第二章　随机变量及其概率分布

（一）基本题解答

1.样本空间$V=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$.这里，例如(6,1)表示掷第一次得 6 点，掷第二次得 1 点.其余类推.

以 X 表示两次所得点数的和.则 X 的分布律为

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_K	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.由题设，X 的可能值为 0，1，2，3. 以$A_i(i=1,2,3)$表示事件“汽车在第 i 个路口 遇到红灯”；A_1，A_2，A_3相互独立，且$P(A_i)=P(\overline{A}_i)=1/2, i=1,2,3.$于是

$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2;\quad P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=1/2^2;\quad P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=1/2^3;$$

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1/2^3$.

∴ X 的分布律为：

X	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.设“ξ=k”表示前 k 次取出白球，第 k+1 次取黑球，则ξ的分布列为

$$P(\xi=k)=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(n-m)}{n(n-1)\cdots(n-k)}\qquad(k=0,1,\cdots,m).$$

4.（1）$\because\sum_{k=1}^{5}P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{c}{15}=\frac{c}{15}\sum_{k=1}^{5}=\frac{c}{15}\times5=\frac{c}{3}=1,\qquad\therefore c=3.$

（2）$P\{1\le X\le3\}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$　　（3）$P\{0.5<X<2.5\}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$

5.设进行了i次试验，其中有 k 次试验成功之事件设为 A，则此事件包含有两层意思：它意味着第i次（$i\ge k$）成功，且$i-1$次试验中成功$k-1$次，设这两个事件分别为 A_1，A_2，则$A=A_1A_2$,且$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$($A_1$与$A_2$独立),而 $P(A_1)=p$,

$$P(A_2)=C_{i-1}^{k-1}p^{k-1}\cdot q^{i-1-(k-1)}=C_{i-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}q^{i-k}.$$

于是，所需试验次数 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=p\cdot c_{i-1}^{k-1}p^{k-1}q^{i-k}=c_{i-1}^{k-1}p^kq^{i-k}\quad(i=k,k+1,\cdots;q=1-p).$$

6.设ξ为该种商品每月销售数，则 ξ～π（7），x为该种商品每月进货数，则$P(\xi\le x)\ge0.999$.查普哇松分布的数值表，得x⩾13.

7.设 X=｛该外国人在 5 个选择题中答对的题数｝，则 X~B（5，1/4）.又设 A=｛答对题数不少于两题｝，则依题设知 $P(A)=\sum_{k=3}^{5}P\{X=k\}=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{5-k}=0.1035.$

8.设 X=｛180 台同类设备中同时发生故障的设备的台数｝，则 X~B（180，0.01）.又设配备 N 个维修人员，则所求概率为

$P\{X>N\}=P\{X\ge N+1\}=\sum_{k=N+1}^{180}P\{X=k\}$，而 $P\{X=k\}=C_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}$，故

$P\{X>N\}=\sum_{k=N+1}^{180}c_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}\approx\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{(1.8)^k}{k!}e^{-1.8}$，这里 $np=180\times0.01=1.8=\lambda$.

欲使$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1.8^k}{k!}e^{-1.8}\le1-0.99=0.01$，查泊松分布表，可知 N+1=7，因而至少应配备 6 名工人.

9.设 $A_i=\{部件i需要调整\}$（$i=1,2,3$），则 $P(A_1)=0.10, P(A_2)=0.20,$
$P(A_3)=0.30.$ 由于 A_1，A_2，A_3 相互独立，因此，有

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504,$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)=0.092,$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$$

因此，X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

10. F(x)为一阶梯状函数，则 X 可能取得值为 F(x)的跳跃点：-1，1，3

$$P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.4, P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$$
$$P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2,$$ 即有

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

11.（1）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a=1,$ 即 $a=1$，又由于 X 为连续型随机变量，F(x)应为 x 的连续函数，应有

$$\lim_{x\to0^-}F(x)=0=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a+b$$ 所以 $a+b=0, b=-a=-1.$

代入 a,b 之值，得 $F(x)=\begin{cases}1-\exp\{-x^2/2\}, & x>0,\\ 0, & x\le0.\end{cases}$

（2）对函数 F(x)求导，得 X 的概率密度 $P(x)=\begin{cases}x\exp\{-x^2/2\}, & x\ge0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

12.当 x≤0，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}e^x$；当 x＞0 时，

$$F(x)=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt)=\frac{1}{2}[1+(1-e^{-x})]=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$，所以，我们有

$$F(x)=\begin{cases}e^x/2, & x\le0,\\ 1-e^{-x}/2, & x>0.\end{cases}$$

13 由 $P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$ 得 $P\{X<k\}=\frac{1}{3}$，即应选 k，使 $\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\frac{1}{3}$.注意 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=0$，$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$，$\int_1^3 f(x)dx=0$，$\int_3^6 f(x)dx=\frac{2}{3}$，可见当 1≤k≤3 时，

$\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^k f(x)dx=\frac{1}{3}$，所以 k 的取值范围应为 1≤k≤3.

14. $P\{X>0.8\}=\int_{0.8}^{1}12x(1-x)^2dx=0.272$.　$P\{X>0.9\}=\int_{0.9}^{1}12x(1-x)^2dx=0.037$.

15. $X\sim E(\frac{1}{200})$,（1）$P(X\le100)=F(100)=1-e^{-\frac{100}{200}}=1-e^{-\frac{1}{2}}$；

（2）$P(X>300)=e^{-\frac{1}{200}\times300}=e^{-\frac{3}{2}}=e^{-1.5}$.

16.解法 1　用随机变量法：令 x_i 表示第 i 次掷骰子出现的点数，$i=1,2$. 显然 x_1 和 x_2 独立同分布，$P\{x_i=j\}=1/6$,（$j=1,2,\cdots,6$; $i=1,2$），则方程变为 $x^2+x_1x+x_2=0$.它有重根的充要条件是 $x_1^2-4x_2=0$，有实根的充要条件是 $x_1^2-4x_2\ge0$，故

$$q=P\{x_1^2-4x_2=0\}=P(\{x_2=1,x_1=2\}\cup\{x_2=4,x_1=4\})=P\{x_2=1,x_1=2\}+P\{x_2=4,x_1=4\}$$
$$=P\{x_2=1\}P\{x_1=2\}+P\{x_2=4\}P\{x_1=4\}=1/6\times1/6+1/6\times1/6=1/18.$$ 由全概率公式可

得 $P=P\left\{x_1^2-4x_2\ge 0\right\}=P\{\,x_2\le\frac{x_1^2}{4}\,\}=\sum_{i=1}^{6}P\left\{x_1=j\right\}P=\{\,x_2\le\frac{x_1^2}{4}\left|x_1=j\right.\}$

$=P\left\{x_1=1\right\}P\ \{\ x_2\le\frac{1}{4}\ \}+P\left\{x_1=2\right\}P\ \{\ x_2\le\frac{2^2}{4}\ \}+P\left\{x_1=3\right\}P\ \{\ x_2\le\frac{3^2}{4}\ \}+P\left\{x_1=4\right\}P\ \{\ x_2\le\frac{4^2}{4}\ \}$

$+P\left\{x_1=5\right\}P\ \{\ x_2<\frac{5^2}{4}\ \}+P\ \{\ x_2\le\frac{6^2}{4}\ \}=\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 1=\frac{19}{36}$

解法 2　用枚举法：一枚骰子掷 2 次，其基本事件总数为 36.方程有实根和重根的充要条件分别为 $B^2-4C\ge 0$ 和 $B^2-4C=0$.

B 的取值	1	2	3	4	5	6
使 $B^2-4C\ge 0$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $B^2-4C=0$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

故使方程有实根的基本事件总数为 1+2+4+6+6=19，有重根的基本事件总数 1+1=2，因此　$P=19/36,\ \ q=2/36=1/18.$

17.本题关键是理解随机变量 N(t)的意义.事件 $\left\{N(t)=k\right\}$ 表示设备在任何长为 t 的时间内发生 k 次地震，其概率为 $P\left\{N(t)=k\right\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}(k=0,1,2,\cdots)$. 由于 T 表示两次地震之间的时间间隔，故当 t<0 时，$P\left\{T\le t\right\}=0$；当 t⩾0 时，事件 $\left\{T\le t\right\}$ 与事件 $\left\{T>t\right\}$ 是互逆事件，且 $\left\{T>t\right\}$ 表示在长为 t 的时间内无地震发生，故它等价于事件 $\left\{N(t)=0\right\}$.

（1）由于 T 是非负随机变量，可见当 t<0 时，$F(t)=P\left\{T\le t\right\}=0$.

设 t⩾0，则事件 $\left\{T>t\right\}$ 与 $\left\{N(t)=0\right\}$ 等价. 因此，当 t⩾0 时，有

$$F(t)=P\left\{T\le t\right\}=1-P\left\{T>t\right\}=1-P\left\{N(t)=0\right\}=1-e^{-\lambda t}.$$

于是，T 服从参数为 λ 的指数分布.

（2）$Q=P\left\{T\ge 10\left|T\ge 5\right.\right\}=\frac{P\left\{T\ge 10,T\ge 5\right\}}{P\left\{T\ge 5\right\}}=\frac{P\left\{T\ge 10\right\}}{P\left\{T\ge 5\right\}}=\frac{e^{-10t}}{e^{-5t}}=e^{-5t}$.

18.设 X 为考生的外语成绩，由题设知 $X\sim N(\mu,\sigma)$，其中 μ=72.现在求 σ^2.由题设

$$P\left\{X\ge 96\right\}=0.023,\ \ P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\ge\frac{96-72}{\sigma}\right\}=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,\therefore\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977,$$

由 $\Phi(x)$ 的数值表，可见 $\frac{24}{\sigma}$=2，因此 $\sigma=12$.这样 X~N(72, 12^2). 所求概率为

$$P\left\{60\le x\le 84\right\}=P\left\{\frac{60-72}{12}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{84-72}{12}\right\}=P\left\{-1\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$$

19.（1）$p(\xi>250)=p(\frac{\xi-300}{35}>\frac{250-300}{35})=\Phi(1.43)\approx 0.9236;$

（2）$p(\mu-x<\xi<\mu+x)=p(-\frac{x}{35}<\frac{\xi-300}{35}<\frac{x}{35})=\Phi(\frac{x}{35})-\Phi(-\frac{x}{35})=2\Phi(\frac{x}{35})-1\ge 0.9$，

即 $(x/35)\ge 0.95$，所以 $x/35\ge 1.65$，即 $x\ge 57.75$.

20.引进下列事件：A_1=｛电压不超过 200 伏｝，A_2=｛电压在 200~240 伏｝，A_3=｛电压超过 240 伏｝；B=｛电子元件损坏｝.由题设，知 X~N(220,25^2)，因此

$P(A_1)=P\left\{X\le 200\right\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212$；

$P(A_2)=P\left\{200\le X\le 240\right\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$；

$P(A_3)=P\left\{X>240\right\}=1-0.212-0.576=0.212$.

（1）由题设条件，知 $P\left(B\left|A_1\right.\right)=0.1$，$P(B\mid A_2)=0.001$，$P(B\mid A_3)=0.2$. 于是，由全概

率公式，有 $\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0642$.

（2）由条件概率定义（或贝叶斯公式），知 $\beta=P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}\approx 0.009$.

21.由题设，Y～$B(3,P)$ 其中 $P=P\left\{X\le\dfrac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2xdx=\dfrac{1}{4},$

故 $P\{Y=2\}=C_3^2(1/4)^2(3/4)^1=9/64.$

22.

P	0.3	0.2	0.4	0.1
X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$(2X-\pi)^2$	π^2	0	π^2	$4\pi^2$
$\cos(2X-\pi)$	-1	1	-1	1

∴

$(2X-\pi)^2$	0	π^2	$4\pi^{-2}$
P	0.2	0.7	0.1

$\cos(2X-\pi)$	-1	1
P	0.7	0.3

23.因为 $\sin\dfrac{k\pi}{2}=\begin{cases}-1, & k=4n-1,\\ 0, & k=2n,\\ 1, & k=4n-3\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots).$

所以，$Y=\sin(\dfrac{\pi}{2}X)$ 只有 3 个可能取值 -1，0，1，而取这些值的概率分别为

$$P\{Y=-1\}=P\{X=3\}+P\{X=7\}+P\{X=11\}+\cdots=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-1/16}=\frac{2}{15},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}+\cdots=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=5\}+P\{X=9\}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/16}=\frac{8}{15}.$$

于是，$Y=\sin(\dfrac{\pi}{2}X)$ 的分布列为 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15}\end{bmatrix}$.

24.$\because X\sim U(0,2)$，$\therefore$ ① $y\le 0$时，$F_Y(y)=0$；

②当 $0<y<4$,

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})=\sqrt{y}/2$;

③ $y\ge 4$时, $F_y(y)=1$.

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

25.应先求出 $F_Y(y)$，再对 y 求导即得 $f_Y(y)$　因

$$F_Y(y)=p\{Y<y\}=p\{e^X<y\}=\begin{cases}0, & y<1,\\ p\{X<Iny\}, & y\ge 1.\end{cases}$$

故当 $y\ge 1$ 时, $F_Y(y)=p\{X<\ln y\}=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx$，而 $f_Y(y)=F_Y'(y)=1/y^2$.

因此 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 1/y^2 & y\ge 1.\end{cases}$

26.假设随机变量 X 具有连续的分布函数$F(x)$，证明:$Y=F(X)$在区间（0,1）上服从均匀分布.

解　先求 Y 的分布函数. 因$0\le F(x)\le 1$，单调非降. 连续，故$y=F(x)$的反函数存在.

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\phi)=0$，

当$0<y<1$时$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=F[F^{-1}(y)]=y$，

当$y\ge 1$时$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\Omega)=1$.

于是　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$　从而 Y 的密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

即 Y= F（X）服从(0，1)上的均匀分布.

27.（1）$Y=e^X$ 的分布函数　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$.当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$;

当 y>0 时，$F_Y(y)=P\{\ e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_0^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$，于是，Y 的概率密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{1}{2}(\ln y)^2], & y>0.\end{cases}$

（2）$Y=2X^2+1$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{2X^2+1\le y\}$.当$y\le 1$时,$F_Y(y)=0$;当$y>1$时，

$$F_Y(y)=p\{2X^2+1\le y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

即　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & y>1.\end{cases}$　故Y的概率密度为　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$

（3）$Y=|X|$的分布函数　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$. 当$y\le 0$时,$F_Y(y)=0$;当$y>0$时,

$$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

于是，Y 的概率密度函数为　$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y>0.\end{cases}$

（二）补充题答案

1.（1）由条件可知，当$x<-1$时，$F(x)=0$；$F(-1)=\frac{1}{8}$，$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

易见，在 X 的值属于$(-1,1)$的条件下，事件$\{-1<X\le x\}(-1<x<1)$的条件概率为

$$P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=(x+1)/2.$$

于是，对于$-1<x<1$,有

$$P\{-1<X\le x\}=P\{-1<X\le x,-1<X<1\}=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=\frac{5}{8}\times\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16}$$

$$F(x)=P\{X\le -1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}.$$

对于$x\ge 1$,有 F（x）=1.　从而　$F(x)=\begin{cases}0 & 若x<-1\\ (5x+7)/16 & 若-1\le x<1\\ 1 & 若x\ge 1.\end{cases}$

（2）X 取负值的概率　$p = P\{X \le 0\} = F(0) - P\{X = 0\} = F(0) = 7/16.$

2．用 A 表示有效，由题设知

$$P(A)=\frac{3}{4}, P(\overline{A})=\frac{1}{4}, P(X=k|A)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}, P(X=k|\overline{A})=\frac{5^k}{k!}e^{-5}, k=0,1,2,\cdots.$$

应用贝叶斯公式，得

$$P(A|X=2)=\frac{P(A)P(X=2|A)}{P(A)P(X=2|A)+P(\overline{A})P(X=2|\overline{A})}=\frac{0.75\times 0.2240}{0.75\times 0.2240+0.25\times 0.0842}\approx 0.8887.$$

3.（1）按第一种方式：记 A_i 为"第 i 个人承包的 20 台机器不能及时维修"，$(i=1,2,3,4)$，则所求概率为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$. 易知

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\ge P(A_1)=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{K}(0.01)^k(0.99)^{20-k}=0.0175$$

（2）按第二种方式：以 X 表示这 80 台机器中需要维修的机器的台数，则不能及时维修的概率为　$P(X\ge 4)=\sum_{k=4}^{80}\binom{80}{K}(0.01)^k(0.99)^{80-k}=0.0091$.

从上述计算结果可以看出，还是以第二种方式为好. 因按第二种方式 3 个人共同维修 80 台机器不能及时维修的概率较小.

4. ① $x\le 0, F(x)=0$;　② $0<x<2$,

$$F(x)=\frac{\int_0^x dx\int_0^{2x-x^2}dy}{\int_0^2 dx\int_0^{2x-x^2}}=\frac{\int_0^x(2x-x^2)dx}{\int_0^2(2x-x^2)dx}=\frac{(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^x}{(x_2-\frac{x^2}{3})\Big|_0^x}=\frac{1}{4-\frac{8}{3}}(x^2-\frac{x^3}{3})=\frac{1}{4}(3x^2-x^3);$$

③ $X\ge 2, F(x)=1$.　故 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2x-x^2), 0<x<2;\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$

5. X 的分布函数为　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ P(0<X\le x), & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

设 $x_1, x_2\in[0,1)$, 且 $x_i+\Delta x\in[0,1), i=1.2$, 由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_1+\Delta x)=F(x_2+\Delta x)-F(x_2)=P(x_2<X\le x_2+\Delta x).$$

令 $\Delta x\to 0$，得 $F'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_2+\Delta x)-F(x_2)}{\Delta x}=F'(x_2)$.

从而，对任意 $x\in(0.1)$，有 $F'(x)\equiv C$，当 $x\overline{\in}[0,1]$ 时，显然 $F'(x)=0$；另一方面

$$F(1)=P(0<X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=C=1.$$

所以，X 的密度函数为　$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & 其他,\end{cases}$　因此 X 服从[0，1]上的均匀分布.

6.设 $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X),\ \lambda>0.\ \because X\sim U[0,1],\quad \therefore y\le 0, F_Y(y)=0;$

$$y>0, F_Y(y)=P(Y\le y)=P[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)\le y]=F(X\le 1-e^{-\lambda y})=F_X(1-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}.$$