第三章　　多维随机向量及其概率分布

(一)基本题答案

1、设 X 和 Y 的可能取值分别为 i与j, 则$i=0,1,2,3;\ j=0,1,2.$

因盒子里有 3 种球，在这 3 种球中任取 4 个，其中黑球和红球的个数之和 i与j 必不超过 4.另一方面，因白球只有 2 个，任取的 4 个球中，黑球和红球个数之和最小为 2 个，故有

$$2\le i+j\le 4,\ 且\ p(X=i,Y=j)=C_3^iC_2^jC_2^{4-i-j}/C_7^4.$$

因而　$P(X=i,Y=j)=0\quad (i+j<2\quad 或\ i+j>4, i=0,1,2,3;\ j=0,1,2).$

于是　$P_{11}=P(X=x_1=0,Y=y_1=0)=0,\ p_{12}=P(X=x_1=0,Y=y_2=0)=0,$

$p_{13}=P(X=x_1=0,Y=y_3=0)=C_3^0C_2^1C_2^2/C_7^4=1/35.$

同法可求得联合分布律中其他的 p_{ij}，得下表

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$C_3^2C_2^0C_2^2/C_7^4$	$C_3^3C_2^0C_2^1/C_7^4$
1	0	$C_3^1C_2^1C_2^2/C_7^4$	$C_3^2C_2^1C_2^1/C_7^4$	$C_3^3C_2^1C_2^0/C_7^4$
2	$C_3^0C_2^2C_2^2/C_7^4$	$C_3^1C_2^2C_2^1/C_7^4$	$C_3^2C_2^2C_2^0/C_7^4$	0

即

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

2、X 和 Y 都服从二项分布，参数相应为(2,0.2)和（2,0.5）.因此 X 和 Y 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.64 & 0.32 & 0.04\end{bmatrix}\qquad Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{bmatrix}.$$

由独立性知，X 和 Y 的联合分布为

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

3、Y 的分布函数为 $F(y)=1-e^{-y}(y>0), F(y)=0(y\le 0)$. 显知 (X_1,X_2) 有四个可能值：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. 易知 $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=1-e^{-1}$,

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0, P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2},$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2},$

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=e^{-2}.$

于是，可将 X_1 和 X_2 联合概率分布列表如下：

X_2 \ PP \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

4、 $P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}P(\zeta=n,\eta=m)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$

$$=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\left[p+(1-p)\right]^n=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

即 X 是服从参数为 λ 的泊松分布.

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^{n-m}(1-p)^{n-m}}{(n-m)!}$$

$=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!},(m=0,1,2,\cdots).$ 即 Y 是服从参数为 λ p 的泊松分布.

5、由定义 F（x,y）=P$\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy.$

因为 φ（x,y）是分段函数，要正确计算出 F（x,y），必须对积分区域进行适当分块：$x<0$或$y<0;0\le x\le 1,0\le y\le 1;x>1,y>1;x>1,0\le y\le 1;y>1,0\le x\le 1$等 5 个部分.

（1）对于 $x<0$或$y<0$, 有　F（x,y）=P{X≤ x, Y≤y}=0;

（2）对于 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$, 有　$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uvdudv=x^2y^2$;

（3）对于 $x>1,0\le y\le 1$，有　$F(x,y)=P\{X\le 1,Y\le y\}=y^2$;

（4）对于 $y>1,0\le x\le 1$，有　$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le 1\}=x^2$;

（5）对于 $x>1,y>1$, 有　$F(x,y)=1$.

故 X 和 Y 的联合分布函数
$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ x^2y^2, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\ x^2, & 0\le x\le 1,1<y,\\ y^2, & 1<x,0\le y\le 1,\\ 1,. & 1<x,1<y.\end{cases}$$

6、（1） $x\le 0$或$y\le 0,F(x,y)=0;x>0,y>0,$

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y ze^{-(2s+t)}dsdt=2(\int_0^x e^{-2s}ds)(\int_0^y e^{-t}dt)=(-e^{-2s}\big|_0^x)(-e^{-t}\big|_0^y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$$

即 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）$\mathrm{P}\boldsymbol{(Y\le X)=\iint_{y<x}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 2e^{-2x-y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left(-e^{-y}\big|_0^x\right)dx}$

$$=-2\int_0^{+\infty}(1-e^{-x})e^{-2x}dx=2\int_0^{+\infty}(e^{-2x}-e^{-3x})dx=2(\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x})\big|_0^{+\infty}=-2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}.$$

7、（1） $x>0$ 时， $f_X(x)=\int_X^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x};x\le 0$时$,f_X(x)=0,$

即　$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

（2） $P\{X+Y\le 1\}=\iint_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-1/2}$

8、（1）（i） 根据公式 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 计算; 当$x\le 0$ 时, $f_X(x)=0$;　当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4y^2\big|_0^x(2-x)=2.4x^2(2-x);\text{当}x\ge 1\text{时},f_X(x)=0$$

即 $f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0<x<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（ii）　利用公式 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 计算. 当 $y\le 0$ 时, $f_Y(y)=0$; 当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=4.8y(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_y^1=4.8y\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\right]$$

$$=4.8y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2})=2.4y(3-4y+y^2);$$ 当 $y\ge 1$ 时，$f_Y(y)=0.$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<y<1;\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$$\textbf{(2)}P\left\{(X<\frac{1}{2})\cup(Y<\frac{1}{2})\right\}=1-P(X\ge\frac{1}{2},Y\ge\frac{1}{2})=1-\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}dxdy=\frac{5}{8}.$$

？、？？？ $\frac{47}{80}$

9、本题先求出关于 x 的边缘概率密度，再求出其在 $x=2$ 之值 $f_X(2)$. 由于平面区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2,$ 　故（X,Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

易知，X 的概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 　故 $f_X(2)=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}.$

10、（1）有放回抽取：当第一次抽取到第 k 个数字时，第二次可抽取到该数字仍有十种可能机会，即为　$P\{X=i|Y=k\}=\frac{1}{10}$　$(i=0,1,\cdots,9).$

（2）不放回抽取：（i）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，则第二次抽到此（第 k 个）数是不可能的，故　$P\{X=i|Y=k\}=0$　$(i=k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

（ii）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，而第二次抽到其他数字（非 k）的机会为 $1/9$，知 $P\{X=i|Y=k\}=1/9(i\ne k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

11、（1）因 $f_\eta(y)=\int_y^1 24(1-x)ydx=12y(1-y)^2$, $0\le y\le 1$;　$f_n(y)=0,$ 其它.

故在 0≤y≤1 时，$f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}2(1-x)/(1-y)^2 & y\le x\le 1\\ 0 & 其它;\end{cases}$

因 $f_\xi(x)=\int_0^x 24(1-x)ydy=12x^2(1-y)^2$,　$0\le x\le 1$; $f_\xi(x)=0$,　其它.

故在 0≤x≤1 时，$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}2y/x^2 & 0\le y\le x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

（2）因 $f_\xi(X)=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{2x^2y}dy=\frac{1nx}{x^2}$,$1\le x\le\infty$; $f_\xi(x)=0,$ 其它;

故在 1≤x<∞ 时，$f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2y1nx} & \frac{1}{x}<y<x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

因 $f_\eta(y)=\begin{cases}\int_{1/y}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2} & 0<y\le 1\\ \int_{y}^{\infty}\frac{1}{2x^2y}dx=\frac{1}{2y^2} & 0<y<\infty\\ 0 & 其它,\end{cases}$ 故在 $0<y\le 1$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2y} & \frac{1}{y}<x<\infty\\ 0 & 其它;\end{cases}$

而在 $1<y<\infty$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{y}{x^2} & y<x<\infty\\ 0 & 其它.\end{cases}$

（3） $f_\xi(x)=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x},x>0;\ f_\xi(x)=0,x\le 0.$ 在 $x>0$, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y} & y>x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$f_\eta(y)=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y},y>0;\quad f_\eta(y)=0,y\le 0.$ 故在 y>0 时， $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & 0<x<y,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

12、 $f_X(x)=\int_0^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{(1+x+y)^n}dy=\frac{n-2}{(1+x)^{n-1}},x>0$，故

$$f_{Y|X}(y/1)=\begin{cases}2^{n-1}(n-1)/(2+y)^n & y>0,\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

13、X 和 Y 是否独立，可用分布函数或概率密度函数验证.

方法一：X 的分布函数 $F_X(x)$和Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y} & y\ge 0\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,知X和Y 独立.

$\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}=[1-F_X(0.1)]\cdot[1-F_Y(0.1)]=e^{-0.05}\cdot e^{-0.05}=e^{-0.1}$

方法二：以 $f(x,y),f_X(x)$和$f_Y(x)$分别表示$(X,Y),X$和Y 的概率密度，可知

$$f(x,y)=\frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)} & x\ge 0,y\ge 0\\ 0 & 其它.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0.5e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0.5e^{-0.5y} & y\ge 0,\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,知X和Y独立.$a=P\{X>0.1,Y>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}\int_{0.1}^{+\infty}0.25e^{-0.5(x+y)}dxdy=e^{-0.1}$.

14、因知 X 与 Y 相互独立，即有 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(x=x_i)\cdot P(Y=y_j)$.

$(i=1,2,\ j=1,2,3)$ 首先，根据边缘分布的定义知 $P(X=x_1,Y=y_1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$.又根据独立性有 $\frac{1}{24}=p\{X=x_1,Y=y_1\}=p(X=x_1)\cdot p(Y=y_1)=\frac{1}{6}p(X=x_i)$, 解得 $P(X=x_i)=\frac{1}{4}$,从而有

$P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$ 又由 $P(X=x_1,Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)$，可得

$\frac{1}{8}=\frac{1}{4}P(Y=y_2)$, 即有 $P(Y=y_2)=\frac{1}{2}$， 从而 $P(X=x_2,Y=y_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

类似地，由 $P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3)$, 有 $\frac{1}{12}=\frac{1}{4}P(Y=y_3)$, 得 $P(Y=y_3)=\frac{1}{3}$,

从而, $P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$. 最后 $P(X=x_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. 将上述数值填入表中有

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_1\}=P_i.$

x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$P\{X=y_j\}=P\cdot j$	1/6	1/2	1/3	1

15、本题的关键是由题设 $P\{X_1X_2=0\}=1$，可推出 $P\{X_1X_2\neq 0\}=0$；再利用边缘分布的定义即可列出概率分布表.

(1)由 $P\{X_1X_2=0\}=1$,可见 $P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$, 易见

$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=0.25$　　$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=0.5$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=0.25$　　$P\{X_1=0,X_2=0\}=0$

于是，得 X_1 和 X_2 的联合分布

X_2 \ X_1	−1	0	1	Σ
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
Σ	0.25	0.5	0.25	1

(2)　可见　$P\{X_1=0，X_2=0\}=0$，而 $P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=1/4\neq 0$. 于是，$X_1$ 和 X_2 不独立.

16、(1) $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$　因为 X，Y 独立，对任何 x,y 都有 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$.　所以有　$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）二次方程　$t^2+2Xt+Y=0$ 中 t 有实根，$\triangle=(2X)^2-4Y\ge 0$, 即 $X^2-Y\ge 0$, $Y\le X^2$，故 $P(t有实根)=P\{Y\le X^2\}=\iint\limits_{y\le x^2}f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dydx=\int_0^1(-e^{-\frac{y}{2}})\Big|_0^{x^2}dx$

$$=\int_0^1(1-\frac{x^2}{2})dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\ \left[\int_{-\infty}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\int_{-\infty}^0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ \right]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]\approx 1-\sqrt{2\pi}[0.8413-0.5]\approx 1-0.8555=0.1445.$$

17、（1）因为 X，Y 独立，所以　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-(\lambda x+uy)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

（2）根据 Z 的定义，有 $P\{z=1\}=P\{Y\geqslant X\}=\iint\limits_{y\ge x}f(x,y)dydx=\int_0^{+\infty}\int_x^{-\infty}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dydx$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}(\int_x^{+\infty}\mu e^{-\mu y}dy)dx\ =\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cdot e^{-\mu x}dx=\lambda/(\lambda+u),$$

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\mu/(\lambda+\mu)$.所以 Z 的分布律为

Z	0	1
p	$\mu/(\lambda+\mu)$	$\lambda/(\lambda+\mu)$

Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$

18、∵X、Y 分别仅取 0，1 两个数值，∴Z 亦只取 0，1 两个数值. 又∵X 与 Y 相互独立，

$\therefore P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P(X=0,Y=0)=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/2\times1/2=1/4$，

故　$P\{Z=1\}=1=1-P\{Z=0\}=1-1/4=3/4.$

19、 X 由 2×2 阶行列式表示，仍是一随机变量，且 $X=X_1X_4-X_2X_3$，根据 X_1，X_2，X_3，X_4 的地位是等价且相互独立的，X_1X_4 与 X_2X_3 也是独立同分布的，因此可先求出 X_1X_4 和 X_2X_3 的分布律，再求 X 的分布律.　记 $Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$，则 $X=Y_1-Y_2$.随机变量 Y_1 和 Y_2 独立同分布：$P\{Y_1=1\}=P\{Y_2=1\}=P\{X_2=1,X_3=1\}=0.16$　$P\{Y_1=0\}=P\{Y_2=0\}=1-0.16=0.84.$ 显见，随机变量 $X=Y_1-Y_2$ 有三个可能值–1,0,1.易见 $P\{X=-1\}=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=0.84\times0.16=0.1344$，　$P\{X=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=0\}=0.16\times0.84=0.1344$，　$P\{X=0\}=1-2\times0.1344=0.7312$.

于是，行列式的概率分布为　$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{bmatrix}$

20、因为 $\{Z=i\}=\{X+Y=i\}=\{X=0,Y=i\}\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}$. 由于上述各事件互不相容，且注意到 X 与 Y 相与独立，则有

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k\}P\{Y=i-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{i}c_{n_1}^{k}p^{k}(1-P)^{n_1-k}C_{n_2}^{i-k}p^{i-k}(1-p)^{n_2-i+k}=P^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i}\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}$$

$$=C_{n_1+n_2}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i}, i=0,1,\cdots n_1+n_2,\ \text{故} Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p).$$

注：在上述计算过程中，已约定：当 r>n 时，$C_n^r=0$,并用到了公式 $\sum_{k=1}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}=C_{n_1+n_2}^{i}$.

21、X 和 Y 的概率分布密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\dfrac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\}$,　$(-\infty<x<+\infty)$;

$f_Y(y)=\begin{cases}1/(2\pi), & -\pi\le y\le\pi,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$　因 X 和 Y 独立，考虑到 $f_Y(y)$)仅在 $[-\pi,\pi]$ 上才有非零值，故由卷积公式知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2a^2}}dy.$$

令 $t=\dfrac{z-y-\mu}{\sigma}$,则上式右端等于 $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$

22、（1）由题设知　$F_M(y)=P(M\le y)=P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\le y\}=P(X_1\le y,\cdots,X_n\le y)$
$=P(X_1\le y)P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)=F_{X_1}(y)\cdots F_{Xn}(y)$.

$\because$　$X_1,\cdots,X_n$ 独立且同分布: $X_i\sim U[0,\theta]$　$(1\le i\le n)$,

$$\therefore F_{X_i}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 1, & x>0,\end{cases}\ \therefore F_M(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \frac{y^n}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 1, & y\ge\theta.\end{cases}\ \text{故}\ f_M(y)=\begin{cases}\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

（2）$F_N(y)=P(N\le y)=1-P(N>y)=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>y\}$
$=1-P(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y)=1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y)$
$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>y)=1-\left[1-F_{X_i}(y)\right]$

$$\text{故}\quad f_N(y)=\begin{cases}-n(1-\frac{y}{\theta})^{n-1}(\frac{-1}{\theta}), 0<y<\theta\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n}, 0<y<0,\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

23、由题设容易得出随机变量（X，Y）的概率密度，本题相当于求随机变量 X、Y 的函数

S=XY 的概率密度，可用分布函数微分法求之.

依题设，知二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1/2 & 若(x,y)\in G\\ 0, & 若(x,y)\notin G\end{cases}$

设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数,则 当 $s\le 0$ 时, $F(s)=0$；　当 $s\ge 2$ 时，$F(s)=1$.
现设 0<s<2. 曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点(s,1);位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy>s$,位于下方的点满足 $xy<s$.　故

$$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=1-P\{XY>S\}=1-\iint_{xy>s}\frac{1}{2}dxdy=1-\frac{1}{2}\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1 dy=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

于是，　$f(s)=\begin{cases}(\ln 2-\ln s)/2, & 若0<s<2,\\ 0, & 若s\le 0或s\ge 2.\end{cases}$

（二）、补充题答案

1.由于 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min(\xi,\eta)$,故知$P(X<Y)=0$, 即

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0$；又易知

$P\{X=1,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}\cdot P\{\eta=1\}=1/9,$

$P\{X=2,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=2\}=1/9,\ P\{X=3,Y=3\}=P\{\xi=3,\eta=3\}=1/9,$

$P\{X=2,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=2\}+P\{\xi=2,\eta=1\}=1/9+1/9=2/9,$

$P\{X=3,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=3\}+P\{\xi=3,\eta=2\}=2/9,$　　$P\{X=3,Y=1\}=1-7/9=2/9.$

所以

Y \ X	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

2.（1）$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m},\quad 0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots.$

（2）$P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m|X=n\}P\{X=n\}$

$=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^n/n!,\quad 0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots.$

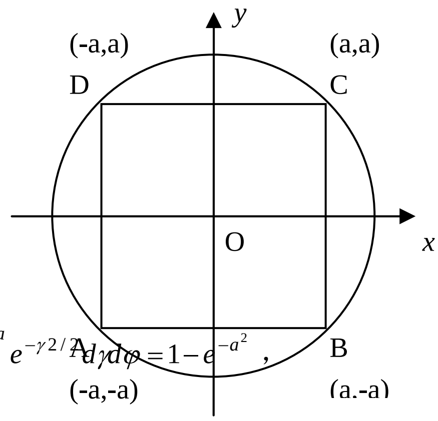
3. $P(z=1)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)=(1-p)^2+p^2$

$P(z=0)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)=2p(1-p)$

而 $P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=p^2$，由 $P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1)$, 得 $p=1/2$.

5.:设随机变量 ξ 和 η 相互独立，都服从 $N(0,1)$ 分布.则 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$.显然，

$$\iint_G p(x,y)dxdy<\iint_S p(x,y)dxdy,$$



其中，　G 和 S 分别是如图所示的矩形 $ABCD$ 和圆.

$$\iint_G p(x,y)dxdy=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{-x^2/2}dx)^2,$$

令 $x=\gamma\cos\varphi, y=\gamma\sin\varphi$,　则 $\iint_S p(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{\sqrt{2}a}e^{-\gamma^2/2}\gamma d\gamma d\varphi=1-e^{-a^2}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{-x^2/2}dx<\sqrt{1-e^{-a^2}}$.

6.设这类电子管的寿命为 ξ，则 $P(\xi>150)=\int_{150}^{+\infty}100/(x^2)dx=2/3$.（1）三个管子均不要替换的概率为 $(2/3)^3=8/27$；（2）三个管子均要替换的概率为　$(1-2/3)^3=1/27$.

7.假设总体 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，第 i 次的观察值为 $X_i(1\le i\le n)$，X_i 独立同分布，其联合密度函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$.依题意，所求的概率为

$$P\{X_n>X_1,X_n>X_2,...,X_n>X_{n-1}\}=\underset{\substack{x_i<x_n\\ i=1,2,...,n-1}}{\int\cdots\int}.f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_n)dx_n\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{x_n}f(x_2)dx_2...\int_{-\infty}^{x_n}f(x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)f(x_n)dx_n=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)dF(x_n)=\frac{1}{n}F^n(x_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{n}.$$

8. $P(\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n)=\dfrac{P(\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=\dfrac{P(\xi_1=k)P(\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}$.

由普哇松分布的可加性，知 $\xi_1+\xi_2$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的普哇松分布，所以

$$P(\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n)=\frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

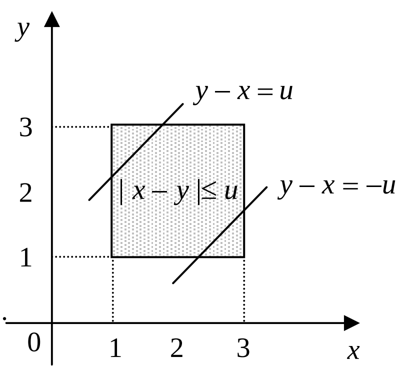
9.当 $z\le 0$，$F_z(z)=P(Z\le z)=0,$ 当$z>0,$

$$F_z(z)=P(Z\le z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-2y}dy=1-e^{-z}-ze^{-z},$$

所以　$z=X+2Y$ 的分布函数为　$F(x,y)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-(1+z)e^{-z}, & z>0.\end{cases}$

10.由条件知 X 和 Y 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 若1\le x\le 3,1\le y\le 3,\\ 0, & 其他\end{cases}$$



以 $F(u)=P\{U\le u\}(-\infty<u<\infty)$ 表示随机变量 U 的分布函数.显然，当 $u\le 0$ 时，$F(u)=0$；当 $u\ge 2$ 时，$F(u)=1$；

当　$0<u<2$　，　则

$$F(u)=\iint_{|x-y|\le u}p(x,y)dxdy=\iint_{|x-y|\le u}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是，随机变量的密度为 $p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0<u<2;\\ 0, & 其他\end{cases}$.

11.记 X_1,X_2,X_3 为这 3 个元件无故障工作的时间，则 $T=\min(X_1,X_2,X_3)$ 的分布函数

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3)>t\}=1-[P(X_1>t)]^3=1-[1-P(X_1\le t)]^3.$$

$$\because X_i\sim F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}\ (i=1,2,3)\quad \therefore F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

故　$f_T(t)=F'_T(t)=\begin{cases}3\lambda e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$