# 第一章　随机事件与概率

**（一）基本题答案**

1、（1）$\Omega_1=\{0,1,2,3\}$　（2）$\Omega_2=\{1,2,\cdots\}=\{n/n 是正整数\}$

（3）$\Omega_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$　（4）$\Omega_4=\{x|0\le x\le 2\}$

（5）$\Omega_5=\{2,3,4,\cdots,12\}$　（7）$\Omega_7=\{0,1,2,\cdots\}$

（6）$\Omega_6=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x>0,y>0,z>0\}$

2、（1）$AB\overline{C}$　（2）$A(B\cup C)$　（3）$A\cup B\cup C$

（4）$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$　（5）$AB\cup BC\cup AC$　（6）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$（或 $\overline{ABC}$）

3、$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z$

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=y-z$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-x+y-(y-z)=1-x+z$

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-x-y+z$

4、$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]$

$=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$

5、$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A-(A-B))$

$=1-P(A)+P(A-B)=1-0.7+0.3=0.6$

6、$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$

$=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+0)=\frac{17}{36}$

7、$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$

8、因 $(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=(\overline{A}A\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})=B\overline{B}=\phi$

所以 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P(\phi)=0$

9、七个字母任意排有 7！种排法，且每一排法的可能性相同，这是一个古典概型问题，而排成 SCIENCE 有 $1\times2\times1\times2\times1\times1\times1=4$ 种排法，故所求概率为 $\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$

10、12 件产品按不放回方式抽两次时有 $12\times11$ 种抽取法，且每一种取法的概率相等，这是一个古典概型问题，而第二次抽出次品抽取法有 $11\times2$ 种，故所求事件概率为 $\frac{11\times2}{12\times11}=\frac{1}{6}$

11、这可看成是条件概率问题

方法一　设 A 表示第一次取到不合格品，B 表示第二次取到不合格品，所求概率是 $P(AB|A\cup B)$，按条件概率的定义有

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}$$

因 $P(AB)=\frac{4\times3}{10\times9}$，$P(A\cup B)=\frac{4\times6+4\times6+4\times3}{10\times9}$，故所求概率为

$$P(AB|A\cup B)=\frac{4\times3}{4\times6+4\times6+4\times3}=\frac{1}{5}$$

方法二　如果是同时从中任取 2 件 产品，此时有一件是不合格时共有 $C_4^2+C_4^1C_6^1$ 种取法，而已知有一件是不合格品时，另一件也是不合格共有 $C_4^2$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\frac{1}{5}$$

注：此种方法是在缩减的样本空间中考虑条件概率的计算。

12、设点的坐标为$(x,y)$，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$$

由条件知这是一个几何概型问题且原点和该点的连线与$0x$轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的事件 A 为

$A=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2},\ y<x\}$

$\Omega$的面积$S_\Omega=\frac{1}{2}\pi a^2$，A 的面积$S_A=\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\pi+2}{2\pi}$$

13、设两艘船到达的时刻分别是$x$和$y$，则样本空间为$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x\le 24,\ 0\le y\le 24\}$由实际意义可知这是一个几何概型问题，且有一艘需等待一段时间的事件 A 为

$$A=\{(x,y)\mid -2\le x-y\le 1,(x,y)\in\Omega\}$$

因$\Omega$的面积$S_\Omega=24^2$，A 的面积$S_A=24^2-\frac{1}{2}(23^2+22^2)$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=0.121$$

14、不妨设是单位圆，三点 A、B、C 将单位圆周分成$x,y,2\pi-x-y$三段，于是样本空间$\Omega$为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<2\pi,0<y<2\pi,0<2\pi-(x+y)<2\pi\}$$

由实际意义知这是几何概型问题，当且仅当三段弧长都小于$\pi$时，三角形 ABC 为锐角三角形，即三角形 ABC 为锐角三角形的事件 A 为

$$A=\{(x,y)\mid 0<x<2\pi,0<y<\pi,0<2\pi-(x+y)<\pi,(x,y)\in\Omega\}$$

因$\Omega$的面积$S_\Omega=\frac{1}{2}(2\pi)^2$，A 的面积$S_A=\frac{1}{2}\pi^2$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\frac{1}{2}(2\pi)^2}=\frac{1}{4}$$

15、（1）用全概率公式得他迟到的概率为　$0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=0.15$

（2）用贝叶斯公式得所求概率是　$\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.15}=\frac{1}{2}$

16、用 A，B，C 分别表示取出的是一，二，三等品三个事件，则所求概率为

$$P(A\mid\overline{C})=\frac{P(A\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(A-AC)}{1-P(C)}=\frac{P(A)}{1-P(C)}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$$

其中利用到$AC=\phi$，即 A 与 C 互斥。

17、由贝叶斯公式所求概率为

$$\frac{0.01\times 0.6}{0.01\times 0.6+0.02\times 0.4}=\frac{3}{7}$$

18、由条件及加法公式有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}$$

即　$16[P(A)]^2-16P(A)+3=0$，得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$（舍）

故　$P(A)=\frac{1}{4}$

19、由条件知 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9}$，且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 得：$P(A-AB)=P(B-AB)$ 即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$ 推得：$P(A)=P(B)$

由独立性，有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9}$，从而得 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}$$

20、设射手的命中率为 P，则由题意得：

$$1-(1-P)^4=\frac{80}{81}$$

解之得　$P=\frac{2}{3}$

21、设 $P(A)=P$，则由题意得

$$1-(1-P)^4=0.5904$$

解之得 $P=0.2$，在三次独立试验中，事件 A 出现一次的概率是

$$C_3^1P(1-P)^2=3\times0.2\times0.8^2=0.384$$

**（二）补充题答案**

1、(1) 类似于本章第 11 题，这里不妨认为是同时取出两件产品，此时取出产品中有一件是不合格品有 $C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法，而已知两件中有一件是不合格品，另一件也是不合格品有 $C_m^2$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{C_m^2}{C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{m-1}{2M-m-1}$$

(2) 取出产品中有一件是合格品有 $C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法，而已知两件中有一件是合格品，另一件是不合格品有 $C_{M-m}^1C_m^1$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{C_{M-m}^1C_m^1}{C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{2m}{M+m-1}$$

注：这里采用的是在缩减的样本空间中计算条件概率的方法，且题中“有一件”其意应在“至少有一件”而不能理解为“只有一件”，这是因为对另一件是否是不合格还不知道。

2、(1) 这是条件概率，下面考虑在缩减的样本空间中去求，第一、第二次取到正品有 $15\times14\times18$ 种取法，在此条件下第三次取到次品有 $15\times14\times5$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{15\times14\times18}=\frac{5}{18}$$

注：上述是将样本空间中的元素看成是三次取完后的结果，更简单的也可只考虑以第三次取的结果作为样本空间中的元素，即在第一、第二次取到正品时，第三次取时有 18 种取法，而在第一次、第二次取到正品时，第三次取次品有 5 种取法，故所求概率为 $\frac{5}{18}$

(2) 此问是要求事件“第一、第二次取到正品，且第三次取到次品”的概率（与 (1) 不同的在于这里没有将第一、第二次取到正品作为已知条件，而是同时发生），按题意，三次取产品共有 $20\times19\times18$ 种取法，而第三次才取到次品共有 $15\times14\times5$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{20\times19\times18}=\frac{35}{228}$$

（3）三次取产品共有 $20\times19\times18$ 种取法，第三次取到次品有 $5\times19\times18$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{5\times19\times18}{20\times19\times18}=\frac{1}{4}$$

注：此问也可用类似于（1）中注的方法去解决，即只考虑以第三次取得的结果作为样本空间的元素，也可很快求得答案是 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$。

3、令 A 表示挑选出的是第一箱，$B_i$（$i=1,2$）表示第 $i$ 次取到的零件是一等品，则

（1）由全概率公式，有

$$P(B_1)=P(B_1\mid A)P(A)+P(B_1\mid\overline{A})P(\overline{A})=\frac{10}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4$$

（2）用全概率公式有

$$P(B_1B_2)=P(B_1B_2\mid A)P(A)+P(B_1B_2\mid\overline{A})P(\overline{A})=\frac{10\times9}{50\times49}\times\frac{1}{2}+\frac{18\times17}{30\times29}\times\frac{1}{2}$$

于是所求条件概率是

$$P(B_2\mid B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{10\times9}{50\times49}\times\frac{1}{2}+\frac{18\times17}{30\times29}\times\frac{1}{2}}{0.4}=0.4856$$

4、用 A 表示第一次取到 1 号球，B 表示第二次取到 2 号球，则由全概率公式有

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

$$=\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}=\frac{n+(n-1)^2}{n^2(n-1)}$$

5、以 $A_k$ 表示有 $k$ 个孩子，B 表示所有孩子均为同一性别，由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{k=0}^{\infty}P(B|A_k)P(A_k)$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P(B|A_k)P(A_k)$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left((0.5)^k+(0.5)^k\right)P_k$$

$$=P_0+2\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\ P_k$$

6、以 A 表示患有癌症，B 表示试验呈阳性，则由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(A|B)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.01}=0.3231$$

7、用 D 表示失业率上升，此题要求 $P(A|D),P(B|D),P(C|D)$，根据题意有 $P(D|A)=0.8,P(D|B)=0.2,P(D|C)=0.2$，则由贝叶斯公式得

$$P(A|D)=\frac{0.8\times\frac{1}{6}}{0.8\times\frac{1}{6}+0.2\times\frac{1}{3}+0.2\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

同理　$P(B|D)=\frac{2}{9}$

$$P(C|D)=\frac{1}{3}$$

故总统对三个顾问的理论正确性应分别调整成$\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{3}$。

8、以$A_i$ $(i=1,2,3)$分别表示甲、乙、丙击中飞机，$B_i$ $(i=0,1,2,3)$表示有$i$个人击中飞机，C 表示飞机被击落，则

$$P(B_0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41\end{aligned}$$

$$P(B_3)=1-P(B_0)-P(B_1)-P(B_2)=1-0.09-0.36-0.41=0.14$$

则由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(C)&=\sum_{i=0}^{3}P(C\mid B_i)P(B_i)\\&=0\times0.09+0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14=0.458\end{aligned}$$

注：在这里$A_1,A_2,A_3$不构成样本空间的划分，因为它们不是两两互斥，可同时发生。

9、（1）$n$次成功之前已经失败了$m$次，表示进行了$m+n$次，第$m+n$次试验一定成功，而前面的$m+n$-1 次试验中有$m$次失败，$n$-1 次成功，从而所求概率为

$$\binom{m+n-1}{m}(1-p)^m\ p^{n-1}\cdot p=\binom{m+n-1}{m}p^n\ (1-p)^m$$

（2）令 A 表示$n$次成功之前已有$m$+1 次失败，$A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$表示$n$次成功之前已有$m$+1 次失败且第$m$+1 次（即最后一次）失败在第$m+i$次试验中发生，则可知有

$$P(A)=\binom{m+n}{m+1}p^n\ (1-p)^{m+1}$$

且$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A_1,\cdots,A_n$两两互斥，对事件$A_i$，它表示在$m+n+1$次试验中，从第$m+i+1$次试验至第$m+n+1$试验都成功，第$m+i$次试验是失败（最后一次失败），而前面的$m+i$-1 次试验中有$m$次失败，$i-1$次成功，于是

$$\begin{aligned}p(A_i)&=\binom{m+i-1}{m}p^{i-1}\ (1-p)^m\ \cdot(1-p)\cdot p^{n-i+1}\\&=\binom{m+i-1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}\ ,\qquad i=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

由于$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$，即

$$\binom{m+n}{m+1}p^n\ (1-p)^{m+1}=\binom{m}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}+\binom{m+1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}$$

消去$p^n\ (1-p)^{m+1}$立得结论成立。

10、由全概率公式，每台仪器能出厂的概率$p=1\times0.7+0.8\times0.3=0.94$

将每台仪器能否出厂看成是一次试验，则$n$台仪器就是$n$次试验，由于每次试验只有两个结果：出厂或不出厂，且各次试验相互独立，则这是一个$n$重伯努利概型问题，于是有

（1）$\alpha=0.94^n$

（2）$\beta=C_n^2\ 0.94^{n-2}0.06^2$

（3）$\theta=1-0.94^n-n\cdot0.94^{n-1}\cdot0.06$

# 第二章　随机变量及其概率分布

**（一）基本题解答**

1.样本空间$V=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$.这里，例如(6,1)表示掷第一次得 6 点，掷第二次得 1 点.其余类推.

以 X 表示两次所得点数的和.则 X 的分布律为

| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_K$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

2.由题设，X的可能值为 0，1，2，3. 以$A_i(i=1,2,3)$表示事件“汽车在第$i$个路口 遇到红灯”; $A_1$，$A_2$，$A_3$相互独立，且$P(A_i)=P(\overline{A}_i)=1/2, i=1,2,3.$ 于是

$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2$;　$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=1/2^2$;　$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=1/2^3$;

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1/2^3$.

∴ X 的分布律为：

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

3.设“ξ=k”表示前 k 次取出白球，第 k+1 次取黑球，则ξ的分布列为

$$P(\xi=k)=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(n-m)}{n(n-1)\cdots(n-k)}\qquad (k=0,1,\cdots,m).$$

4.（1）$\because \sum_{k=1}^{5}P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{c}{15}=\frac{c}{15}\sum_{k=1}^{5}=\frac{c}{15}\times 5=\frac{c}{3}=1,\qquad \therefore c=3.$

（2）$P\{1\le X\le 3\}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$　　（3）$P\{0.5<X<2.5\}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$

5.设进行了$i$次试验，其中有k次试验成功之事件设为A，则此事件包含有两层意思：它意味着第$i$次（$i\ge k$）成功，且$i-1$次试验中成功$k-1$次，设这两个事件分别为$A_1$，$A_2$，则$A=A_1A_2$，且$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$($A_1$与$A_2$独立)，而　$P(A_1)=p$,

$$P(A_2)=C_{i-1}^{k-1}p^{k-1}\cdot q^{i-1-(k-1)}=C_{i-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}q^{i-k}.$$

于是，所需试验次数 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=p\cdot c_{i-1}^{k-1}p^{k-1}q^{i-k}=c_{i-1}^{k-1}p^{k}q^{i-k}\quad (i=k,k+1,\cdots;q=1-p).$$

6.设ξ为该种商品每月销售数，则　ξ～π（7），　$x$为该种商品每月进货数，则$P(\xi\le x)\ge 0.999$.查普哇松分布的数值表，得$x\geqslant 13$.

7.设 X=｛该外国人在 5 个选择题中答对的题数｝，则 X~B（5，1/4）.又设 A=｛答对题数不少于两题｝，则依题设知　$P(A)=\sum_{k=3}^{5}P\{X=k\}=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{5-k}=0.1035.$

8.设 X=｛180 台同类设备中同时发生故障的设备的台数｝，则 X~B（180，0.01）.又设配备 N 个维修人员，则所求概率为

$P\{X>N\}=P\{X\ge N+1\}=\sum_{k=N+1}^{180}P\{X=k\}$，　而　$P\{X=k\}=C_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}$，　故

$P\{X>N\}=\sum_{k=N+1}^{180}c_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}\approx\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{(1.8)^k}{k!}e^{-1.8}$，　这　里 $np=180\times 0.01=1.8=\lambda$.

欲使$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1.8^k}{k!}e^{-1.8}\le 1-0.99=0.01$，查泊松分布表，可知 N+1=7，因而至少应配备 6 名工人.

9.设 $A_i=\{部件i需要调整\}$（$i=1,2,3$），则 $P(A_1)=0.10, P(A_2)=0.20,$ $P(A_3)=0.30.$ 由于$A_1$，$A_2$，$A_3$相互独立，因此，有

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504,$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$

$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)=0.092,$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$$

因此，X 的概率分布为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.504 | 0.398 | 0.092 | 0.006 |

10. F(x)为一阶梯状函数，则 X 可能取得值为 F(x)的跳跃点：$-1$，1，3

$$P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.4, P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$$

$$P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2,$$ 即有

| X | −1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0.4 | 0.4 | 0.2 |

11.（1）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a=1,$ 即 $a=1$，又由于 X 为连续型随机变量，F(x)应为 x 的连续函数，应有

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=0=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a+b$$ 所以 $a+b=0, b=-a=-1.$

代入 $a,b$ 之值，得 $F(x)=\begin{cases}1-\exp\{-x^2/2\}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

（2）对函数 F(x)求导，得 X 的概率密度 $P(x)=\begin{cases}x\exp\{-x^2/2\}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

12.当 x≤0，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}e^x$; 当 x＞0 时，

$$F(x)=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt)=\frac{1}{2}[1+(1-e^{-x})]=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$，所以，我们有

$$F(x)=\begin{cases}e^x/2, & x\le 0,\\ 1-e^{-x}/2, & x>0.\end{cases}$$

13 由 $P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$ 得 $P\{X<k\}=\frac{1}{3}$，即应选 k，使 $\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\frac{1}{3}$.注意 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=0$，$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$，$\int_1^3 f(x)dx=0$，$\int_3^6 f(x)dx=\frac{2}{3}$，可见当 1≤k≤3 时，

$$\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^k f(x)dx=\frac{1}{3}$$，所以 k 的取值范围应为 1≤k≤3.

14. $P\{X>0.8\}=\int_{0.8}^{1}12x(1-x)^2dx=0.272$.　$P\{X>0.9\}=\int_{0.9}^{1}12x(1-x)^2dx=0.037$.

15. $X\sim E(\frac{1}{200})$,　（1）$P(X\le 100)=F(100)=1-e^{-\frac{100}{200}}=1-e^{-\frac{1}{2}}$;

（2）$P(X>300)=e^{-\frac{1}{200}\times300}=e^{-\frac{3}{2}}=e^{-1.5}$.

16.解法 1　用随机变量法：令 $x_i$ 表示第 i 次掷骰子出现的点数，$i=1,2$. 显然$x_1$和$x_2$独立同分布，$P\{x_i=j\}=1/6,$（$j=1,2,\cdots,6;\ i=1,2$），则方程变为 $x^2+x_1x+x_2=0$ .它有重根的充要条件是 $x_1^2-4x_2=0$，有实根的充要条件是 $x_1^2-4x_2\ge 0$，故

$$q=P\{x_1^2-4x_2=0\}=P(\{x_2=1,x_1=2\}U\{x_2=4,x_1=4\})=P\{x_2=1,x_1=2\}+P\{x_2=4,x_1=4\}$$

$$=P\{x_2=1\}P\{x_1=2\}+P\{x_2=4\}P\{x_1=4\}=1/6\times1/6+1/6\times1/6=1/18.$$ 由全概率公式可

得 $P=P\{x_1^2-4x_2\ge 0\}=P\{\,x_2\le\frac{x_1^2}{4}\,\}=\sum_{i=1}^{6}P\{x_1=j\}P=\{\,x_2\le\frac{x_1^2}{4}\big|x_1=j\,\}$

$=P\{x_1=1\}P\{\,x_2\le\frac{1}{4}\,\}+P\{x_1=2\}P\{\,x_2\le\frac{2^2}{4}\,\}+P\{x_1=3\}P\{\,x_2\le\frac{3^2}{4}\,\}+P\{x_1=4\}P\{\,x_2\le\frac{4^2}{4}\,\}$

$+P\{x_1=5\}P\{\,x_2<\frac{5^2}{4}\,\}+P\{\,x_2\le\frac{6^2}{4}\,\}=\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 1=\frac{19}{36}$

解法 2　用枚举法：一枚骰子掷 2 次，其基本事件总数为 36.方程有实根和重根的充要条件分别为 $B^2-4C\ge 0$ 和 $B^2-4C=0$.

| B 的取值 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 使 $B^2-4C\ge 0$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| 使 $B^2-4C=0$ 的基本事件个数 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

故使方程有实根的基本事件总数为 1+2+4+6+6=19，有重根的基本事件总数 1+1=2，因此　$P=19/36,\ \ q=2/36=1/18.$

17.本题关键是理解随机变量 N(t)的意义.事件 $\{N(t)=k\}$ 表示设备在任何长为 t 的时间内发生 k 次地震，其概率为 $P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}(k=0,1,2,\cdots)$. 由于 T 表示两次地震之间的时间间隔，故当 t<0 时，$P\{T\le t\}=0$；当 t⩾0 时，事件 $\{T\le t\}$ 与事件 $\{T>t\}$ 是互逆事件，且 $\{T>t\}$ 表示在长为 t 的时间内无地震发生，故它等价于事件 $\{N(t)=0\}$.

（1）由于 T 是非负随机变量，可见当 t<0 时，$F(t)=P\{T\le t\}=0$.

设 t⩾0，则事件 $\{T>t\}$ 与 $\{N(t)=0\}$ 等价. 因此，当 t⩾0 时，有

$$F(t)=P\{T\le t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}.$$

于是，T 服从参数为 λ 的指数分布.

（2）$Q=P\{T\ge 10|T\ge 5\}=\frac{P\{T\ge 10,T\ge 5\}}{P\{T\ge 5\}}=\frac{P\{T\ge 10\}}{P\{T\ge 5\}}=\frac{e^{-10t}}{e^{-5t}}=e^{-5t}$.

18.设X为考生的外语成绩，由题设知 $X\sim N(\mu,\sigma)$，其中 μ=72.现在求 σ².由题设

$$P\{X\ge 96\}=0.023,\ \ P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\ge\frac{96-72}{\sigma}\right\}=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,\therefore\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977,$$

由 $\Phi(x)$ 的数值表，可见 $\frac{24}{\sigma}$=2，因此 $\sigma=12$.这样X~N(72, $12^2$). 所求概率为

$$P\{60\le x\le 84\}=P\left\{\frac{60-72}{12}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{84-72}{12}\right\}=P\left\{-1\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$$

19.（1）$p(\xi>250)=p(\frac{\xi-300}{35}>\frac{250-300}{35})=\Phi(1.43)\approx 0.9236;$

（2）$p(\mu-x<\xi<\mu+x)=p(-\frac{x}{35}<\frac{\xi-300}{35}<\frac{x}{35})=\Phi(\frac{x}{35})-\Phi(-\frac{x}{35})=2\Phi(\frac{x}{35})-1\ge 0.9$，即 $(x/35)\ge 0.95$，所以 $x/35\ge 1.65$，即 $x\ge 57.75$.

20.引进下列事件：$A_1$=｛电压不超过 200 伏｝，$A_2$=｛电压在 200~240 伏｝，$A_3$=｛电压超过 240 伏｝；B=｛电子元件损坏｝.由题设，知X~N(220,$25^2$)，因此

$$P(A_1)=P\{X\le 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212;$$

$$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576;$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-0.212-0.576=0.212.$$

（1）由题设条件，知 $P(B|A_1)=0.1$，$P(B\mid A_2)=0.001$，$P(B\mid A_3)=0.2$. 于是，由全概

率公式，有 $\alpha = P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = 0.0642$.

（2）由条件概率定义（或贝叶斯公式），知 $\beta = P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} \approx 0.009$.

21.由题设，Y～$B(3,P)$ 其中 $P = P\left\{X \le \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2xdx = \frac{1}{4},$

故 $P\{Y = 2\} = C_3^2 (1/4)^2 (3/4)^1 = 9/64.$

22.

| P | 0.3 | 0.2 | 0.4 | 0.1 |
|---|---|---|---|---|
| X | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ |
| $(2X-\pi)^2$ | $\pi^2$ | 0 | $\pi^2$ | $4\pi^2$ |
| $\cos(2X-\pi)$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |

∴

| $(2X-\pi)^2$ | 0 | $\pi^2$ | $4\pi^{-2}$ |
|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.7 | 0.1 |

| $\cos(2X-\pi)$ | $-1$ | 1 |
|---|---|---|
| P | 0.7 | 0.3 |

23.因为 $\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} -1, & k = 4n-1, \\ 0, & k = 2n, \\ 1, & k = 4n-3 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$

所以，$Y = \sin(\frac{\pi}{2}X)$ 只有 3 个可能取值 $-1$，0，1，而取这些值的概率分别为

$$P\{Y=-1\} = P\{X=3\} + P\{X=7\} + P\{X=11\} + \cdots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-1/16} = \frac{2}{15},$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=2\} + P\{X=4\} + P\{X=6\} + \cdots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=1\} + P\{X=5\} + P\{X=9\} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/16} = \frac{8}{15}.$$

于是，$Y = \sin(\frac{\pi}{2}X)$ 的分布列为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{bmatrix}$.

24.$\because X \sim U(0,2)$, $\therefore$ ① $y \le 0$时，$F_Y(y) = 0$;

②当 $0 < y < 4$,

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}/2$;

③ $y \ge 4$时, $F_y(y) = 1$.

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & 其它, \end{cases}$

25.应先求出$F_Y(y)$，再对$y$求导即得$f_Y(y)$　因

$$F_Y(y) = p\{Y < y\} = p\{e^X < y\} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ p\{X < Iny\}, & y \ge 1. \end{cases}$$

故当 $y \ge 1$ 时, $F_Y(y) = p\{X < \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x}dx$, 而 $f_Y(y) = F_Y'(y) = 1/y^2$.

因此 $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1/y^2 & y \ge 1. \end{cases}$

26.假设随机变量 X 具有连续的分布函数 $F(x)$，证明:$Y=F(X)$ 在区间（0,1）上服从均匀分布.

解　先求 Y 的分布函数. 因 $0\le F(x)\le 1$，单调非降. 连续，故 $y=F(x)$ 的反函数存在.

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\phi)=0$，

当 $0<y<1$ 时 $F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=F[F^{-1}(y)]=y$，

当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\Omega)=1$.

于是　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$　从而 Y 的密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

即 Y= F（X）服从(0，1)上的均匀分布.

27.（1）$Y=e^X$ 的分布函数　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$.当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$;

当 y>0 时，$F_Y(y)=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_0^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$, 于是，$Y$ 的概率密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{1}{2}(\ln y)^2], & y>0.\end{cases}$

（2）$Y=2X^2+1$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{2X^2+1\le y\}$ .当 $y\le 1$ 时, $F_Y(y)=0$;当 $y>1$ 时，

$$F_Y(y)=p\{2X^2+1\le y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

即　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & y>1.\end{cases}$　故 $Y$ 的概率密度为　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$

（3）$Y=|X|$ 的分布函数　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$. 当 $y\le 0$ 时, $F_Y(y)=0$;当 $y>0$ 时,

$$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

于是，Y 的概率密度函数为　$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y>0.\end{cases}$

**（二）补充题答案**

1.（1）由条件可知，当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$；$F(-1)=\frac{1}{8}$, $P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

易见，在 X 的值属于 $(-1,1)$ 的条件下，事件 $\{-1<X\le x\}(-1<x<1)$ 的条件概率为

$$P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=(x+1)/2.$$

于是，对于 $-1<x<1$, 有

$$P\{-1<X\le x\}=P\{-1<X\le x,-1<X<1\}=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=\frac{5}{8}\times\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16}$$

$$F(x)=P\{X\le -1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}.$$

对于 $x\ge 1$, 有 F（$x$）=1.　从而　$F(x)=\begin{cases}0 & \text{若 } x<-1\\ (5x+7)/16 & \text{若 } -1\le x<1\\ 1 & \text{若 } x\ge 1.\end{cases}$

（2）X 取负值的概率　$p = P\{X \le 0\} = F(0) - P\{X = 0\} = F(0) = 7/16.$

2．用 A 表示有效，由题设知

$$P(A)=\frac{3}{4}, P(\overline{A})=\frac{1}{4}, P(X=k|A)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}, P(X=k|\overline{A})=\frac{5^k}{k!}e^{-5}, k=0,1,2,\cdots.$$

应用贝叶斯公式，得

$$P(A|X=2)=\frac{P(A)P(X=2|A)}{P(A)P(X=2|A)+P(\overline{A})P(X=2|\overline{A})}=\frac{0.75\times 0.2240}{0.75\times 0.2240+0.25\times 0.0842}\approx 0.8887.$$

3.（1）按第一种方式：记 $A_i$ 为“第 $i$ 个人承包的 20 台机器不能及时维修”，$(i=1,2,3,4)$，则所求概率为 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$．易知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \ge P(A_1)=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{K}(0.01)^k(0.99)^{20-k}=0.0175$$

（2）按第二种方式：以 X 表示这 80 台机器中需要维修的机器的台数，则不能及时维修的概率为　$P(X \ge 4)=\sum_{k=4}^{80}\binom{80}{K}(0.01)^k(0.99)^{80-k}=0.0091$.

从上述计算结果可以看出，还是以第二种方式为好．因按第二种方式 3 个人共同维修 80 台机器不能及时维修的概率较小.

4. ① $x \le 0, F(x)=0$;　② $0<x<2$,

$$F(x)=\frac{\int_0^x dx\int_0^{2x-x^2}dy}{\int_0^2 dx\int_0^{2x-x^2}}=\frac{\int_0^x(2x-x^2)dx}{\int_0^2(2x-x^2)dx}=\frac{(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^x}{(x_2-\frac{x^2}{3})\Big|_0^x}=\frac{1}{4-\frac{8}{3}}(x^2-\frac{x^3}{3})=\frac{1}{4}(3x^2-x^3);$$

③ $X \ge 2, F(x)=1$.　故$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2x-x^2), 0<x<2;\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$

5. X 的分布函数为　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ P(0<X\le x), & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

设 $x_1, x_2 \in [0,1), 且 x_i+\Delta x \in [0,1), i=1.2,$ 由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_1+\Delta x)=F(x_2+\Delta x)-F(x_2)=P(x_2<X\le x_2+\Delta x).$$

令　$\Delta x \to 0$，得　$F'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_2+\Delta x)-F(x_2)}{\Delta x}=F'(x_2).$

从而，对任意 $x \in (0.1)$，有 $F'(x) \equiv C$，当 $x \overline{\in} [0,1]$ 时，显然 $F'(x)=0$；另一方面

$$F(1)=P(0<X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=C=1.$$

所以，X 的密度函数为　$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & 其他,\end{cases}$　因此 X 服从[0，1]上的均匀分布.

6.设 $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X),\ \ \lambda>0.\ \ \because X \sim U[0,1],\ \ \therefore y\le 0, F_Y(y)=0;$

$$y>0, F_Y(y)=P(Y\le y)=P[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)\le y]=F(X\le 1-e^{-\lambda y})=F_X(1-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}.$$

# 第三章　多维随机向量及其概率分布

## (一) 基本题答案

1、设 X 和 Y 的可能取值分别为 $i与j$, 则$i=0,1,2,3;\ j=0,1,2.$

因盒子里有 3 种球，在这 3 种球中任取 4 个，其中黑球和红球的个数之和 $i与j$ 必不超过 4.另一方面，因白球只有 2 个，任取的 4 个球中，黑球和红球个数之和最小为 2 个，故有

$$2\le i+j\le 4,\ 且\ p(X=i,Y=j)=C_3^iC_2^jC_2^{4-i-j}/C_7^4.$$

因而　$P(X=i,Y=j)=0\quad (i+j<2\quad 或\ i+j>4, i=0,1,2,3;\ j=0,1,2).$

于是　$P_{11}=P(X=x_1=0,Y=y_1=0)=0,\ p_{12}=P(X=x_1=0,Y=y_2=0)=0,$

$$p_{13}=P(X=x_1=0,Y=y_3=0)=C_3^0C_2^1C_2^2/C_7^4=1/35.$$

同法可求得联合分布律中其他的$p_{ij}$，得下表

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $C_3^2C_2^0C_2^2/C_7^4$ | $C_3^3C_2^0C_2^1/C_7^4$ |
| 1 | 0 | $C_3^1C_2^1C_2^2/C_7^4$ | $C_3^2C_2^1C_2^1/C_7^4$ | $C_3^3C_2^1C_2^0/C_7^4$ |
| 2 | $C_3^0C_2^2C_2^2/C_7^4$ | $C_3^1C_2^2C_2^1/C_7^4$ | $C_3^2C_2^2C_2^0/C_7^4$ | 0 |

即

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 3/35 | 2/35 |
| 1 | 0 | 6/35 | 12/35 | 2/35 |
| 2 | 1/35 | 6/35 | 3/35 | 0 |

2、X 和 Y 都服从二项分布，参数相应为(2,0.2)和（2,0.5）.因此 X 和 Y 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.64 & 0.32 & 0.04\end{bmatrix}\qquad Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{bmatrix}.$$

由独立性知，X 和 Y 的联合分布为

| Y \ X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.16 | 0.08 | 0.01 |
| 1 | 0.32 | 0.16 | 0.02 |
| 2 | 0.16 | 0.08 | 0.01 |

3、Y 的分布函数为 $F(y)=1-e^{-y}(y>0), F(y)=0(y\le 0).$ 显知 $(X_1,X_2)$ 有四个可能值：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1).$ 易知 $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=1-e^{-1},$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0, P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2},$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2},$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=e^{-2}.$

于是，可将$X_1$和$X_2$联合概率分布列表如下：

| $X_2$ \ P \ $X_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $1-e^{-1}$ | $e^{-1}-e^{-2}$ |
| 1 | 0 | $e^{-2}$ |

4、$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}P(\zeta=n,\eta=m)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$

$$=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\left[p+(1-p)\right]^n=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

即 X 是服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布.

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^{n-m}(1-p)^{n-m}}{(n-m)!}$$

$=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!},(m=0,1,2,\cdots).$ 即 Y 是服从参数为 $\lambda$p 的泊松分布.

5、由定义 F（$x,y$）=P$\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy.$

因为 $\varphi$（$x,y$）是分段函数，要正确计算出 F（$x,y$），必须对积分区域进行适当分块：$x<0$或$y<0$;$0\le x\le 1,0\le y\le 1$;$x>1,y>1$;$x>1,0\le y\le 1$;$y>1,0\le x\le 1$等 5 个部分.

（1）对于 $x<0$或$y<0$，有　F（$x,y$）=P{X≤ $x$, Y≤y}=0;

（2）对于 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$，有　$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uvdudv=x^2y^2$;

（3）对于 $x>1,0\le y\le 1$，有　$F(x,y)=P\{X\le 1,Y\le y\}=y^2$;

（4）对于 $y>1,0\le x\le 1$，有　$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le 1\}=x^2$;

（5）对于 $x>1,y>1$，有　$F(x,y)=1$.

故 X 和 Y 的联合分布函数　$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ x^2y^2, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\ x^2, & 0\le x\le 1,1<y,\\ y^2, & 1<x,0\le y\le 1,\\ 1,. & 1<x,1<y.\end{cases}$

6、（1）$x\le 0$或$y\le 0,F(x,y)=0;x>0,y>0,$

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y ze^{-(2s+t)}dsdt=2(\int_0^x e^{-2s}ds)(\int_0^y e^{-t}dt)=(-e^{-2s}\Big|_0^x)(-e^{-t}\Big|_0^y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$$

即 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）P$(Y\le X)=\int\limits_{y<x}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 2e^{-2x-y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left(-e^{-y}\Big|_0^x\right)dx$

$$=-2\int_0^{+\infty}(1-e^{-x})e^{-2x}dx=2\int_0^{+\infty}(e^{-2x}-e^{-3x})dx=2(\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^{+\infty}=-2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}.$$

7、（1）$x>0$ 时，$f_X(x)=\int_X^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x};x\le 0\text{时},f_X(x)=0,$

即　$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

（2）$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-1/2}$

8、（1）（i）根据公式 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 计算; 当$x\le 0$ 时, $f_X(x)=0$;　当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4y^2\Big|_0^x(2-x)=2.4x^2(2-x);\ \text{当}x\ge 1\text{时},\ f_X(x)=0$$

即 $f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0<x<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（ii） 利用公式 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 计算. 当 $y\le 0$ 时, $f_Y(y)=0$; 当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=4.8y(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_y^1=4.8y\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\right]$$

$$=4.8y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2})=2.4y(3-4y+y^2);$$ 当 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0.$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<y<1;\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$$(2)P\left\{(X<\frac{1}{2})\cup(Y<\frac{1}{2})\right\}=1-P(X\ge\frac{1}{2},Y\ge\frac{1}{2})=1-\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}dxdy=\frac{5}{8}.$$

9、本题先求出关于 $x$ 的边缘概率密度，再求出其在 $x=2$ 之值 $f_X(2)$. 由于平面区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2,$ 故（X,Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

易知，X 的概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 故 $f_X(2)=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}.$

10、（1）有放回抽取：当第一次抽取到第 $k$ 个数字时，第二次可抽取到该数字仍有十种可能机会，即为 $P\{X=i|Y=k\}=\frac{1}{10}\quad(i=0,1,\cdots,9).$

（2）不放回抽取：（i）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，则第二次抽到此（第 $k$ 个）数是不可能的，故 $P\{X=i|Y=k\}=0\quad(i=k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

（ii）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，而第二次抽到其他数字（非 $k$ ）的机会为 $1/9$，知 $P\{X=i|Y=k\}=1/9(i\ne k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

11、（1）因 $f_\eta(y)=\int_y^1 24(1-x)ydx=12y(1-y)^2,\ 0\le y\le 1;\quad f_n(y)=0,$ 其它.

故在 0≤y≤1 时， $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}2(1-x)/(1-y)^2 & y\le x\le 1\\ 0 & 其它;\end{cases}$

因 $f_\xi(x)=\int_0^x 24(1-x)ydy=12x^2(1-y)^2,\quad 0\le x\le 1;\ f_\xi(x)=0,$ 其它.

故在 0≤x≤1 时， $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}2y/x^2 & 0\le y\le x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

（2）因 $f_\xi(X)=\int_{1/x}^x\frac{1}{2x^2y}dy=\frac{1nx}{x^2},1\le x\le\infty;\ f_\xi(x)=0,$ 其它;

故在 1≤x<∞ 时， $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2y1nx} & \frac{1}{x}<y<x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

因 $f_\eta(y)=\begin{cases}\int_{1/y}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2} & 0<y\le 1\\ \int_{y}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2y^2} & 0<y<\infty\\ 0 & 其它,\end{cases}$ 故在 $0<y\le 1$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2y} & \frac{1}{y}<x<\infty\\ 0 & 其它;\end{cases}$

而在 $1<y<\infty$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{y}{x^2} & y<x<\infty\\ 0 & 其它.\end{cases}$

（3） $f_\xi(x)=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x},x>0;\ f_\xi(x)=0,x\le 0.$ 在 $x$>0, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y} & y>x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$f_\eta(y)=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y},y>0;\quad f_\eta(y)=0,y\le 0.$ 故在 y>0 时， $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

12、 $f_X(x)=\int_0^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{(1+x+y)^n}dy=\frac{n-2}{(1+x)^{n-1}},x>0$，故

$$f_{Y|X}(y/1)=\begin{cases}2^{n-1}(n-1)/(2+y)^n & y>0,\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

13、X 和 Y 是否独立，可用分布函数或概率密度函数验证.

方法一：X 的分布函数 $F_X(x)和Y$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y} & y\ge 0\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),知X和Y$ 独立.

$\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}=[1-F_X(0.1)]\cdot[1-F_Y(0.1)]=e^{-0.05}\cdot e^{-0.05}=e^{-0.1}$

方法二：以 $f(x,y),f_X(x)和f_Y(x)分别表示(X,Y),X和Y$ 的概率密度，可知

$$f(x,y)=\frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)} & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0.5e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0.5e^{-0.5y} & y\ge 0,\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),知X和Y独立.a=P\{X>0.1,Y>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}\int_{0.1}^{+\infty}0.25e^{-0.5(x+y)}dxdy=e^{-0.1}.$

14、因知 X 与 Y 相互独立，即有 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(x=x_i)\cdot P(Y=y_j)$.

$(i=1,2,\ j=1,2,3)$ 首先，根据边缘分布的定义知 $P(X=x_1,Y=y_1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.又根据独立性有 $\frac{1}{24}=p\{X=x_1,Y=y_1\}=p(X=x_1)\cdot p(Y=y_1)=\frac{1}{6}p(X=x_i)$, 解得 $P(X=x_i)=\frac{1}{4}$,从而有 $P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$ 又由 $P(X=x_1,Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)$，可得 $\frac{1}{8}=\frac{1}{4}P(Y=y_2)$, 即有 $P(Y=y_2)=\frac{1}{2}$， 从而 $P(X=x_2,Y=y_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

类似地，由 $P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3)$, 有 $\frac{1}{12}=\frac{1}{4}P(Y=y_3)$, 得 $P(Y=y_3)=\frac{1}{3}$, 从而, $P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$. 最后 $P(X=x_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 将上述数值填入表中有

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P\{X=x_1\}=P_i.$ |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1/24 | 1/8 | 1/12 | 1/4 |
| $x_2$ | 1/8 | 3/8 | 1/4 | 3/4 |
| $P\{X=y_j\}=P\cdot j$ | 1/6 | 1/2 | 1/3 | 1 |

15、本题的关键是由题设P{$X_1X_2$=0}=1，可推出P{$X_1X_2$≠0}=0；再利用边缘分布的定义即可列出概率分布表.

(1)由P{$X_1X_2$=0}=1,可见 $P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$, 易见

$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=0.25$　$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=0.5$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=0.25$　$P\{X_1=0,X_2=0\}=0$

于是，得$X_1$和$X_2$的联合分布

| $X_2$ \ $X_1$ | –1 | 0 | 1 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.25 | 0 | 0.25 | 0.5 |
| 1 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 |
| Σ | 0.25 | 0.5 | 0.25 | 1 |

(2)　可见　P{$X_1$=0，$X_2$=0}=0，而P{$X_1$=0}P{$X_2$=0}=1/4≠0. 于是，$X_1$和 $X_2$不独立.

16、(1) $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$ 因为 X，Y 独立，对任何 $x,y$ 都有 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$.　所以有 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）二次方程　$t^2+2Xt+Y=0$ 中$t$ 有实根，$\triangle=(2X)^2-4Y\ge 0$, 即$X^2-Y\ge 0$, $Y\le X^2$，故 $P(t有实根)=P\{Y\le X^2\}=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dydx=\int_0^1(-e^{-\frac{y}{2}})\Big|_0^{x^2}dx$

$$=\int_0^1(1-\frac{x^2}{2})dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\ [\int_{-\infty}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\int_{-\infty}^0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ ]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]\approx 1-\sqrt{2\pi}[0.8413-0.5]\approx 1-0.8555=0.1445.$$

17、（1）因为 X，Y 独立，所以　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-(\lambda x+uy)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

（2）根据 Z 的定义，有 P{z=1}=P{Y⩾X}$=\iint\limits_{y\ge x}f(x,y)dydx=\int_0^{+\infty}\int_x^{-\infty}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dydx$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}(\int_x^{+\infty}\mu e^{-\mu y}dy)dx\ =\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cdot e^{-\mu x}dx=\lambda/(\lambda+u),$$

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\mu/(\lambda+\mu)$.所以 Z 的分布律为

| Z | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\mu/(\lambda+\mu)$ | $\lambda/(\lambda+\mu)$ |

Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$

18、∵X、Y 分别仅取 0，1 两个数值，∴Z 亦只取 0，1 两个数值. 又∵X 与 Y 相互独立，

$\therefore P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P(X=0,Y=0)=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/2\times1/2=1/4$，

故　$P\{Z=1\}=1=1-P\{Z=0\}=1-1/4=3/4.$

19、 X由 2×2 阶行列式表示，仍是一随机变量，且X=$X_1X_4–X_2X_3$，根据$X_1$，$X_2$，$X_3$，$X_4$的地位是等价且相互独立的，$X_1X_4$与$X_2X_3$也是独立同分布的，因此可先求出$X_1X_4$和$X_2X_3$的分布律，再求X的分布律.　记$Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$,则X=$Y_1–Y_2$.随机变量$Y_1$和$Y_2$独立同分布：

$P\{Y_1=1\}=P\{Y_2=1\}=P\{X_2=1,X_3=1\}=0.16$　$P\{Y_1=0\}=P\{Y_2=0\}=1-0.16=0.84.$

显见，随机变量X=$Y_1–Y_2$有三个可能值–1,0,1.易见 P{X=–1}=P{$Y_1$=0,$Y_2$=1}=0.84×0.16=0.1344，　P{X=1}=P{$Y_1$=1,$Y_2$=0}=0.16×0.84=0.1344，　P{X=0}=1–2×0.1344=0.7312.

于是，行列式的概率分布为　$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{bmatrix}$

20、因为{Z=$i$}={X+Y=$i$}={X=0,Y=$i$}$\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}$. 由于上述各事件互不相容，且注意到 X 与 Y 相与独立，则有

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k\}P\{Y=i-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{i}c_{n_1}^{k}p^{k}(1-P)^{n_1-k}C_{n_2}^{i-k}p^{i-k}(1-p)^{n_2-i+k}=P^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i}\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}$$

$$=C_{n_1+n_2}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i},i=0,1,\cdots n_1+n_2,\quad 故Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p).$$

注：在上述计算过程中，已约定：当 r>n 时，$C_n^r=0$,并用到了公式$\sum_{k=1}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}=C_{n_1+n_2}^{i}$.

21、X 和 Y 的概率分布密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\}$,　$(-\infty<x<+\infty)$;

$f_Y(y)=\begin{cases}1/(2\pi), & -\pi\le y\le\pi,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　因 X 和 Y 独立，考虑到 $f_Y(y)$)仅在$[-\pi,\pi]$上才有非零值，故由卷积公式知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2a^2}}dy.$$

令$t=\frac{z-y-\mu}{\sigma}$,则上式右端等于$\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$

22、（1）由题设知　$F_M(y)=P(M\le y)=P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\le y\}=P(X_1\le y,\cdots,X_n\le y)$

$$=P(X_1\le y)P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)=F_{X_1}(y)\cdots F_{Xn}(y).$$

$\because$　$X_1,\cdots,X_n$独立且同分布$:X_i\sim U[0,\theta]$　$(1\le i\le n)$,

$$\therefore F_{X_i}(x)=\begin{cases}0, & x\le0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 1, & x>0,\end{cases}\therefore F_M(y)=\begin{cases}0, & y\le0,\\ \frac{y^n}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 1, & y\ge\theta.\end{cases}故\ f_M(y)=\begin{cases}\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（2）$F_N(y)=P(N\le y)=1-P(N>y)=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>y\}$

$$=1-P(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y)=1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>y)=1-[1-F_{X_i}(y)]$$

故　$f_N(y)=\begin{cases}-n(1-\frac{y}{\theta})^{n-1}(\frac{-1}{\theta}),0<y<\theta\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n},0<y<0,\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

23、由题设容易得出随机变量（X，Y）的概率密度，本题相当于求随机变量 X、Y 的函数

S=XY 的概率密度，可用分布函数微分法求之.

依题设，知二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1/2 & 若(x,y)\in G\\ 0, & 若(x,y)\notin G\end{cases}$

设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数,则 当 $s\le 0$ 时, $F(s)=0$； 当 $s\ge 2$ 时，$F(s)=1$.
现设 0<s<2. 曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点(s,1);位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy>s$ ,位于下方的点满足 $xy<s$ . 故

$$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=1-P\{XY>S\}=1-\iint\limits_{xy>s}\frac{1}{2}dxdy=1-\frac{1}{2}\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1 dy=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

于是， $f(s)=\begin{cases}(\ln 2-\ln s)/2, & 若0<s<2,\\ 0, & 若s\le 0或s\ge 2.\end{cases}$

## （二）、补充题答案

1.由于 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min(\xi,\eta)$,故知$P(X<Y)=0$, 即

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0$； 又易知

$P\{X=1,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}\cdot P\{\eta=1\}=1/9,$

$P\{X=2,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=2\}=1/9,\ P\{X=3,Y=3\}=P\{\xi=3,\eta=3\}=1/9,$

$P\{X=2,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=2\}+P\{\xi=2,\eta=1\}=1/9+1/9=2/9,$

$P\{X=3,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=3\}+P\{\xi=3,\eta=2\}=2/9,\quad P\{X=3,Y=1\}=1-7/9=2/9.$

所以

| Y \ X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/9 | 2/9 | 2/9 |
| 2 | 0 | 1/9 | 2/9 |
| 3 | 0 | 0 | 1/9 |

2.（1） $P\{Y=m|X=n\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m},\quad 0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots.$

（2） $P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m|X=n\}P\{X=n\}$

$=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^n/n!,\quad 0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots.$

3. $P(z=1)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)=(1-p)^2+p^2$

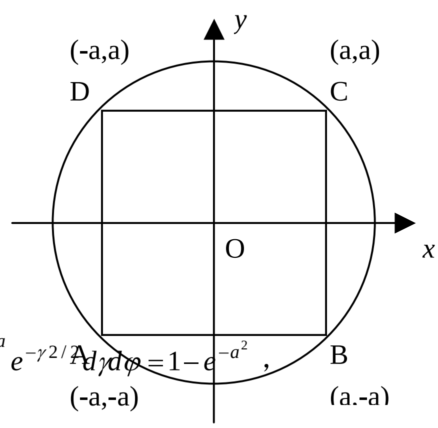
$P(z=0)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)=2p(1-p)$

而 $P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=p^2$，由 $P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1)$, 得 $p=1/2$ .

5.:设随机变量 $\xi$ 和 $\eta$ 相互独立，都服从 $N(0,1)$ 分布.则 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$.显然，

$$\iint\limits_G p(x,y)dxdy<\iint\limits_S p(x,y)dxdy,$$

其中， G 和 S 分别是如图所示的矩形 $ABCD$ 和圆.




$$\iint\limits_G p(x,y)dxdy=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-x^2/2}dx)^2,$$

令 $x=\gamma\cos\varphi, y=\gamma\sin\varphi$, 则 $\iint\limits_S p(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{\sqrt{2}a}e^{-\gamma^2/2}\gamma d\gamma d\varphi=1-e^{-a^2}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-x^2/2}dx<\sqrt{1-e^{-a^2}}$ .

6.设这类电子管的寿命为 $\xi$，则 $P(\xi>150)=\int_{150}^{+\infty}100/(x^2)dx=2/3$.（1）三个管子均不要替换的概率为 $(2/3)^3=8/27$；（2）三个管子均要替换的概率为 $(1-2/3)^3=1/27$ .

7.假设总体 $X$ 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，第 $i$ 次的观察值为 $X_i (1 \le i \le n)$， $X_i$ 独立同分布，其联合密度函数 $f(x_1,\cdots,x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$.依题意，所求的概率为

$$P\{X_n > X_1, X_n > X_2, ..., X_n > X_{n-1}\} = \underset{\substack{x_i < x_n \\ i=1,2,...,n-1}}{\int \cdots \int} f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n)dx_n \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{x_n} f(x_2)dx_2 ... \int_{-\infty}^{x_n} f(x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n)f(x_n)dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n)dF(x_n) = \frac{1}{n}F^n(x_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n}.$$

8. $P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \dfrac{P(\xi_1 = k, \xi_1 + \xi_2 = n)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \dfrac{P(\xi_1 = k)P(\xi_2 = n-k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)}$.

由普哇松分布的可加性，知 $\xi_1 + \xi_2$ 服从参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的普哇松分布，所以

$$P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1} \cdot \dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k}.$$

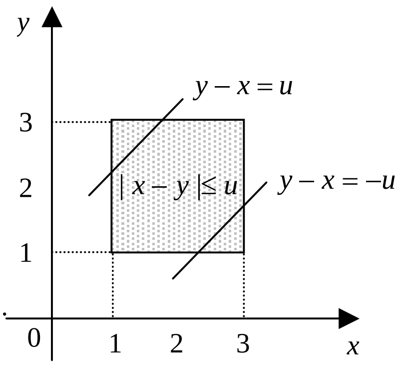
9.当 $z \le 0$， $F_z(z) = P(Z \le z) = 0$, 当 $z > 0$,

$$F_z(z) = P(Z \le z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy = \int_0^z e^{-x}dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y}dy = 1 - e^{-z} - ze^{-z},$$

所以　$z = X + 2Y$ 的分布函数为　$F(x,y) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 1-(1+z)e^{-z}, & z > 0. \end{cases}$

10.由条件知 $X$ 和 $Y$ 的联合密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & 若 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$




以 $F(u) = P\{U \le u\} (-\infty < u < \infty)$ 表示随机变量 $U$ 的分布函数.显然，当 $u \le 0$ 时，$F(u) = 0$；当 $u \ge 2$ 时， $F(u) = 1$；

当 $0 < u < 2$，则

$$F(u) = \iint_{|x-y| \le u} p(x,y)dxdy = \iint_{|x-y| \le u} \frac{1}{4}dxdy = \frac{1}{4}\left[4 - (2-u)^2\right] = 1 - \frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是，随机变量的密度为 $p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2; \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

11.记 $X_1, X_2, X_3$ 为这 3 个元件无故障工作的时间，则 $T = \min(X_1, X_2, X_3)$ 的分布函数

$$F_T(t) = P(T \le t) = 1 - P\{\min(X_1, X_2, X_3) > t\} = 1 - [P(X_1 > t)]^3 = 1 - [1 - P(X_1 \le t)]^3.$$

$$\because X_i \sim F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases} (i = 1,2,3) \quad \therefore F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

故　$f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$

# 第四章　随机变量的数字特征

## （一）、基本解答

1. $\because EX = 0\times 0.4 + 1\times 0.3 + 2\times 0.2 + 3\times 0.1 = 1$，　$EY = 0\times 0.3 + 1\times 0.5 + 2\times 0.2 + 3\times 0 = 0.9$,

　　$\therefore EX > EY$，即甲比乙车床在一天内生产的次品多，故乙机床生产的零件质量较好.

2. 若记 $u_n$ 为完成每次检验所发现的次品数. 显然 $u_n \sim B(10,0.1)$，即 $u_n$ 服从 n=10，p=0.1 的二项分布：$P\{u_n = k\} = C_{10}^k 0.1^k 0.9^{10-k}, k = 0,1,2,\cdots,10.$

$$P\{u_n \le 1\} = P\{u_n = 0\} + P\{u_n = 1\} = 0.9^{10} + 10\times 0.1\times 0.9^9 \approx 0.7361.$$

$$P\{u_n > 1\} = 1 - p\{u_n \le 1\} = 0.2639.$$

X 为调整设备的次数，即 $\{u_n > 1\}$ 出现的次数，显然 X 服从 n=4，p=0.2639 的二项分布，即 $X \sim B(4,0.2639)$.　因此 $E(X) = np = 4\times 0.2639 = 1.0556 \approx 1.1$.

3. 把 X 的分布律写成更明显的关系为

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | $-\frac{3^2}{2}$ | $\frac{3^3}{2}$ | $-\frac{3^4}{4}$ | $\frac{3^5}{5}$ | $\cdots$ |
| $P_i$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3^2}$ | $\frac{2}{3^3}$ | $\frac{2}{3^4}$ | $\frac{2}{3^5}$ | $\cdots$ |

这里 $$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \cdots = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 3\times\frac{2}{3} - \frac{3^2}{2}\times\frac{2}{3^2} + \frac{3^3}{3}\times\frac{2}{3^3} - \frac{3^4}{4}\times\frac{2}{3^4} + \frac{3^5}{5}\times\frac{2}{3^5} - \cdots = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \cdots$$

$$= 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots).$$

显然此级数不是绝对收敛的（是条件收敛级数），所以 E（X）不存在.

4. $\because f(x) = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + x^2)}$，　$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + x^2)}dx = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}(\int_{-\infty}^{0}\dfrac{xdx}{(\lambda + x^2)} + \int_{0}^{+\infty}\dfrac{xdx}{(\lambda + x^2)})$

$$\text{而} \int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\lambda + x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{2}\frac{d(\lambda + x^2)}{\lambda + x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} = \left[-\frac{1}{2}\ln(\lambda + ax^2)\right] = -\infty,$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\lambda + x^2} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{d(\lambda + x^2)}{\lambda + x^2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\Big|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln(\lambda + b^2) = +\infty,$$

因此，广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{\lambda}xdx}{\pi(\lambda + x^2)}$ 发散，当然不可能绝对收敛了，所以 E（X）不存在.

5.（1）$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2 - x)dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + [(4 - \frac{8}{3}) - (1 - \frac{1}{3})] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

（2）$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\pi\sqrt{1 - x^2}} = 0 \ (\text{奇函数}).$$

（3）$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx + \int_{1500}^{3000}\frac{x}{1500^2}(3000 - x)dx$$

$$= \frac{1}{1500^2}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1500} + (1500x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_{1500}^{3000}\right] = 1500.$$

6.（1）$\because E(2X^2)=2EX^2$，又$\because EX^2=DX+(EX)^2$，$\therefore E(2X^2)=2(DX+(EX)^2)$；

再$\because X\sim E(1)$，$\therefore EX=1,DX=1$，$\therefore E(2X^2)=2(1+1^2)=4$.

（2）$E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$.

7.（1）由条件知，X的可能值为 0，1，2，3，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“汽车在第 $i$ 个路口首次遇到红灯”；$A_1$，$A_2$，$A_3$相互独立，且 $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=1/2,i=1,2,3.$ 从而知

$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}$; $P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{2^2}$; $P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{1}{2^3}$;

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{1}{2^3}$; 故 $E(\frac{1}{1+X})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{67}{96}$.

8.（1）设 $p=P(A)$.由 X 与 Y 同分布，可知

$$P(\overline{B})=P\{Y\le a\}=P\{X\le a\}=P(A)=p,P(B)=1-p.$$

由 $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+(1-p)-p(1-p)=p^2-p+1=\frac{7}{9}$, 得 $p_1=\frac{1}{3},p_2=\frac{2}{3}$. 于是 $a$ 有两个值：

由 $\frac{a-1}{2}=p_1$, 得 $a_1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$;由 $\frac{a-1}{2}=p_2$, 得 $a_2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$.

（2）$E(\frac{1}{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}p(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\ln 3.$

9. 发生故障次数服从二项分布，本题关键是列出所获利润与发生故障次数的函数关系.以 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数，则 X 服从参数为（5，0.2）的二项分布

$P\{X=k\}=C_5^k0.2^k\cdot0.8^{5-k}(k=0,1,2,3,4,5)$；$P\{X=0\}=0.8^5=0.328$，

$P\{X=1\}=C_5^1 0.2\cdot0.8^4=0.410$，$P\{X=2\}=C_5^2 0.2^2\cdot0.8^3=0.205$，

$P\{X\ge3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.057$.

若以 Y 表示所获利润，则

$$Y=f(X)=\begin{cases}10 & X=0\\ 5 & X=1\\ 0 & X=2\\ -2 & X\ge3,\end{cases}$$ 故 EY=10×0.328+5×0.410+0×0.205-2×0.057=5.216（万元）.

10.已知 X 在[0,60]上服从均匀分布，其密度为 $X\sim f(x)=\begin{cases}1/60 & 0\le x\le 60\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

设 Y 是游客等候电梯的时间(单位:min),则 $Y=g(X)=\begin{cases}5-X & 0<X\le5\\ 25-X & 5<X\le25\\ 55-X & 25<X\le55\\ 60-X+5 & 55<X\le60,\end{cases}$

因此 $EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)dx$

$$=\frac{1}{60}\Big[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\Big]=11.67.$$

11. X,Y 相互独立且都服从[10,20]上的均匀分布，由此可写出（X,Y）的联合概率密度，另外，由题设可列出所得利润与需求量和进货量之间的关系，最后由多元化随机变量函数均值定义可求得期望利润.

设 Z 表示商店每周所得的利润，则 $Z=\begin{cases}1000Y & Y\le X,\\ 1000X+500(Y-X)=500(X+Y), & Y>X.\end{cases}$

由于 X 与 Y 的联合概率密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}1/100, & 10\le x\le 20, 10\le y\le 20,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

所以 $EZ=\iint\limits_{D_1}1000y\times\frac{1}{100}dxdy+\iint\limits_{D_2}500(x+y)\times\frac{1}{100}dxdy=10\int_{10}^{20}dy\int_{y}^{20}ydx+5\int_{10}^{20}dy\int_{10}^{y}(x+y)dx$

$$=10\int_{10}^{20}y(20-y)dy+5\int_{10}^{20}(\frac{3}{2}y^2-10y-50)dy=\frac{20000}{3}+5\times1500\approx14166.67(元).$$

12. 本题关键是正确列出供大于求和供不应求时利润与进货量的关系，然后利用期望利润不少于 9280 建立一不等式解出进货量 $a$ 的值.

设进货数量为 $a$，则利润为

$$M_a=\begin{cases}500a+(X-a)300 & a<X\le 30\\ 500X-(a-X)100 & 10\le X\le a\end{cases}=\begin{cases}300X+200a & a<X\le 30,\\ 600X-100a & 10\le X\le a,\end{cases}$$

期望利润 $EM_a=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}\cdot M_a dx=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)dx+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)dx$

$$=\frac{1}{20}(600\cdot\frac{x^2}{2}-100ax)\Big|_{10}^{a}+\frac{1}{20}(300\cdot\frac{x^2}{2}+200ax)\Big|_{a}^{30}=-7.5a^2+350a+5250.$$

依题意，有 $-7.5a^2+350a+5250\ge 9280$ 即 $7.5a^2-350a+4030\le 0$，解得 $20\frac{2}{3}\le a\le 26$，

故利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

13. 方法一　设 $A_i=\{部件i需要调整\}$ $(i=1,2,3)$. $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.3.$

易见，X 有四个可能值 0,1,2,3. 由于 $A_1,A_2,A_3$ 独立，因此

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504,$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3=0.092,$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$$

于是 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.504 & 0.398 & 0.092 & 0.006\end{pmatrix}$. $EX=1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$,

$$DX=EX^2-(EX)^2=1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006-(0.6)^2=0.46.$$

方法二　考虑随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & 当A_i出现\\ 0 & 若A_i不出现\end{cases}$ $(i=1,2,3)$.

易见 $EX_i=P(A_i), DX_i=P(A_i)[1-P(A_i)]$. 设 $X=X_1+X_2+X_3$，因此，由于 $X_1,X_2,X_3$ 独立，可见 $EX=0.1+0.2+0.3=0.6$，$DX=0.1\times0.9+0.2\times0.8+0.3\times0.7=0.46$.

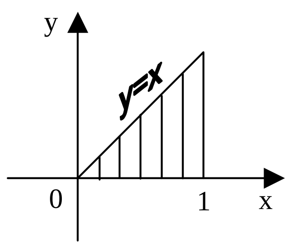
14.注意到仅在三角形区域 $0\le y\le x\le 1$ 上 $f(x,y)$ 取非零值（见图），分别可得到

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=12\int_0^1dx\int_0^x xy^2dy=\frac{4}{5},$$

$$EY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy=12\int_0^1dx\int_0^x y^3dy=\frac{3}{5},$$

$$E(X^2+Y^2)=12\int_0^1dx\int_0^x(x^2+y^2)y^2dy=\frac{16}{15}.$$

$$E(XY)=12\int_0^1dx\int_0^x xy^3dy=\frac{1}{2},$$




15. $E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^rf(x)dx$ $(r=1,2)$ （1）$E(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2xdx=0;$

$$\because E(X^2)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{2}{\pi}\cos^2 xdx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d\sin(2x)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{24}+\frac{1}{2}x^2\sin(2x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos(2x)$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}x\cos(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}\sin(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2},$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.$$

（2） $$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\frac{x^2}{2\sigma^2}=x(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sigma\cdot 1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

$$\because E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(\frac{x^2}{2\sigma^2})=\int_0^{+\infty}2\sigma^2te^{-t}dt\quad(\text{记}t=\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

$$=2\sigma^2\left[(-te^{-t})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right]=2\sigma^2,$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2.$$

（3） $$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^ae^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{(\beta^\alpha\cdot\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta x)^\alpha e^{-\beta x}d(\beta x)$$

$$=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^ae^{-t}dt=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^ae^{-t}dt=\frac{\Gamma(a+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta},$$

因 $$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+1}\beta\Gamma(\alpha)}=\int_0^{+\infty}(\beta x)^{a+1}e^{-\beta x}d(\beta x)$$

$$=\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)=\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2},$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\alpha^2/\beta^2=\alpha/\beta^2.$

16.记 $q=1-p$, X 的概率分布为 $P\{X=i\}=q^{i-1}p,\quad i=1,2,\cdots.$

X 的数学期望为 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'=p(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}.$$

因为 $$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=p[q(\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)')']'=p[\frac{q}{(1-q)^2}]'=\frac{2-p}{p^2},$$

所以 X 的方差为 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)']^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

17.解法 1　先求分布律，再求期望 E（X）.

设 $A_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 表示第 $i$ 次取到的钥匙能打开锁，X 为直到打开锁时的试开次数，则

$$P\{X=k\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-1})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_k|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=1/n.$$

故 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}kp\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}(1+2+\cdots n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$

解法 2　不求分布律，引进新的随机变量，利用期望的运算性质求 $E(X)$.

引进新随机变量 $X_i$，定义如下: $X_i=\begin{cases}1, & 前(i-1)次中没有能打开锁的,\\ 0, & 与上相反.\end{cases}$

显然有 $X_1=1, X_i 服从(0-1)分布, i=2,3,\cdots,n.$ X 为直到打开锁时的试开次数.

设$X=X_1+\sum_{i=2}^{n}X_i$，则$E(X)=E(X_1)+\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=1+\sum_{i=2}^{n}E(X_i), E(X_i)=P\{X_i=1\}$, $(i=2,3,\cdots)$.

仍设 $A_i$ 为第 $i$ 次取到的钥匙能打开锁，则

$$P\{X_i=1\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-1})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_{i-1}|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-2})=\frac{n-i+1}{n},$$

故 $E(X)=1+\sum_{i=2}^{n}P\{X_i=1\}=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{n-i+1}{n}=1+(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$

18. 1. $EZ=EX-2EY+7=-3-2\times2+7=0$

2. 因为 $X,Y$ 相互独立，所以 $DZ=D(X-2Y+7)=DX+4DY$ =1+4×1=5.

19.(X, Y)的联合概率密度函数是 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ |y|<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$

因此，关于 X 的边缘概率密度函数是　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$D(Z)=D(2X+1)=4\left[E(X^2)-(E(X))^2\right]=4\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx-(\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx)^2\right]$$
$$=4\left[\int_0^1 2x^3dx-(\int_0^1 2x^2dx)^2\right]=4(\frac{1}{2}-\frac{4}{9})=\frac{2}{9}.$$

20. 因已知方差 DX=2，所以，根据切比雪夫不等式，有

$$P\{\ |X-EX|\ \ge 2\}\le\frac{DX}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

21. $\because E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0,$

$\therefore P\{\ |X+Y|\ \ge 6\}=P\{\ |(X+Y)-E(X+Y)|\ \ge 6\}\le D(X+Y)/6^2;$

又 $\because D(X+Y)=DX+DY+2\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}=1+4+2\times1\times2\times(-0.5)=3,$

$\therefore P\{\ |X+Y|\ge 6\}\le 3/6^2=1/12.$

22. 直接由 $f(x,y)$求各量的值.　$E(X)=\int_0^2\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7},$

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7},\quad E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{4}{3},$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

又　$E(X^2)=\int_0^2\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{5}{3},\quad E(Y^2)=E(X^2)=\frac{5}{3},$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36},\quad D(Y)=D(X)=\frac{11}{36},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=(-\frac{1}{36})\Big/(\frac{1}{36})=-\frac{1}{11}.$$

23. $\because (X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2,\\ 0, & x^2+y^2>r^2,\end{cases}$ $\therefore X$和$Y$的密度$p_1(x)$和$p_2(x)$为

$$p_1(x)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\,(|x|\le r);\qquad p_2(y)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\,(|y|\le r).$$

$$E(X)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=0;\qquad E(Y)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}y\sqrt{r^2-y^2}\,dy=0.$$

$Cov(X,Y)=E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\dfrac{xy}{\pi r^2}dxdy=0.$　于是，X 和 Y 的相关系数 $\rho=0.$

（2）由于 $p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$,可见$X$和$Y$不独立.

24. 记P(A)=$p_1$，P(B)=$p_2$，P(AB)=$p_{12}$. 由数学期望的定义，可见

$$E(X)=P(A)-P(\overline{A}_1)=2p_1-1, E(Y)=2p_2-1.$$

现在求 EXY.由于 XY 只有两个可能值 1 和 –1. 易知

$$P\{XY=1\}=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=2p_{12}-p_1-p_2+1,$$
$$P\{XY=-1\}=1-P\{XY=1\}=p_1+p_2-2p_{12},$$
$$E(XY)=P\{XY=1\}-P\{XY=-1\}=4p_{12}-2p_1-2p_2+1.$$

从而　$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=4p_{12}-4p_1p_2.$

因此,$Cov(X,Y)=0$当且仅当$p_{12}=p_1p_2$,即$X$和$Y$不相关当且仅当事件$A$和$B$相互独立. .

25. 本题应特别注意 $X_1$与$X_2$ 并非独立的.由于 $X_i(i=1,2,3)$ 均只取 0 和 1 值，因此随机变量 $(X_1,X_2)$取值应为$(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$ 和 $(1,1)$.须逐个计算它们的概率.譬如事件$\{X_1=0,X_2=0\}$表示抽取的是一等品;$\{X_1=1,X_2=1\}$表示既是一等品又是二等品，因此是不可能事件等等.

（1）设事件 $A_i=$“抽到 $i$ 等品”　$(i=1,2,3).$

由题意知$A_1$，$A_2$，$A_3$两两互不相容,且$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=P(A_3)=0.1$.

易知，$P\{X_1=0,X_2=0\}=P(A_3)=0.1,\quad P\{X_1=0,X_2=1\}=P(A_2)=0.1$,

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P(A_1)=0.8,\quad P\{X_1=1,X_2=1\}=P(\Phi)=0$.

（2）　$E(X_1)=0.8, E(X_2)=0.1$; $D(X_1)=0.8\times0.2=0.16, D(X_2)=0.1\times0.9=0.09$;

$E(X_1X_2)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0$

$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)=0-0.8\times0.1=-0.08$,

$$\rho=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)\cdot(DX_2)}}=\frac{-0.08}{\sqrt{0.16\times0.09}}=-\frac{2}{3}.$$

26.（1）由数学期望的运算性质，知 $E(Z)=\dfrac{1}{3}E(X)+\dfrac{1}{2}E(Y)=\dfrac{1}{3}$

由 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$，有 $D(Z)=D(\frac{1}{3}X)+D(\frac{1}{2}Y)+2\operatorname{cov}(\frac{1}{3}X,\frac{1}{2}Y)$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{6}\times\sqrt{D(x)}\cdot\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}=1+4-\frac{1}{6}\times3\times4=3.$$

（2）因为　$Cov(X,Z)=\dfrac{1}{3}Cov(X,X)+\dfrac{1}{2}Cov(X,Y)=\dfrac{1}{3}D(X)+\dfrac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$$=\frac{1}{3}\cdot3^2+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot3\cdot4=0,$$

所以　$\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.$

（3）由于（X，Z）不一定服从二维正态分布，故由 $\rho_{XZ}=0$ 不能确定 X 与 Z 是否相互独立.

## （二）补充题答案

1、平均利润就是销售利润 T 的数学期望 E(T)，而 T 是离散型随机变量,取值概率与 X 的概率分布有关,因此用标准正态分布函数 $\phi(x)$ 表示概率 P{X<10},P{$10\le X\le 12$ }和 P{X>12}是解决问题的关键,写出 E(T)后,使 $\frac{dE(T)}{d\mu}=0$ 的点即为所求的 $\mu$ 值.

由条件知,平均利润为

$$E(T)=20P\{10\le X\le 12\}-P\{X<10\}-5P\{X>12\}$$
$$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5.$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态密度. 令

$$\frac{dE(T)}{d\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)=0,\text{得}\ \frac{-25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}+\frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=0,$$

即　$25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}$. 由此得 $\mu=\mu_0=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9.$

即　当 $\mu=\mu_0\approx 10.9$ 毫米时，平均利润最大.

2、（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=0,\qquad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2.$

（2）$E(X|X|)-E(X)\cdot E(|X|)=E(X|X|)=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)=0,$ 故 X 与 $|X|$ 不相关.

（3）对给定 $0<a<+\infty$, 显然事件 $\{\ |X|<a\}$ 包含在事件 $\{X<a\}$ 内，且 $P\{X<a\}<1,$
$0<P\{\ |X|<a\}$, 故 $P\{X<a,|X|<a\}=P\{\ |x|<a\}$, 但 $P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}$,
所以 $P\{X<a,|X|<a\}\ne P\{X<a\}\cdot P\{\ |X|<a\}$. 因此，X 与 $|X|$ 不独立.

3、方法一：由于 X、Y 相互独立且服从正态分布，根据正态分布的性质知，服从正态分布的随机变量的线性组合也服从正态分布，令 $Z=X-Y$, 由于 $X\sim N(0,1/2),Y\sim N(0,1/2)$, 故易知 EZ=EX−EY=0，DZ=DX+DY=1，即 $Z\sim N(0,1)$.

因为 $D|X-Y|=D|Z|=E|Z|^2-(E|Z|)^2=E(Z^2)=E(Z^2)-(E|Z|)^2$，而 $EZ^2=DZ+(EZ)^2=1,$

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad \text{所以 } D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}.$$

方法二：X、Y 的概率密度分别为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$，由于 X、Y 相互独立，故 X、Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,\text{因此}$$

$$E|X-Y|=[\frac{1}{\pi}\iint_{y<x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dxdy+\iint_{y>x}(y-x)e^{-(x^2+y^2)}dxdy]$$
$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}(y-x)e^{-(x^2+y^2)}dx]$$
$$=\frac{2}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy]$$
$$=\frac{2}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2}dy-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}dy]=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

4、解法 1 三角形区域为 G={$(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1$}；随机变量 X 和 Y 的联合密度

为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时， $f_1(x)=0$；当 0<$x$<1 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x.$$

因此 $E(X)=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}; E(X^2)=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2};\ D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$.

同理可得 $E(Y)=2/3$ 　D(Y)=1/18.

现在求 X 和 Y 的协方差. E(XY)=$\iint_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}ydy=\frac{5}{12}$, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=5/12-4/9=-1/36$. 　于是 $D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

$=1/18+1/18-2/36=1/18.$

解法 2 三角形区域为 G=$\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$；随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

以 $f(u)$ 表示 U=X+Y 的概率密度，当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f(u)$ =0.

设 $1\le u\le 2$, 当 $0\le x\le 1$ 且 $0\le u-x\le 1$ 时， $f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$. 由随机变量之和的概率密度公式，有 $f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,u-x)dx=\int_{u-1}^{1}2dx=2(2-u)$.

因此 $$E(X+Y)=EU=\int_{-\infty}^{\infty}uf(u)du=2\int_1^2 u(2-u)du=4/3;$$

$$E(X+Y)^2=EU^2=\int_{-\infty}^{\infty}u^2f(u)du=2\int_1^2 u^2(2-u)du=11/6;$$

$$DU=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E((X+Y)]^2=11/6-16/9=1/18.$$

5、$U$、$V$ 为离散型随机变量，其联合分布（$U$、$V$）只有四个可能:（0,0),（0,1)（1,0）,（1,1),分别求出取这些值的概率即可.求相关系数 $\rho$，应分别计算 *Cov(U,V)*及 *DU,DV,*然后再用公式 $\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DY}}$. 由题设易知 $P\{X\le Y\}=1/4$， $P\{X>2Y\}=1/2$， $P\{X>2Y\}=1/2$，故有

(1) $P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}1/4,\quad P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0,$ $P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=1/4, P\{U=,V=1\}=1-(1/4+1/4)=1/2.$

（2）以上可见 $UV$ 以及 $U$ 和 $V$ 分布为

$$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是，有 $EU=3/4, DU=3/16; EV=1/2, DV=1/4; E(UV)=1/2$,

$Cov(U,V)=E(UV)-EU.EV=1/8$, 　故 $\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU.DV}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

6、(1) 由于二维正态密度函数的两个边缘密度都是正态密度函数，因此 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的两个边缘密度为标准正态密度函数，故

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dy]=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理 $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 由于 $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 可见 *EX=EY=0，DY=DY=*1，故

$$\rho=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\varphi_2(x,y)dxdy]=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=0.$$

(2)由题设，知 $f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}]$，

而 $f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$， 显见 $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$，

所以 X 与 Y 不独立.

7、$\because E(X-Y)=EX-EY=0,D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)=2(1-\rho),$

$\therefore X-Y\sim N\left(0,2(1-\rho)\right).\xi=(X-Y)\big/\sqrt{2(1-\rho)}\sim N(0,1),$

$$\therefore E\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2(1-\rho)}}\right|=E\quad(|\xi|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

即有 $E|X-Y|=\sqrt{2(1-\rho)}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.而 $\max(X,Y)=\frac{1}{2}[X+Y+|X-Y|],$

故 $E\max(X,Y)=\frac{1}{2}[EX+EY+E|X-Y|]=\frac{1}{2}[0+0+2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}]=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}};$

$$E\min(X,Y)=\frac{1}{2}[EX+EY-E|X-Y|]=\frac{1}{2}[0+0-2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}]=-\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$

8、不妨设 $EX_i=0,i=1,2,\cdots,n+m.$则$EY=EZ=0,DY=DZ=n\cdot EX_1^2.$

$$Cov(Y,Z)=EY\cdot Z=E[(X_1+\cdots+X_n)\cdot(X_{m+1}+\cdots+X_{m+n})]$$

$$=E[\sum_{k=m+1}^{n}X_k^2+\sum_{\substack{i=1,\cdots,n,i\neq j\\ j=m+1,\cdots,m+n}}X_iX_j]=(n-m)\cdot EX_1^2.\quad\rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{n-m}{n}.$$

9、$DY=D(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,x_j)=n+n(n-1)\rho;$

同理$DZ=n+n(n-1)\rho.$

$$Cov(Y,Z)=\text{cov}(X_1+\cdots+X_n,X_{n+1},\cdots,X_{2n})=\sum_{1\le i\le n<j\le 2n}Cov(X_j,X_i)=n^2\cdot\rho$$

$$\rho_{Y,Z}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}.$$

10、设 $X\sim f(x)$, 则有

$$P\{|X|>\varepsilon\}=\int_{|x|>\varepsilon}f(x)dx\le\int_{|x|>\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx\le\frac{1}{\varepsilon^r}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^rf(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^r}E|x|^r.$$

11、$\because$ X 的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,(-\infty<x<+\infty),$

$\therefore E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)dx.$ 当 $n$ 为奇数时，可以求得

$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\exp(-x^2/2\sigma^2)dx=0$；当 $n$ 为偶数时，有

$$E\left(X^n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(-\sigma^2x^{n-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\sigma^2(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx\right)$$

$$=\sigma^2(n-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=\sigma^2(n-1)E\left(X^{n-2}\right)(n>2).$$

这样，当 n(>2)为偶数时，有递推式 $E(X^n)=\sigma^2(n-1)E(X^{n-2})$，

$E(X^{n-2})=\sigma^2(n-3)E(X^{n-4}),\cdots,\quad E(X^4)=\sigma^2(4-1)E(X^2)$.

考虑到 X~N$(0,\sigma^2)$，故 E（X）=0，并且$E(X^2)=D(X)=\sigma^2$.于是，由以上各式可得 $E(X^4)=\sigma^2(4-1)E(4-1)=\sigma^4\cdot 3$， $E(X^6)=\sigma^2(X^6)E(X^4)=\sigma^6\cdot 5\cdot 3,\cdots$.

一般地， 有 $E(X^n)=\sigma^n(n-1)(n-1)\cdots\cdots 5\cdot 3$. 若记$(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3=(n-1)!!$，则有$E(X^n)=\sigma^n(n-1)!!$. 两种情况综合，有 $E\left(X^n\right)=\begin{cases}0, & \text{当}n\text{为奇数},\\ \sigma^n(n-1)!!, & \text{当}n\text{为偶数}.\end{cases}$

12、 $E\left(X^n\right)=\int_0^{+\infty}x^n\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x^n de^{-\lambda x}=-e^{-\lambda x}x^n\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}nx^{n-1}e^{-\lambda x}dx$

$$=-\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^{n-1}de^{-\lambda x}=\frac{n}{\lambda}x^{n-1}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{\lambda}{n}\int_0^{+\infty}(n-1)x^{n-2}e^{-\lambda x}dx=\cdots=\frac{-n!}{\lambda^n}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{n!}{\lambda^n}.\ 1$$

3、 $E\sum_{k=1}^{Y}X_k=E[E(\sum_{k=1}^{Y}X_k|Y)]=\sum_{s=1}^{\infty}E(\sum_{k=1}^{s}X_k)\cdot P(Y=s)=\sum_{s=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{s}EX_k)P(Y=s)$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}EX_k[\sum_{s=k}^{\infty}P(Y=s)]=\sum_{k=1}^{\infty}EX_k[P(Y\ge k)].$$

# 第五章　极限定理（大数定律和中心极限定理）

1、由于 $X_1, X_2 \cdots$ 两两不相关，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n} COV(X_i, X_j)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

由切比雪夫不等式，有 $\forall \varepsilon>0$，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\le\frac{nC}{n^2\varepsilon^2}=\frac{C}{n\varepsilon^2}\to 0\,(n\to\infty)$$

由此立得

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=0$$

2、$\forall\varepsilon>0$，由于 $p\{X_n=\frac{1}{n}\}=1$，从而，当 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时

$$P\{|X_n|\ge\varepsilon\}\le p\{X_n\ne\frac{1}{n}\}=0$$

于是当 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时 $P\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=p\{|X_n-0|\ge\varepsilon\}=p\{|X_n|\ge\varepsilon\}=0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} p\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=0$

从而知 $\{X_n\}$ 依概率收敛 X。

$X_n$ 的分布函数为

$$F_{n(x)}=P\{X_n\le x\}=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n}\\ 1, & x\ge\frac{1}{n}\end{cases}$$

X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X_n\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n(x)}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

即当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(0)=0\ne F(0)$

即 $X_n$ 的分布函数不收敛于 X 的分布函数。

3、设 $n_A$ 表示使用终端的个数，则 $n_A\sim B(120, 0.05)$，于是所求概率是

$$P\{n_A\ge 10\}=P\{\frac{10-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\le\frac{n_A-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\le\frac{120-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{120-6}{\sqrt{5.7}}\right)-\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5.7}}\right)$$

$$\approx 1-\Phi(1.675)=1-0.953=0.047$$

4、 设 $X_i$ 表示装运的第 $i$ 箱的重量，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $n$ 是所求箱，数 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，$E(X_1)=50$，$D(X_1)=5^2$，且承运总重量是

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

由条件知，$P\{T \le 5000\} > 0.997$，由中心极限定理有

$$P\{T \le 5000\} = P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\}$$

$$= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 50n}{\sqrt{25n}} \le \frac{5000-50n}{\sqrt{25n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)$$

即应有$\varPhi\left(\frac{5000-50}{5\sqrt{n}}\right) > 0.997$

查表有$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}} > 2$，即$n < 98.0199$，故最多可以装 98 箱。

5、以$X_i$表示第$i$个数的取整误差，则有

（1）此时$i = 1, 2, \cdots, 1500$，且$X_1, X_2, \cdots, X_{1500}$独立皆服从$(-0.5, 0.5)$上的均匀分布，$E(X_i) = 0, D(X_i) = \frac{1}{12}$，于是所求概率是

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right\} = 1 - p\left\{\frac{-15}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}} \le \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 0}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}} \le \frac{15}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}}\right\}$$

$$\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)\right] = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi(1.34)\right) = 2(1 - 0.9099) = 0.1802$$

（2）此时$i = 1, 2, \cdots, n$其中$n$是所求的个数，$X_1, \cdots, X_n$独立皆服从$(-0.5, 0.5)$上的均匀分布，由条件知，应有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} \ge 0.90$$

由独立同分布的中心极限定理，有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} = P\left\{\frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\} \approx 2\varPhi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

即有　$2\varPhi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \ge 0.9$，即　$\varPhi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$

查表有：$\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \ge 1.645$，即　$n \le 443.45$

故最多有 443 个数相加，才能使误差总和的约对值小于 10 的概率不小于 0.90。

6、用$n_A$表示要使用外线的分机个数，则$n_A \sim B(200, 0.5)$，设$n$表示外线数，则由题知应有

$P\{n_A \le n\} \ge 9$

由　于

$$P\{n_A \le n\}=P\left\{\frac{0-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}<\frac{n_A-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\le\frac{n-200\times0.05}{\sqrt{200\times0.05\times0.95}}\right\}=\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

即应有$\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)\ge 0.9$，查表得$\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\ge 1.39$，即$n\ge 14.28$

故至少需要 15 条外线，才能满足需要。

7、设$n_A$表示开动的车床台数$n$表示供给的电能，则$n_A\sim B(200,0.6)$，且由题知，应有

$P\{n_A\le n\}\ge 0.999$

由于$P\{n_A\le n\}=P\left\{\frac{0-200\times0.06}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}<\frac{n_A-200\times0.06}{\sqrt{200\times0.06\times0.4}}\le\frac{n-200\times0.06}{\sqrt{200\times0.6\times0.4}}\right\}$

$$\approx\Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right)-\Phi\left(\frac{-120}{\sqrt{48}}\right)\approx\Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right)$$

即应有$\Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right)\ge 0.999$，查表得$\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\ge 3.1$，即$n\ge 141.48$

故至少供给 142E 的电能才能满足条件。

8、设$n_A$表示参加保险的人中死亡的人数，则$n_A\sim B(10000,0.006)$

（1）所求概率是

$$P\{1000n_A>120000\}=P\{n_A>120\}=P\left\{\frac{n_A-60}{\sqrt{60\times0.994}}>\frac{120-60}{\sqrt{60\times0.994}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(\sqrt{\frac{60}{0.994}}\right)=1-\Phi(7.77)\approx 0$$

（2）所求概率分别为

$$P\{120000-1000n_A\ge 40000\}=P\{n_A\le 80\}=P\left\{\frac{n_A-60}{\sqrt{60\times0.994}}>\frac{80-60}{\sqrt{60\times0.994}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{60\times0.994}}\right)=\Phi(2.59)=0.9952$$

$$P\{120000-1000n_A\ge 60000\}=P\{n_A\le 60\}=P\left\{\frac{n_A-60}{\sqrt{60\times0.994}}>\frac{60-60}{\sqrt{60\times0.994}}\right\}$$

$$\approx\Phi(0)=0.5$$

$$P\{120000-1000n_A\ge 80000\}=P\{n_A\le 40\}=P\left\{\frac{n_A-60}{\sqrt{60\times0.994}}>\frac{40-60}{\sqrt{60\times0.994}}\right\}$$

$$\approx\Phi(-2.59)=0.0048$$

# 第六章　　数理统计的基本概念

1.设样本均值为 $\overline{X}$ ,则由题意,有 $\overline{X} \sim N(1.4, \frac{6^2}{n})$ ,或 $\frac{\overline{X}-1.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ,于是由

$$0.95 \le P\{1.4 < \overline{X} < 5.4\} = P\left\{\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-1$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.975 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \ge 34.5744$$

故样本容量至少应取 35.

2.由题意可知 $\frac{\overline{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ,又

$$0.95 \le P\{|\overline{X}_n - a| < 0.1\} = P\left\{\left|\frac{\overline{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}}\right| < \frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1$$

故有 $\quad \Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) \ge 0.975 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{2} \ge 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \ge 15.3664$

因此 $n$ 至少应等于 16.

3. 由正态分布的性质及样本的独立性知, $X_1 - 2X_2$ 和 $3X_3 - 4X_4$ 均服从正态分布,由于

$$E(X_1 - 2X_2) = 0,\ D(X_1 - 2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 20$$

以及

$$E(3X_3 - 4X_4) = 0,\ D(3X_3 - 4X_4) = 9D(X_3) + 16D(X_4) = 100$$

所以,有

$$X_1 - 2X_2 \sim N(0,20) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1)$$

$$3X_3 - 4X_4 \sim N(0,100) \quad \Rightarrow \quad \frac{3X_3 - 4X_4}{10} \sim N(0,1)$$

于是由 $\chi^2$ 分布的定义知,当 $a = \frac{1}{20},\ b = \frac{1}{100}$ 时,有

$$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 = \left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{3X_3 - 4X_4}{10}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

4.　由正态分布的性质及样本的独立性知,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N(0,9^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9) \sim N(0,1)$$

又 $\quad \frac{Y_i}{3} \sim N(0,1),\ i = 1,2,\cdots,9$

所以 $\quad \left(\frac{Y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_9}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2) \sim \chi^2(9)$

由于两个总体是 $X$ 和 $Y$ 相互独立的,所以其相应的样本也是相互独立的,故 $\frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)$ 与 $\frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2)$ 也相互独立,于是由 $t$ 分布的定义知,

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{\frac{1}{9}(X_1+\cdots X_9)}{\sqrt{\frac{1}{9}(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)/9}}\sim t(9)$$

5.由题意知,$\frac{X_i}{2}\sim N(0,1)$,$i=1,2,\cdots,15$,故有

$$U=\frac{1}{4}(X_1^2+\cdots X_{10}^2)=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2(10)$$

$$V=\frac{1}{4}(X_{11}^2+\cdots X_{15}^2)=\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2(5)$$

利用样本的独立性以及 F 分布的定义,有

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{U/10}{V/5}\sim F(10,5)$$

6.**解法 1** 考虑 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2},\cdots,X_n+X_{2n}$,将其视为取自正态总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本,则其样本均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$

样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y$

由于 $E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$,所以 $E(Y)=(n-1)(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2$

**解法 2** 记 $\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$,显然有 $2\overline{X}=\overline{X}'+\overline{X}''$,因此

$$E(Y)=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\right]\right\}$$

$$=(n-1)\sigma^2+0+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$$

7.记 $D(X)=\sigma^2$（未知），易见 $E(Y_1)=E(Y_2)$， $D(Y_1)=\sigma^2/6$, $D(Y_2)=\sigma^2/3$

由于 $Y_1,Y_2$ 相互独立，故有

$$E(Y_1-Y_2)=0,\qquad D(Y_1-Y_2)=\frac{\sigma^2}{6}+\frac{\sigma^2}{3}=\frac{\sigma^2}{2}$$

从而 $U=\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，又 $\chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$

由于 $Y_1$ 与 $Y_2$ 相互独立,$Y_1$ 与 $S^2$ 独立,由定理 6.3.2,$Y_2$ 与 $S^2$ 独立,所以 $Y_1-Y_2$ 与 $S^2$ 独立,于是由 $t$ 分布的定义,知

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}}\sim t(2)$$

8.由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,其中由题意知,$n=25$，$\sigma^2=100$,于是

$$P\{S^2 > 50\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{50(n-1)}{\sigma^2}\right\} = P\{\chi^2(25-1) > 12\}$$

$$= P\{\chi^2(24) > 12\} \geq 0.975$$

上式中的不等式是查表得到的,所以所求的概率至少为 0.975

9. 本题要用到这样一个结论,即 $\Gamma$ 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 关于第一个参数具有可加性,即若 $U \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$, $V \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$,且 U 与 V 相互独立,则 $U+V \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$,其中 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的概率密度为: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

可利用卷积公式证明.

回到本题,当 $\alpha=1$, $\beta=\dfrac{1}{\lambda}$, $\Gamma$ 分布就是参数为 $\lambda$ 的指数分布,所以样本的独立性及 $\Gamma$ 分布的可加性,有 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \dfrac{1}{\lambda})$

即 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的概率密度为 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

因此 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 的概率密度为 $h(y) = ng(ny) = \begin{cases} \dfrac{(n\lambda)^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda n y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

10. **(1)** 根据正态分布的性质, $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 服从二维正态分布,所以要证明它们相互独立,只需它们不相关,由于

$$E[(X_1+X_2)(X_1-X_2)] = E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0$$

$$E(X_1+X_2)E(X_1-X_2) = 0$$

所以 $\qquad Cov(X_1+X_2, X_1-X_2) = 0$

即 $X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 相互独立

(2) 由于 $\mu = 0$,所以

$$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{X_1+X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{X_1-X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

由上面证明的独立性，再由 F 分布的定义知

$$F = \frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2} = \frac{\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sigma}\right)^2 / 2}{\left(\dfrac{X_1-X_2}{\sigma}\right) / 2} \sim F(1,1)$$

所以 $\qquad P\left\{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2} < 4\right\} = P\{F < 4\} < P\{F < 5.83\} = 0.25$

# 第七章　参数估计

**(一)基本题**

1　(1)　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

令　$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，得未知参数$\theta$的矩估计量为　$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

（2）　因为$E(X)=\frac{1}{p}$,所以 $p$ 的矩估计量为　$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$

(3)　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{\theta}^{\infty}2xe^{-2(x-\theta)}dx=\frac{1}{2}+\theta$

令　$\frac{1}{2}+\theta=\overline{X}$，解得$\theta$矩估计量为　$\hat{\theta}=\overline{X}-\frac{1}{2}$

（4）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{0}^{1}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，令$\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$，

解得$\theta$矩估计量为　$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

（5）　$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta_1,\theta_2)dx=\int_{\theta_1}^{\infty}\frac{x}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx=\theta_1+\theta_2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x;\theta_1,\theta_2)dx=\int_{\theta_1}^{\infty}\frac{x^2}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx=(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2$$

令　$$\begin{cases}\theta_1+\theta_2=\overline{X}\\(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$$

解得参数$\theta_1,\theta_2$的矩估计量为:　$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\hat{\theta}_2$,　$\hat{\theta}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2}$

(6)　因为一阶矩$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\sigma)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0$,它与$\sigma$无关,所以还必须求二阶矩,$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,\sigma)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$

令　$2\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，解得参数$\sigma$的矩估计量为　$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

2　(1)设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应于$X_1,X_2,\cdots,X_n$的样本，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$时，$L(\theta)>0,$ 并且有

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + \theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = \dfrac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$，解得 $\theta$ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = -1 - \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

从而 $\theta$ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta} = -1 - \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i-1} = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i - n}$$

$$\ln L = n\ln p + (\sum_{i=1}^{n}x_i - n)\ln(1-p)$$

令 $\dfrac{d\ln L}{dp} = \dfrac{n}{p} + \dfrac{n - \sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p} = 0$，解得 $p$ 的极大似然估计值为 $\hat{p} = \dfrac{1}{\overline{x}}$

从而 $\theta$ 的极大似然估计量为 $\hat{p} = \dfrac{1}{\overline{X}}$

(3) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i \ge \theta, i = 1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $x_i \ge \theta\ (i = 1,2,\cdots)$ 时, $L(\theta) > 0$ ,并且 $\ln L(\theta) = n\ln 2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)$

因为 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = 2n > 0,$ 所以 $L(\theta)$ 单调递增.

因为必须满足 $x_i \ge \theta\ (i = 1,2,\cdots)$ ,因此 $\theta = x_{(1)} = \min\{x_1, \cdots, x_{(n)}\}$ 时，$L(\theta)$ 取最大值,所以 $\theta$ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = x_{(1)}$ ,极大似然估计量为

$$\hat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$$

(4) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是相应于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \le x_i \le 1, i = 1,2,\cdots,n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $0 \le x_i \le 1, i = 1,2,\cdots,n$ 时, $L(\theta) > 0$ ,并且 $\ln L = \dfrac{n}{2}\ln\theta + (\sqrt{\theta} - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta} = \dfrac{n}{2\theta} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{2\sqrt{\theta}} = 0$，解得 $\theta$ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \dfrac{n^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]^2}$

$\theta$ 的极大似然估计量为　$\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right]^2}$

(5) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2^n}\exp\left\{-\dfrac{1}{\theta_2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)\right\}, & x_i>\theta_1,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以当 $x_i>\theta_1,i=1,2,\cdots n$ 时, $L(\theta_1,\theta_2)>0$ ,并且

$$\ln L=-n\ln\theta_2-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\theta_1}{\theta_2}$$

由于 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_2}>0$ ,所以 $L(\theta_1,\theta_2)$ 是 $\theta_1$ 的单调递增函数，因为必须满足 $x_i>\theta_1,i=1,2,\cdots n$ ,所以对于任意给定的 $\theta_2$，　$L(x_{(1)},\theta_2)=\inf\limits_{\theta_1}L(\theta_1,\theta_2)$

令　$$\frac{\partial\ln L(x_{(1)},\theta_2)}{\partial\theta_2}=\frac{-n}{\theta_2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nx_{(1)}}{\theta_2^2}=0$$

解得　$\hat{\theta}_2=\bar{x}-x_{(1)}$ ,所以 $\theta_1,\theta_2$ 的极大似然估计值分别为 $\hat{\theta}_1=x_{(1)}$　$\hat{\theta}_2=\bar{x}-x_{(1)}$

$\theta_1,\theta_2$ 的极大似然估计量分别为　$\hat{\theta}_1=X_{(1)}$　$\hat{\theta}_2=\bar{X}-X_{(1)}$

(6) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\frac{1}{2}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_1|}$$

取对数　$\ln L=\dfrac{-n}{2}\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$　，令　$\dfrac{d\ln L}{d\sigma}=\dfrac{-n}{2\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$

解得 $\sigma$ 的极大似然估计值为　$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

所以 $\sigma$ 的极大似然估计量为　$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

3　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

取对数,得　$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}$$

令　$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

得 $p$ 的极大似然估计值为　$\hat{p}=\dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{1}{m}\bar{x}$

所以 $p$ 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{m}\overline{X}$

4 (1)已知,$\lambda$ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{x}$ ,又 $P\{X=0\}=e^{-\lambda}$ ,所以根据极大似然估计的性质,$P\{X=0\}$ 的极大似然估计值为 $e^{-\overline{x}}$

(2) 观察到的五年内每一扳道员引起的严重事故的平均次数为

$$\overline{x}=\frac{1}{122}(0\times44+1\times42+2\times21+3\times9+4\times4+5\times2)=\frac{137}{122}=1.123$$

所以一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 $p$ 的极大似然估计值为

$$\hat{p}=e^{-1.123}=0.3253$$

5. (1) $$E(X)=E(e^Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2-(2\mu+2\sigma^2)z+(\mu+\sigma^2)^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4)\}dz$$

$$=\exp\{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\mu-\sigma^2)\}dz\quad=\exp\{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\}$$

(2) 可以将 $\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n$ 视为取自总体 $Z=\ln X$ 的样本,则由于 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$,因而可得参数 $\mu,\sigma^2$ 的极大似然估计值分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})$$

故由极大似然估计的性质,可得 $E(X)$ 的极大似然估计值为 $\hat{E(X)}=\exp\{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\}$

(3) 经计算得,$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=3.0909$, $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})=0.5115$,

所以, 一个句子字数均值的极大似然估计值为 $\hat{E(X)}=\exp\{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\}$ =28.4073

6.由正态分布的性质以及样本的独立性可知 $X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$

因此 $$E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)=2\sigma^2$$

欲使 $$\sigma^2=E\left(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right)=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2(n-1)c\sigma^2$$

必须 $c=\frac{1}{2(n-1)}$ ，因此，当 $c=\frac{1}{2(n-1)}$ 时，统计量 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计.

7. 由于 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均为参数 $\theta$ 的无偏估计，所以 $E(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=aE(\hat{\theta}_1)+bE(\hat{\theta}_2)=(a+b)\theta$

欲使 $a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 是 $\theta$ 的无偏估计，必须 $a+b=1$ ，即 $b=1-a$ .

从而由 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的独立性以及题设条件,有

$$D(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=a^2D(\hat{\theta}_1)+(1-a)^2D(\hat{\theta}_2)=[2a^2+(1-a)^2]D(\hat{\theta}_2)=(1-2a+3a^2)D(\hat{\theta}_2)$$

上式右边当 $a=\frac{1}{3}$ 时达到最小.

综上所述,当 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 时，$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 是 $\theta$ 的无偏估计,并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

8.（1）由于总体 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，所以其数学期望和方差均为 $\lambda$，由于样本均值和样本方差是总体均值和方差的无偏估计，所以有

$$E(\overline{X}) = E(S^2) = \lambda$$

从而
$$E[\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2] = \alpha E(\overline{X}) + (1-\alpha)E(S^2) = \lambda$$

所以 $\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2$ 为 $\lambda$ 的无偏估计量

（2）已知, $\lambda$ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M = \overline{X}$ ,所以由极大似然估计的性质, $\lambda^2$ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M^2 = (\overline{X})^2$.

(3) 由于
$$E(\hat{\lambda}_M^2) = E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

因此 $\hat{\lambda}_M^2 = (\overline{X})^2$ 不是 $\lambda^2$ 的无偏估计,令 $\hat{\lambda}^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{\overline{X}}{n}$

则有
$$E(\hat{\lambda}^2) = E(\overline{X}^2) - \frac{1}{n}E(\overline{X}) = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 - \frac{\lambda}{n} = \lambda^2$$

所以 $\hat{\lambda}^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{\overline{X}}{n}$ 是 $\lambda^2$ 的一个无偏估计量.

注: $\lambda^2$ 的无偏估计量不唯一,如统计量 $\hat{\lambda}_i^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{X_i}{n}$ $(i = 1,2,\cdots.n)$ 都是 $\lambda^2$ 无偏估计量.

9. 由题意知, $X$ 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & 其它 \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ x-\theta, & \theta < x < \theta+1 \\ 1, & x \ge \theta+1 \end{cases}$$

因此,最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的概率密度为

$$f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1}, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

所以,
$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(n)}(x)dx = \int_{\theta}^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}dx = n\int_0^1 (t+\theta)t^{n-1}dt = \frac{n}{n+1} + \theta$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{(n)}(x)dx = \int_{\theta}^{\theta+1} nx^2(x-\theta)^{n-1}dx = n\int_0^1 (t+\theta)^2 t^{n-1}dt = \frac{n}{n+2} + \frac{2n}{n+1}\theta + \theta^2$$

$$D(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - [E(X_{(n)}^2] = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

于是
$$E(\hat{\theta}_1) = E(\overline{X}) - \frac{1}{2} = E(X) - \frac{1}{2} = \frac{\theta+\theta+1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(n)}) - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \theta - \frac{n}{n+1} = \theta$$

所以, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 皆为参数 $\theta$ 的无偏估计,又

$$D(\hat{\theta}_1) = D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{1}{12n}$$

$$D(\hat{\theta}_2) = D(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} < \frac{1}{12n} \qquad (n > 1)$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

10. (1) $\sigma^2=0.025^2$ 已知时 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

将 $\overline{x}=0.081,\sigma=0.025,z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ 代入得 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

（0.0775，0.0845）

11. $\sigma^2$ 已知时 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

欲使其区间长度不大于给定的 $L$,必须 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\le L$，即 $n\ge\frac{4z_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$

12. 利用上题的结果,由于 $\sigma=0.05,\ z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，要使他对平均反应时间的估计误差不超过 0,01 秒,必须 $L=0.02$，所以　$n\ge\frac{4z_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$=49

13. $\sigma^2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

在本题中，$\alpha=0.05,\ n=16$，经计算得，$s^2=0.00244,$ 查表得，$\chi^2_{0.975}(15)=6.262,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488,$ 最后得 $\sigma^2$ 的置信度为 95%的置信区间为

(0.00133,0.00584)

14.此题为方差未知但相等时的两个总体均值差的区间估计问题，已知此时 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$

已知 $\overline{x}=1000,\ \overline{y}=980,\ n_1=5,\ n_2=7,\ \alpha=0.01,$ 查表得 $t_{0.005}(10)=3.1693$，

$$s_w=\sqrt{\frac{4\times28^2+6\times32^2}{4+6}}=30.463$$

最后得两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间为　(-36.53, 76.53)

15.设 $X$，$Y$ 分别为一、二号方案的单位面积产量，并设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为相应于总体 $X,Y$ 的样本，令 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$,令 $Z_i=X_i-Y_i$,于是,$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

其中　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[(X_i-Y_i)-(\overline{X}-\overline{Y})]^2$

已知 $n=8,\ \overline{z}=\overline{x}-\overline{y}=5.75$, $s=5.12$, $\alpha=0.05,\ t_{0.025}(7)=2.3646$, 计算得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%的置信区间为(1.47,10.03)

16. 方差比 $\sigma_A^2/\sigma_B^2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2/S_B^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad\frac{S_A^2/S_B^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

已 知 $s_A^2=0.5419$ ， $s_B^2=0.6065$ ， $n_1=n_2=10$ ， $\alpha=0.05,$ $F_{0.025}(9,9)=4.03,$ $F_{0.975}(9,9)=0.2481$, 代入算得方差比 $\sigma_A^2/\sigma_B^2$ 的置信度为 0.95 的置信区间 (0.2217,3.601)

**(二)补充题**

1. (1) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,\cdots,X_n$ 的一组样本值,则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}\frac{\theta^{x_i}}{f(\theta)}=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}f^{-n}(\theta)\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}$$

取对数得 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\theta-n\ln f(\theta)+\ln\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}$ $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{nf'(\theta)}{f(\theta)}=0$

令 $$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{nf'(\theta)}{f(\theta)}=0$$

可得 $\theta$ 的极大似然估计值是方程 $\bar{x}=\frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$

的一个根,从而 $\theta$ 的极大似然估计量是方程

$$\bar{X}=\frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}\tag{1}$$

的一个根.

由 $\sum_{i=1}^{\infty}a_x\frac{\theta^x}{f(\theta)}=1$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty}a_x\theta^x=f(\theta)$

故 $$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}a_x\frac{x\theta^x}{f(\theta)}=\frac{\theta}{f(\theta)}\sum_{x=1}^{\infty}a_x(\theta^x)'=\frac{\theta}{f(\theta)}\left(\sum_{x=1}^{\infty}a_x\theta^x\right)'=\frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$$

所以（1）也是 $\theta$ 的矩法方程.

(2) 对于泊松分布(参数为 $\lambda$), $a_x=\frac{1}{x!}$, $f(\lambda)=e^{\lambda}$,因此 $f'(\lambda)=f(\lambda)$,故 $\lambda$ 的极大似然估计满足方程 $\bar{X}=\lambda$

从而 $\lambda$ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}=\bar{X}$ .

对于二项分布 $B(n,p)$ ,令 $\frac{p}{1-p}=\theta$,则

$$P\{X=x\}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\binom{n}{x}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x(1-p)^n=\binom{n}{x}\frac{\theta^x}{(1+\theta)^n}$$

因此, $f(\theta)=(1+\theta)^x$ ,故 $\theta$ 的极大似然估计满足的方程为 $\bar{X}=\frac{n\theta}{1+\theta}$

由极大似然估计的性质可知, $p=\frac{\theta}{1+\theta}$ 的极大似然估计满足的方程为 $\bar{X}=np$

2. $X$ 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1\\0, & \text{其它}\end{cases}$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x_i<\theta+1, i=1,2,\cdots,n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

因 此 ， 当 $\theta<x_i<\theta+1, i=1,2,\cdots,n$ 时 ， $L(\theta)=1$ 为 常 数 ， 因 此 对 于 满 足

$$\theta < x_{(1)} \le x_{(n)} < \theta + 1$$

的一切$\theta$均为极大似然估计,因此$\theta$的极大似然估计量不止一个.由于区间$(\theta, \theta+1)$的总长度为 1,因此由上述不等式知,如果$\theta$尽可能的靠近$x_{(1)}$,或者$\theta+1$应尽量靠近$x_{(n)}$,则所得的估计显得更加合理,因此$\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$，$\hat{\theta}_2 = X_{(n)} - 1$,都可以取为$\theta$的极大似然估计量. 由极大似然估计的性质,$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) - \frac{1}{2}$也可以作为极大似然估计.

3.此时$X$的概率密度为

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

设$X_1, \cdots, X_n$是来自总体$X$的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}, & x_i > 0, i = 1, \cdots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以当$x_i > 0, i = 1, \cdots, n$时，$L(\theta) > 0$,并且

$$\ln L(\theta) = -n \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

令
$$\frac{d \ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解得$\theta$的极大似然估计值为　$\hat{\theta} = \bar{x}$

故其极大似然估计量为　$\hat{\theta} = \bar{X}$

由于$E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta$，故$\hat{\theta} = \bar{X}$是$\theta$无偏估计.

又
$$\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}; \quad \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

故信息量
$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(X,\theta)\right]^2 = E\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4}E(X-\theta)^2 = \frac{D(X)}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}$$

由于
$$D(\hat{\theta}) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

所以估计量$\hat{\theta}$是为$\theta$的有效估计.

4. (1)由于
$$E\left(2^X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{2\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda}$$

所以如果$X_1, \cdots, X_n$是来自总体$X$的一个样本,则$2^{X_i}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$均为$e^{\lambda}$的无偏估计.

(2) 由于　$\hat{\theta} = (-1)^X$,所以有
$$E(\hat{\theta}) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} = e^{-2\lambda}$$

故$\hat{\theta} = (-1)^X$是$\theta = e^{-2\lambda}$的无偏估计.

5　(1)由本章基本题 5 知

$$b = E(X) = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\}$$

(2)　由于$Y \sim N(\mu, 1)$,所以$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\overline{Y}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{Y}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\qquad 其中\ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

在本题中已知$n=4$,经计算得$\bar{y}=0,$查表得$z_{0.025}=1.96$,所以$\mu$的置信度为 0.95 的置信区间为(-0.98,0.98).

(3) 由上面的结果,$b$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\exp(\overline{Y}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}),\exp(\overline{Y}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\right)$$

将$n=4$, $\bar{y}=0,$ $z_{0.025}=1.96$代入得$b$的置信度为 0.95 的置信区间为$\left(e^{-0.48},e^{1.48}\right)$

6. (1) 由于$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以有$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$

即　$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}>\sigma^2\right\}=1-\alpha$

所以$\sigma^2$的置信度为$1-\alpha$的置信上限为$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

(2) 由于$\sigma^2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

所以$\log\sigma^2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad\log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

其区间长度为$\log\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$, 因此要使其具有固定长度 L, 必须选择样本容量$n$使其满足

$$\log\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=L,\ 即\quad\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=e^L$$

7. (1) 由题意知,$X_i\sim N(\frac{\theta}{2}t_i^2,\sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,且相互独立,由于$\hat{\theta}$是$X_i$　$(i=1,2,\cdots,n)$线性组合,故也服从正态分布.

又　$$E(\hat{\theta})=\frac{2\sum_{i=1}^{n}t_i^2E(X_i)}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}=\theta,\quad D(\hat{\theta})=\frac{4\sum_{i=1}^{n}t_i^4D(X_i)}{(\sum_{i=1}^{n}t_i^4)^2}=\frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}$$

于是　$$U=\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}}\sim N(0,1),\ 由\qquad P\{z_{1-\alpha+\alpha_1}<U<z_{\alpha_1}\}=1-\alpha$$

可解得$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}z_{\alpha_1},\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}z_{1-\alpha+\alpha_1}\right)$$

因此,要是上面的区间具有固定长度,必须选择合适的$\alpha_1$,使$\dfrac{2\sigma(z_{\alpha_1}-z_{1-\alpha+\alpha_1})}{(\sum_{i=1}^{n}t_i^4)^{1/2}}=L$

(2) 由于有限制 $0\le t_i\le 1, i=1,2,\cdots,n$,因此要是区间长度尽可能的短,必须使上式的分母$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}$尽可能的大,因此我们取$t_i=1, i=1,2,\cdots,n$.

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2$ 不相等,且 $\alpha_1<\dfrac{\alpha}{2}<\alpha_2$,则 $z_{\alpha_2}<z_{\frac{\alpha}{2}}<z_{\alpha_1}$,由于 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$,所以 $\alpha_2-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}-\alpha_1$,设标准正态分布的概率密度为$\varphi(x)$,则

$$\int_{z_{\alpha_2}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}}\varphi(x)dx=\alpha_2-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}-\alpha_1=\int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\alpha_1}}\varphi(x)dx$$

由于$\varphi(x)$在$x>0$时是单调递减的,所以有 $z_{\alpha_1}-z_{\frac{\alpha}{z}}>z_{\frac{\alpha}{2}}-z_{\alpha_2}$,即 $z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}>2z_{\frac{\alpha}{2}}$

因此,区间$(\overline{X}-z_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$的长度为$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2})>\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$,而右边即为$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$是置信区间的长度.

所以形如$(\overline{X}-z_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$的置信度为$1-\alpha$($\alpha_1+\alpha_2=\alpha$)的置信区间中,当$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$时,区间长度最短.

9. (1) 设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$, $\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$,则有 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

则$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha-\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

要使该区间具有固定长度 L, 必须选择适当的$\alpha_1$或样本容量$n_1,n_2$, 使得

$$z_{\alpha-\alpha_1}+z_{\alpha_1}=\frac{L}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(2)由于$L=\dfrac{2}{5}\sigma$, $n_1=n_2=n$,取$\alpha_1=\dfrac{\alpha}{2}$,则上式变为 $2z_{\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\frac{2}{5}\sigma}{\sqrt{\frac{2}{n}}\sigma}$

解得 $n=\left(5\sqrt{2}z_{\alpha/2}\right)^2$,又$\alpha=0.1$,故$z_{0.05}=1.645$,代入计算得$n=135.3$,由于容量为整数,故取$n=136$.

10. (1)　总体 $X$ 的概率密度为　$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

取对数,得　$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

令　$\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$

解得 $\mu$ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}$,从而 $\mu$ 的极大似然估计量为 $\hat{\mu}=\overline{X}$ .

(2) 依据辛钦大数定律,当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\mu}=\overline{X}$ 依概率收敛于 $\mu$ ,故 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 $\mu$ 的一致估计量.

又　$E(\hat{\mu})=E(\overline{X})=E(X)=\mu$

故 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 $\mu$ 的无偏估计量.

由于　$\ln f(x,\mu)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}(x-\mu)^2$；　$\frac{\partial\ln f}{\partial\mu}=x-\mu$

信息量　$I(\mu)=E\left(\frac{\partial\ln f(X,\mu)}{\partial\mu}\right)^2=E(X-\mu)^2=D(X)=1$

由于　$D(\hat{\mu})=D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{1}{n}=\frac{1}{nI(\mu)}$

综上所述, 所得的估计量为 $\mu$ 的一致的、无偏的达到罗-克拉美不等式下界的有效估计.

11. (1)　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{0}^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$

令 $\frac{2}{3}\theta=\overline{X}$，解得 $\theta$ 的矩估计量为　$\hat{\theta}=\frac{3}{2}\overline{X}$

（2）由于　$E(\hat{\theta})=\frac{3}{2}E(\overline{X})=\frac{3}{2}E(X)=\theta$，故 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的无偏估计量.

(3)　$\ln f(x,\theta)=\ln 2x-2\ln\theta$；　$\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}=-\frac{2}{\theta}$

信息量　$I(\theta)=E\left(\frac{\partial\ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2=\frac{4}{\theta^2}$

又　$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_{0}^{\theta}\frac{2x^3}{\theta^2}dx=\frac{1}{2}\theta^2$

故　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}\theta^2$

由于　$D(\hat{\theta})=\frac{9}{4}D(\overline{X})=\frac{9}{4n}D(X)=\frac{1}{8n}\theta^2<\frac{1}{4n}\theta^2=\frac{1}{nI(\theta)}$

所以 $D(\hat{\theta})$ 小于罗-克拉美不等式的下界。

# 第八章　假设检验

**（一）基本题**

1.此题是在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设:

$$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0 \quad 其中\ \mu_0=1600$$

检验统计量为 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, 拒绝域为$|u|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, 已知$\sigma=150$, $n=26,\ \bar{x}=1637,$ 查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96,$ 计算得$|u|=1.258<1.96,$ 所以接受原假设$H_0$,即认为这批产品的指标的期望值$\mu$为 1600.

2.设该次考试的考生成绩为$X$,则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,把从$X$中抽取的容量为$n$的样本均值记为$\bar{x}$,样本标准差为$s$,本题是在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设:

$$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0 \quad 其中\ \mu_0=70$$

检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 由 $n=36,\ \bar{x}=66.5,\ s=15,$ $t_{0.025}(36-1)=2.0301,$ 算得 $\quad |t|=\dfrac{|66.5-70|\sqrt{36}}{15}=1.4<2.0301$

所以接受原假设, 即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

3. 由题意知检验统计量为 $u=\dfrac{\bar{x}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}$, 拒绝域为 $u<-z_{\frac{\alpha}{2}}$, 由 $n=25,\ \bar{x}=950,\ \sigma=100,\ \alpha=0.05$, $z_{0.025}=1.96,$ 算得

$$u=\frac{(950-1000)\sqrt{25}}{100}=-2.5<-1.96$$

所以拒绝原假设, 即认为这批元件不合格.

4. (1) 检验统计量为 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 由 $n=10,\ \mu_0=0.5\%,\ \bar{x}=0.452\%,\ \ s=0.037\%$, $\alpha=0.05$, $t_{0.025}(9)=2.2622,$ 算得

$$|t|=3.8919>2.2622$$

所以拒绝原假设$H_0$.

(2) 检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$（其中$\sigma_0=0.04\%$）, 拒绝域为

$$\{\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\}\cup\{\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$$

查表得$\chi^2_{0.025}(9)=19.023,\ \chi^2_{0.975}(9)=2.7$, 算得$\chi^2=7.701$, 它没有落在拒绝域中, 故接受原假设$H_0$.

5.本题是在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设:

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma>\sigma_0^2 \quad （其中\ \sigma_0=0.005）$$

检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, 拒绝域为 $\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n-1)\}$, 由 $n=9, s=0.007,\ \chi^2_{0.05}(8)=15.504$, 算得$\chi^2=15.68>15.504,$ 因此拒绝原假设$H_0$, 即认为这批导线的标准差显著地偏大.

6　设枪弹甲、乙的速度分别为$x,y$,并设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

首先需在显著性水平$\alpha=0.05$检验两种枪弹在均匀性方面有无显著差异,即需检验:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

检验统计量为$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为 $C=\left\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}$

由

$n_1=n_2=110$,　$s_1=120.41$　,　$s_2=105.00$　,　$F_{0.025}(109,109)>F_{0.025}(120,120)=1.43$　, $F_{0.975}(109,109)<0.6993$,可以算得, $F=1.315$,显然$0.6993<F=1.315<1.43$, 故检验没有落在拒绝域内,故可以认为两个总体的方差相等,即两种枪弹在均匀性方面没有差异.

其次我们需在显著性水平$\alpha=0.05$检验两种枪弹在速度方面有无显著差异,即需检验:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0\leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

由于可以认为两者的方差相等, 故可取检验统计量为　$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

其中　$s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$， 拒绝域为$C=\left\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$.

由于$n_1,n_2$很大, 故有$t_{0.025}(218)\approx z_{0.025}=1.96$将$\bar{x}=2805,\ \bar{y}=2680$, 以上数据代入上式计算可得$|t|=8.206>1.96$,故拒绝原假设$H_0$,可以认为两个总体的平均值有显著差异,即两种枪弹在速度方面有显著差异.

综上所述,两种枪弹在速度方面有显著差异但在均匀性方面没有显著差异.

7.设马克吐温与思诺特格拉斯的小品文中由 3 个字母组成的词的比例分别为$x,y$,并且由题意可设$x\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$,本题是在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0\leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为　$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

其中　$s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$， 拒绝域为$C=\left\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$.

已知$n_1=8,n_2=10$,查表得$t_{0.025}(16)=2.1199,$ ,经计算得，$\bar{x}=0.2319,s_1=0.01456,$ $\bar{y}=0.2097,s_2=0.00966$,代入检验统计量得$|t|=3.5336>2.1199$

故拒绝原假设,即可以认为两个作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的词的比例是否有显著的差异.

8.设两台机器所加工的零件的尺寸分别为$x,y$,并且由题意可设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,本题是要在显著性水平$\alpha=0.05$下检验: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

检验统计量为$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为　$C=\{F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)\}$

已知$n_1=8,\ n_2=9$,计算得$s_1=0.3092,\ s_2=0.16159$, $F_{0.05}(7,8)=3.5$,因此

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=3.6615>3.5$$

故拒绝原假设， 即可以认为第二台机器的加工精度比第一台机器的高.

9. 设没关禁闭和关禁闭的人的脑电波中的$x,y$,且设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

(1)先在显著性水平下$\alpha=0.05$检验:　　$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

检验统计量为$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为 $C=\left\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}$

已知$n_1=n_2=10$, 经计算得$\bar{x}=10.58,\ \bar{y}=9.78,\ s_1^2=0.21,\ s_2^2=0.36,\ F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=0.5833$

查表得$F_{0.025}(9,9)=4.03, F_{0.975}(9,9)={1}\big/{F_{0.025}(9,9)}=0.248$

由于检验统计量的观察值 0.5833 没有落在拒绝域中,故接受原假设$H_0$,即可以认为两个总体的方差没有显著差异.

(2) 再在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设: $H_0:\mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为　　$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

其中　　$s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$， 拒绝域为$C=\left\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$.

查表得$t_{0.025}(18)=2.093$,经计算得$s_w=0.5338, |t|=3.35>2.093=t_{0.025}(18)$

故拒绝$H_0$, 即认为两个总体的均值有显著差异,即可以认为关紧闭对脑电波的影响显著.

10.设两台机器生产的部件的重量分别为$x,y$, 且设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

由题意知，需在显著性水平下$\alpha=0.05$检验: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

检验统计量为$F=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为　　$C=\{F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)\}$

已知$n_1=60$　, $n_2=40$, $F_{0.05}(59,39)=1.65$,计算得　$F=\dfrac{15.46}{9.66}=1.6<1.65$

故接受原假设$H_0$,即不能认为第一台机器生产的部件重量的方差显著地大于第二台机器生产的部件重量的方差

11. 设一年内的暴雨次数为$X$, 现在的问题是在显著性水平$\alpha=0.05$下检验假设:

$H_0:X$ 服从参数为$\lambda$泊松分布

首先来估计泊松分布中的参数$\lambda$. $\lambda$的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{1}{63}(0\times4+1\times8+\cdots+9\times0)=2.8571$$

为利用$\chi^2$拟合检验法则,将相关的计算结果列表表示(见下表).

| $i$ | $v_i$ | $\hat{p}_i$ | $n\hat{p}_i$ | $v_i-n\hat{p}_i$ | $(v_i-n\hat{p}_i)^2/n\hat{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 0.0574 | 3.62 | -1.96 | 0.2752 |
| 1 | 8 | 0.1641 | 10.34 | | |
| 2 | 14 | 0.2344 | 14.77 | -0.77 | 0.0401 |
| 3 | 19 | 0.2233 | 14.07 | 4.93 | 1.7274 |
| 4 | 10 | 0.1595 | 10.05 | -0.05 | 0.0002 |
| 5 | 4 | 0.0911 | 5.74 | | |
| 6 | 2 | 0.0434 | 2.73 | -2.16 | 0.4592 |
| 7 | 1 | 0.0177 | 1.12 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 0.0083 | 0.52 | | |
| $\geq 9$ | 0 | 0.0008 | 0.05 | | |
| $\sum$ | | | | | $\chi^2 = 2.5021$ |

其中 $\hat{p}_i$ 为 $p_i = P\{X = i\}$ 的估计值:　$\hat{p}_i = \dfrac{(2.8571)^i}{i!} e^{-2.8571}$　$i = 0,1,2,\cdots$

表中我们对于不满足 $np_i > 5$ 的组作了适当的合并,并组后, $k = 10 - 5 = 5$ ,而 $\alpha = 0.05$ , $r = 1$, $\chi^2_{0.05}(5-1-1) = 7.815$, 因此有 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.5021 < \chi^2_{0.95}(3)$ ,所以接受 $H_0$ ,即可以认为一年的暴雨次数服从泊松分布.

12. 设事故发生在星期 $X$ ,则本题是要在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验:

$$H_0 : P\{X = i\} = \frac{1}{6}, i = 1,2,3,4,5,6$$

计算结果列表如下

| $i$ | $v_i$ | $p_i$ | $np_i$ | $v_i - n\hat{p}_i$ | $(v_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 1/6 | 10.5 | -1.5 | 0.2143 |
| 2 | 10 | 1/6 | 10.5 | -0.5 | 0.02381 |
| 3 | 11 | 1/6 | 10.5 | 0.5 | 0.02381 |
| 4 | 8 | 1/6 | 10.5 | -2.5 | 0.5952 |
| 5 | 13 | 1/6 | 10.5 | 2.5 | 0.5952 |
| 6 | 12 | 1/6 | 10.5 | 1.5 | 0.2143 |
| $\sum$ | | | | | 1.6667 |

查表得 $\chi^2_{0.05}(6-1) = 11.071$,所以 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \dfrac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 1.6667 < \chi^2_{0.05}(5)$ ,所以接受 $H_0$ ,所以可以认为事故的发生与星期几无关.

13. 设考试成绩为 $X$ ,则由题意知需在显著性水平 $\alpha = 0.05)$ 下检验假设: $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$

对正态分布中的参数 $\mu, \sigma^2$ 用极大似然估计法估计可得 $\mu, \sigma^2$ 的估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 80.1 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} s^2 = 92.72$$

为利用 $\chi^2$ 拟合检验法则,将相关的计算结果列表表示(见下表).

| 区间 | $v_i$ | $\hat{p}_i$ | $n\hat{p}_i$ | $v_i - n\hat{p}_i$ | $(v_i - n\hat{p}_i) / n\hat{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty, 70)$ | 8 | 0.1469 | 8.14 | -0.14 | 0.002 |
| [70,75) | 6 | 0.1512 | 9.072 | -3.072 | 1.040 |
| [75,80) | 14 | 0.1979 | 11.874 | 2.126 | 0.381 |
| [80,85) | 13 | 0.1990 | 11.94 | 1.06 | 0.094 |
| [85,90) | 8 | 0.1535 | 9.21 | -1.21 | 0.159 |
| [90,100] | 11 | 0.1515 | 9.09 | 1.91 | 0.401 |
| $\sum$ | | | | | 2.077 |

表中区间的划分是按照每个区间 $[a_{i-1}, a_i)$ 至少要包含 5 个样本值的原则确立的,其中

$$\hat{p}_i = \Phi\left(\frac{a_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

而 $k = 6$, 估计的参数为 $r = 2$, 故 $k - r - 1 = 3$ , $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$ ,而检验统计量的值

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(v_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=2.077<7.815$$

故接受原假设，即可以认为考试成绩服从正态分布

**(二)补充题**

1　设甲、乙两试验员对同样试样的分析结果分别为 $x,y$，令 $d=x-y$，则 $d_i=x_i-y_i$ 为取自总体 $d$ 的样本，设 $d$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，于是本题是要在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：　$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$

检验统计量为　$$u=\frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

其中 $\bar{d}$，$s_d$ 分别是取自总体 $d$ 的样本的样本均值和样本方差，拒绝域为　$C=\{|u|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$

已知 $n=8,$ 经计算得 $\bar{d}=-0.1, s_d=0727$，并且　$|u|=0.389<1.96=z_{0.025}$

故接受原假设 $H_0$，即认为甲、乙两试验员试验分析结果之间无显著差异.

2.设睡眠时间为 $X$ ,且设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 由题意知需在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设:

$$H_0:\mu=\mu_0+3\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0+3, \text{其中 } \mu_0=20.8$$

检验统计量为　$$u=\frac{\bar{x}-(\mu_0+3)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

拒绝域为　$|u|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

已知 $n=7,\sigma=1.6$ ,计算得　$|u|=1.058<1.96=z_{0.025}$

故接受原假设,即可以认为新安眠药已达到新的疗效.

3.犯第一类错误的概率为

$$\alpha=P\{(x_1,x_2)\in C\,|\,H_0\text{为真}\}=P\left\{\frac{3}{4x_1}\leq x_2\,|\,\theta=1\right\}$$

当 $\theta=1$ 时，$x_1,x_2$ 的联合概率密度为

$$f_{H_0}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & 0<x_1,x_2<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令　$$D=\{(x_1,x_2)\,|\,0<x_1,x_2<1,\frac{3}{4x_1}\leq x_2\}$$

所以　$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{H_0}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\iint_D dx_1dx_2=\int_{\frac{3}{4}}^{1}dx_1\int_{\frac{3}{4x_1}}^{1}dx_2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta=P\{(x_1,x_2)\notin C\,|\,H_0\text{为假}\}=P\left\{\frac{3}{4x_1}>x_2\,|\,\theta=2\right\}$$

当 $\theta=2$ 时，$x_1,x_2$ 的联合概率密度为

$$f_{H_1}(x_1,x_2)=\begin{cases}4x_1x_2, & 0<x_1,x_2<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令
$$D_1=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_1,x_2<1,\frac{3}{4x_1}>x_2\}$$

则
$$\beta=\iint_{D_1} f_{H_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^1 dx_1\int_0^1 4x_1x_2dx_2-\int_{\frac{3}{4}}^1 dx_1\int_{\frac{3}{4x_1}}^1 4x_1x_2dx_2$$
$$=\frac{9}{16}-\frac{9}{8}\ln\frac{3}{4}$$

4.由题意知
$$\bar{x}-2\bar{y}\sim N(\mu_1-2\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2})$$

取检验统计量为
$$u=\frac{\bar{x}-2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}$$

当 $H_0$ 为真时，$u\sim N(0,1)$，而当 $H_1$ 为真时，$u$ 又偏大的倾向，故拒绝域的形式可取为 $\{u\ge k\}$，由
$$\alpha=P\{u\ge k\mid \mu_1-2\mu_2=0\}$$
可解得拒绝域为
$$C=\{u\ge z_\alpha\}$$

6.设病人在服用 $A,B$ 两种药后身体细胞内药的浓度分别为 $x,y$，并且设 $x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.由题意知，需在显著性水平下 $\alpha=0.05$ 检验:
$$H_0:\sigma_1^2=\frac{2}{3}\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\ne\frac{2}{3}\sigma_2^2$$

或
$$H_0:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\frac{2}{3}\leftrightarrow H_1:\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\ne\frac{2}{3}$$

由于
$$\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)，\quad\frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

所以
$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

于是取检验统计量为 $F=\frac{3s_1^2}{2s_2^2}$, 当原假设 $H_0$ 为真时, $F\sim F(n_1-1,n_2-1)$, 拒绝域为
$$C=\left\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

已知 $n_1=8,n_2=6$，$F_{0.025}(7,5)=5.29$, $F_{0.975}(7,5)=0.189$ 计算得 $s_1^2=0.01918$, $s_2^2=0.0293$, 并且 $F=0.98202$. 由于检验统计量的值不在拒绝域中, 故接受原假设, 即认为 $A$ 种药在病人身体内的浓度的方差是 $B$ 种药在病人身体细胞内浓度方差的 $\frac{2}{3}$.