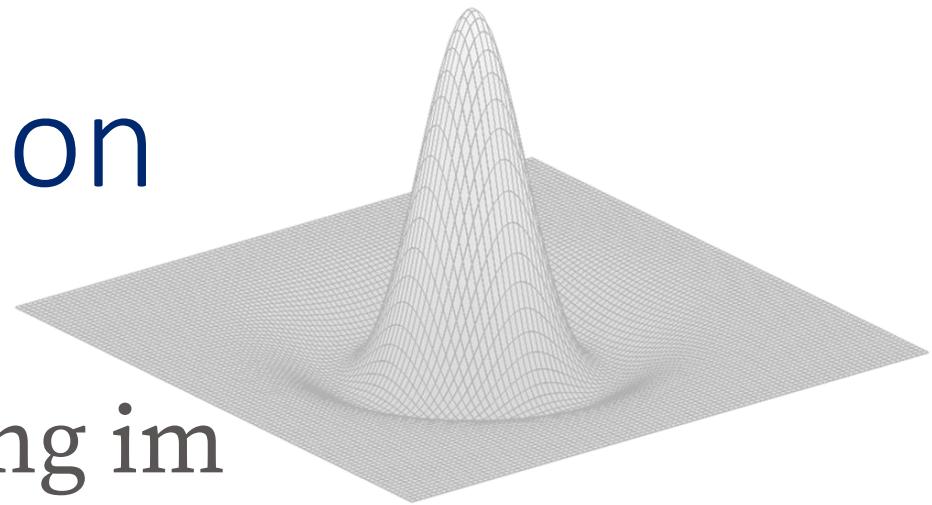


# Computer Vision



$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 10 & 20 & 30 & 30 & 30 & 20 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 40 & 60 & 60 & 60 & 40 & 20 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 20 & 60 & 90 & 90 & 90 & 60 & 40 & 20 & 0 \\ \hline 0 & 30 & 60 & 90 & 90 & 90 & 60 & 40 & 20 & 0 \\ \hline 0 & 30 & 60 & 90 & 90 & 90 & 60 & 40 & 20 & 0 \\ \hline 0 & 30 & 60 & 90 & 90 & 90 & 60 & 40 & 20 & 0 \\ \hline 0 & 20 & 30 & 50 & 80 & 80 & 60 & 40 & 20 & 0 \\ \hline 0 & 10 & 20 & 30 & 30 & 30 & 20 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

## Vorlesung 3: Filterung im

## Frequenzbereich

Dr. Xiao Zhao



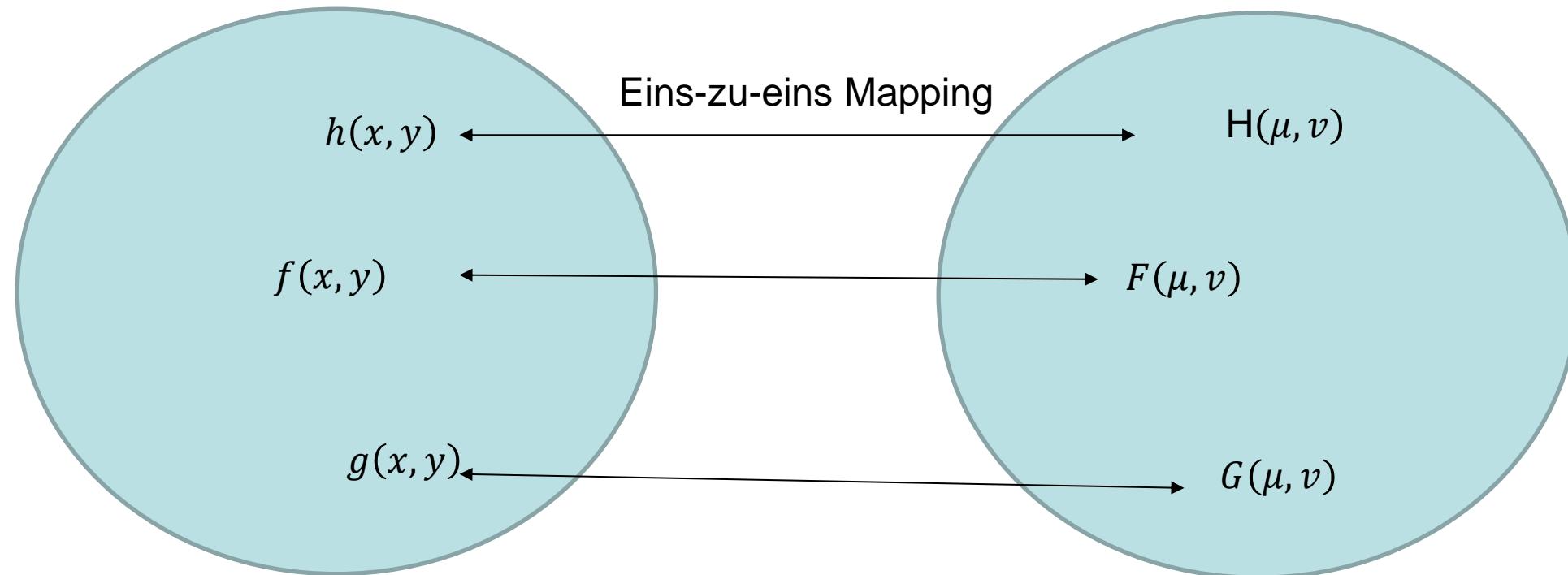
Elektrotechnik, Medizintechnik  
und Informatik

# Fouriertransformation

# Transformationspaar

**Ortsraum:**  
ein Raum mit örtlichen Funktionen

**Frequenzraum:**  
ein Raum mit Frequenzfunktionen



# 1D Fouriertransformation – kontinuierlicher Fall

- Es sei

$$f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ integrierbar}$$

- Dann ist die Fouriertransformation von  $f$  definiert als  $\mathcal{F}(f)$

$$\mathcal{F}(f)(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt := F(\mu)$$

- Für die inverse Fouriertransformation gilt

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

# 1D Fouriertransformation

- $F(\mu): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Eulersche Formel:

$$e^{i\theta} = e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \cdot \sin(\omega x)$$

- Dann:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)] dt$$

- $\mu$ : als "Frequenz" genannt, wenn  $t$  Zeit ist
- $F(\mu)$  ist in der Regel eine komplexe Zahl

# Spektrum & Phasenwinkel

- Bezeichnen  $F(\mu) = F(\mu)_{Re} + j F(\mu)_{Im}$
- Fourier Spektrum von  $F(\mu)$ :

$$|F(\mu)| = \sqrt{F(\mu)_{Re}^2 + F(\mu)_{Im}^2} \in \mathbb{R}$$

- Leistungsspektrum (Power spectrum):

$$|F(\mu)|^2 = F(\mu)_{Re}^2 + F(\mu)_{Im}^2$$

- Phasenwinkel  $\phi(\mu)$ :

$$\phi(\mu) = \arctan\left(\frac{F(\mu)_{Im}}{F(\mu)_{Re}}\right)$$

$$F(\mu) = |F(\mu)| e^{j\phi(\mu)}$$

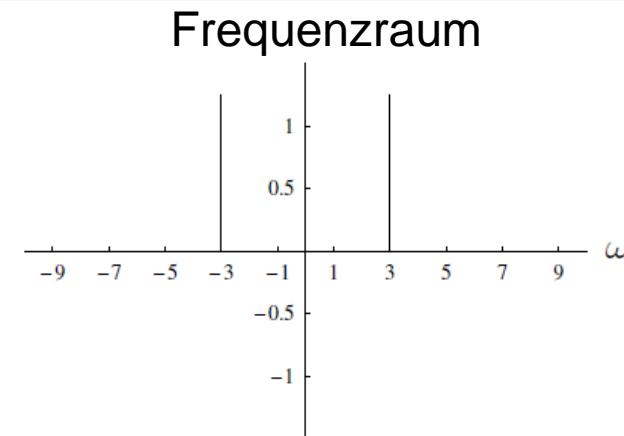
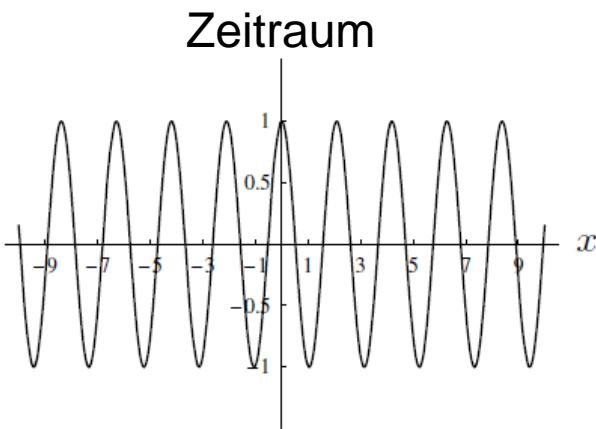
# Transformationspaar

- Die Beziehung zwischen Funktion  $f(t)$  und Fourier-Transformierte  $F(\mu)$  ist in beiden Richtungen **eindeutig**
  - Das Fourier-Transformierte  $F(\mu)$  ist eindeutig definiert für eine gegebene Funktion  $f(t)$
  - für jedes Fourier-Transformierte  $F(\mu)$  gibt es nur ein übereinstimmendes Signal  $f(t)$
- $f(t)$  und  $F(\mu)$  bilden ein "Transformationspaar," zwischen Zeitraum und Frequenzraum

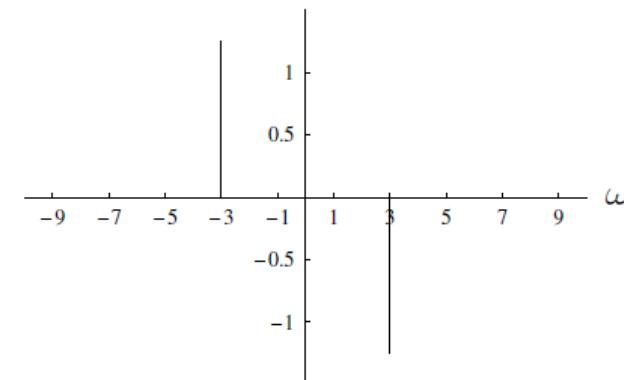
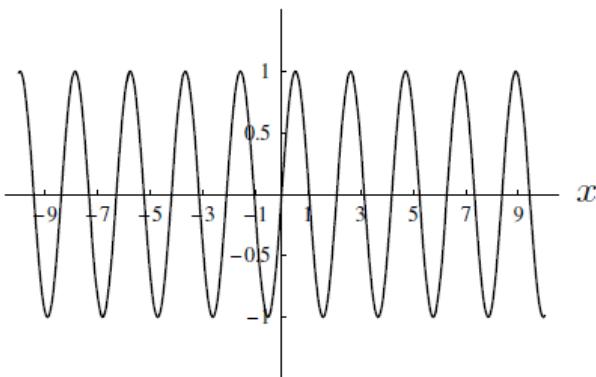
$$f(t) \text{ } \bullet \text{---} \bullet \text{ } F(\mu)$$

- Bei der Transformation gehen keine Informationen verloren: Die Arbeit in beiden Räumen ist gleichwertig.

# Fouriertransformation: Beispiel



(a) cosine ( $\omega_0=3$ ):  $g(x) = \cos(3x)$   $\circ\bullet$   $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-3) + \delta(\omega+3))$

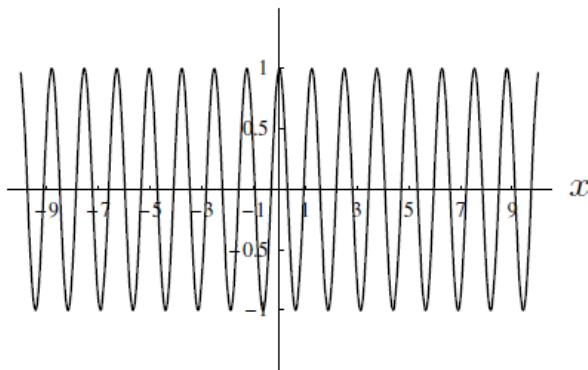


(b) sine ( $\omega_0=3$ ):  $g(x) = \sin(3x)$   $\circ\bullet$   $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-3) - \delta(\omega+3))$

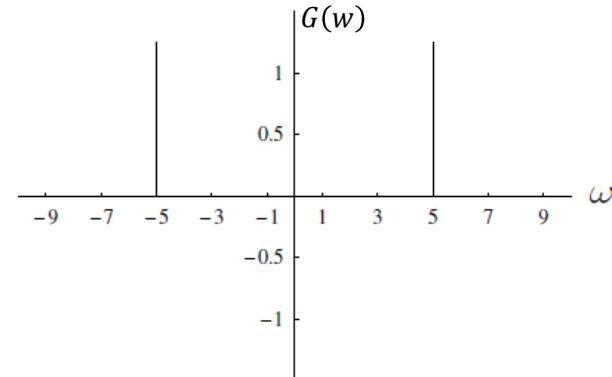
- $w = 2\pi f$
- $w$ : Winkelgeschwindigkeit
- $f$ : frequenz

# Fouriertransformation: Beispiel

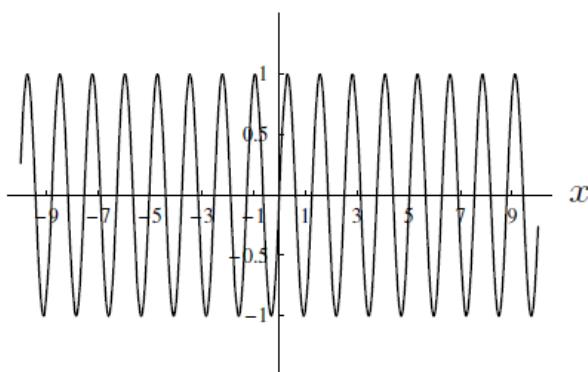
Zeitraum



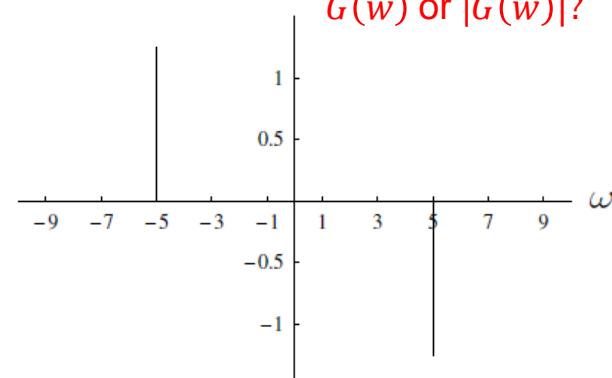
Frequenzraum



(c) cosine ( $\omega_0=5$ ):  $g(x) = \cos(5x)$      $\circ\bullet$      $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-5) + \delta(\omega+5))$



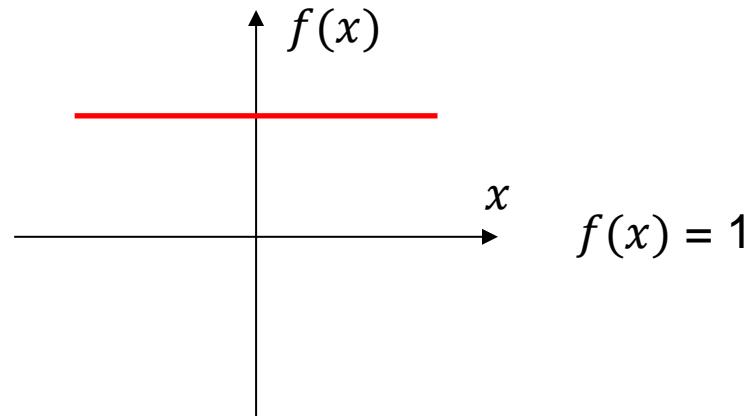
**$G(w)$  or  $|G(w)|$ ?**



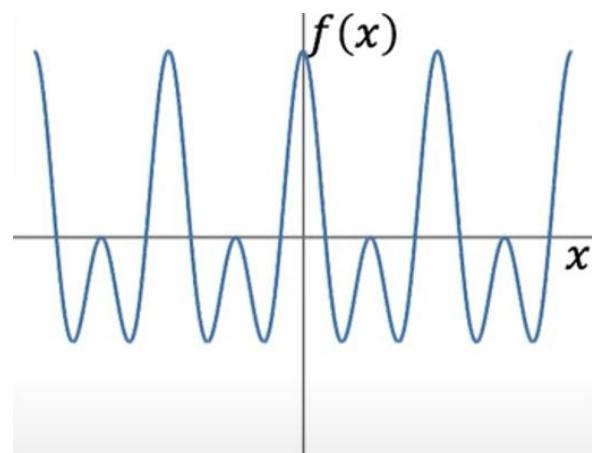
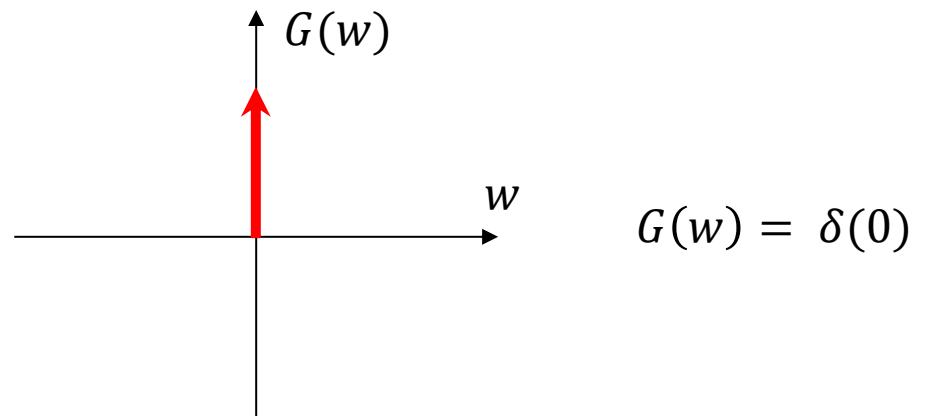
(d) sine ( $\omega_0=5$ ):  $g(x) = \sin(5x)$      $\circ\bullet$      $G(\omega) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (\delta(\omega-5) - \delta(\omega+5))$

# Fouriertransformation: Beispiel

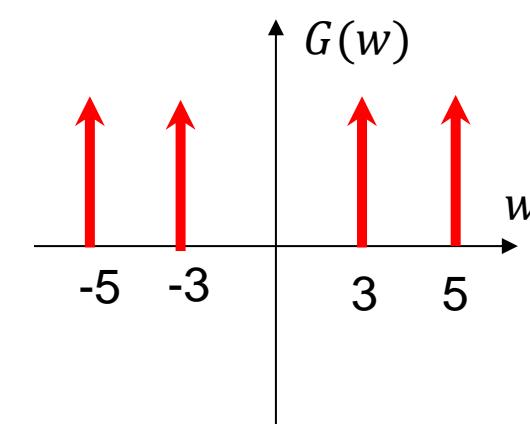
Zeitraum



Frequenzraum

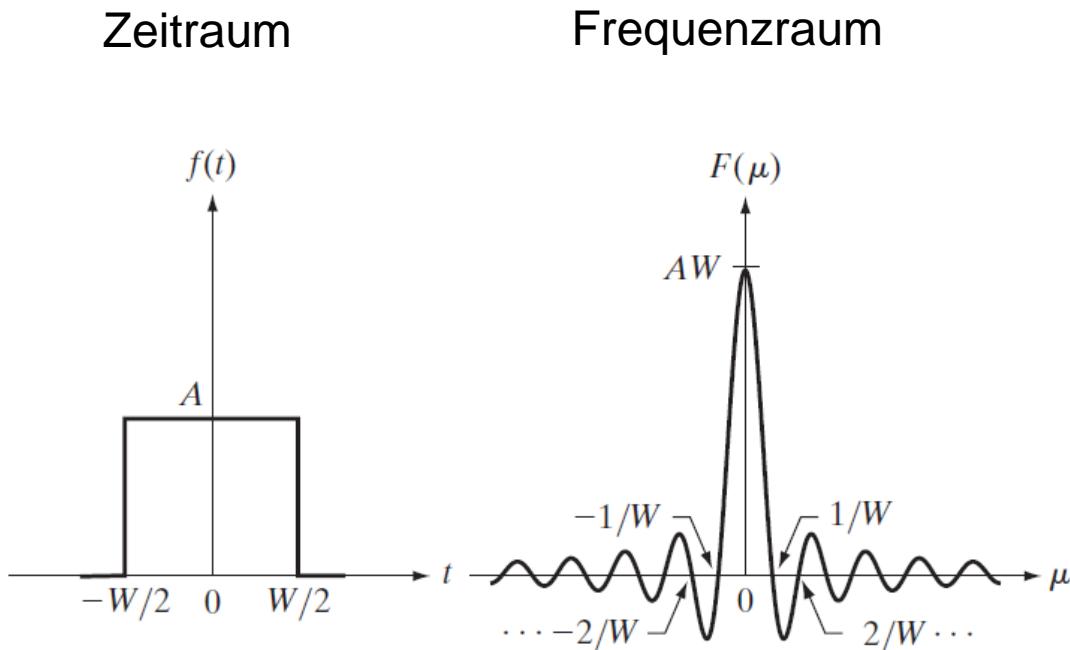


$$f(x) = \cos(3x) + \cos(5x)$$



$$G(w) = \delta(w + 3) + \delta(w - 3) + \delta(w + 5) + \delta(w - 5)$$

# Fouriertransformation: Beispiel



$$\begin{aligned}
F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} A e^{-j2\pi\mu t} dt \\
&= \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[ e^{-j2\pi\mu t} \right]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu} \left[ e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W} \right] \\
&= \frac{A}{j2\pi\mu} \left[ e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W} \right] \\
&= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}
\end{aligned}$$

- In diesem Spezialfall ist  $F(\mu)$  eine reelle Zahl. Im Allgemeinen ist  $F(\mu)$  eine komplexe Zahl.

# Fouriertransformation

- Wichtige Eigenschaften:

- Die Fouriertransformation ist **linear**

$$\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

- Die **Verschiebung** eines Signales entlang der t-Achse um  $\xi$  ändert nur die komplexen Winkel im Frequenzraum aber nicht die Amplituden

$$\mathcal{F}(f(t - \xi))(\mu) = e^{-j\mu\xi} \mathcal{F}(f)(\mu)$$

- Bei **Skalierung** der x-Achse im Ortsbereich wird die Achse im Frequenzbereich reziprok neu skaliert

$$\mathcal{F}(f(at))(\mu) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\mu}{a}\right)$$

# Fouriertransformation

- Wichtige Eigenschaften:

- Die **Faltung** im Zeitbereich entspricht der Multiplikation im Frequenzbereich

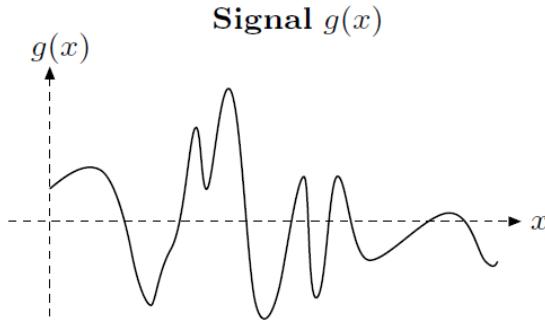
$$\mathcal{F}(f * g)(\mu) = F(\mu)G(\mu) \quad f(t) * g(t) \circ \bullet F(\mu) G(\mu)$$

- Umgekehrt: Die Faltung im Frequenzbereich entspricht der Multiplikation im Zeitbereich

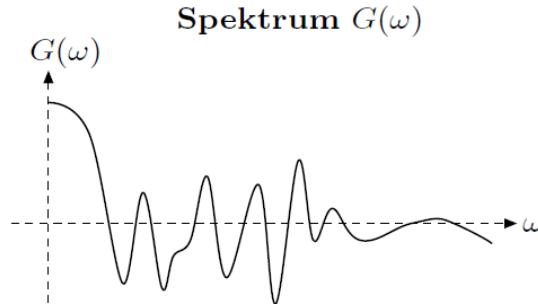
$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}(\mu) = F(\mu) * G(\mu) \quad f(t)g(t) \circ \bullet F(\mu) * G(\mu)$$

- **Die Basis für Filter im Frequenzbereich**

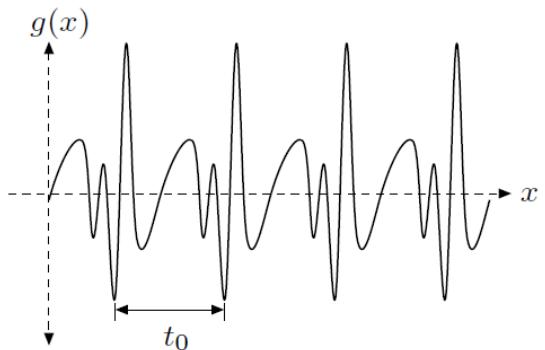
# Eigenschaften



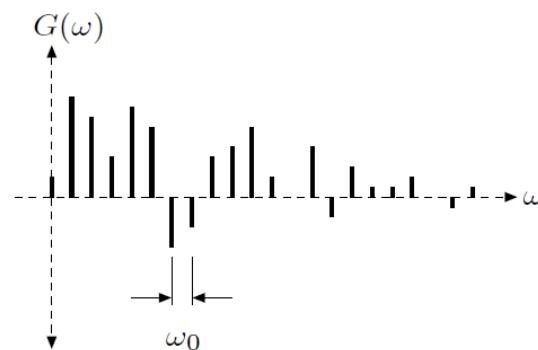
(a) Kontinuierliches, nicht periodisches Signal.



(b) Kontinuierliches, nicht periodisches Spektrum.



(c) Kontinuierliches, periodisches Signal mit Periodenlänge  $t_0$ .

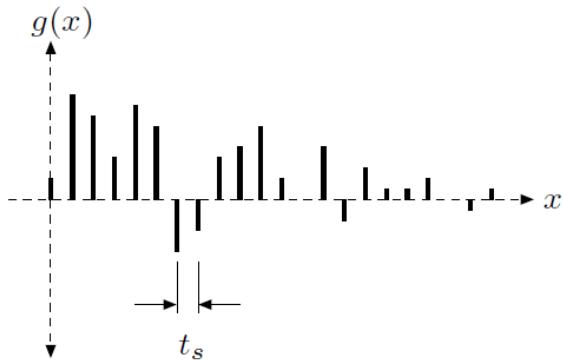


(d) Diskretes, nicht periodisches Spektrum mit Werten im Abstand  $\omega_0 = 2\pi/t_0$ .

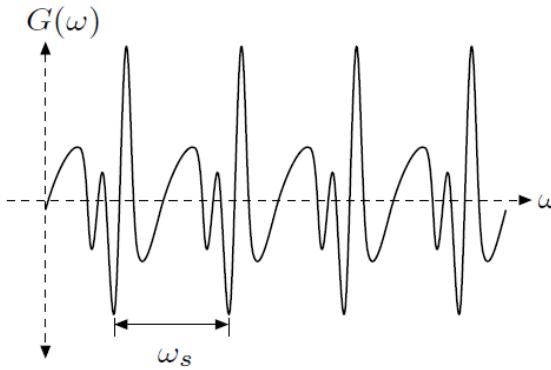
- Wenn  $g(x)$  kontinuierlich und nicht periodisch ist,  $G(\omega)$  ist kontinuierlich und nicht periodisch

- Wenn  $g(x)$  kontinuierlich und periodisch,  $G(\omega)$  ist diskret, d.h. eine Folge dünner Spektrallinien mit gleichem Abstand

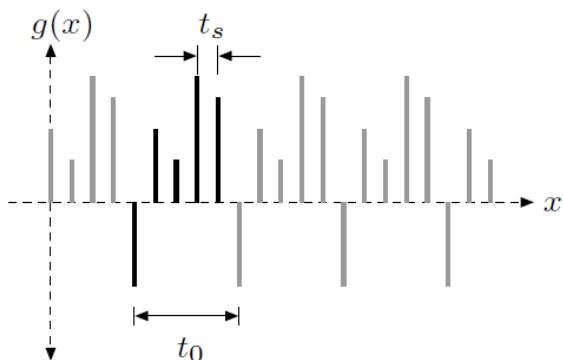
# Eigenschaften



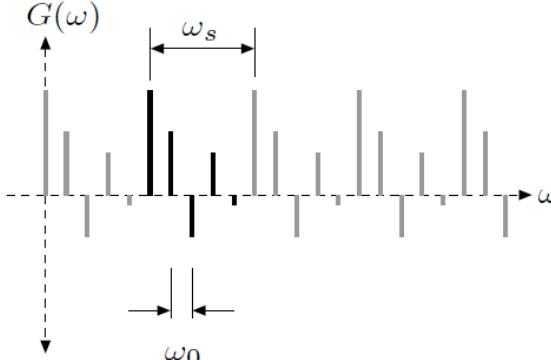
(e) Diskretes, nicht periodisches Signal mit Abtastwerten im Abstand  $t_s$ .



(f) Kontinuierliches, periodisches Spektrum mit der Periodenlänge  $\omega_s = 2\pi/t_s$ .



(g) Diskretes, periodisches Signal, abgetastet im Abstand  $t_s$  mit der Periodenlänge  $t_0 = t_s M$ .



(h) Diskretes, periodisches Spektrum mit Werten im Abstand  $\omega_0 = 2\pi/t_0$  und Periodenlänge  $\omega_s = 2\pi/t_s = \omega_0 M$ .

- Wenn  $g(x)$  diskret und nicht periodisch ist,  $G(\omega)$  ist kontinuierlich und periodisch

- Wenn  $g(x)$  diskret und periodisch,  $G(\omega)$  ist diskrete und periodisch

**Der Fall für DFT**

Was sollen wir mit den Bildern machen?

# Diskrete Fouriertransformation (DFT): 1D

- **Überblick:** Die diskrete Fouriertransformation transformiert eine Folge von  $N$  komplexen Zahlen in eine andere Folge von  $N$  komplexen Zahlen
- **Motivation:** Damit die digitale Signale, die diskret sind, z.B. Stimmsignal und Bild, können bearbeitet werden
- Die Fouriertransformation einer Folge von diskreten Zahlen  $f_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , gilt

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi m \frac{n}{N}}, \quad 0 \leq m \leq N - 1$$

- Für die inverse diskrete Transformation entsprechend

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{j2\pi n \frac{m}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

# Diskrete Fouriertransformation (DFT): 1D

$u$	$g(u)$	
	Re	Im
0	1.0000	0.0000
1	3.0000	0.0000
2	5.0000	0.0000
3	7.0000	0.0000
4	9.0000	0.0000
5	8.0000	0.0000
6	6.0000	0.0000
7	4.0000	0.0000
8	2.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000

$m$	$G(m)$	
	Re	Im
0	14.2302	0.0000
1	-5.6745	-2.9198
2	*0.0000	*0.0000
3	-0.0176	-0.6893
4	*0.0000	*0.0000
5	0.3162	0.0000
6	*0.0000	*0.0000
7	-0.0176	0.6893
8	*0.0000	*0.0000
9	-5.6745	2.9198

- Das ursprüngliche Signal  $g(u)$  und das zugehörige Transformierte  $G(m)$  sind jeweils komplexwertige Vektoren der Länge  $N$ .

# Eigenschaften & Vergleich

## Kontinuierlicher Fall

- Funktionen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- Faltung

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \tau) f(\tau) d\tau$$

- Fouriertransformation
  - Bildet auf eine Funktion ab
  - Transformation:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- Faltung und FT

$$(f * g) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (FG)$$

$$(f \cdot g) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (F * G)$$

## Diskreter Fall

- Vektoren  $g = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})^T$
- Faltung

$$(f * g)_\nu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{\nu-n} f_n$$

- Diskrete Fouriertransformation (DFT)
  - Bildet auf einen Vektor ab
  - Transformation:

$$\hat{F}_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi m \frac{n}{N}}$$

- Faltung und DFT

$$(f * g) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (\hat{F} \hat{G})$$

$$(f \cdot g) \quad \circ \text{---} \bullet \quad (\hat{F} * \hat{G})$$

# 2-Dimensionale Fouriertransformation

- Bilder sind zweidimensional
- Die Fouriertransformation wird damit

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

- Für die inverse Fouriertransformation gilt

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

$\mu$ : horizontale Ortskreisfrequenz  
 $\nu$ : vertikale Ortskreisfrequenz

# 2-Dimensionale DFT

- Im diskreten Fall gilt

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

- Für die inverse diskrete Transformation entsprechend

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

# 2D-DFT: Basisfunktionen

- Mit Eulerscher Formel:

$$e^{i2\pi(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N})} = \underbrace{\cos \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]}_{C_{m,n}^{M,N}(u, v)} + i \cdot \underbrace{\sin \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]}_{S_{m,n}^{M,N}(u, v)}$$

- Basisfunktionen:

$$\begin{aligned} C_{m,n}^{M,N}(u, v) &= \cos \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right] \\ S_{m,n}^{M,N}(u, v) &= \sin \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

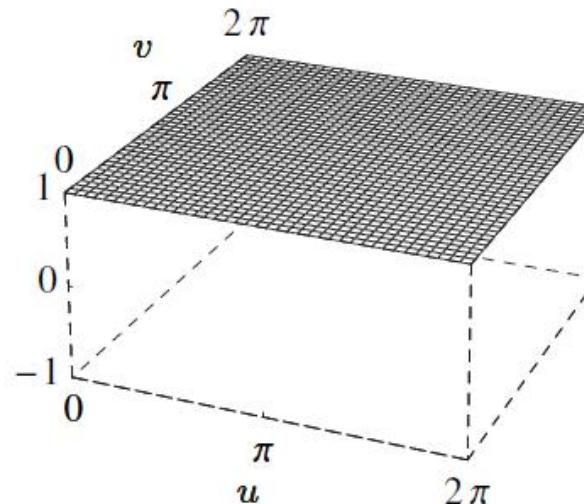
Was sind M und N?

# 2D-Cosinus

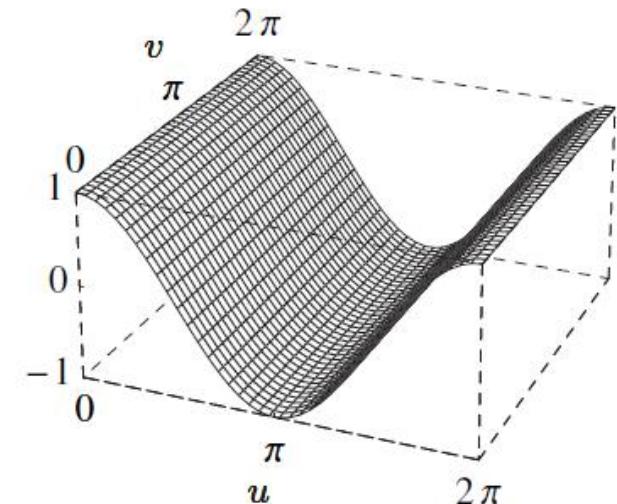
$$C_{m,n}^{M,N}(u, v) = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]$$

$m$  = horizontale Wellenzahl  
 $n$  = vertikale Wellenzahl

$n=0$

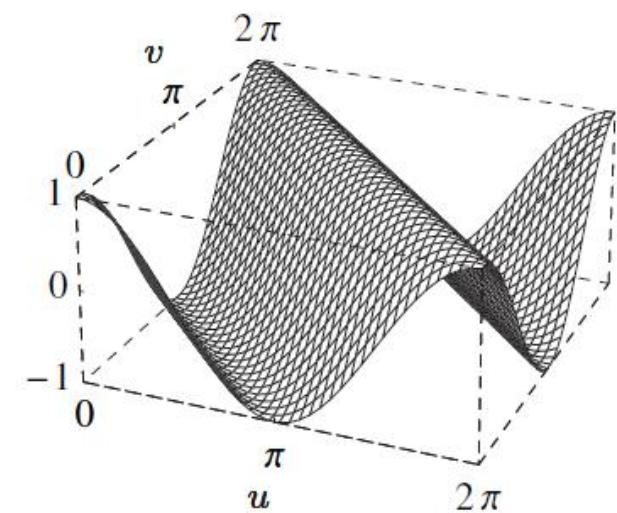
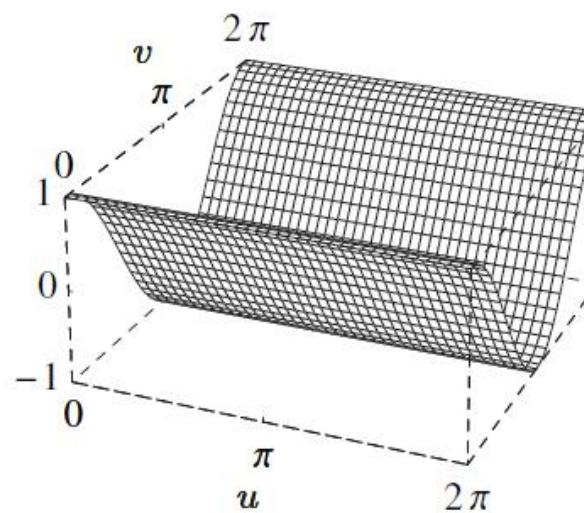


$m=0$



$m=1$

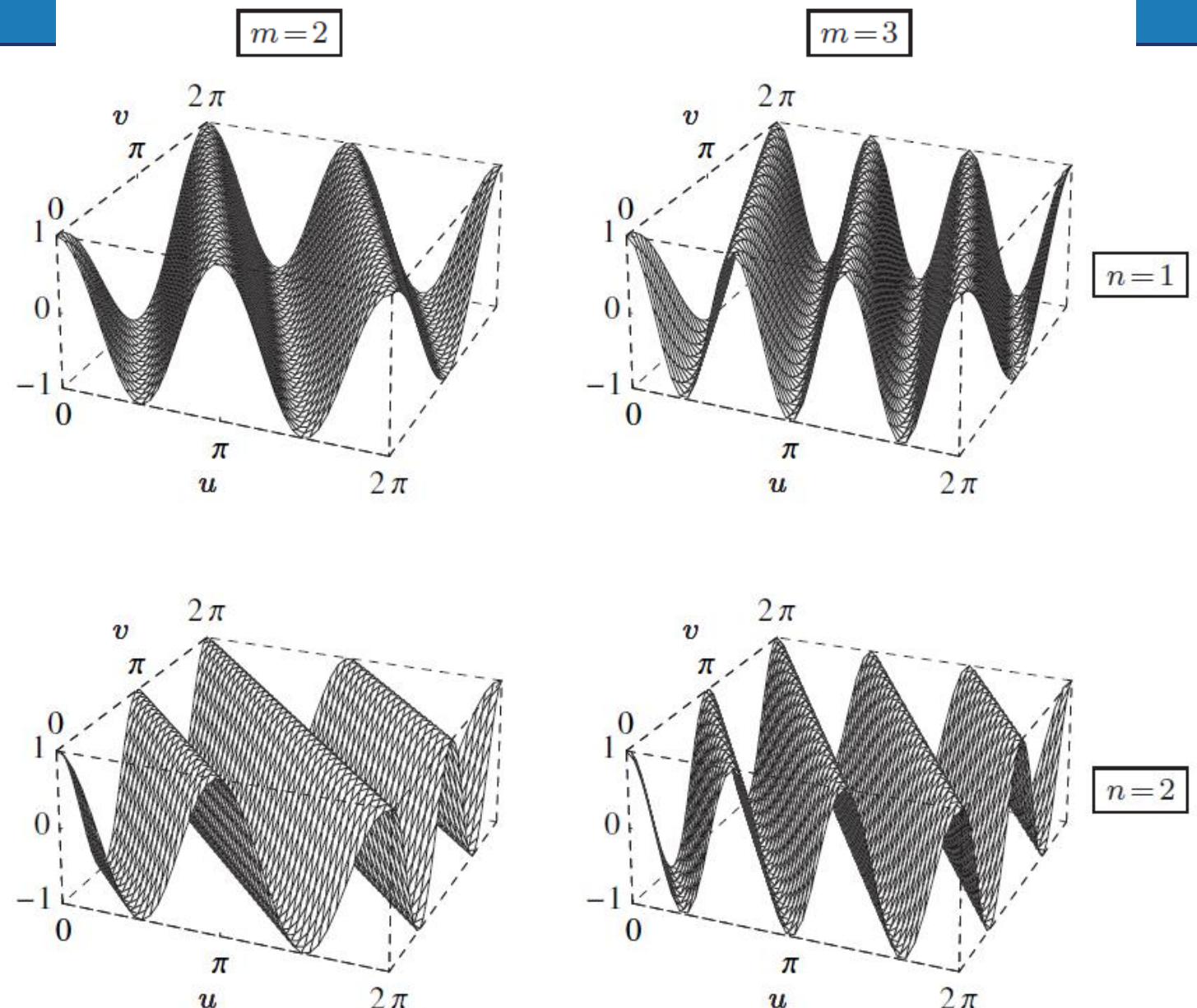
$n=1$



# 2D-Cosinus

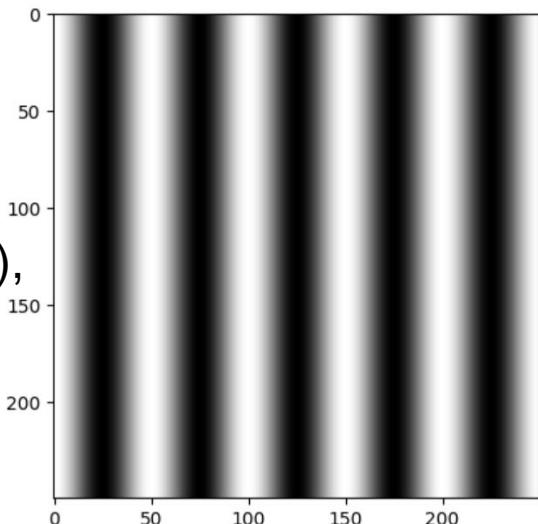
$$C_{m,n}^{M,N}(u, v) = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right) \right]$$

$m$  = horizontale Wellenzahl  
 $n$  = vertikale Wellenzahl

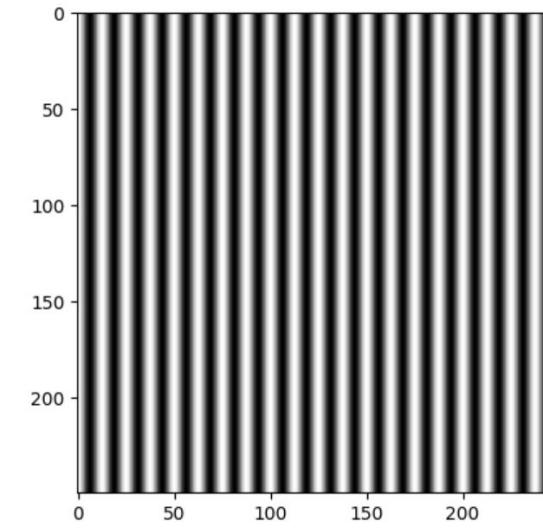
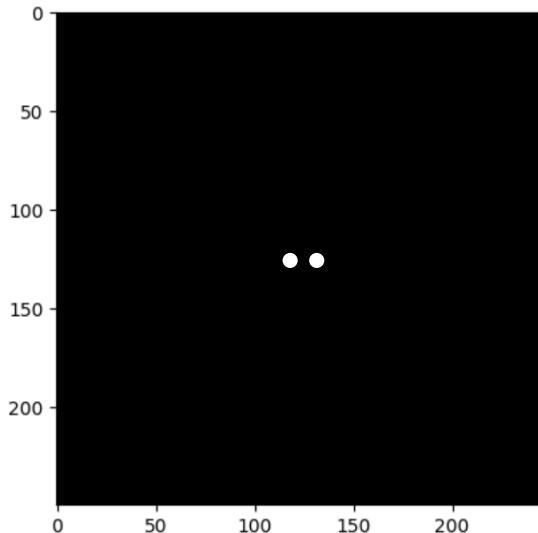


# 2D-DFT: Beispiel

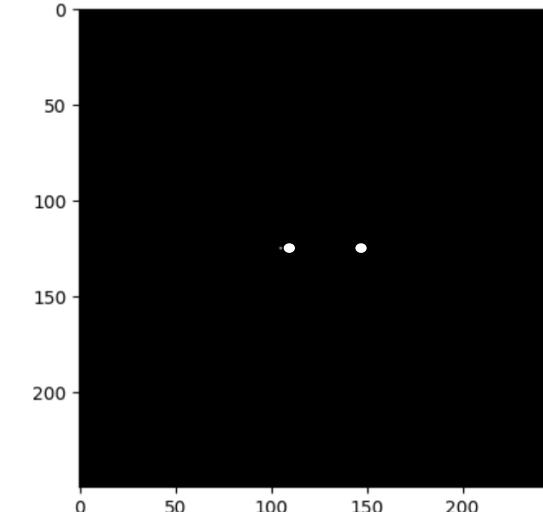
$$f(x_i, y_j) = \cos(2\pi u_0 x_i), \\ x_i = 0, \dots, x_{max}$$



$$F(u, v) = \mathcal{F}(f)$$



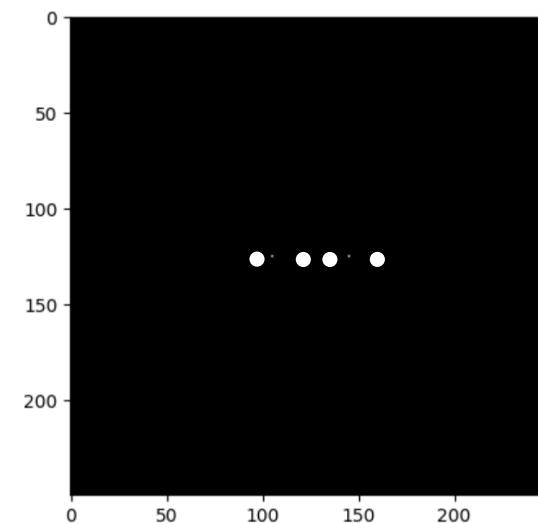
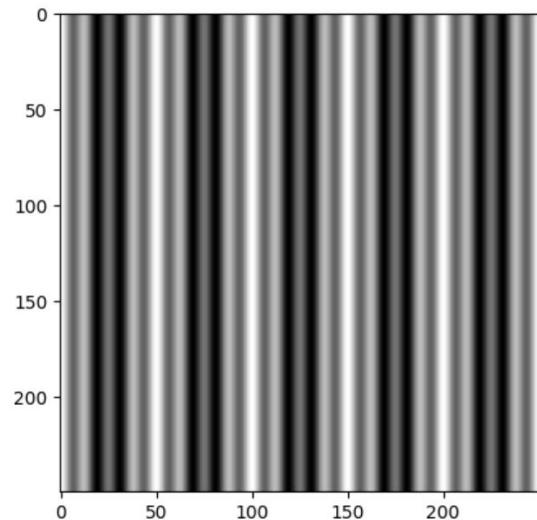
$$f(x_i, y_j) = \cos(2\pi u_1 x_i), \\ x_i = 0, \dots, x_{max} \\ u_1 > u_0$$



# 2D-DFT: Beispiel

$$f(x_i, y_j) = \cos(2\pi u_0 x_i) + \cos(2\pi u_1 x_i), \\ x_i = 0, \dots, x_{max}$$

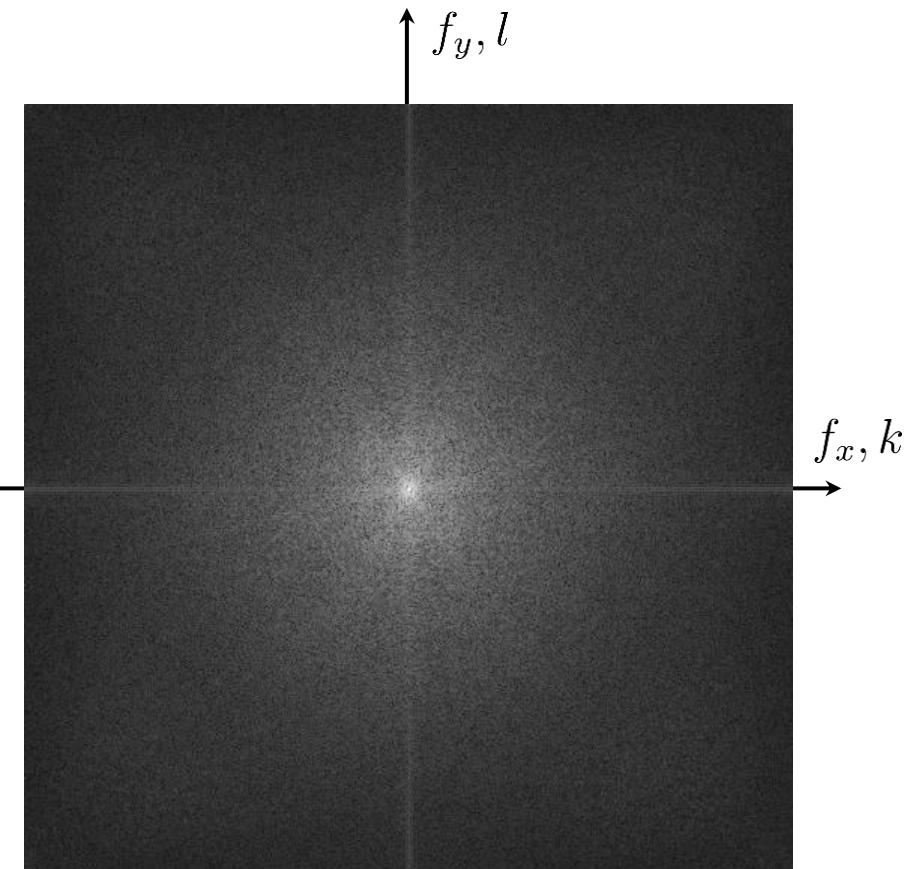
$$F(u, v)$$



# 2D DFT



Original Bild

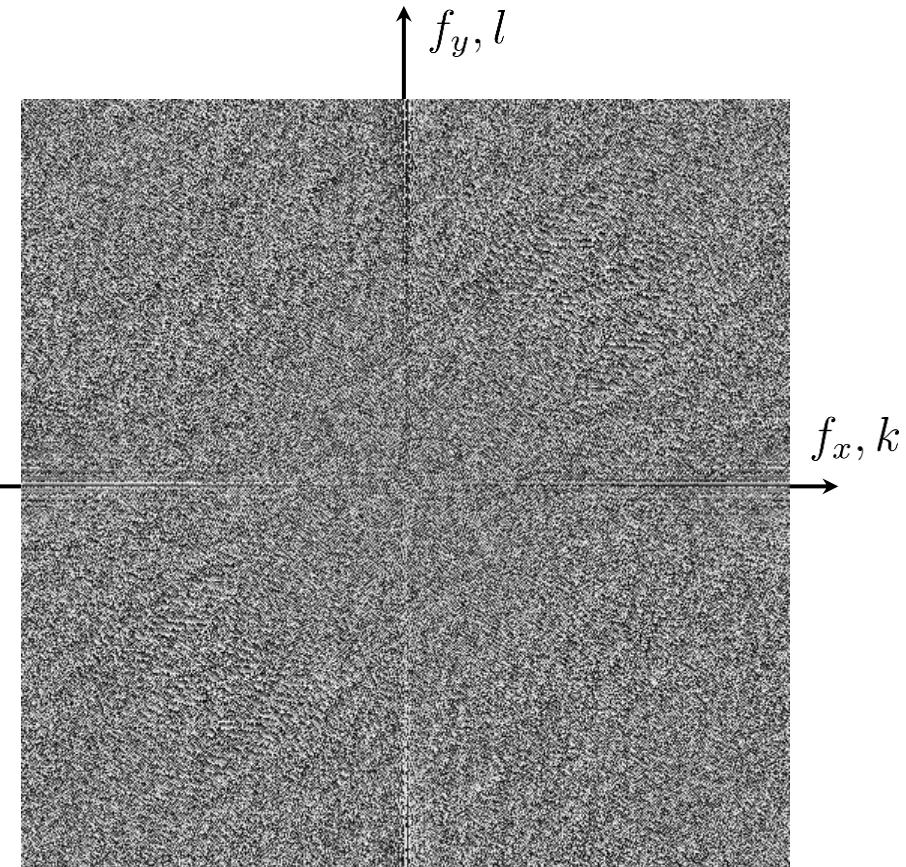


Leistungsspektrum (Betrag)  $|G_{kl}|^2$   
[logarithmische Darstellung]

# 2D DFT

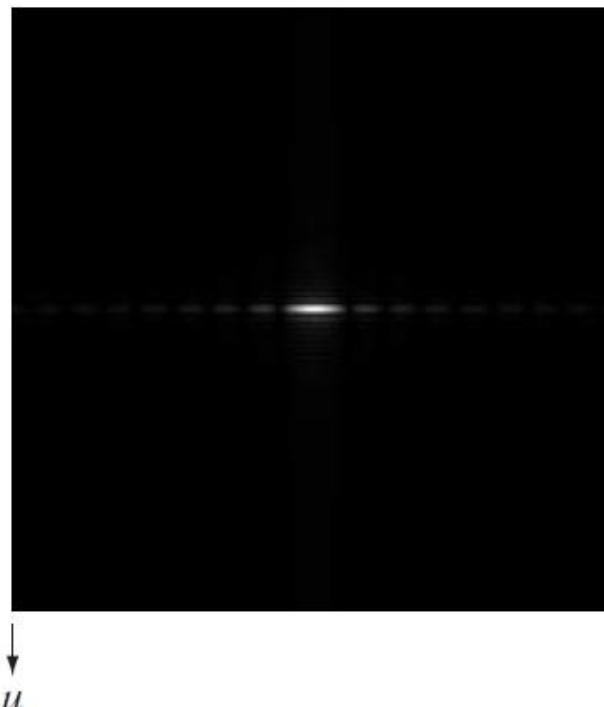
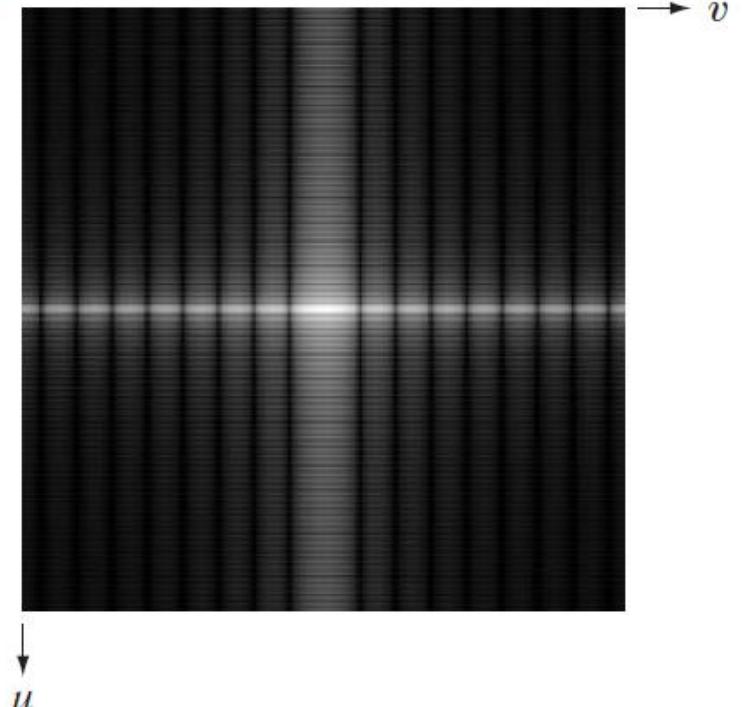


Original Bild

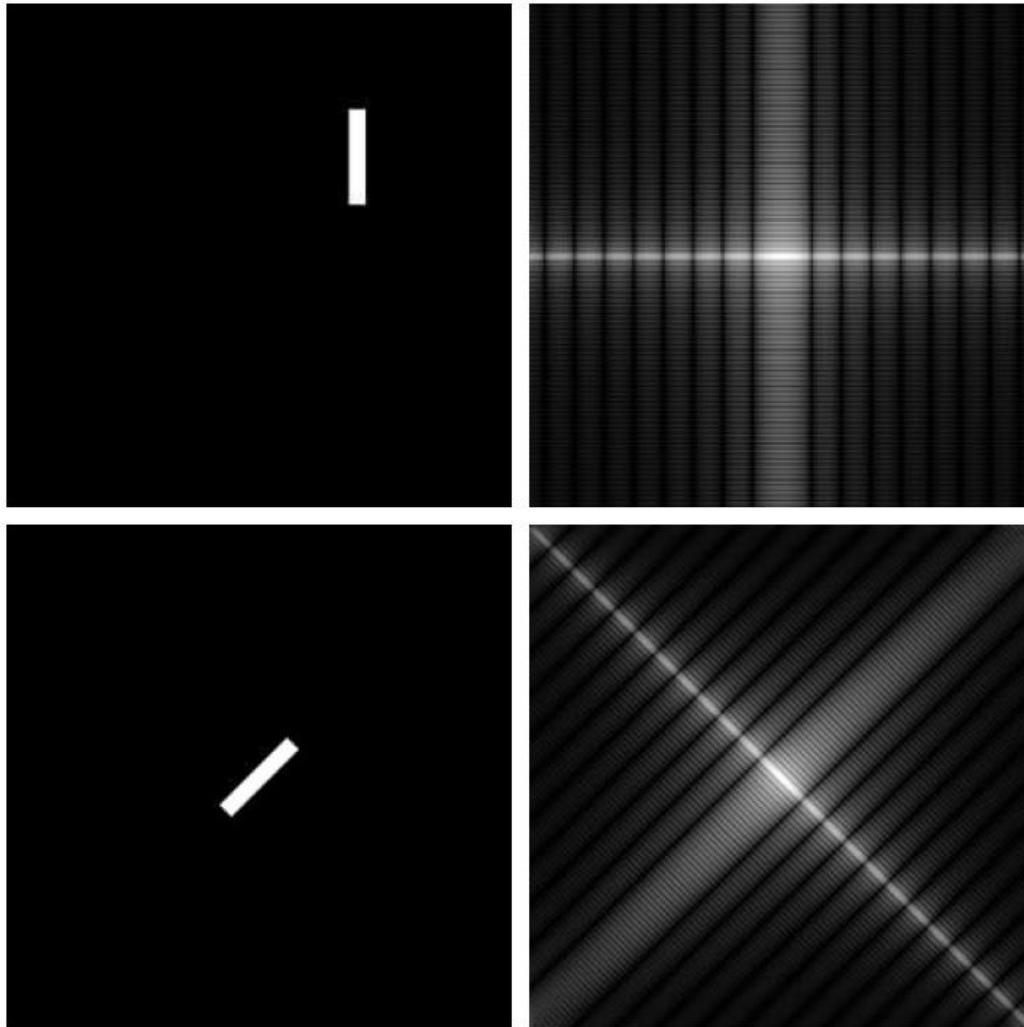


Phasenwinkel  $\angle G_{kl}$

# 2D DFT

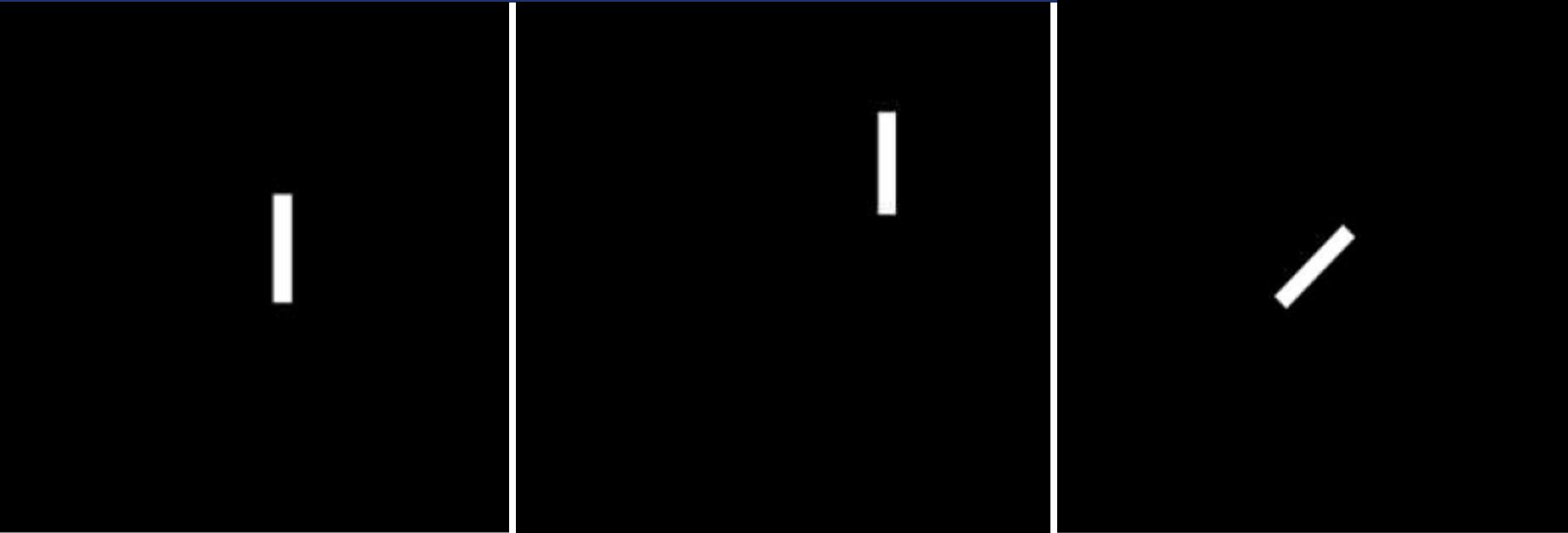
Bild  $f(x,y)$ Spectrum  $|F(u,v)|$ Spectrum  $\log(|F(u,v)|)$ 

# 2D DFT

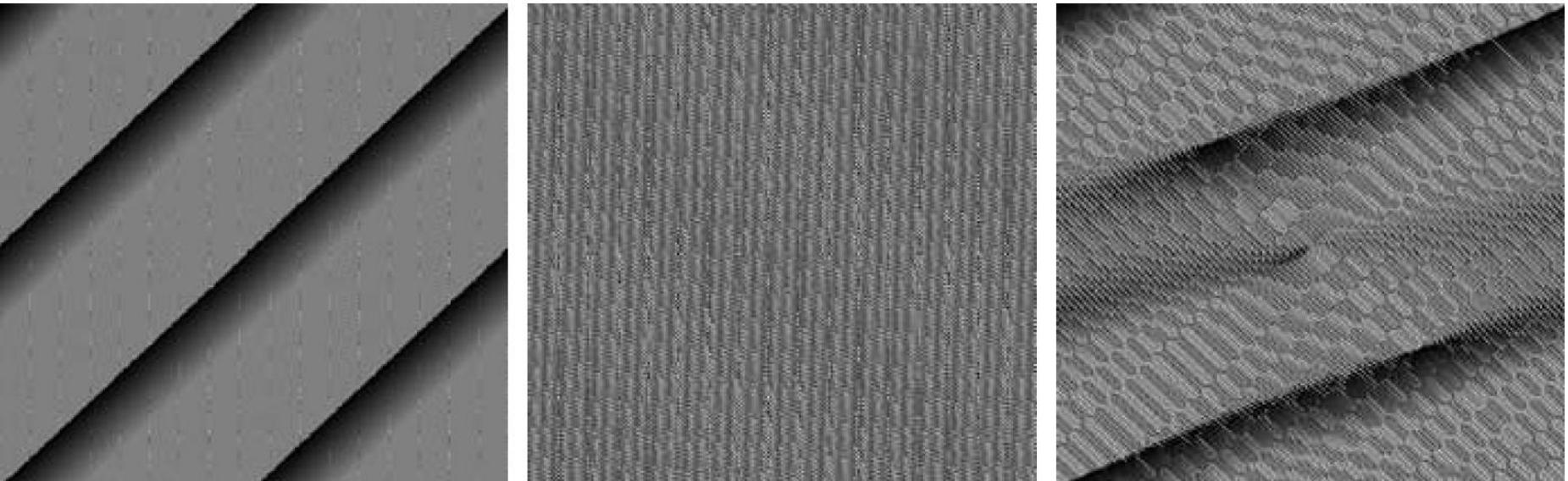


- Das Spektrum ist unempfindlich gegenüber Bildverschiebung
- Das Spektrum dreht sich um denselben Winkel wie ein gedrehtes Bild.

Bild



Phasenwinkel

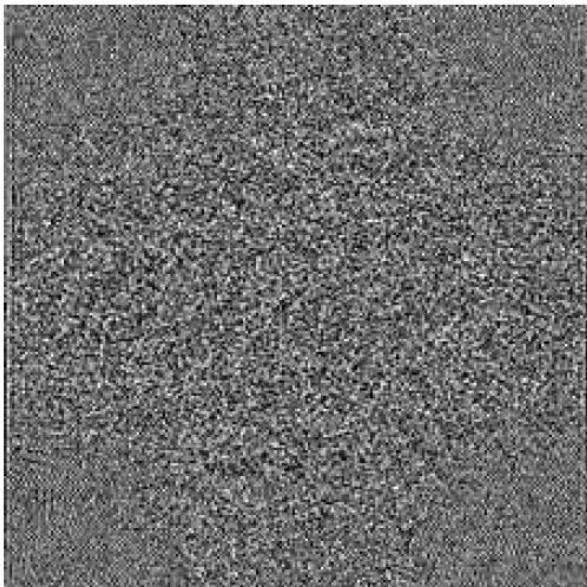


# 2D DFT

Bild



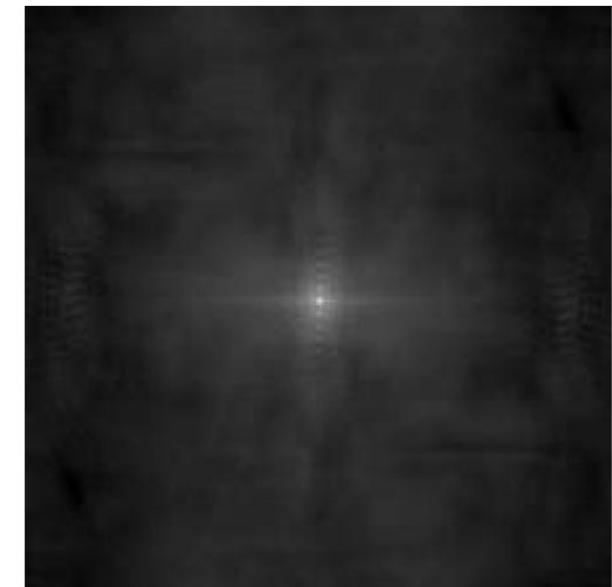
Phasenwinkel



Mischung 1



Mischung 1



- Setzen  $|F(u,v)| = 1$
- Benutzen echte Phasenwinkel
- Durchführen Inverse DFT

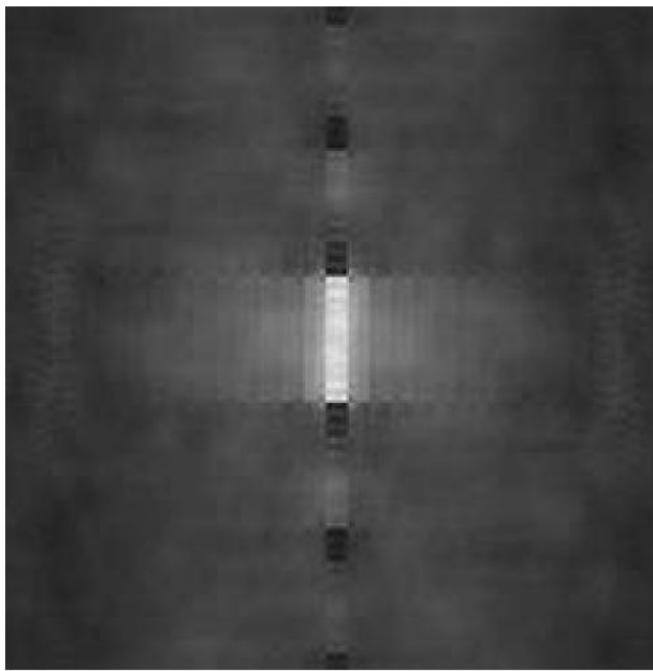
- Setzen Phasenwinkel =  $0^\circ$
- Benutzen echtes Spektrum
- Durchführen Inverse DFT

# 2D DFT

Mischung 4



Mischung 5



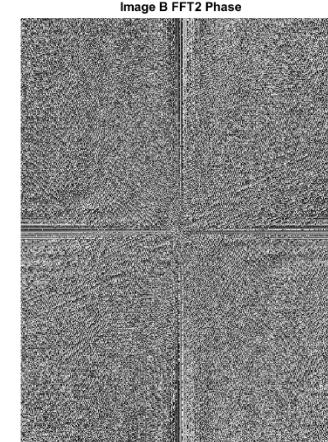
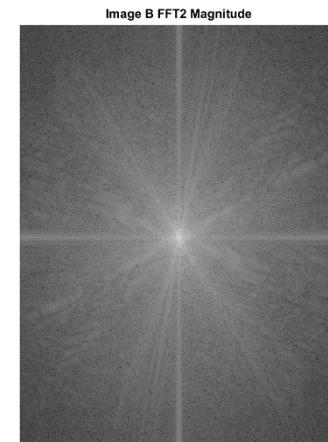
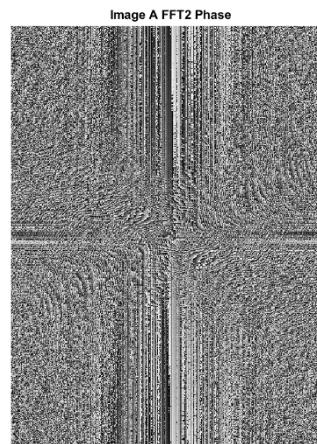
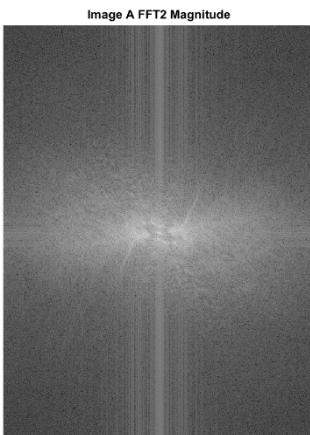
- Phasenwinkel ist für die menschlichen Augen wichtiger.

- Phasenwinkel der Frau + Spektrum des Rechteckes
- Durchführen Inverse DFT

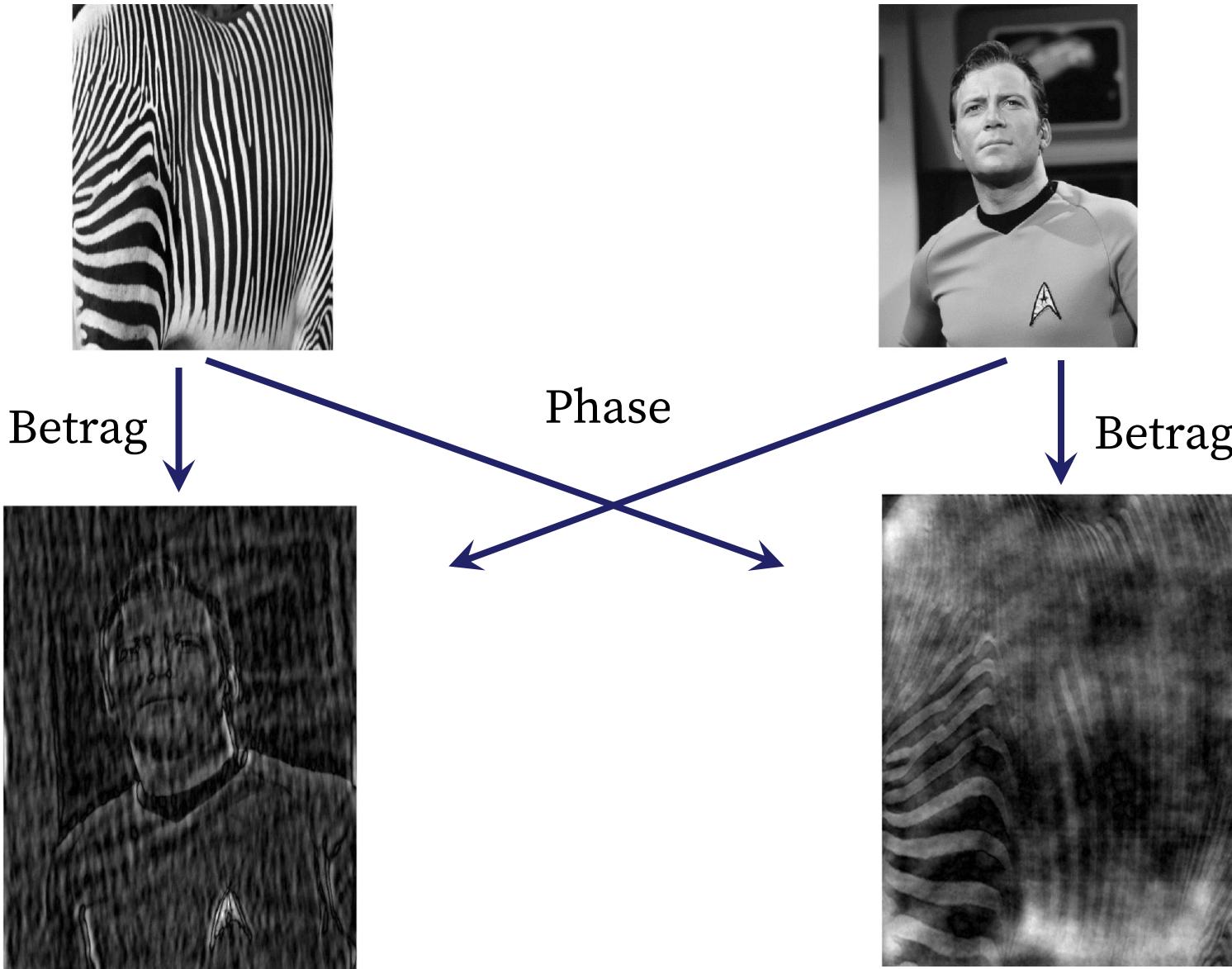
- Spektrum der Frau + Phasenwinkel des Rechteckes
- Durchführen Inverse DFT

# 2D DFT

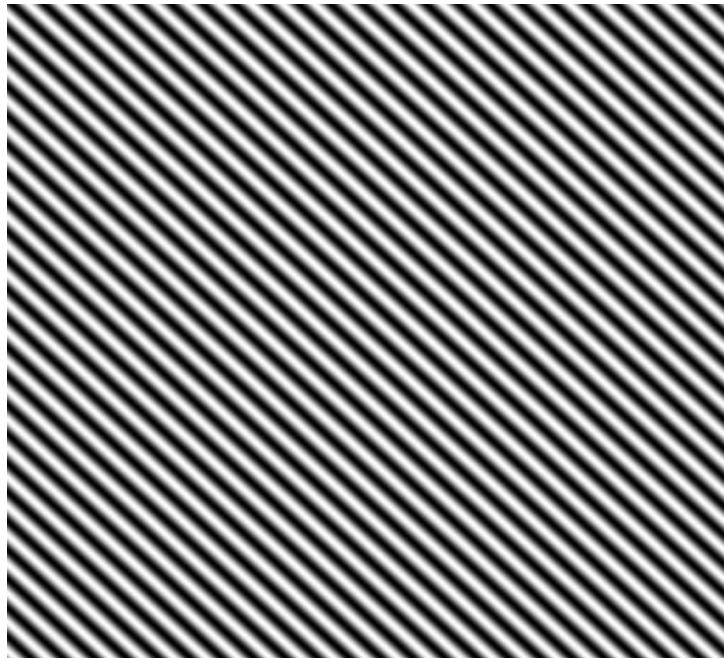
- Wo steckt die Information (für den menschlichen Beobachter)?



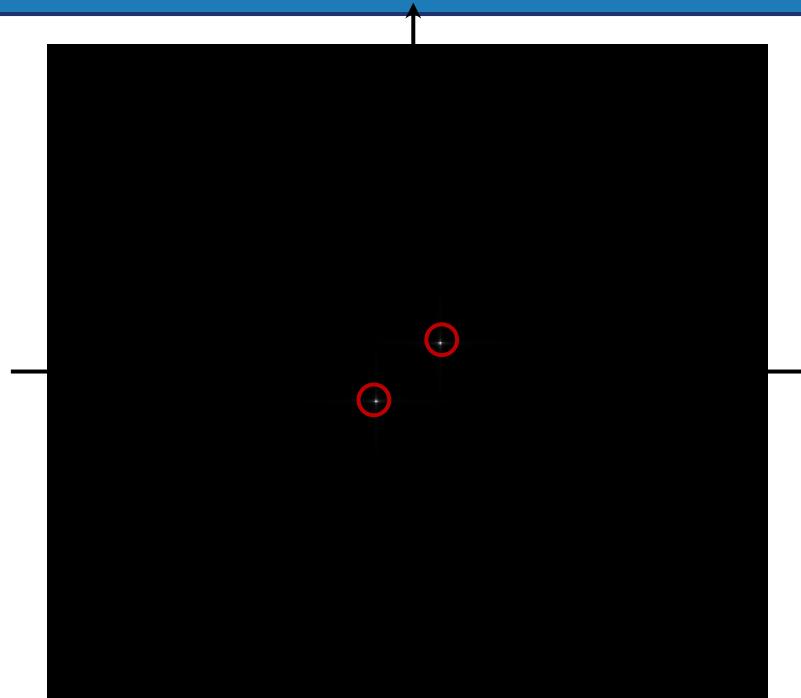
# 2D DFT



# DFT – Periodische Signale



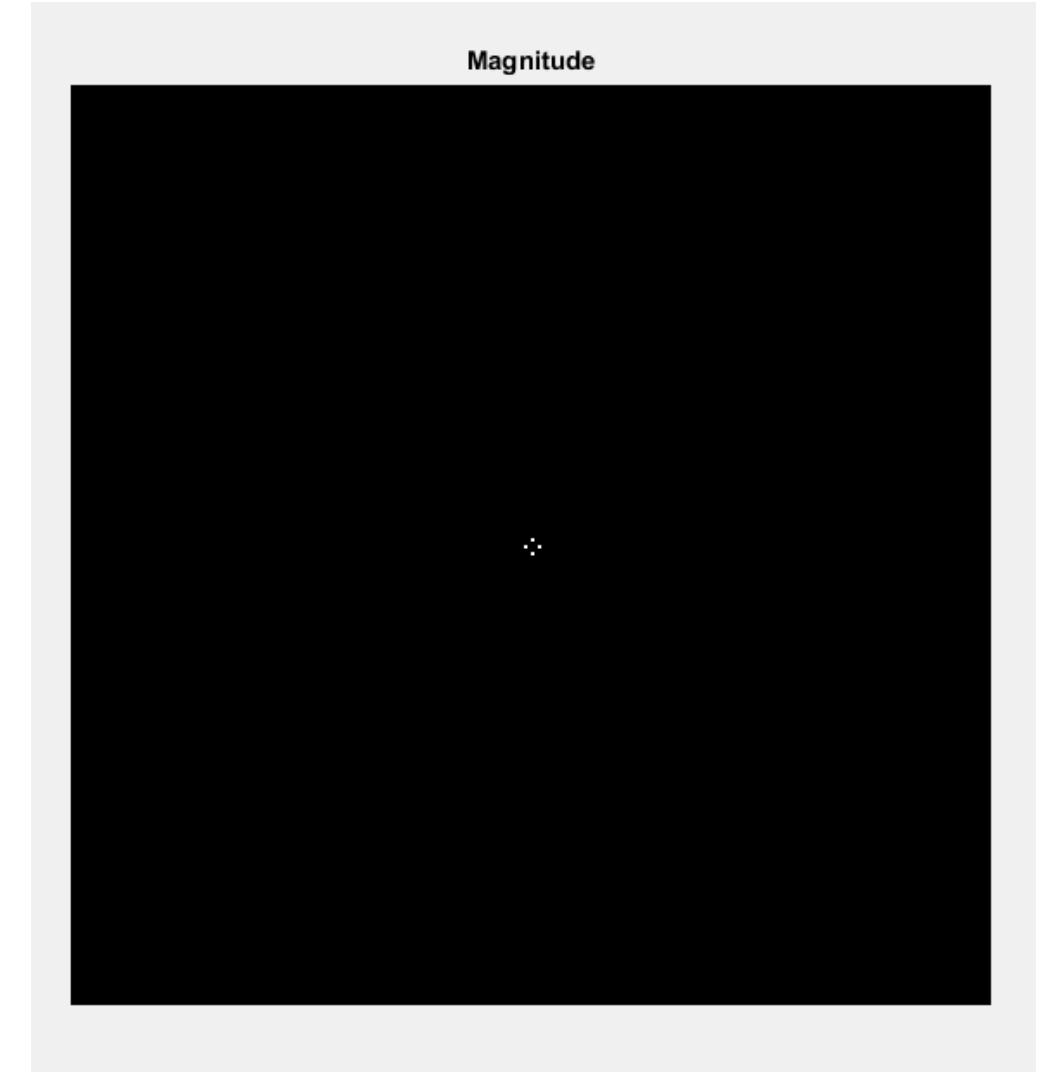
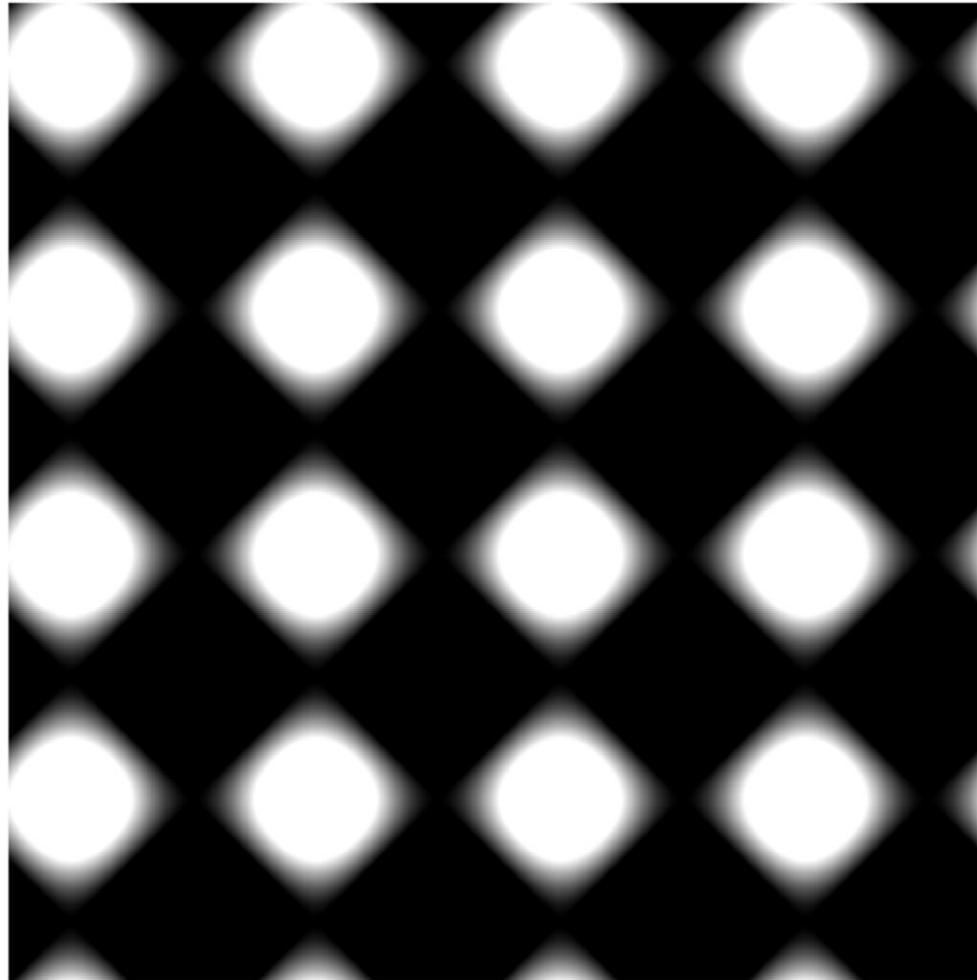
Originalbild (Sinus 45°)



Leistungsspektrum

- Das Spektrum zeigt die Richtung der Hell- / Dunkelübergänge
- Ein idealer Sinus lässt nur zwei Fourierkoeffizienten ungleich Null sein
- Wird das Bild gedreht, dreht sich auch das Spektrum
- Das Leistungsspektrum ändert sich nicht bei der Verschiebung des Bildes

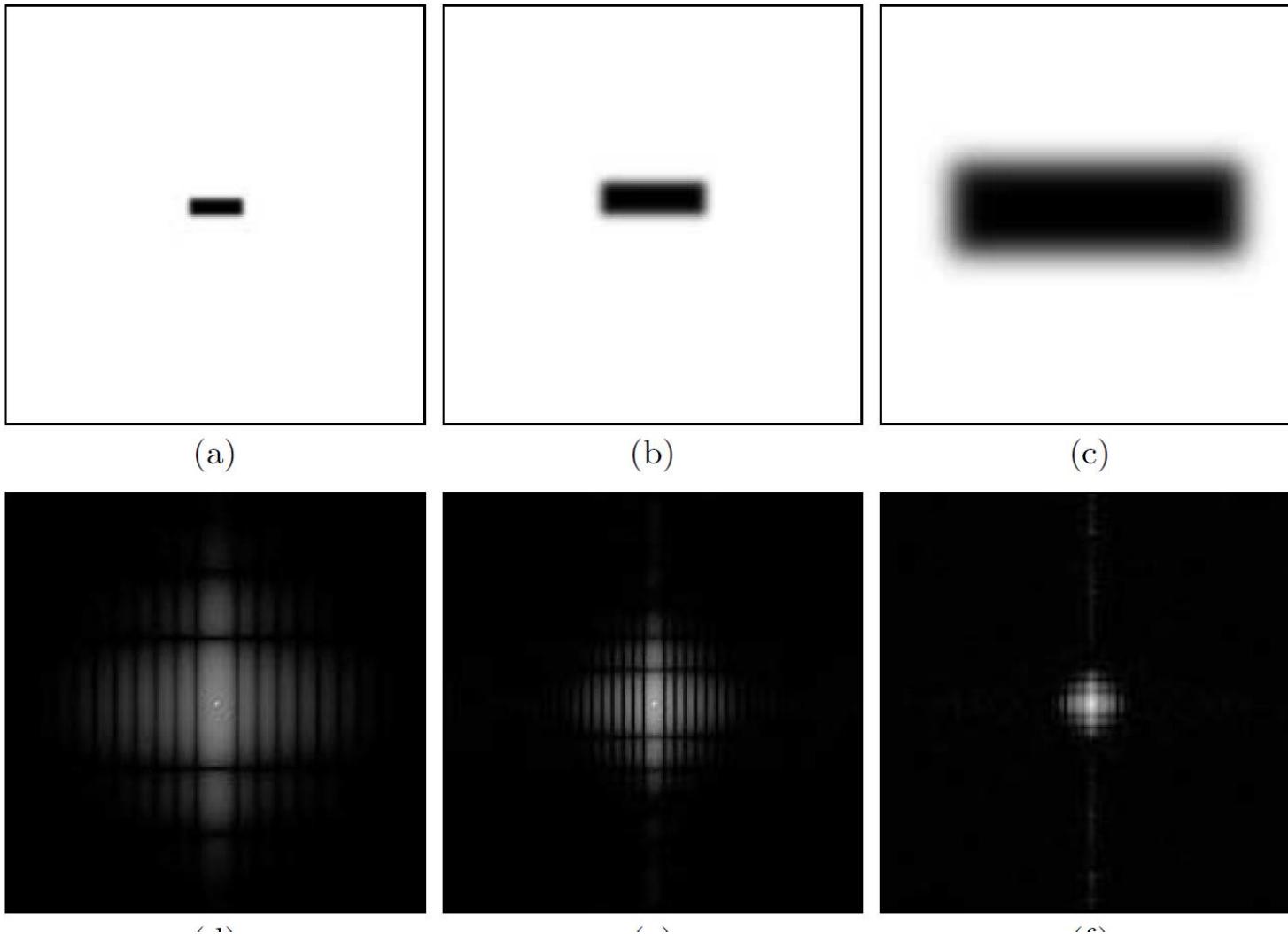
# DFT – Periodische Signale



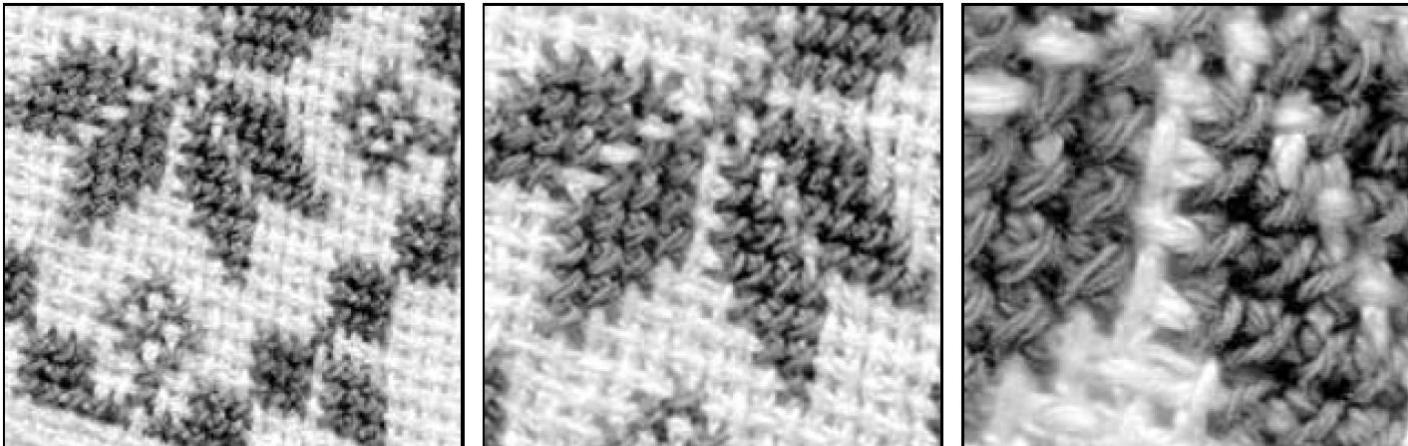
Originalbild – Wie wird das Leistungsspektrum der DFT aussehen?

# DFT: Skalierung

- Eine Streckung im Bildraum führt zu einer entsprechenden Stauchung im Spektralraum



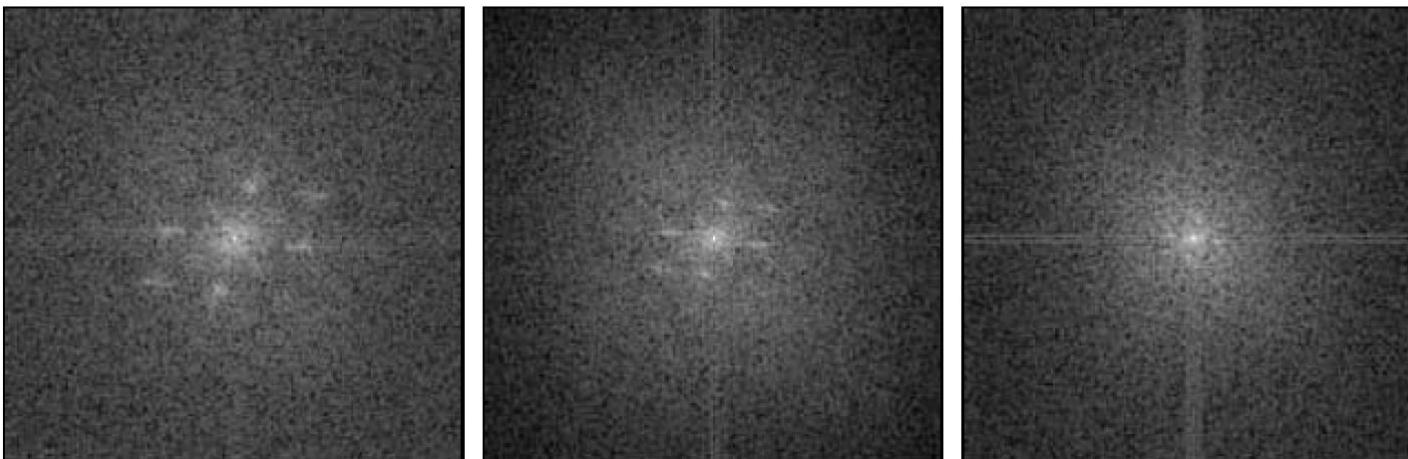
# DFT: Skalierung



(a)

(b)

(c)

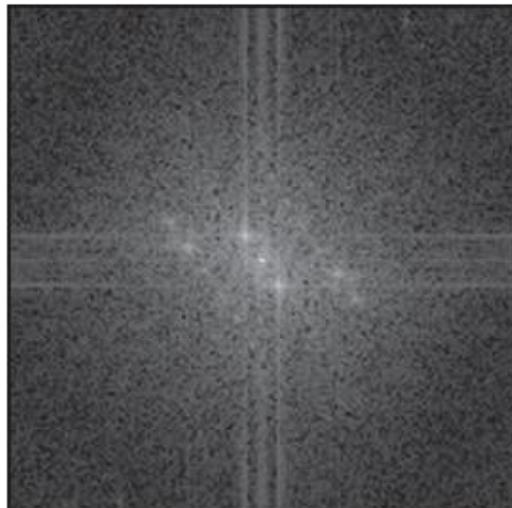
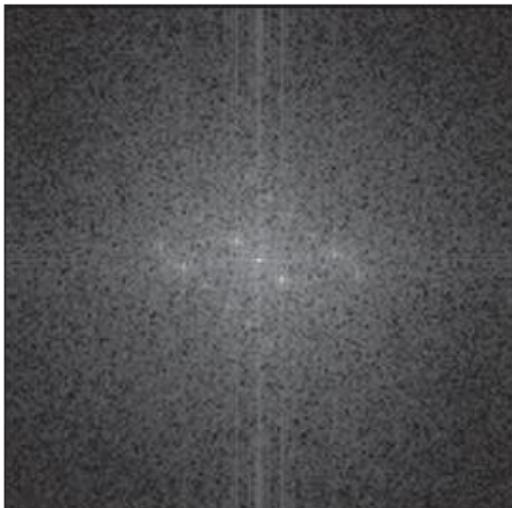
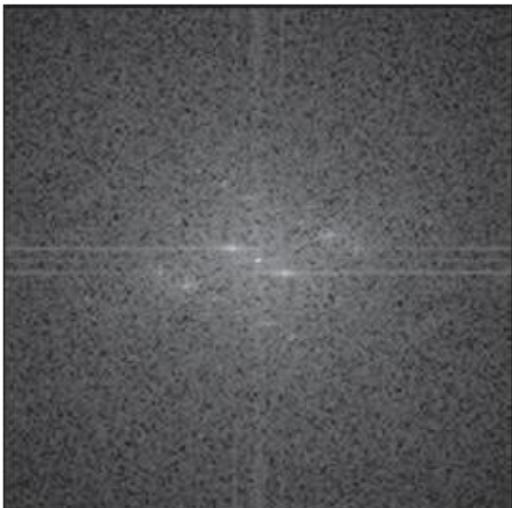
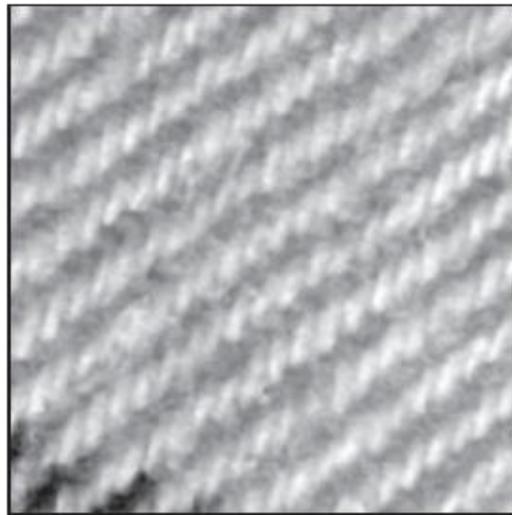
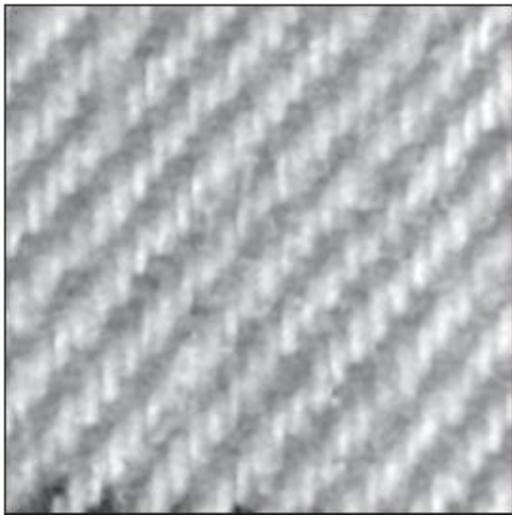
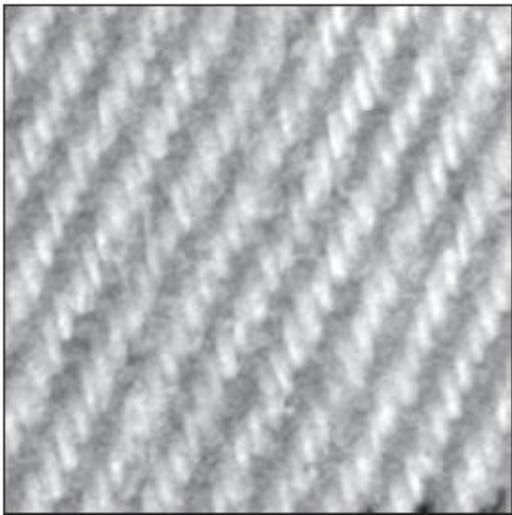


(d)

(e)

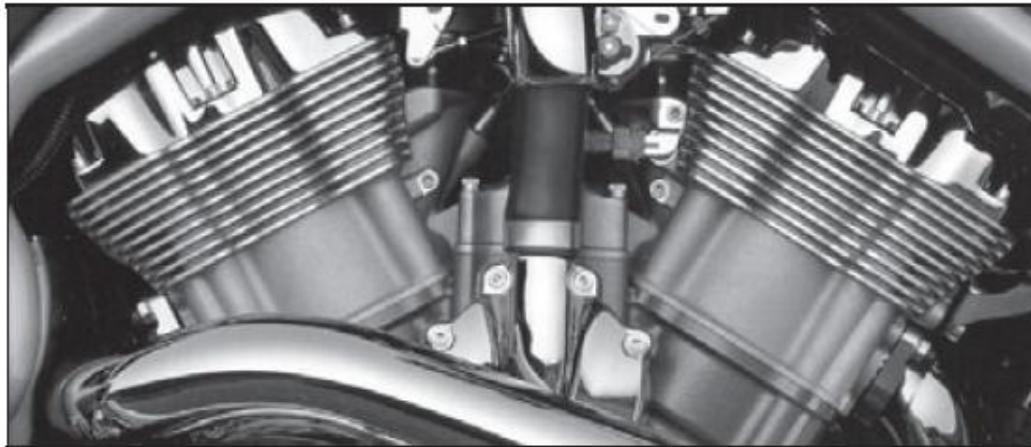
(f)

# DFT: Rotation

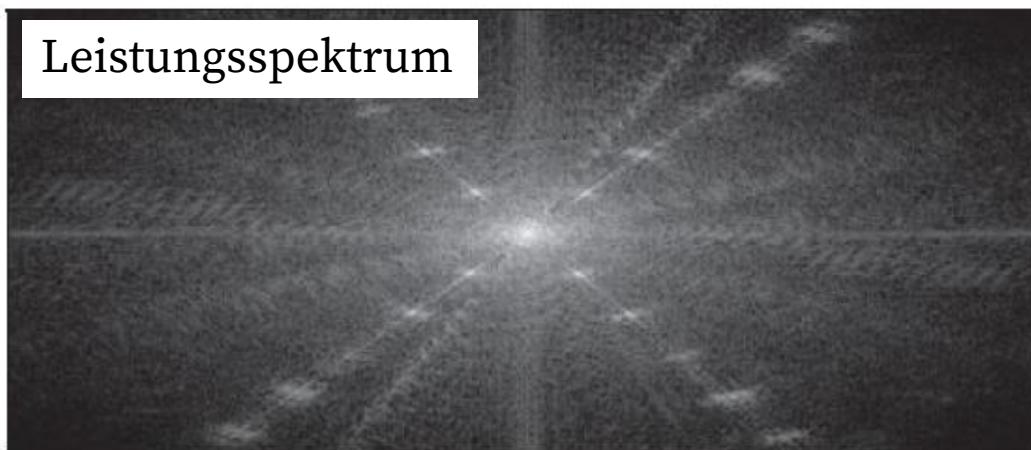


# Geometrische Normalisierung

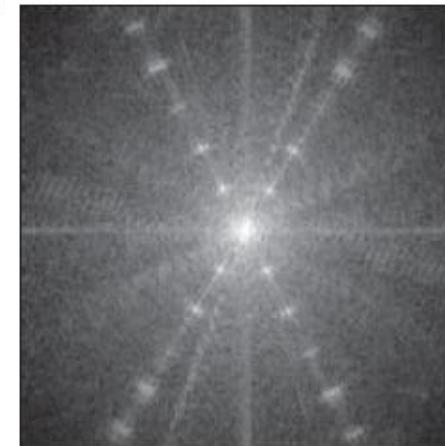
- Bei nichtquadratischen Bildern stimmen die Winkel im Orts- und Frequenzbereich erst nach einer Normalisierung überein



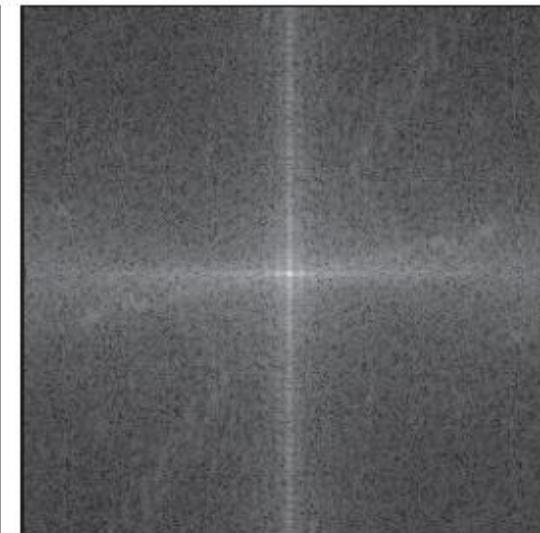
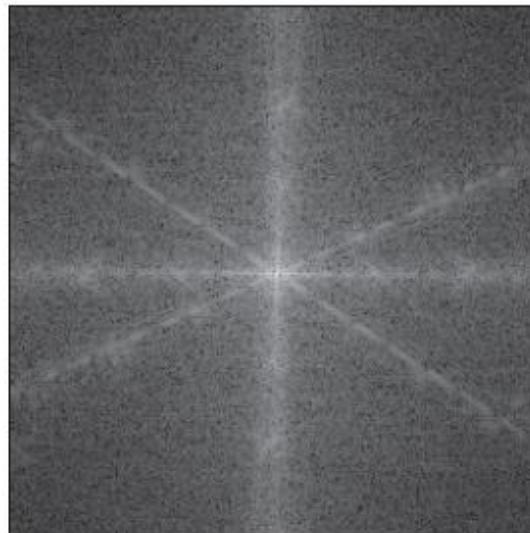
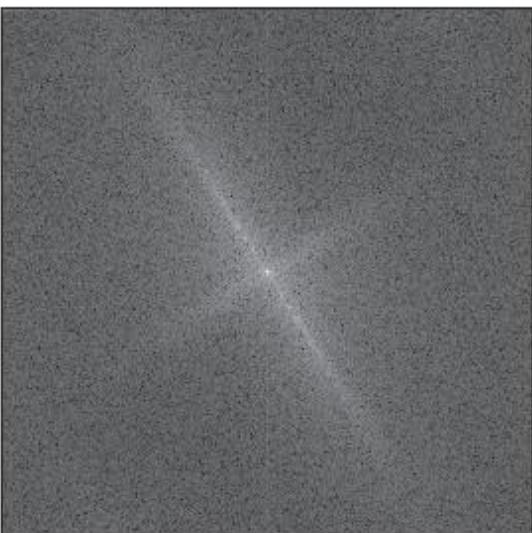
Originalbild



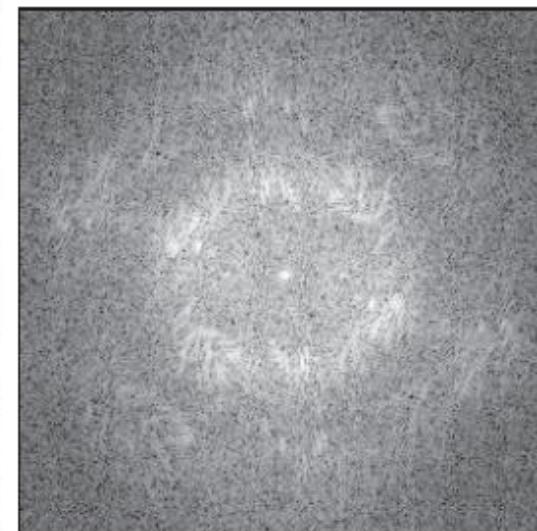
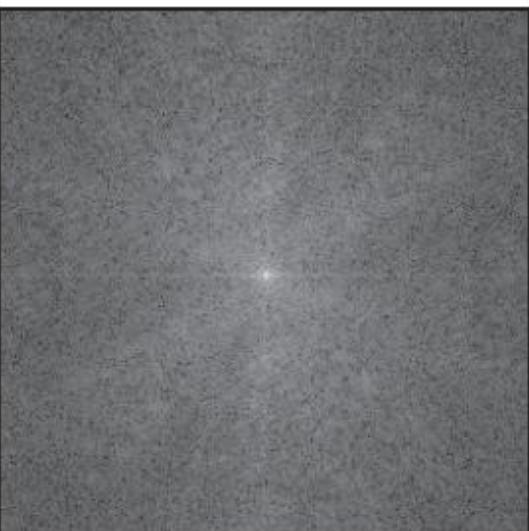
Normiertes Spektrum  
(gleiche Auflösung in x- und y-Achse)



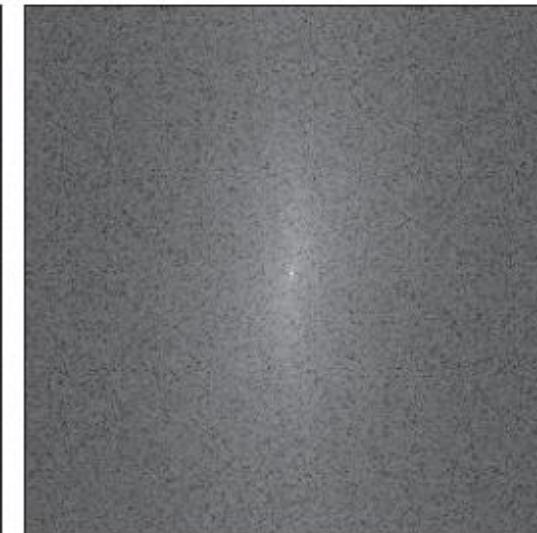
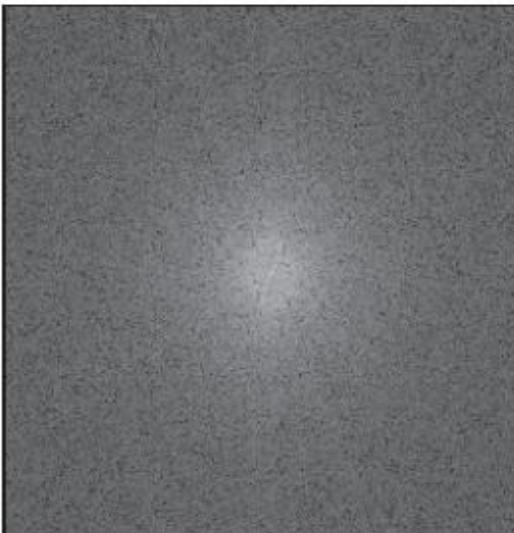
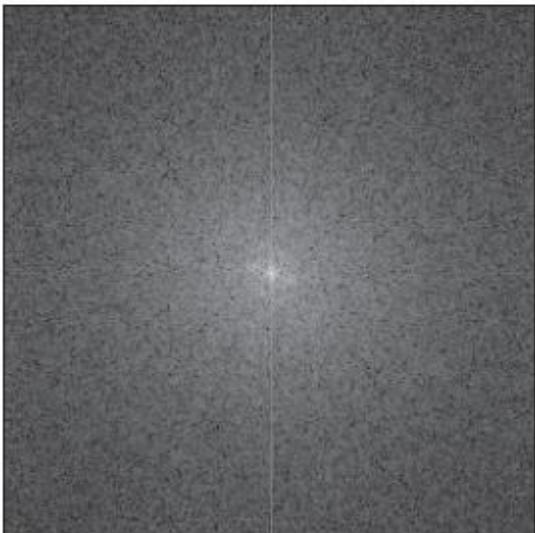
# DFT – Natürliche Bildinhalte



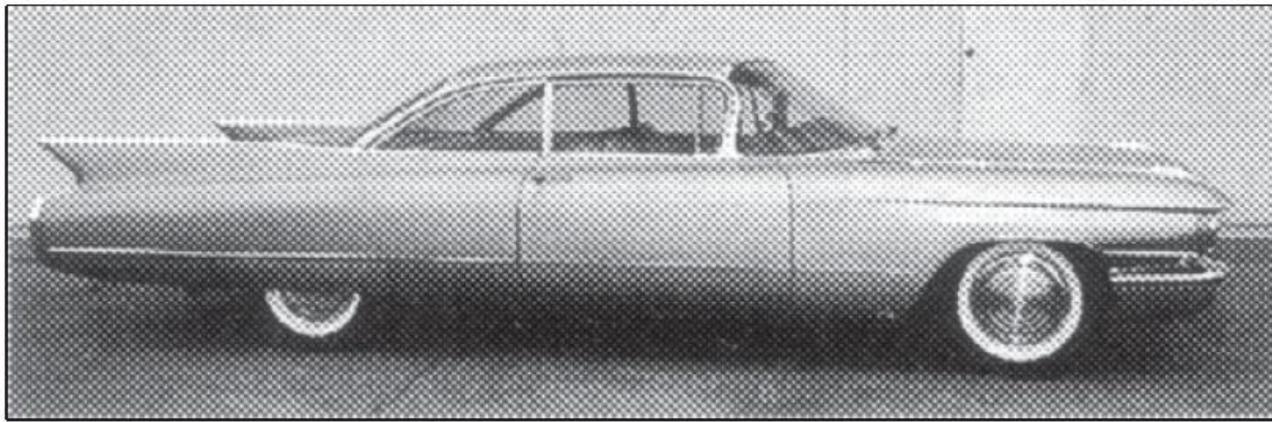
# DFT – Natürliche Bildinhalte, Wiederholung



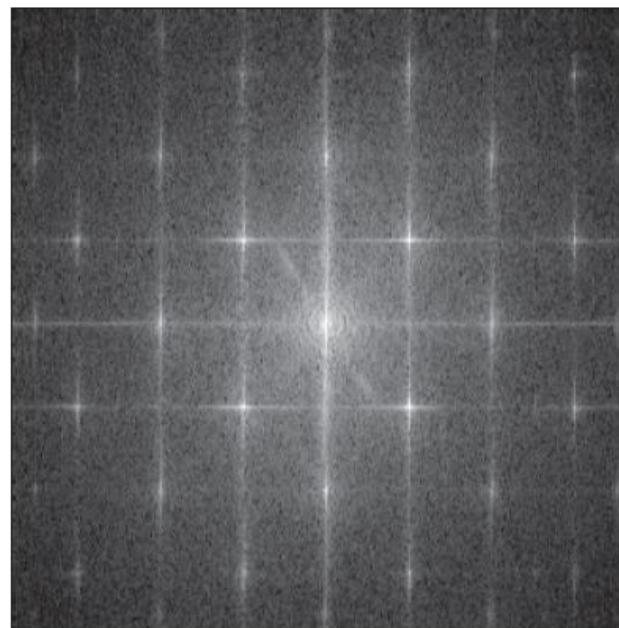
# DFT – Natürliche Bildinhalte, Wiederholung ist Relativ



# DFT – Rasterdruck

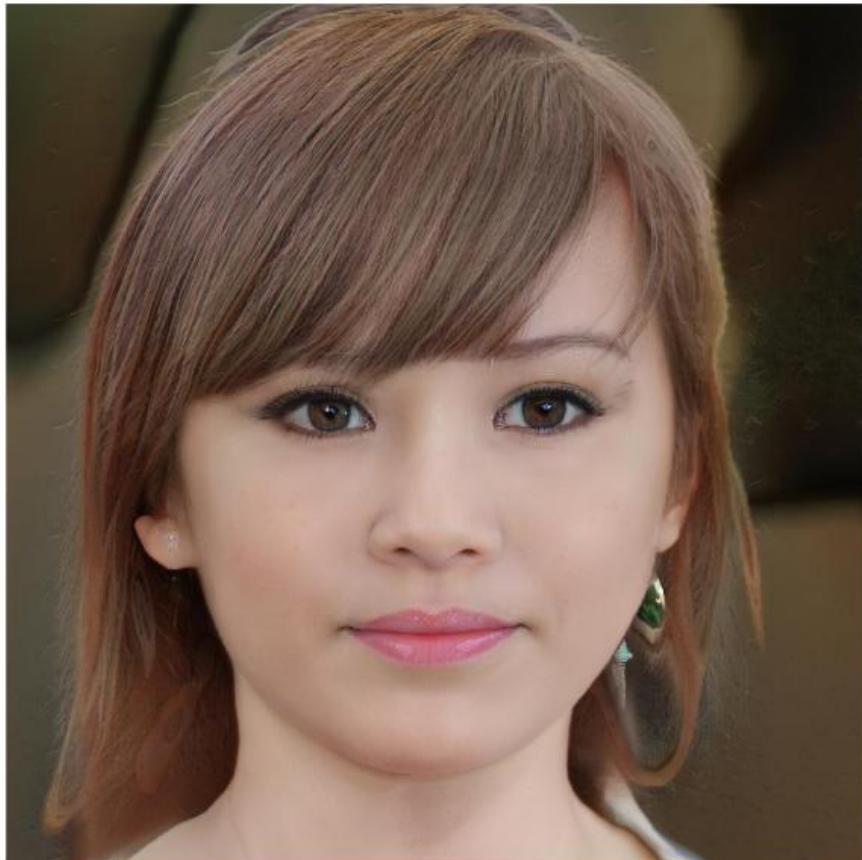


(a)



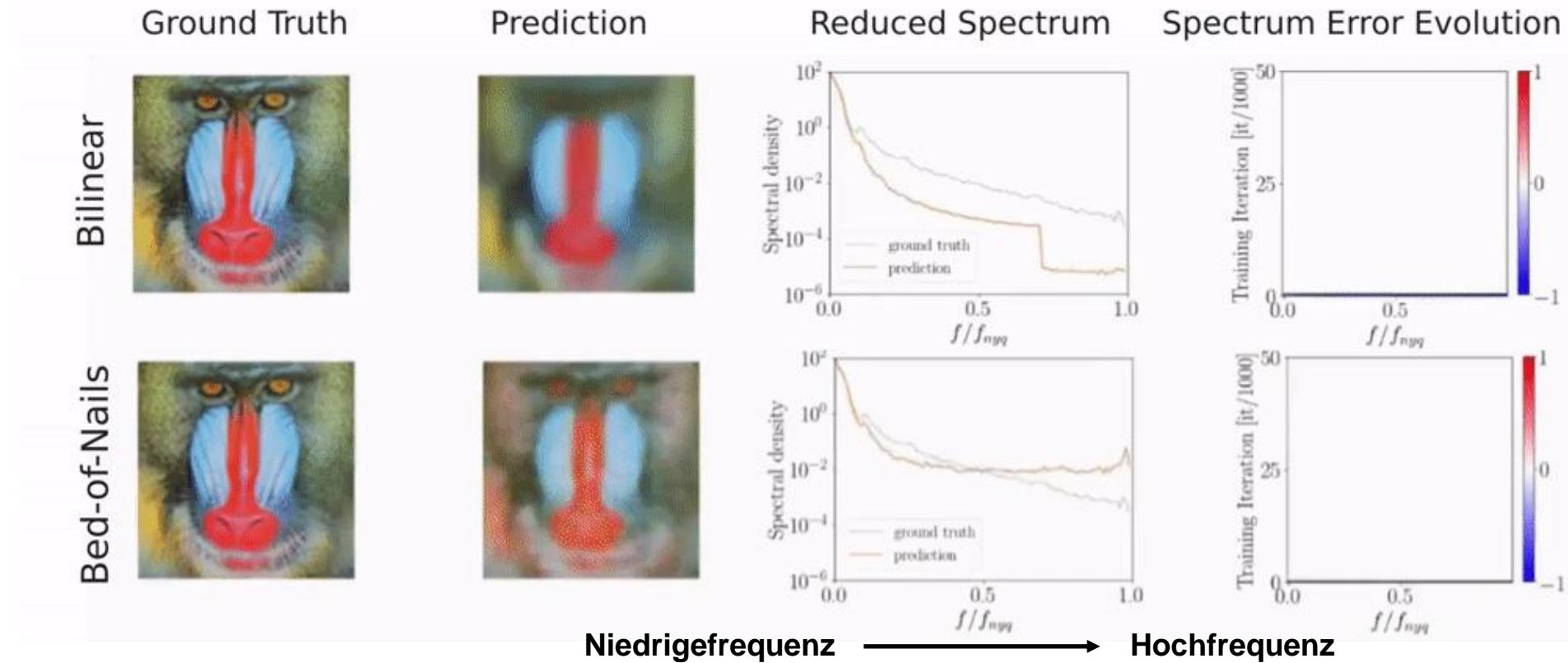
# DFT – Anwendung

- **Deep Fake** Bilderkennung:
  - Bilder werden mit Hilfe von generativen neuronalen Netzen (GAN) erzeugt



# DFT – Anwendung

- Deep Fake Bilderkennung:
  - (Noch) scheint es einen inhärenten Bias in hohen Frequenzen zu geben



Quelle: *On the Frequency Bias of Generative Models*, Schwarz, Liao, Geiger, NIPS, 2021

# Filterung im Frequenzbereich

# Filterung im Frequenzbereich

- Grundidee: Alle Information ist auch im Frequenzbereich enthalten
- Eine **Filterung** durch Faltung im Ortsbereich ist äquivalent zur **Multiplikation** im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}[g(x, y) * h(x, y)] = G(\omega_x, \omega_y) \cdot H(\omega_x, \omega_y)$$

- Das Vorgehen wird:

*Filterung im Ortsbereich*

Spatial domain: 
$$\boxed{g(u,v) * h(u,v)} = g'(u,v)$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\uparrow$   
 DFT                      DFT                      DFT $^{-1}$

Frequency domain: 
$$\boxed{G(u,v) \cdot H(u,v)} = G'(u,v)$$

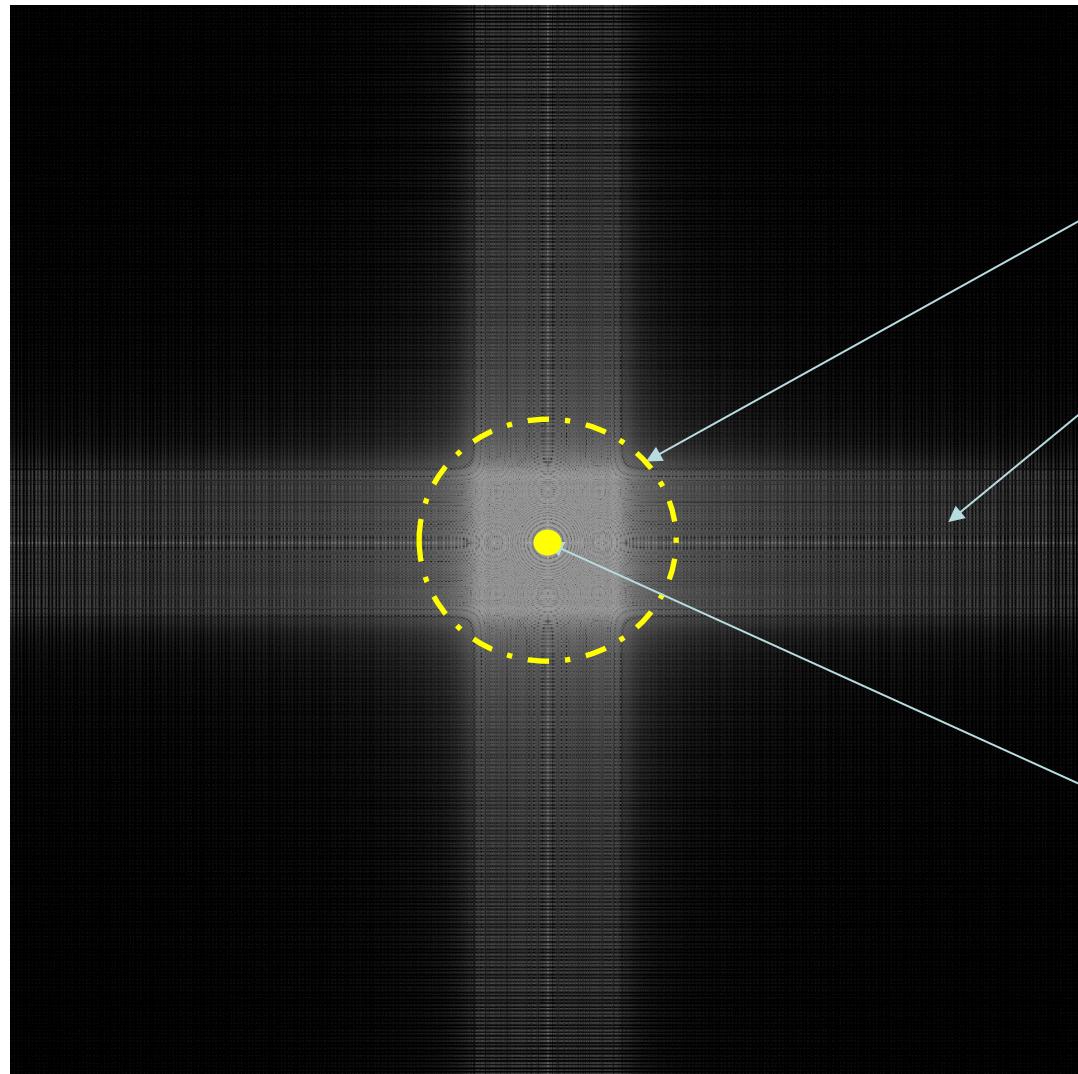
*Filterung im Frequenzbereich*

# Filterung im Frequenzbereich

- Dieses Vorgehen ist auch für die Komplexität von Vorteil, so bald die Filtermaske ein bestimmte Größe überschreitet:
  - Gegeben die Maskengröße  $N \times N$  und die Bildgröße  $M \times M$ , ergibt sich für die **Faltung** die Komplexität  $\mathcal{O}(M^2N^2)$
  - Die Berechnung in den Frequenzraum und wieder zurück weist die Komplexität  $\mathcal{O}(M \log_2 M)$  auf, die **Multiplikation** im Frequenzraum  $M^2$ 
    - Beide Operationen für Frequenzraum sind *unabhängig* von der Größe der Filtermaske!

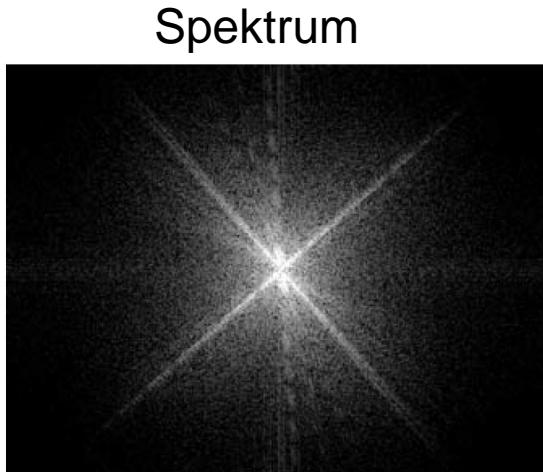
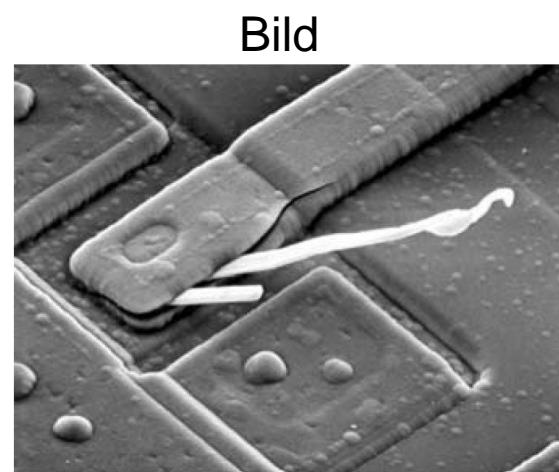
# Filterung im Frequenzbereich: Idee

Ein Spektrum

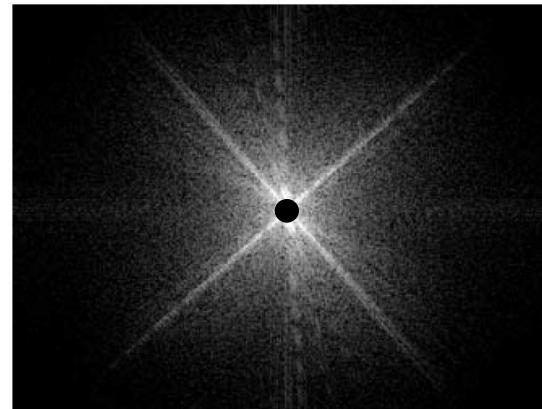


- Die Mitte des Spektrums entspricht den Niedrigfrequenzsignalen (niedrige variierende Intensitätsänderungen)
- die Ränder des Spektrums entsprechen Hochfrequenzsignalen
- $F(M/2, N/2)$ : der Durchschnittswert eines gesamten Bildes

# Filterung im Frequenzbereich: Idee

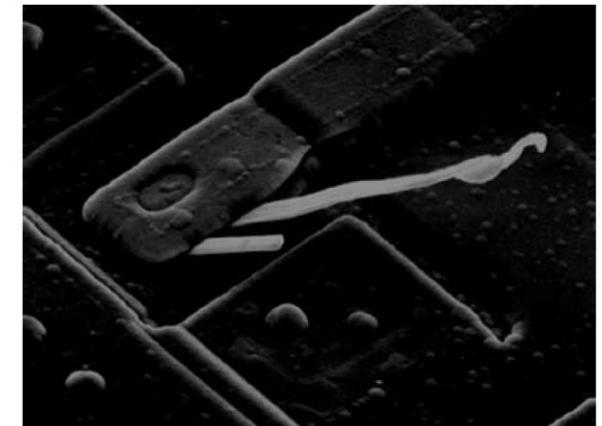


**Filterung  $H(u,v)$ :**  
 $F(M/2,N/2)=0$  setzen



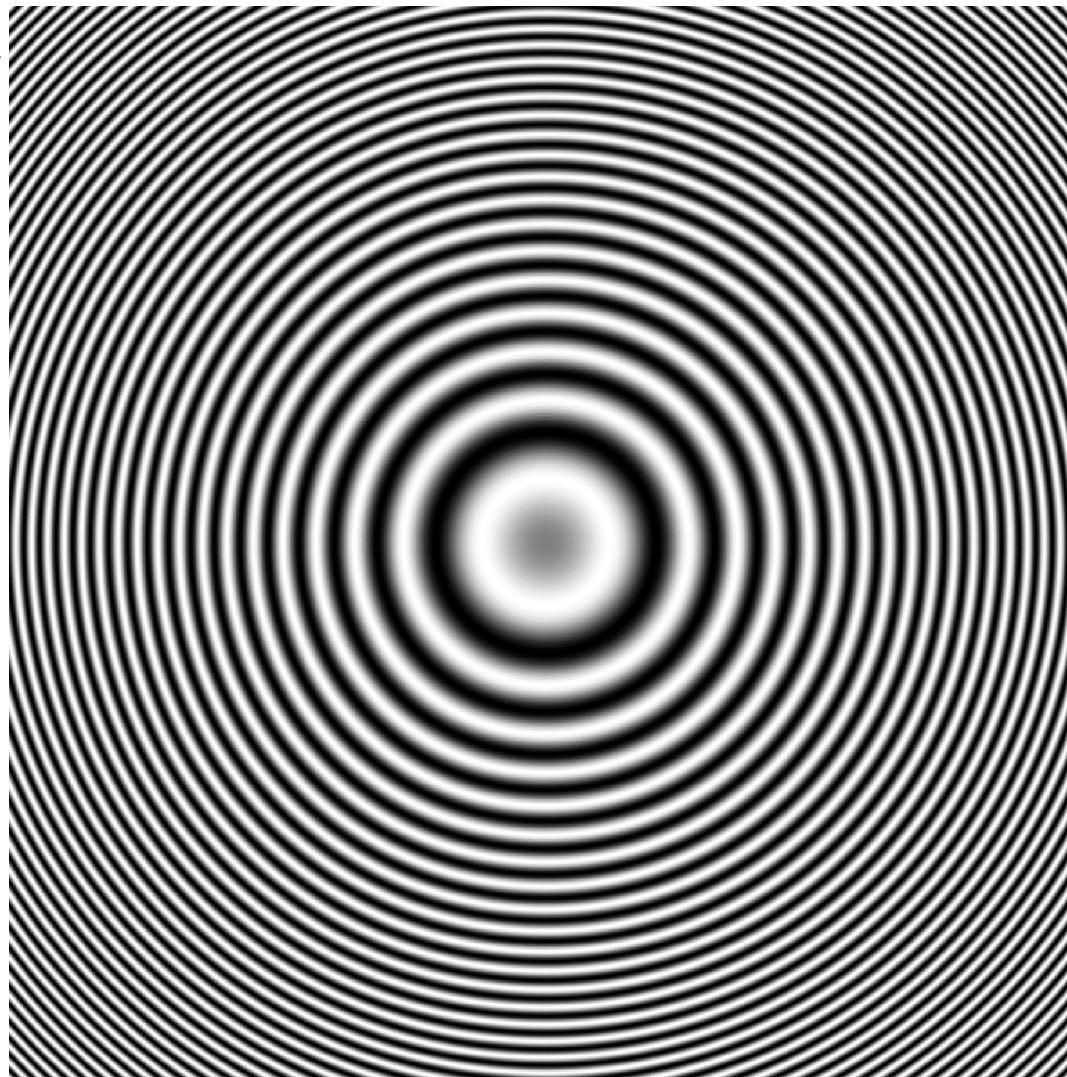
IDFT  $\mathcal{F}^{-1}$

Bild



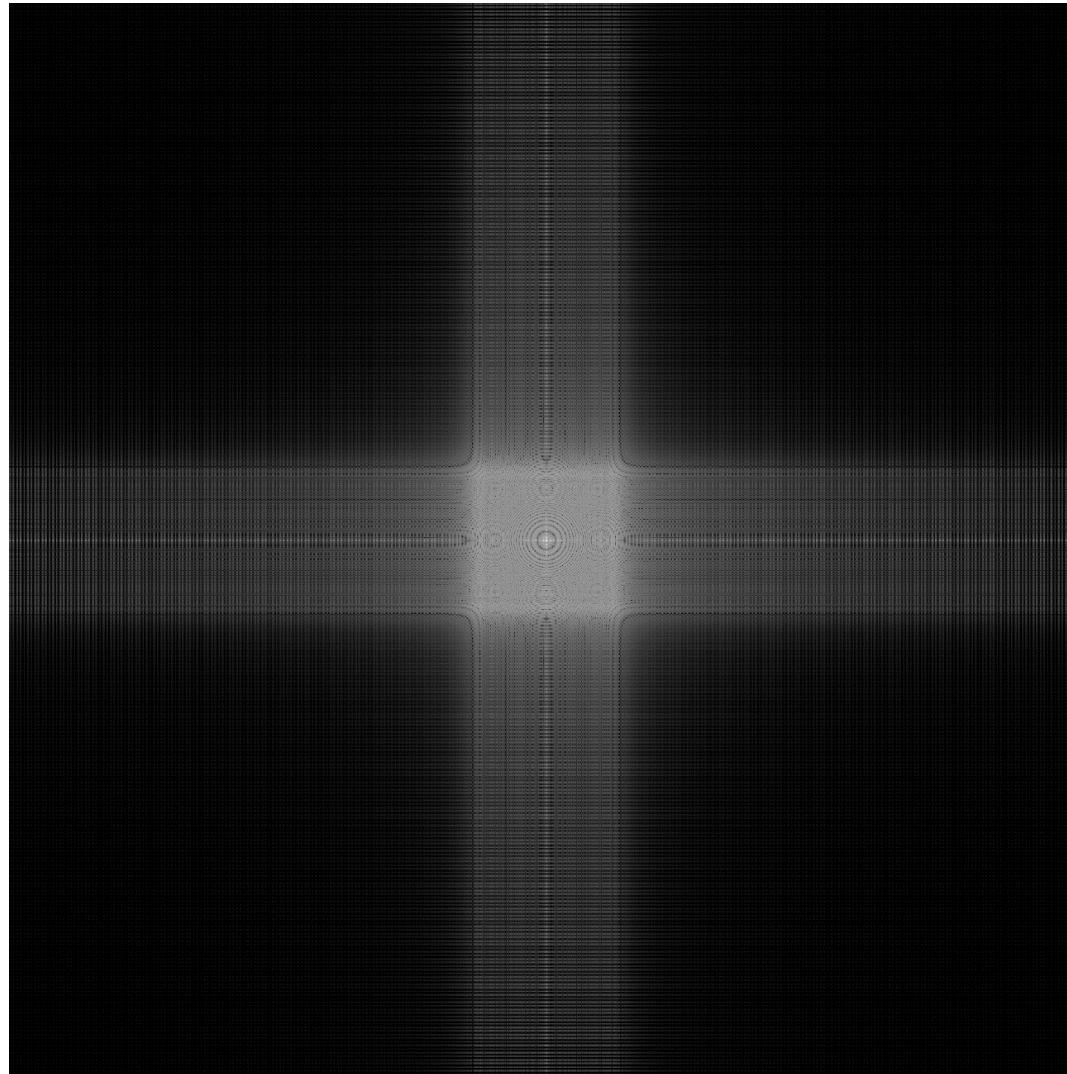
# Beispiel

Originalbild



# Beispiel:

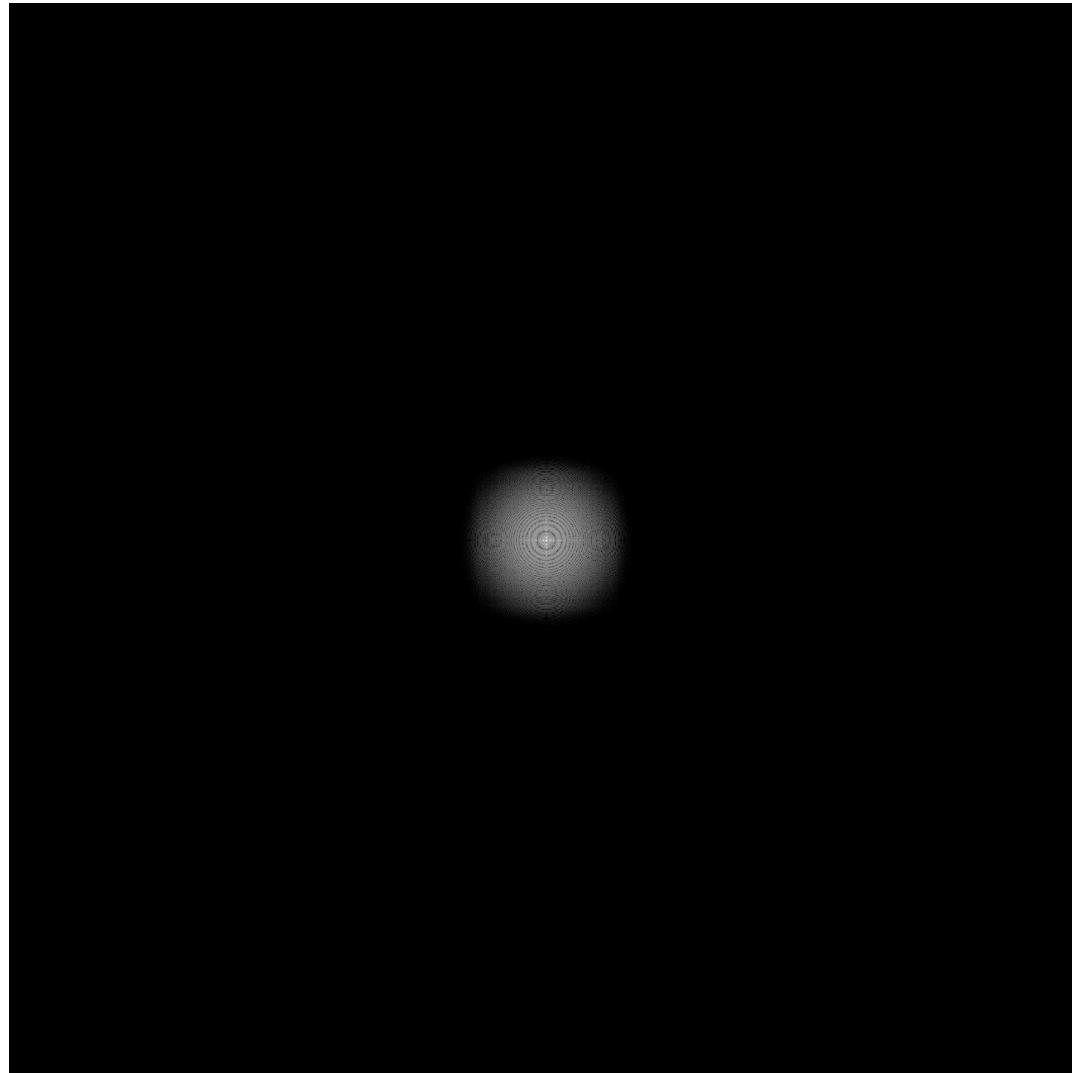
Fourierspektrum



# Beispiel

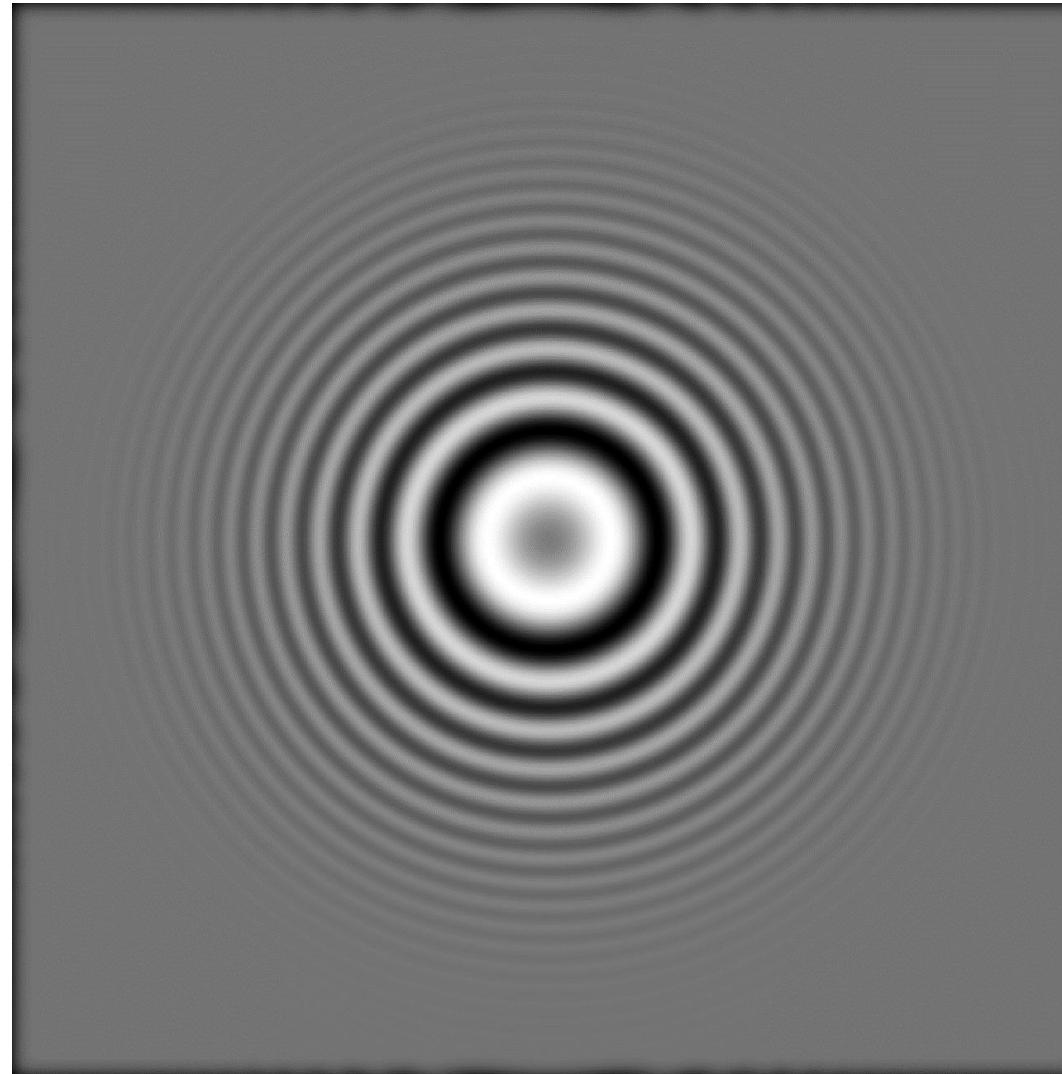
Gefiltertes  
Fourierspektrum

Frage: Tiefpass or  
Highpass?



# Beispiel

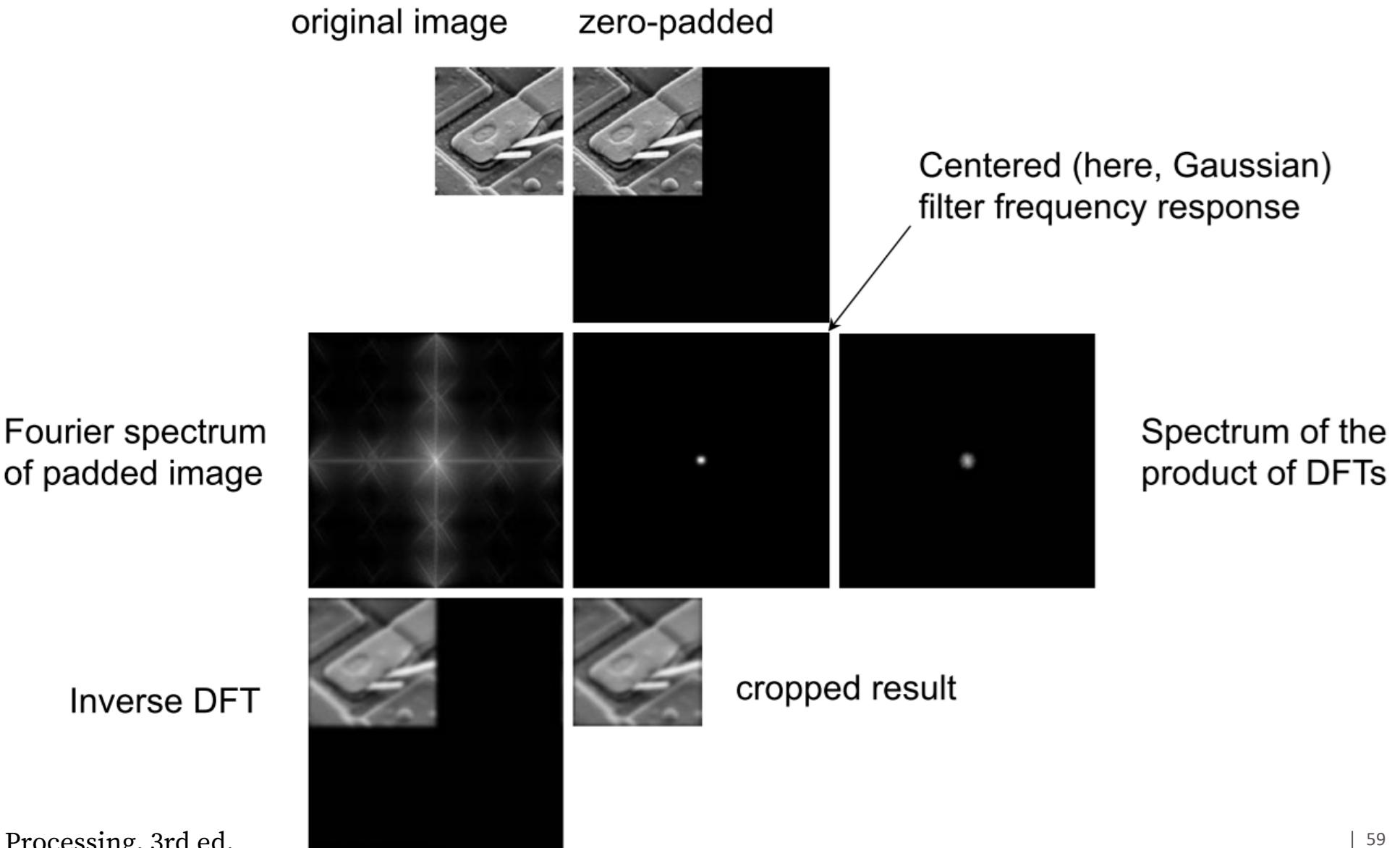
Zurücktransformiertes  
Bild



# Filterung im Frequenzbereich – Prozess

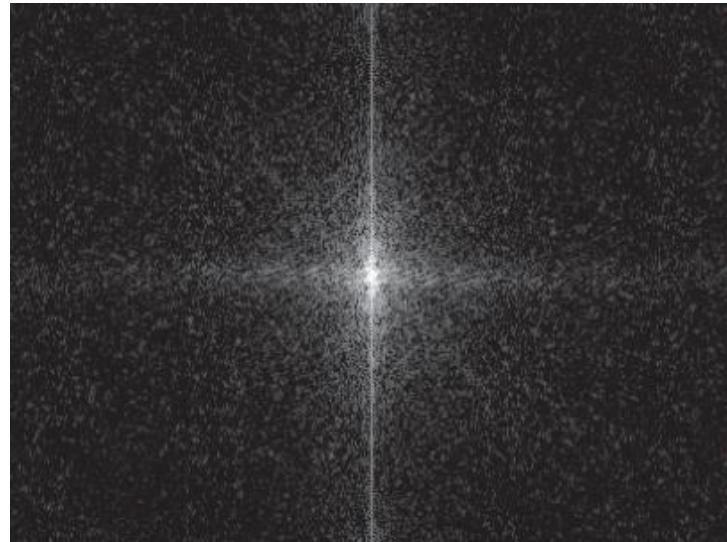
- Die Filterung im Frequenzbereich erfordert folgende Schritte:
  - Für das Originalbild sollte Zero-Padding auf die doppelte Höhe und Breite durchgeführt werden (optional)
  - Die DFT wird auf dem Bild ausgeführt und anschließend zentriert, liefert  $G$
  - Die DFT der Filtermaske wird ausgeführt (gleiche Größe wie Bild), ergibt  $H$  (oder, man konstruiert  $H$  entsprechend)
  - Die elementweise Multiplikation von  $G$  und  $H$  wird durchgeführt
  - Das Ergebnis wird mit der IDFT in den Bildbereich zurücktransformiert

# Filterung im Frequenzbereich



# Periodische Bildmuster: hochfrequente Sprünge

- Die DFT macht implizit die Annahme eines periodischen Signals
- Bildränder mit hohem Kontrast, z.B. der Übergang von Himmel zu Erde, entsprechen hochfrequenten Sprüngen



# Filterung im Frequenzbereich

- Im Frequenzbereich können diverse Filter entworfen werden
  - **Hochpass Filter**: Niedrige Frequenzen werden entfernt
  - **Tiefpass Filter**: Hohe Frequenzen werden entfernt
  - **Bandpass Filter**: Frequenzen in einem bestimmten breiten Bereich werden beibehalten, andere Frequenzen werden entfernt.
  - **Notch-Filter** (KerbfILTER): Frequenzen innerhalb eines engen Frequenzbereiches werden zugelassen oder ausgefiltert.

# Filterung im Frequenzbereich – Tiefpass

- Der einfachste Frequenzfilter setzt alle ungewünschten Frequenzen zu Null und lässt die gewünschten Frequenzen ungehindert passieren.
  - Dieser Filtertyp wird *idealer Filter* genannt, da die abrupten Frequenzübergänge nicht mit analogen Schaltkreisen realisiert werden können.
- Die Frequenzantwort  $H_{LP}(u,v)$  eines idealen Tiefpassfilters ist definiert als

$$H_{LP}(u, v) = \begin{cases} 1, & D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

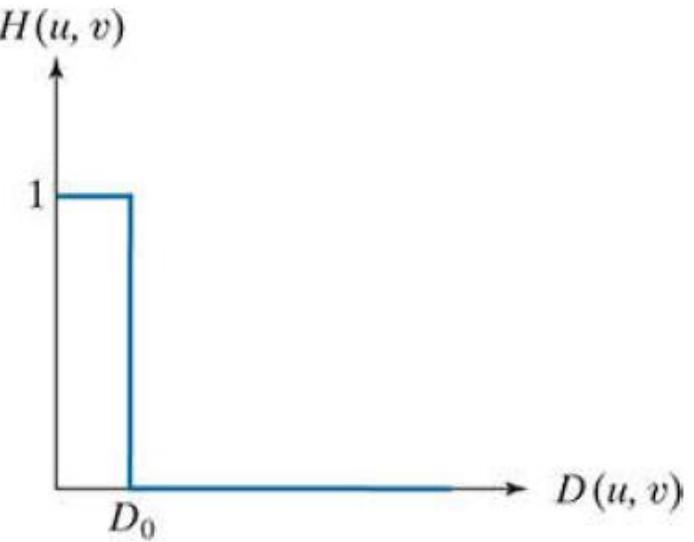
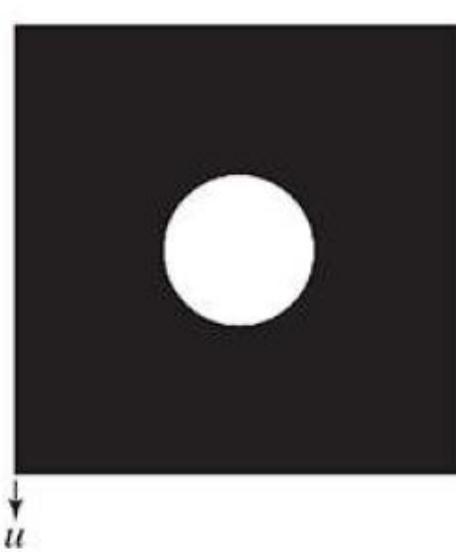
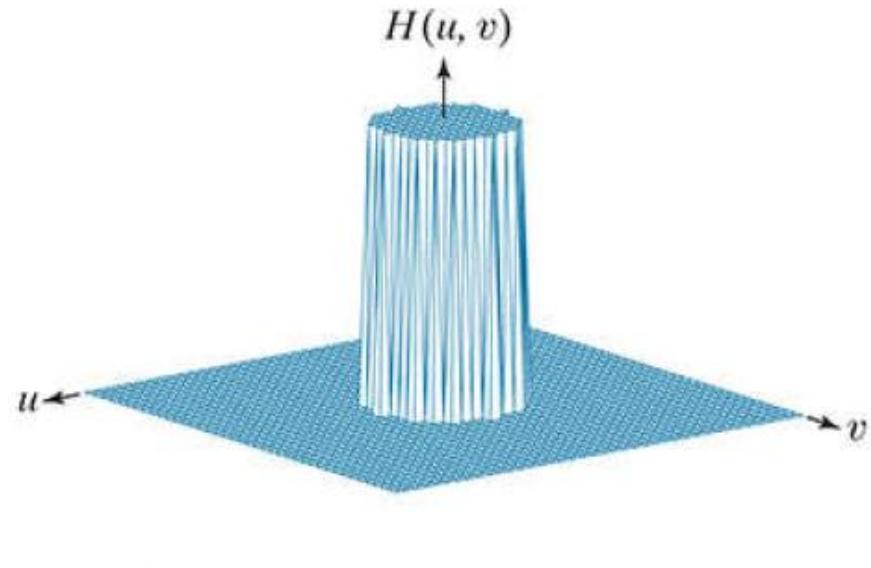
mit der Grenzfrequenz (*cutoff frequency*)  $D_0$  und dem Abstand

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

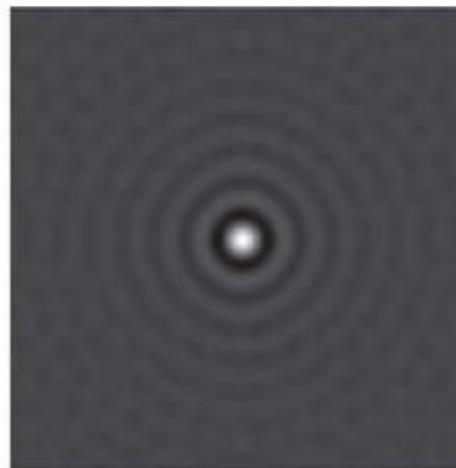
des Punktes  $u, v$  zum Koordinatenursprung

# Filterung im Frequenzbereich – Idealer Tiefpass

Übertragungsfunktion des idealen Tiefpassfilters **im Frequenzbereich**



Übertragungsfunktion  
**im Ortsbereich**



# Filterung im Frequenzbereich – Gauß-Tiefpass

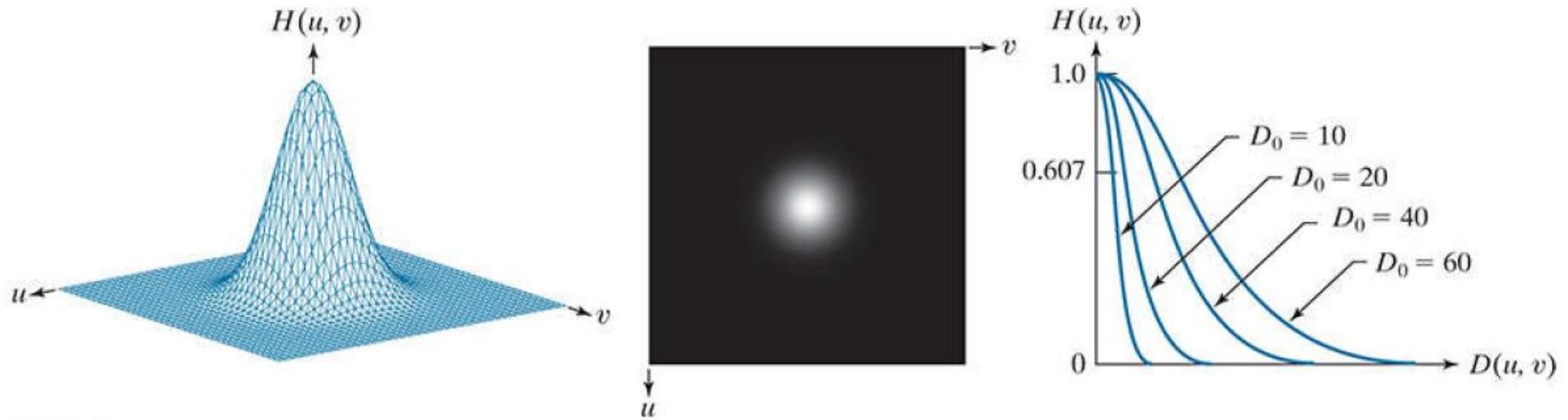
- Auch im Frequenzbereich weisen gaußförmige Tiefpassfilter Vorteile auf
- Die Übergangsfunktion entspricht einer zweidimensionalen Gaußverteilung (ohne Normierung) hat die Form:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2 \cdot D_0^2}$$

- In dieser wird  $\sigma$  durch  $D_0$  ersetzt.  $D_0$  ist ein Maß für die Verteilung um den Mittelpunkt.
- Dementsprechend sinkt die Filterantwort bei der Grenzfrequenz  $D(u, v) = D_0$  auf ca. 67% der Maximalamplitude ab

# Filterung im Frequenzbereich – Gauß Tiefpass

Übertragungsfunktion des Gauß-Tiefpassfilters im Frequenzbereich



Die Übertragungsfunktion im Ortsbereich ist wiederum eine Gaußfunktion!

# Filterung im Frequenzbereich – Hochpass

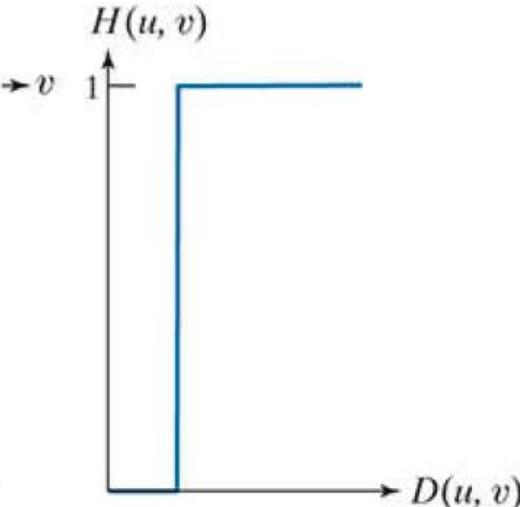
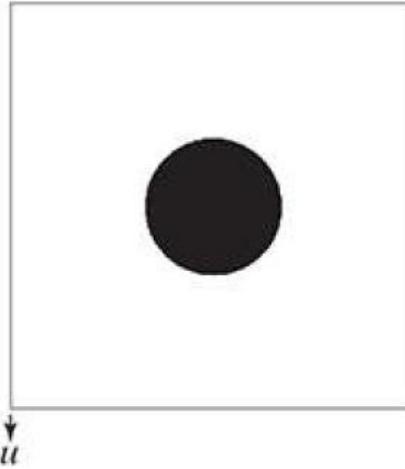
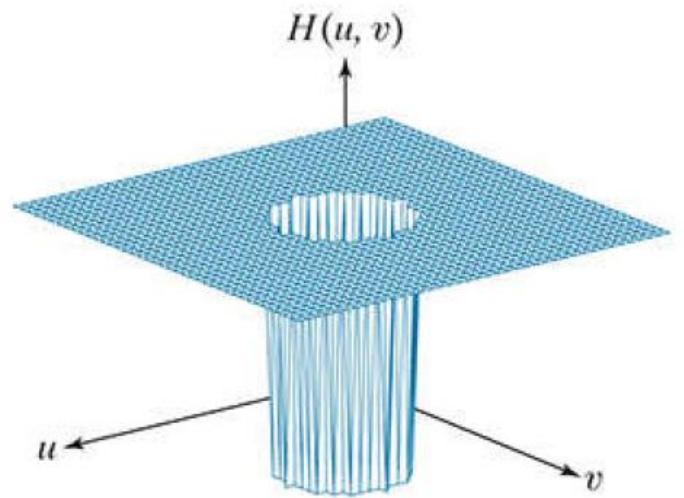
- Das Gegenteil der Bildglättung ist die Bildschärfung. Kontrastreiche Übergänge, die oftmals Kanten entsprechen, sollen verstärkt, nicht entfernt werden.
- Frequenzen vom Zentrum entfernt werden nicht gedämpft
- Niedrige Frequenzen nahe dem Ursprung werden gedämpft
- Dieser Filtertyp entspricht einem **Hochpassfilter**
- Dies kann durch die Konstruktion der Filterantwort  $H_{\text{HP}}(u, v)$  im Frequenzbereich bzw.  $h_{\text{HP}}(x, y)$  im Ortsbereich erreicht werden:

$$H_{\text{HP}} = 1 - H_{\text{LP}}(u, v) \quad \bullet \circ \quad h_{\text{HP}} = \delta(x, y) - h_{\text{LP}}(x, y)$$

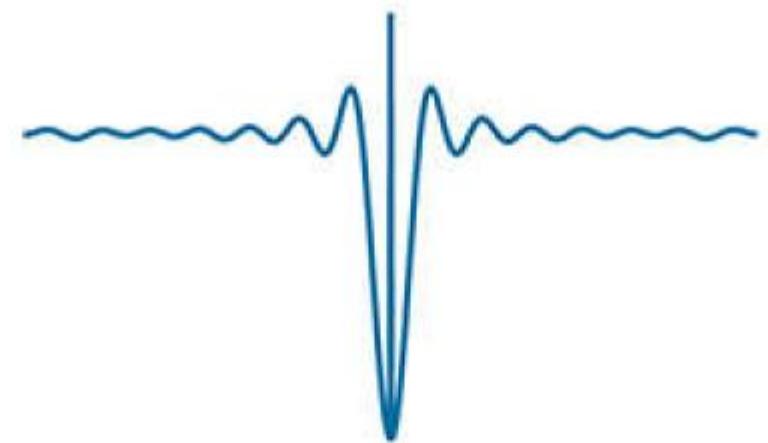
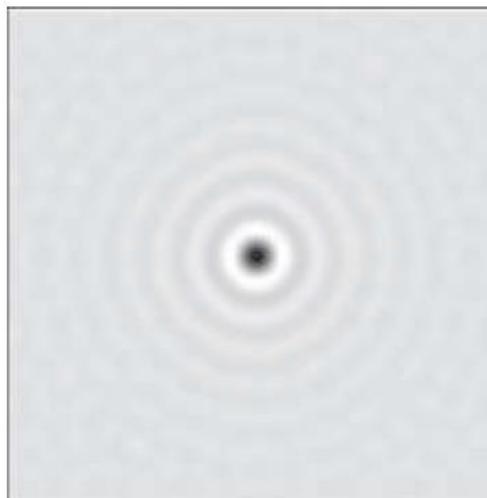
- Hierin bezeichnen  $H_{\text{LP}}(u, v)$  bzw.  $h_{\text{LP}}(x, y)$  die Frequenz- und Ortsantwort eines Tiefpassfilters
  - Auf diese Art können ideale Hochpassfilter erstellt werden

# Filterung im Frequenzbereich – Idealer Hochpass

Übertragungsfunktion des idealen Hochpassfilters im Frequenzbereich

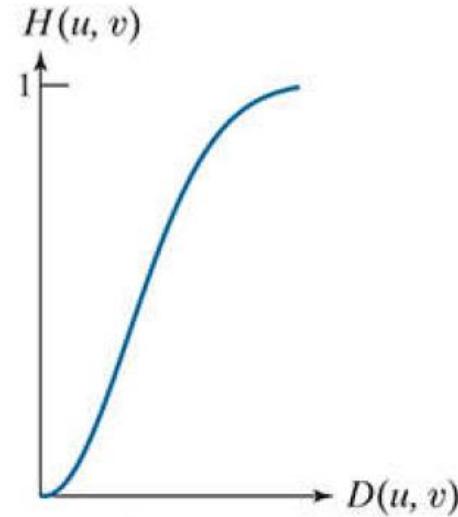
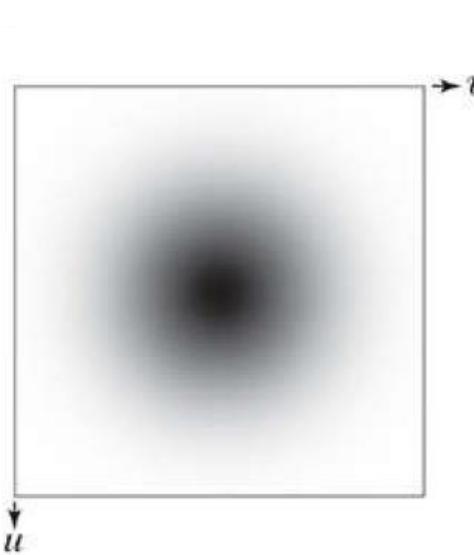
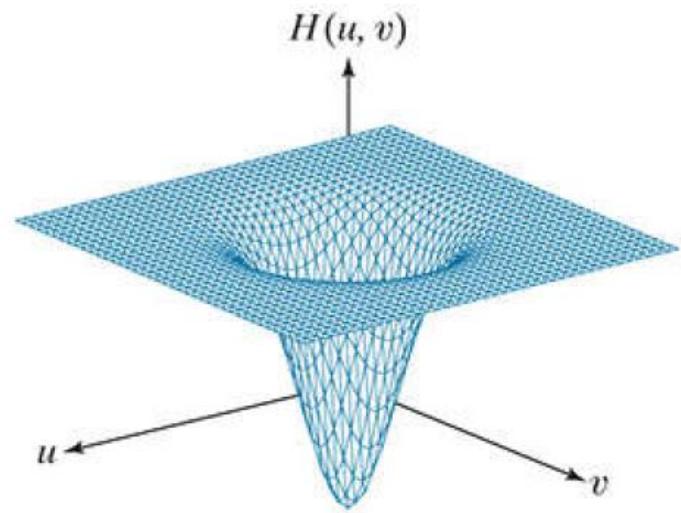


Übertragungsfunktion  
im Ortsbereich

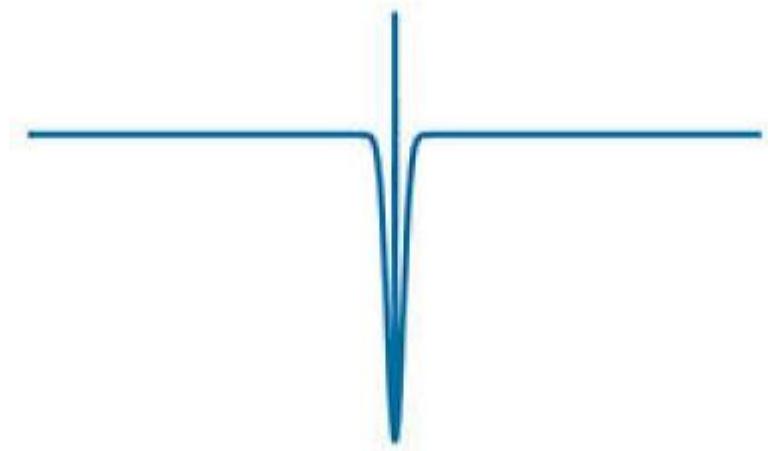
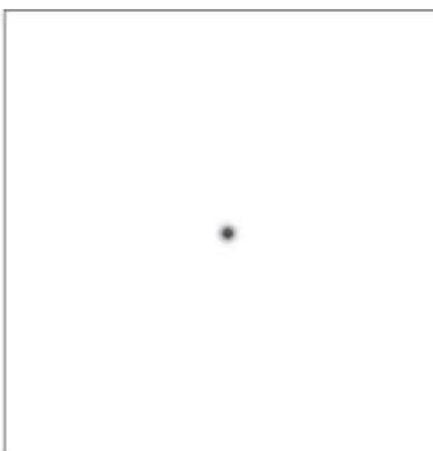


# Filterung im Frequenzbereich – Gauß'scher Hochpass

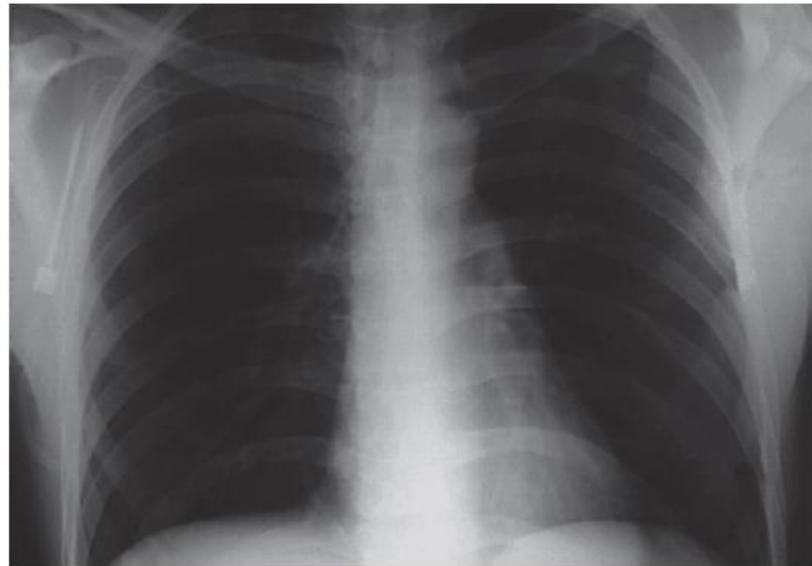
Übertragungsfunktion des gauß'schen Hochpassfilters im Frequenzbereich



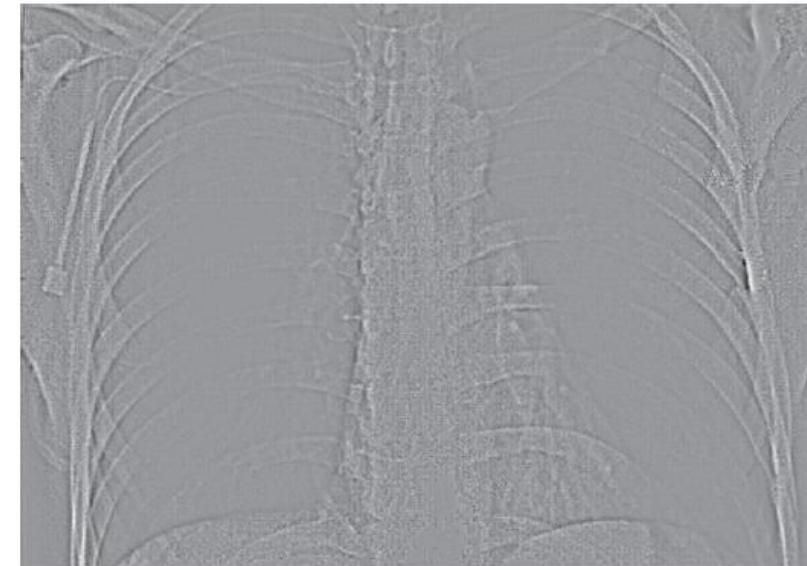
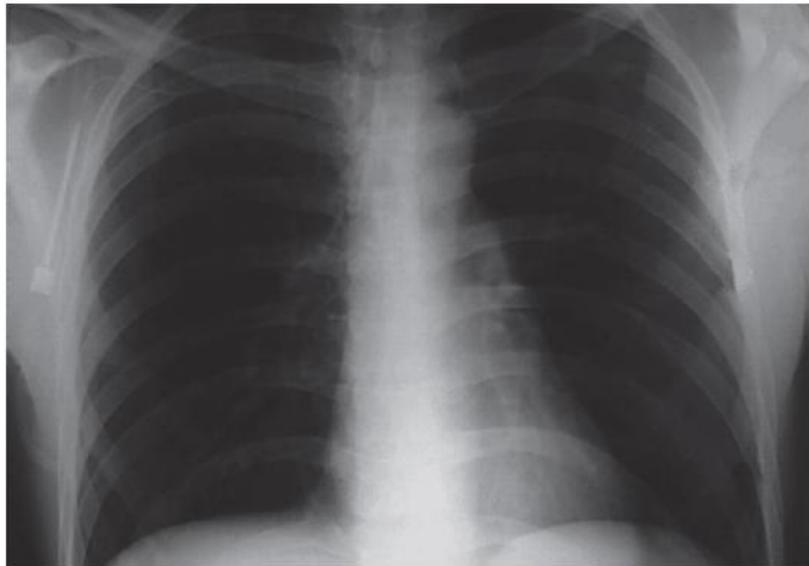
Übertragungsfunktion  
im Ortsbereich



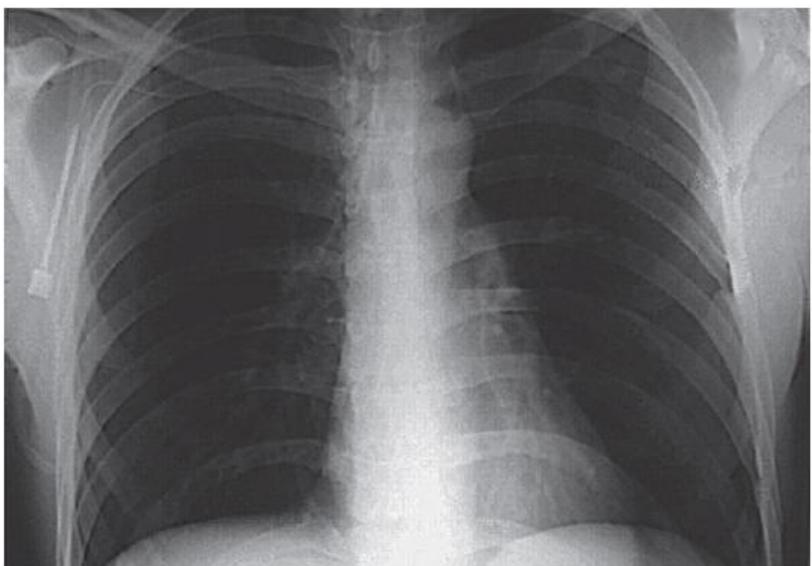
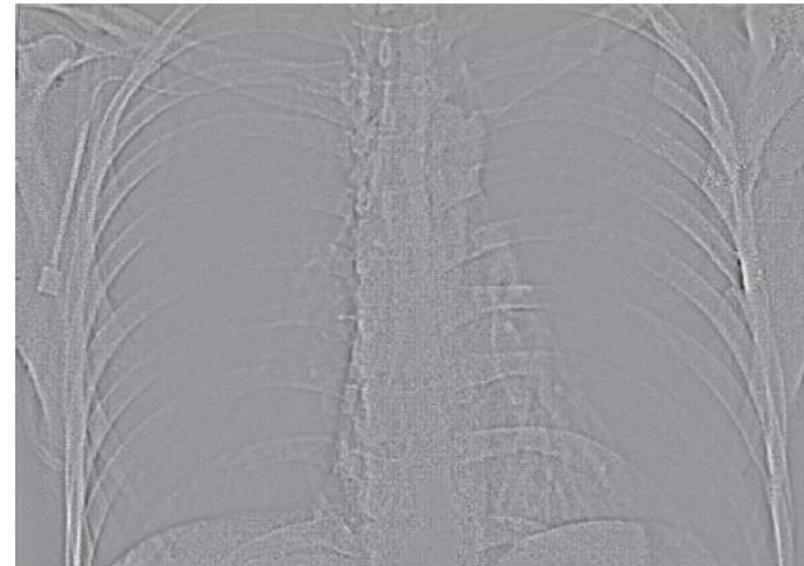
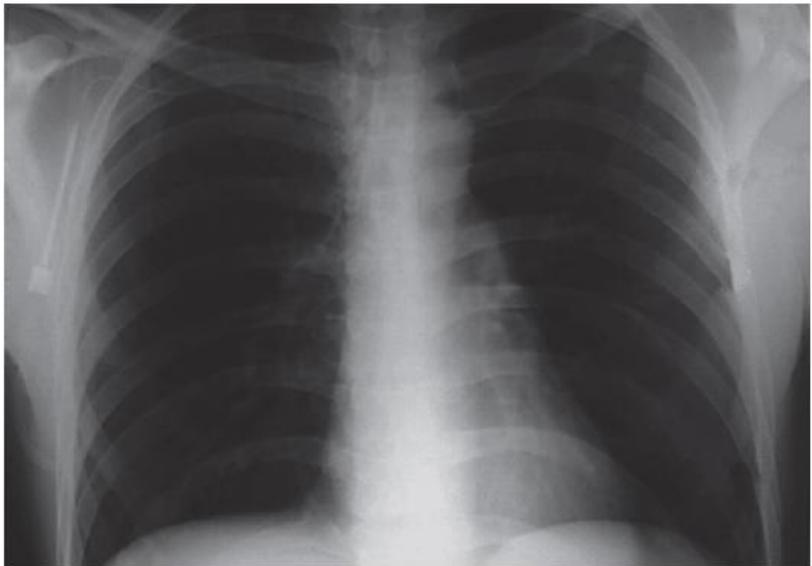
# Beispiel – Gauß-Hochpass



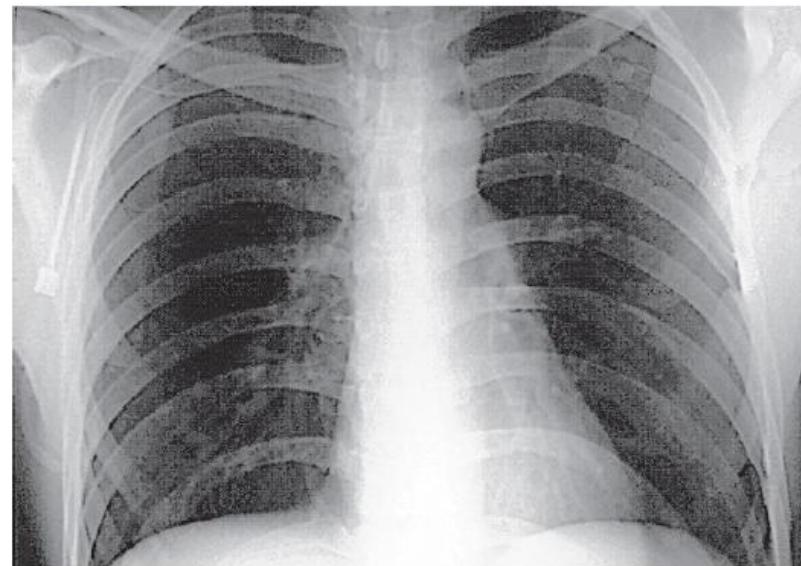
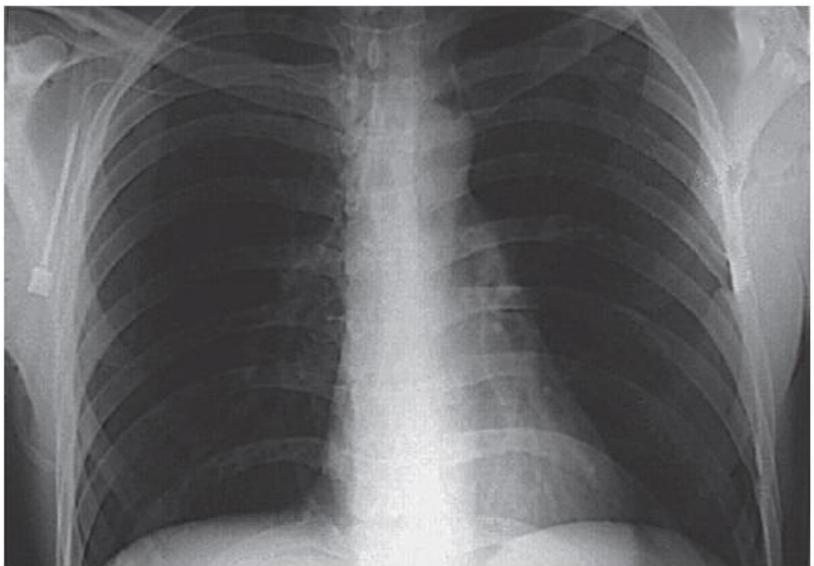
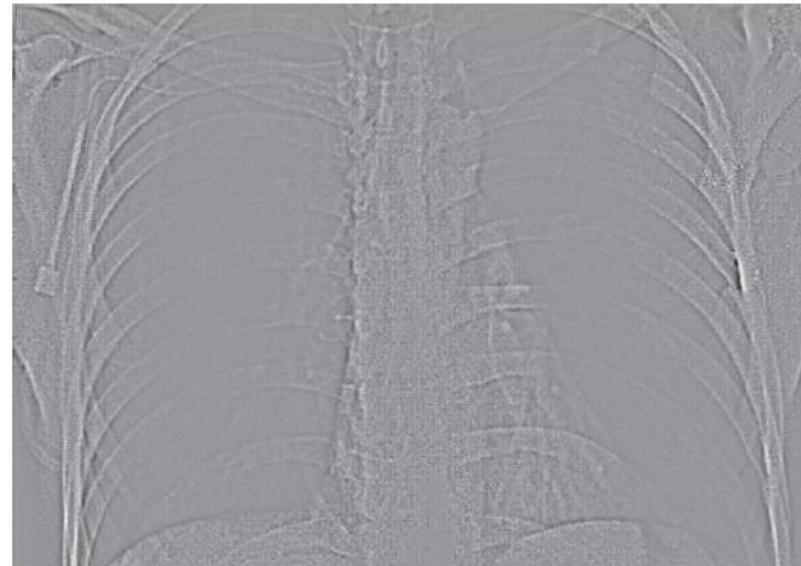
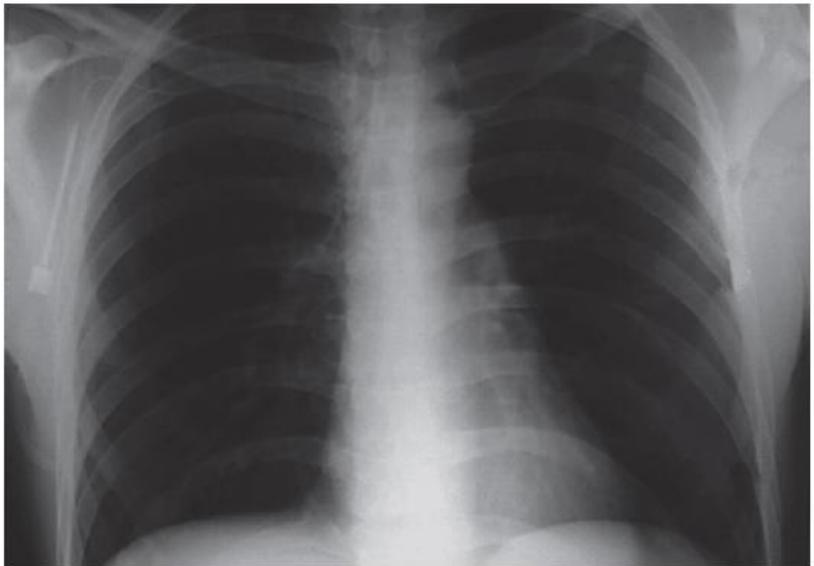
# Beispiel – Gauß-Hochpass



# Beispiel – Gauß-Hochpass



# Beispiel – Gauß-Hochpass

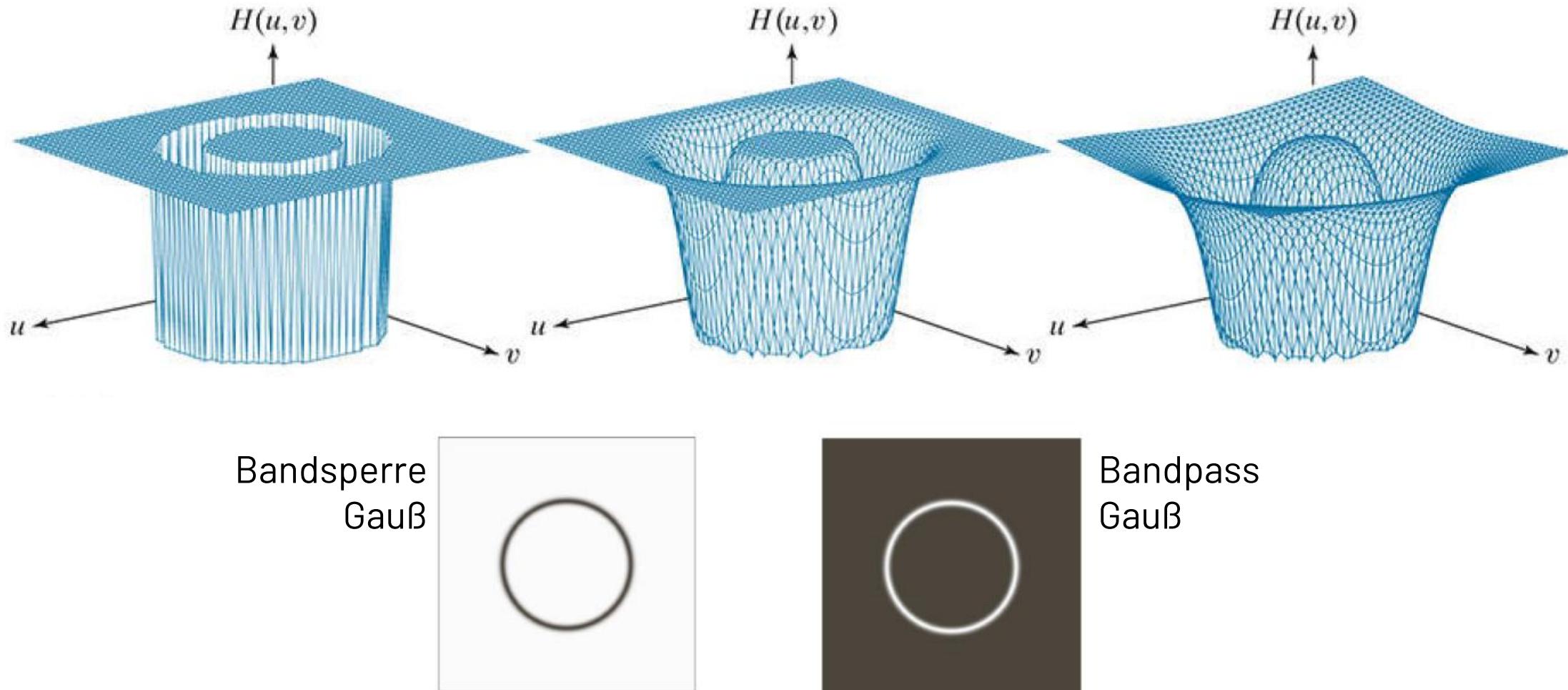


# Bandpassfilter und Bandsperren

- Bandsperren dämpfen eine bestimmte Frequenz im Signal
- Bandpassfilter dämpfen alle Frequenzen außer der gewünschten
- Bandpass und Bandsperre sind isotrop, d.h. im entsprechenden Band werden die Frequenzen in alle Richtungen gleichmäßig gedämpft oder verstärkt
- Die Übergänge der Bänder können wiederum ideal oder mit Gaußfunktionen erreicht werden

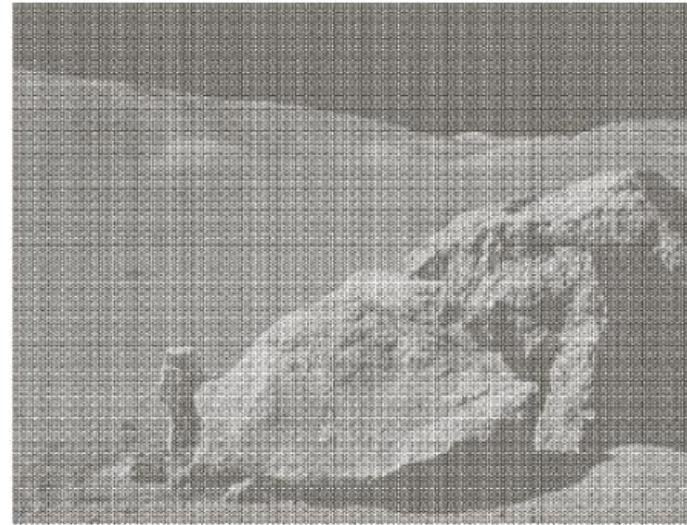
# Bandpassfilter und Bandsperren

Bandsperren – Ideal, Gauß und Butterworth

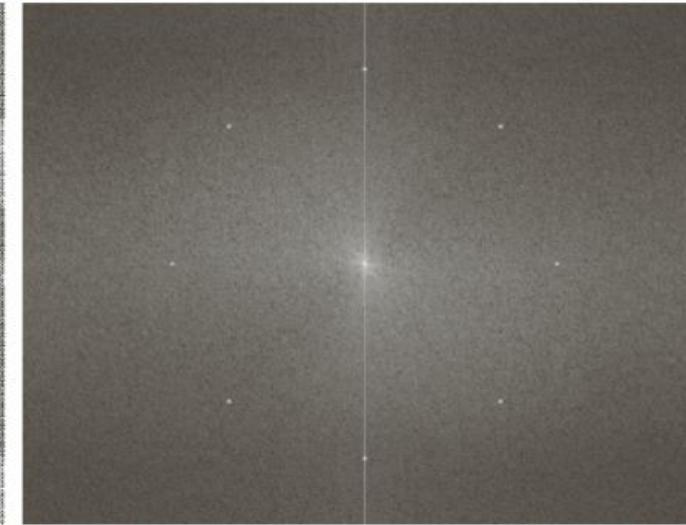


# Gauß'sche Bandsperre – Anwendung

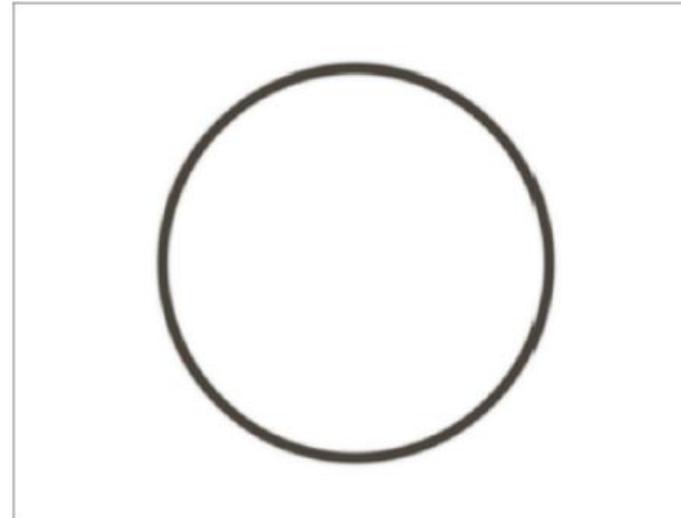
Originalbild  
mit periodischem  
Rauschen



Leistungsspektrum



Frequenzantwort  
der Bandsperre

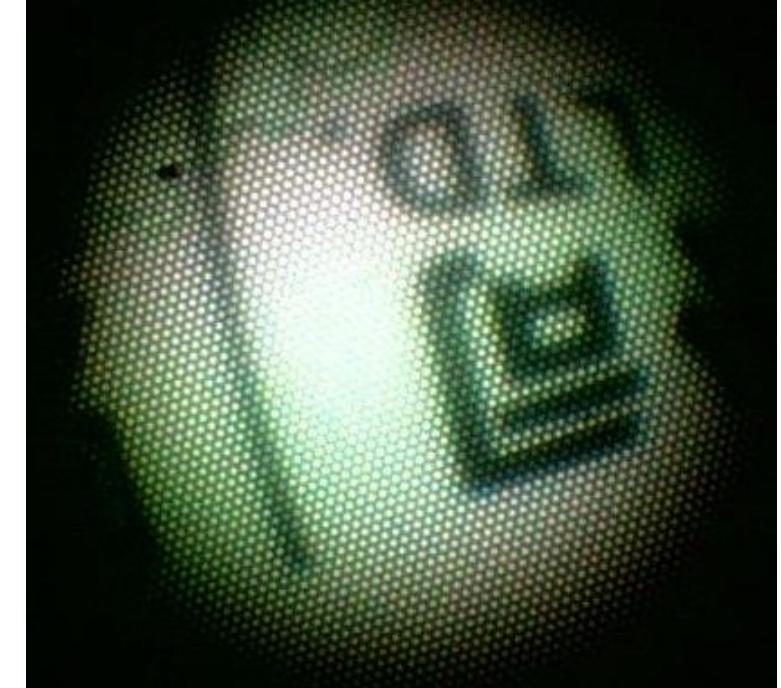


Gefiltertes  
Bild

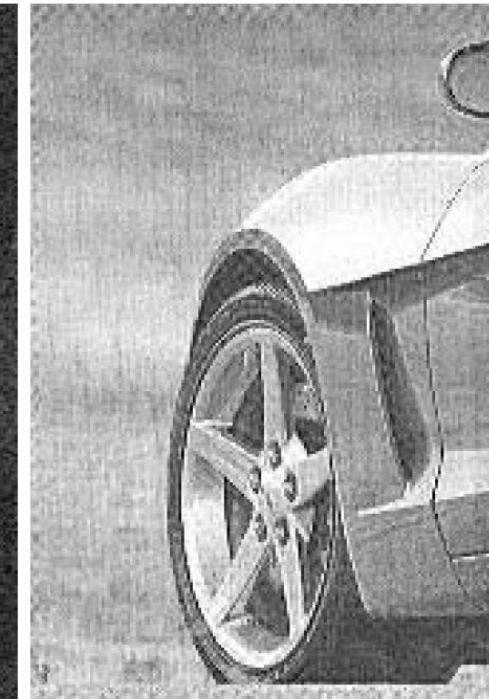
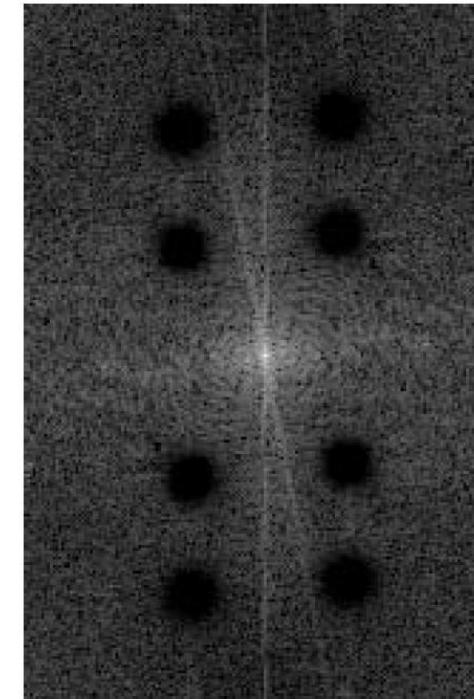
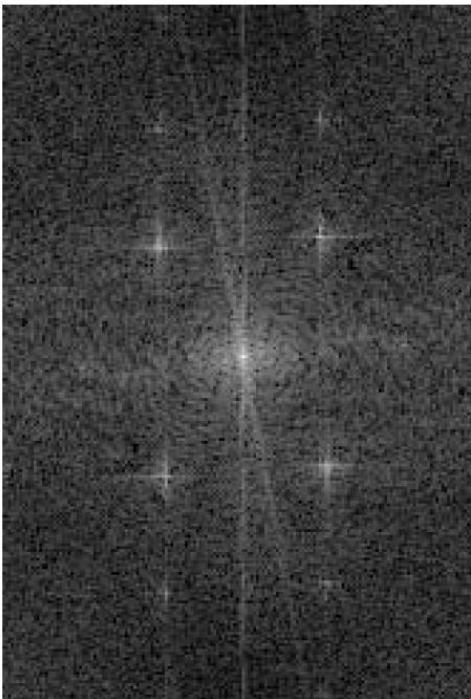
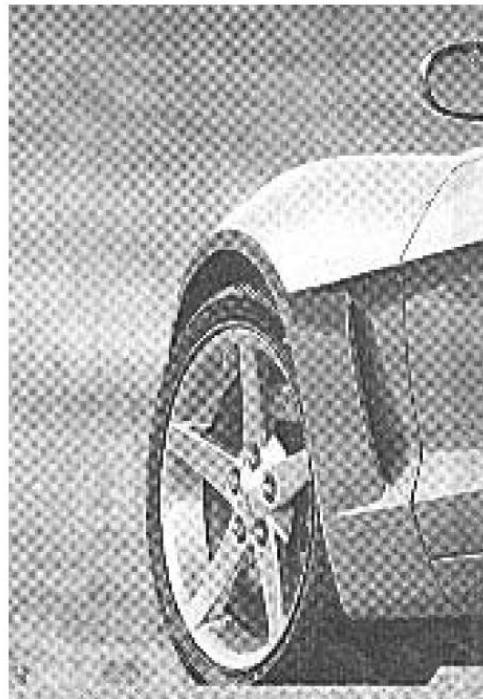


# Filterung im Frequenzbereich – Kerbfilter (englisch notch filter)

- Die Filterung im Frequenzbereich ist vor allem für bestimmte Arten von Rauschen / Bildstörungen vorteilhaft
- Beispiele sind
  - durch Netzbrummen induzierte Störungen oder periodisches Rauschen durch die Halbtontechnik



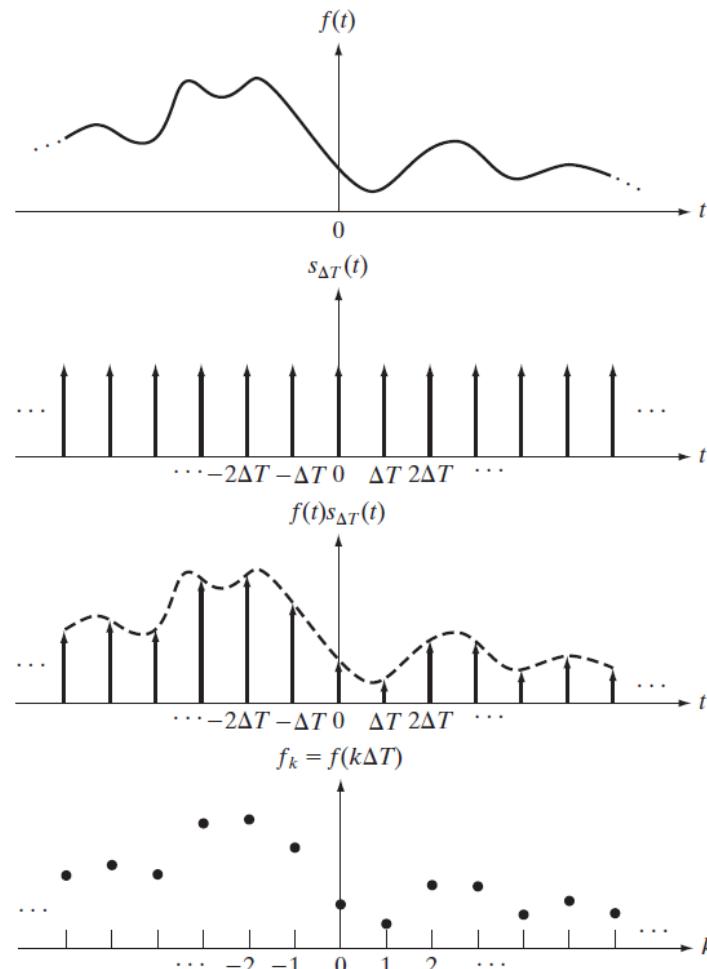
# Filterung im Frequenzbereich – Kerbfilter



# Sampling & Aliasing

# Abtastung (Sampling)

Kontinuierliches Signal

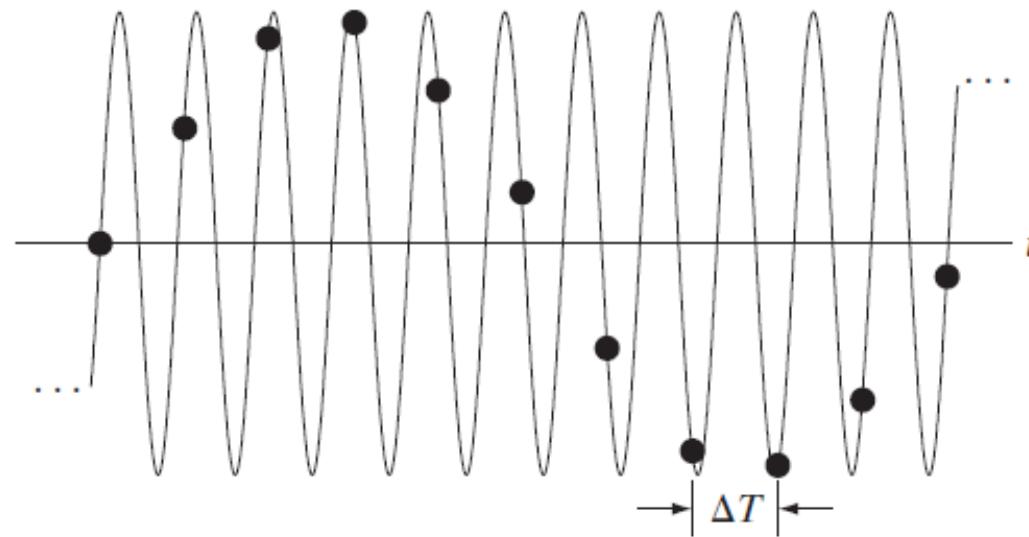


- Ein kontinuierliche Funktion  $f(t)$
- eine Reihe von Impulsen  $s_{\Delta T}(t)$ , die zur Modellierung des Abtastung verwendet werden
- Abgetastete Funktion, die als Produkt von  $f(t)$  und  $s_{\Delta T}(t)$  gebildet wird
- nur die Funktionswerte an den abgetasteten Stellen

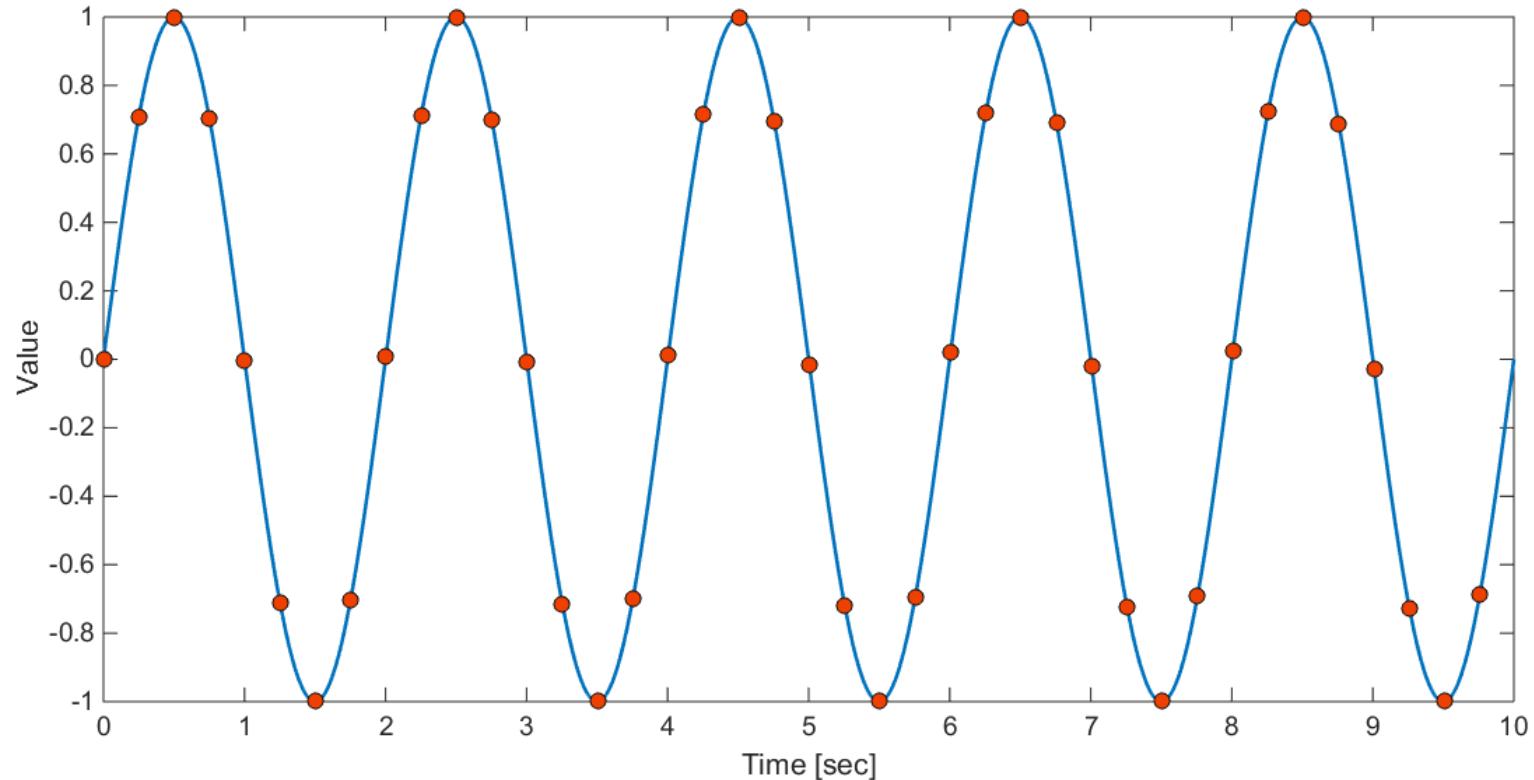
Diskretes Signal

# Aliasing

- Wenn die Abtastfrequenz zu niedrig ist, kann das abgetastete Signal nicht das Originalsignal darstellen.

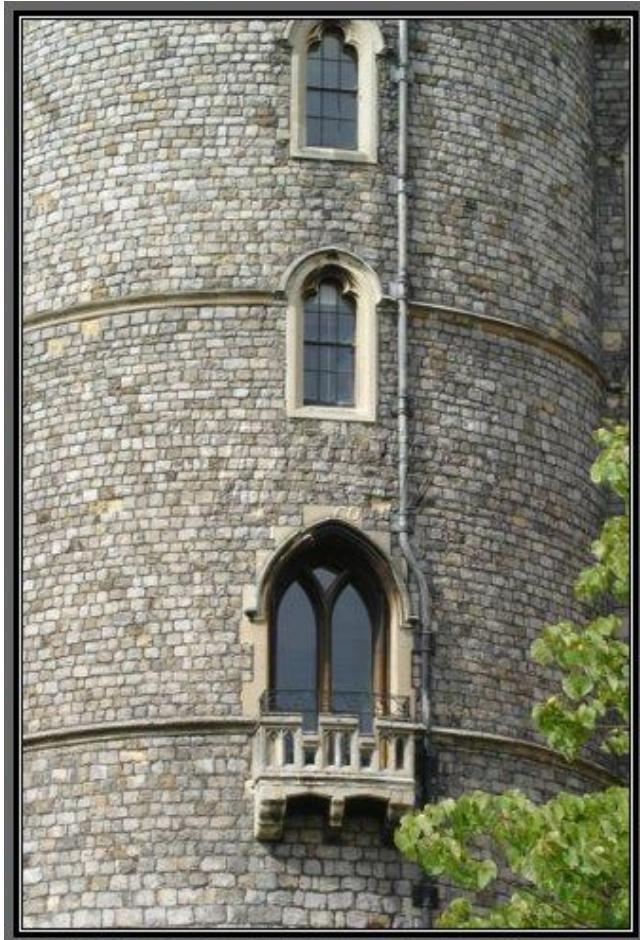


# Gute Abtastung (ohne Aliasing)

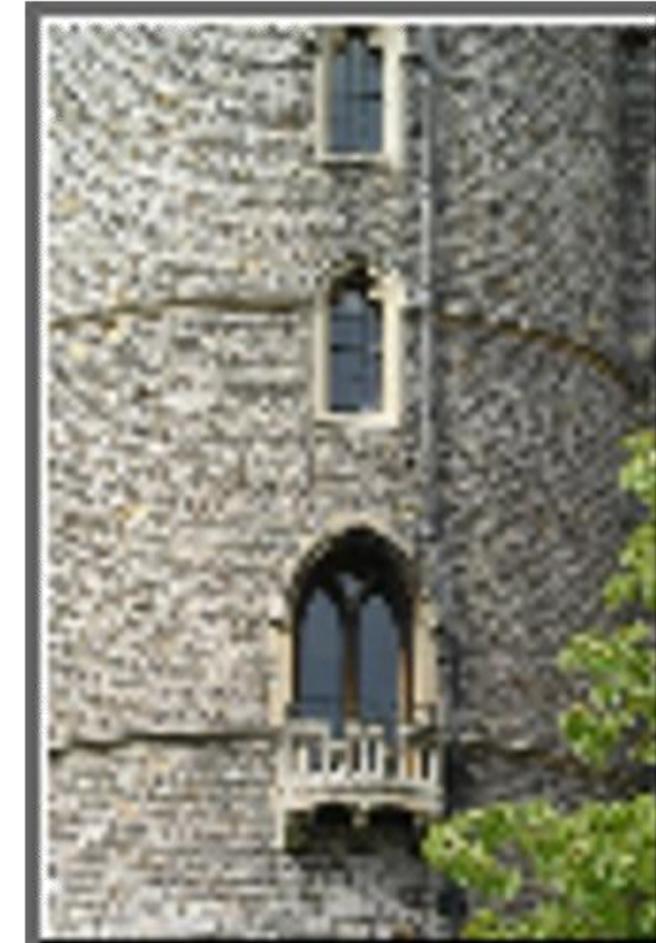


**Wie hoch sollte die Mindestabtastfrequenz sein, um Aliasing zu vermeiden?**

# Aliasing Problem



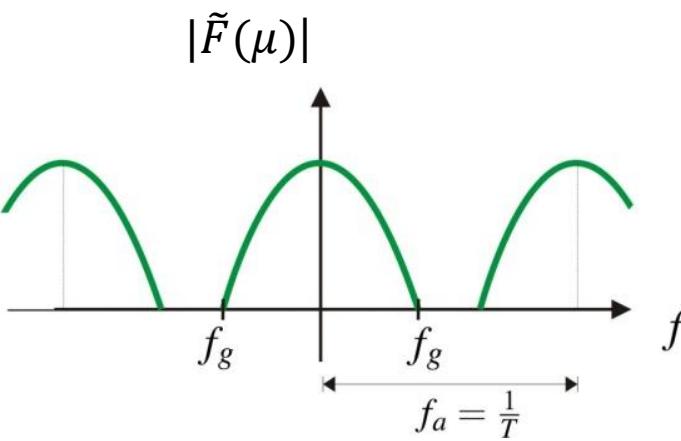
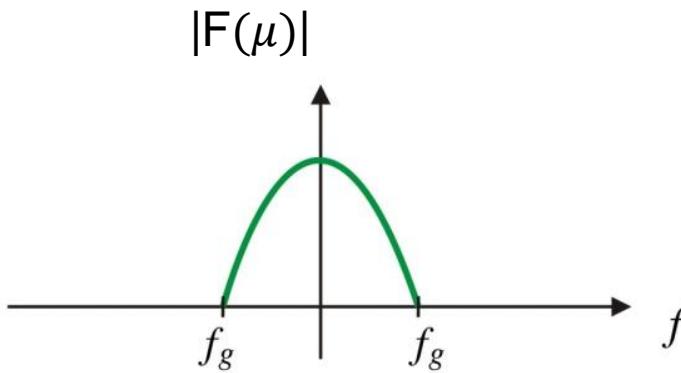
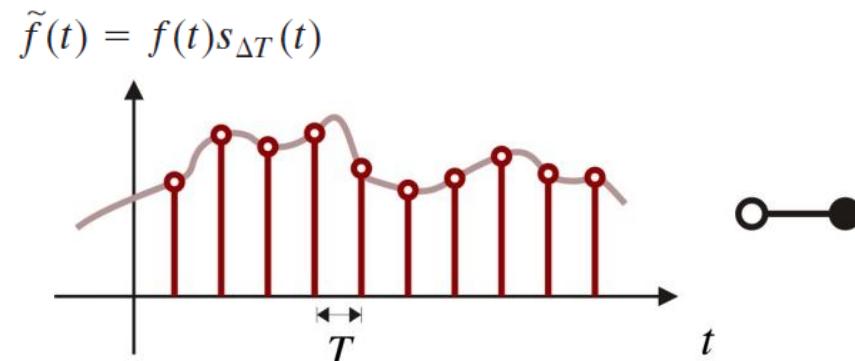
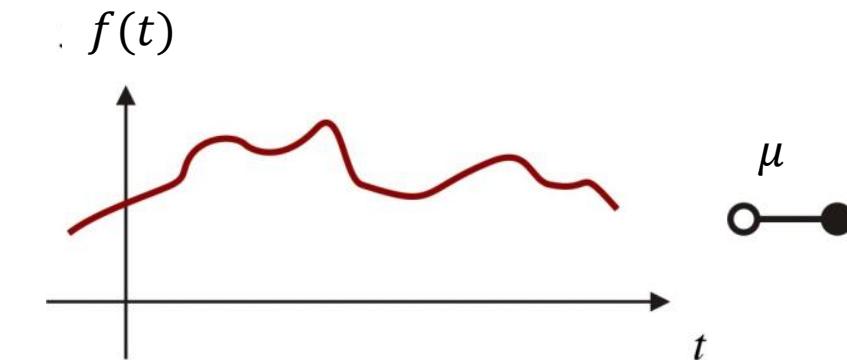
Abtastung



# Aliasing Problem



# Abtastung im Frequenzbereich

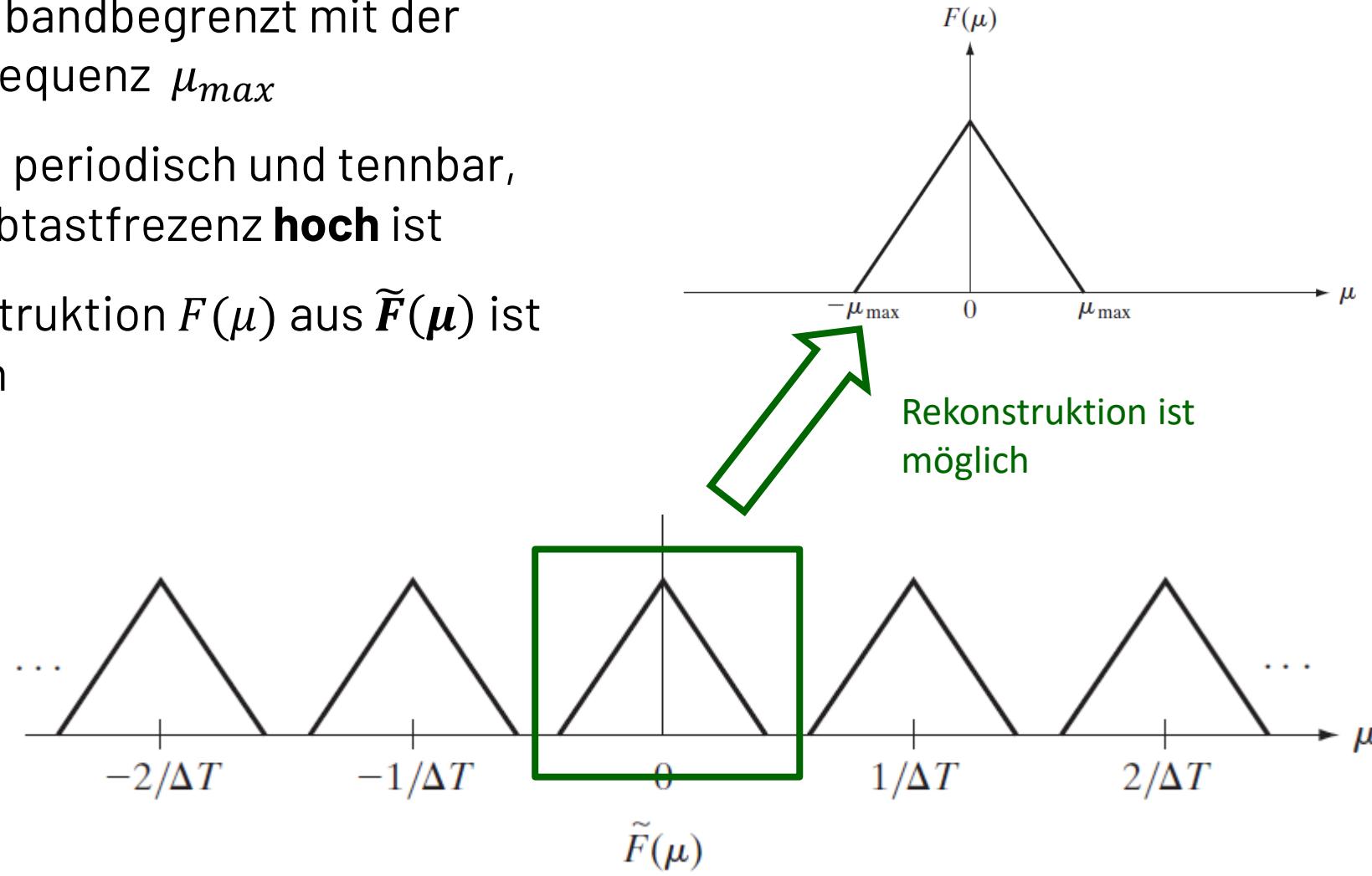


- Die Multiplikation mit dem impulse train im Ortsbereich entspricht einer Faltung im Frequenzbereich.
- Die Abtastrate  $T$  im Ortsbereich führt zu einer Wiederholung mit der Frequenz  $1/T$  im Frequenzbereich.
- **$\tilde{F}(\mu)$  ist periodisch. Wir brauchen nur einen Zyklus, um  $F(\mu)$  zu rekonstruieren**

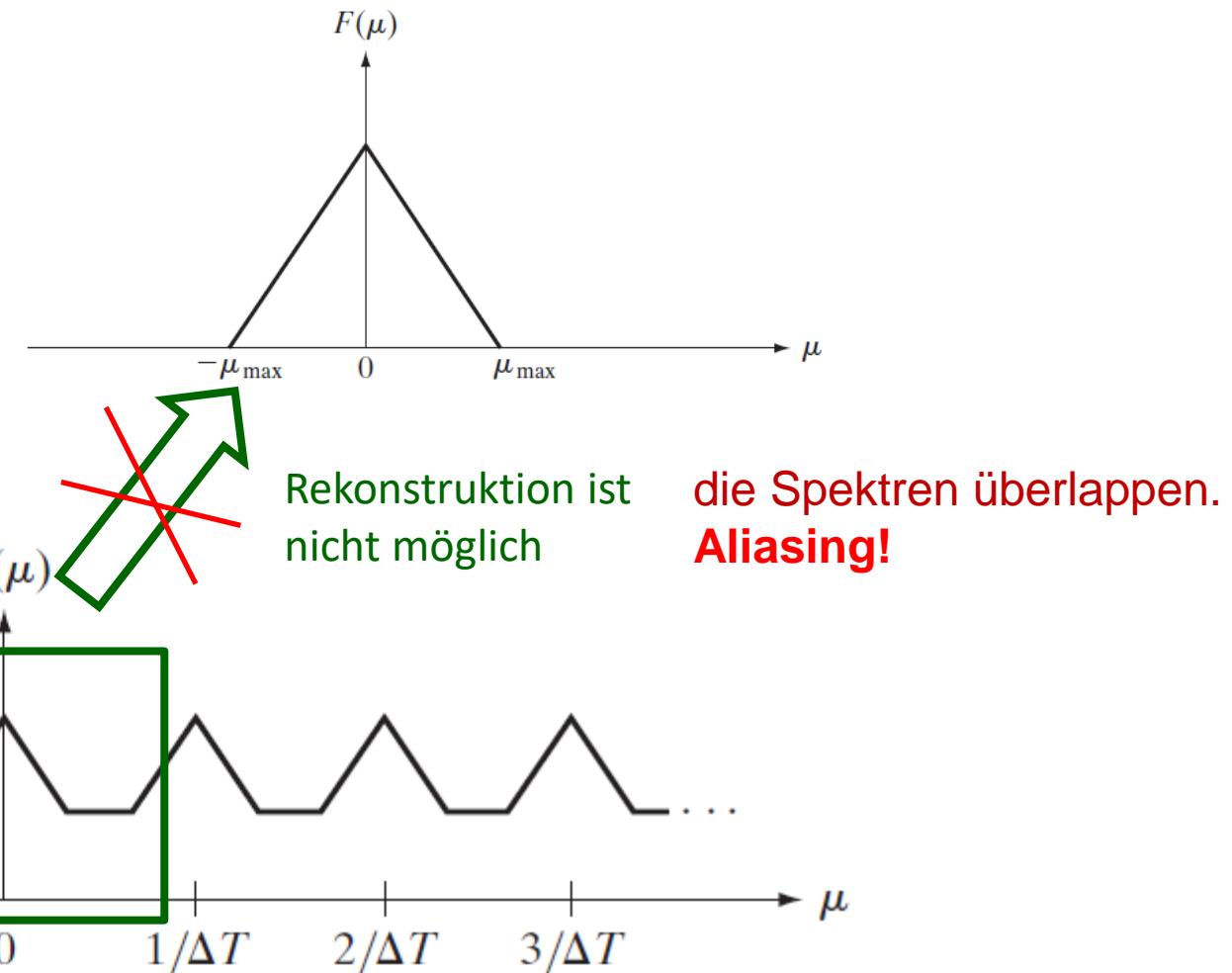
**Fragen:** Können wir das ursprüngliche Signal  $f(t)$  aus  $\tilde{F}(\mu)$  erhalten?

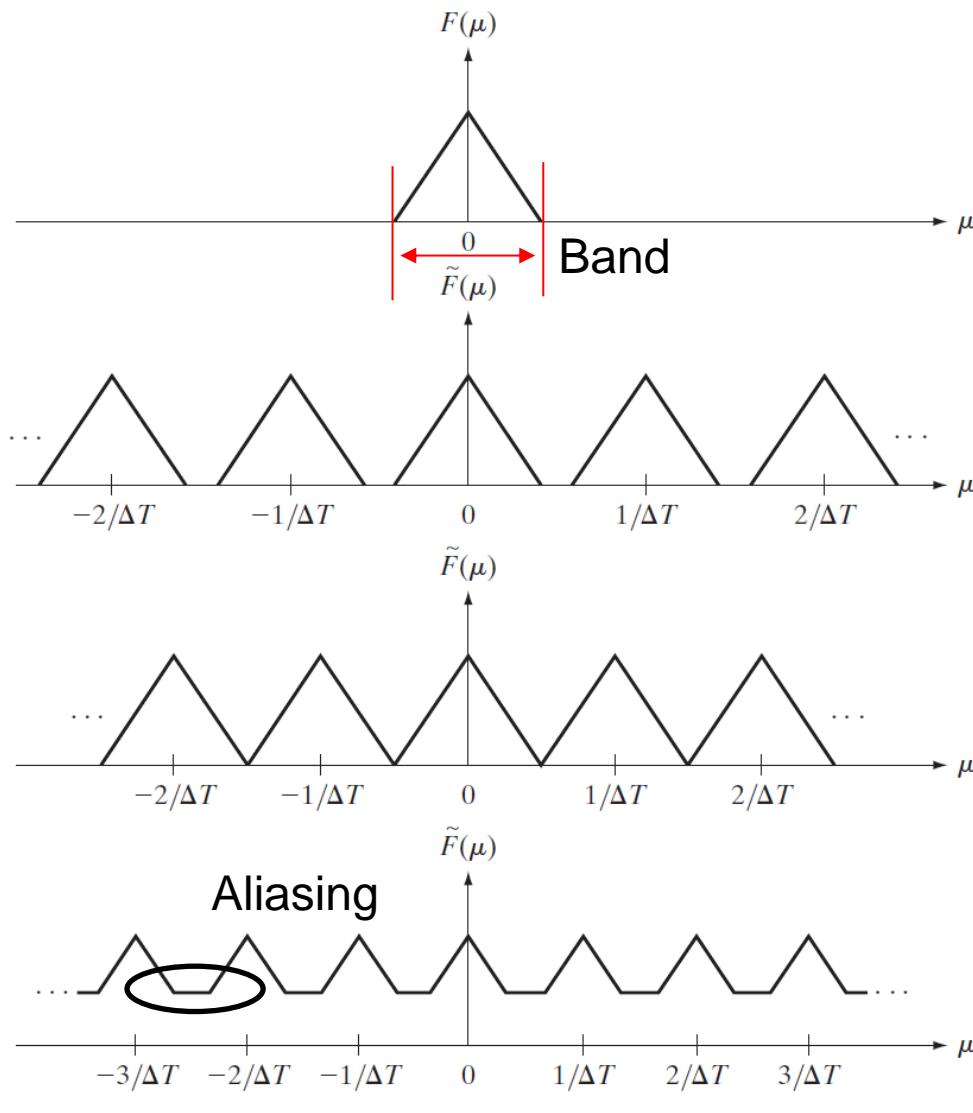
# Abtastung im Frequenzbereich

- $f(t)$  ist bandbegrenzt mit der Grenzfrequenz  $\mu_{max}$
- $\tilde{F}(\mu)$  ist periodisch und tennbar, wenn Abtastfrequenz **hoch** ist
- Rekonstruktion  $F(\mu)$  aus  $\tilde{F}(\mu)$  ist möglich



- $f(t)$  ist bandbegrenzt mit der Grenzfrequenz  $\mu_{max}$
- $\tilde{F}(\mu)$  ist periodisch und nicht tennbar, wenn Abtastfrequenz **niedrig** ist
- Rekonstruktion  $F(\mu)$  aus  $\tilde{F}(\mu)$  ist **nicht** möglich





- Fourier-Transformierte des kontinuierlichen **bandbegrenzten** Signales  $f(t)$
- Fourier-Transformierte des abgetasteten Signales  $\tilde{f}(t)$  mit einer **hohen Frequenz**
- Fourier-Transformierte des abgetasteten Signales  $\tilde{f}(t)$  mit **Nyquistfrequenz**  $f_{\text{Nyquist}} = 2 \cdot f_{\max}$
- Fourier-Transformierte des abgetasteten Signales  $\tilde{f}(t)$  mit einer **niedrigen Frequenz**

# Aliasing

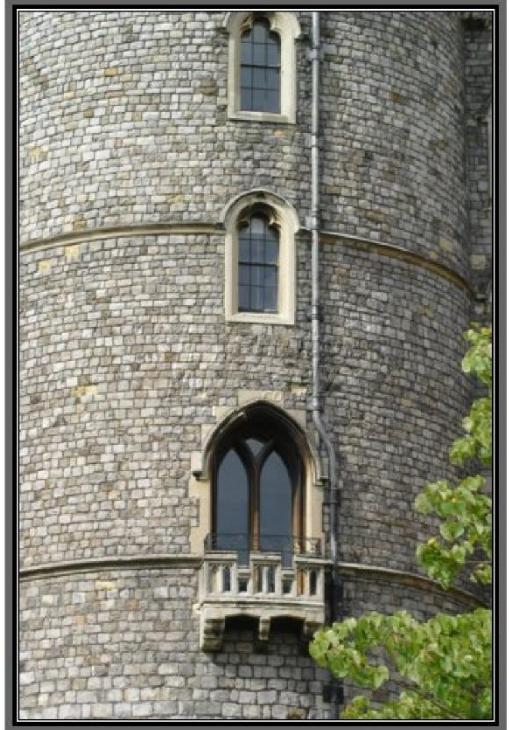
- Aliasing kann vermieden werden, in dem eine Abtastfrequenz über der **Nyquistfrequenz** gewählt wird, welche als  $f_{\text{Nyquist}} = 2 \cdot f_{\text{max}}$  definiert ist.
- Bei der Bildverkleinerung (oder wenn ein Bild mit zu wenig Pixeln/Samples aufgenommen wird) sind im Originalbild zu hohe Frequenzen enthalten
  - Was zu tun? -> die hohen Frequenzen entfernen (sogenannter „Anti-Aliasing“-Filter)
  - Verwischen das Bild, bevor Bildverkleinerung

# Anti-Aliasing Filterung



# Beispiel Anti-Aliasing

Org

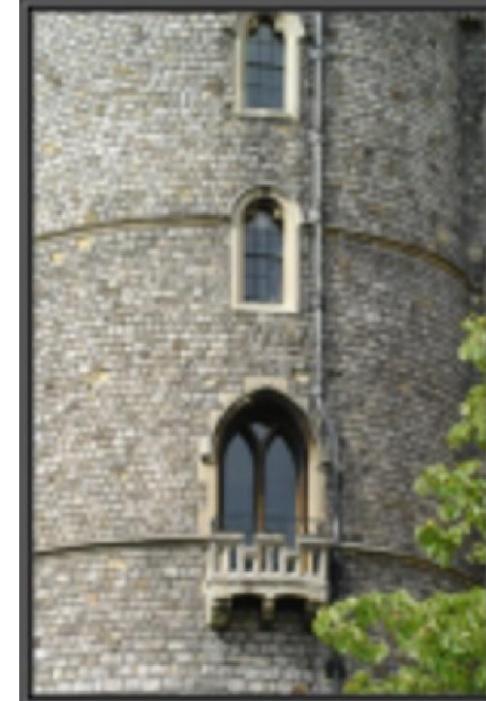


Anti Aliasing Filter

Downsampled wo blur



Downsampled with blur



Blurred



# Zusammenfassung

- Fourier Transformation
- Diskrete Fourier Transformation
- Tiefpassfilter, Hochpassfilter
- Bandpassfilter, Banksperren, Kerbfilter
- Abtastung & Aliasing

# Zusammenfassung

- Wo kann man mehr erfahren?
  - Burger, Kapitel 13, 14
  - Gonzalez, Kapitel 4



# Referenz

- [1] Burger, Burge, Digitale Bildverarbeitung – Eine algorithmische Einführung, 3rd ed., 2015
- [2] Gonzalez, Woods, Digital Image Processing, 4th ed., 2017