles*. Schiffer Publishing, 1999.
- [8] Storn, R., & Price, K. *Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces*. Journal of Global Optimization, 11(4), 341-359, 1997.
- [9] Price, K. V., Storn, R. M., & Lampinen, J. A. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [10] Potter, M. A., & De Jong, K. A. *A Cooperative Coevolutionary Approach to Function Optimization*. In Proceedings of the Third Conference on Parallel Problem Solving from Nature, 249-257, 1994.
- [11] Omidvar, M. N., Li, X., Mei, Y., & Yao, X. *Cooperative Co-evolution with Differential Grouping for Large Scale Global Optimization*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 18(3), 378-393, 2014.
- [12] Kennedy, J., & Eberhart, R. *Particle Swarm Optimization*. In Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks, 4, 1942-1948, 1995.
- [13] Wang, D., Tan, D., & Liu, L. *Particle swarm optimization algorithm: an overview*. Soft Computing, 22(2), 387-408, 2018.
- [14] Holland, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT press, 1992.
- [15] Goldberg, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
- [16] Gendreau, M., & Potvin, J. Y. (Eds.). *Handbook of metaheuristics*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [17] Fu, M. C. (Ed.). *Handbook of simulation optimization*. Springer, 2015.
- [18] Mnih, V., et al. *Human-level control through deep reinforcement learning*. Nature, 518(7540), 529-533, 2015.

- [19] Bellman, R. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [20] Yao, H., Wei, H., Zheng, G., & Li, Z. *A Survey on Reinforcement Learning for Traffic Signal Control*. arXiv preprint arXiv:1904.08117, 2019.
- [21] El-Tantawy, S., Abdulhai, B., & Abdelgawad, H. *Multiagent reinforcement learning for integrated network of adaptive traffic signal controllers (MARLIN-ATSC)*. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 14(3), 1140-1150, 2013.
- [22] MacQueen, J. *Some methods for classification and analysis of multivariate observations*. In Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, 1, 281-297, 1967.
- [23] Thorndike, R. L. *Who belongs in the family?*. Psychometrika, 18(4), 267-276, 1953.
- [24] Treiber, M., & Kesting, A. *Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [25] Sheffi, Y. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, 1985.
- [26] Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M., & Harris, C. M. *Fundamentals of Queueing Theory*. John Wiley Sons, 2008.
- [27] Webster, F. V. *Traffic Signal Settings*. Road Research Technical Paper No. 39, H.M. Stationery Office, London, 1958.
- [28] Little, J. D. C. *The Synchronization of Traffic Signals by Mixed-Integer Linear Programming*. Operations Research, 14(4), 568-594, 1966.
- [29] Shoup, D. C. *Cruising for parking*. Transport Policy, 13(6), 479-486, 2006.
- [30] Fellendorf, M., & Vortisch, P. *Microscopic traffic flow simulator VISSIM*. In Fundamentals of traffic simulation, 63-93, 2010.
- [31] Law, A. M. *Simulation Modeling and Analysis (5th ed.)*. McGraw-Hill Education, 2015.
- [32] Coutinho, W. P., Battarra, M., & Cordeau, J. F. (2018). *A systematic review of optimization models for routing problems in logistics*. Pesquisa Operacional, 38, 265-296.
- [33] Google Gemini, *Gemini 2.5 Pro*, Google, 2025-09-05