Problém Batohu

Specifikace úlohy

Je dáno:

- celé číslo n (počet věcí)
- celé číslo M (kapacita batohu)
- konečná množina $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (hmotnosti věcí)
- konečná množina $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ (ceny věcí)

Sestavte množinu $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, kde každé x_i je 0 nebo 1, tak, aby platilo: $v_1x_1 + v_2x_2 + \ldots + v_nx_n <= M$ (aby batoh nebyl přetížen) a výraz $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ nabýval maximální hodnoty pro všechny takové množiny (cena věcí v batohu byla maximální).

Varianty řešení

Variant řešení je několik. Řešení hrubou silou nebo heuristikou. Řešení hrubou silou zkouší všechny možnosti a vybere z nich tu nejlepší. Řešení pomocí heuristiky je více. První přidává věci do batohu pouze na základě jejich váhy, druhé naopak pouze podle jejich ceny. Nejlepší možností je přidávat věci podle poměru cena/váha.

Postup řešení

Řešení hrubou silou spočívá v tom, že se vygenerují všechny povolené kombinace, u každé se spočte cena a kombinace s nejlepší cenou se vezme jako výsledek úlohy.

Popis řešení

hrubá síla

Pro řešení hrubou silou používám binární vektory. Nejprve si vypočítám číslo n = 2^{pocet_veci} a potom si pro každé číslo od 0 do n vypočtu jeho binární reprezentaci (převedu ho do binárního tvaru). Pokud dané binární číslo má na pozici i číslo 1, tak ho přidám do výsledku, pokud má 0, tak ne. Pokud cena přesáhne kapacitu batohu, tak končím výpočet pro dané číslo n. Nakonec spočtu cenu věcí v batohu a zapamatuji si nejlepší z zatím zjištěných cen.

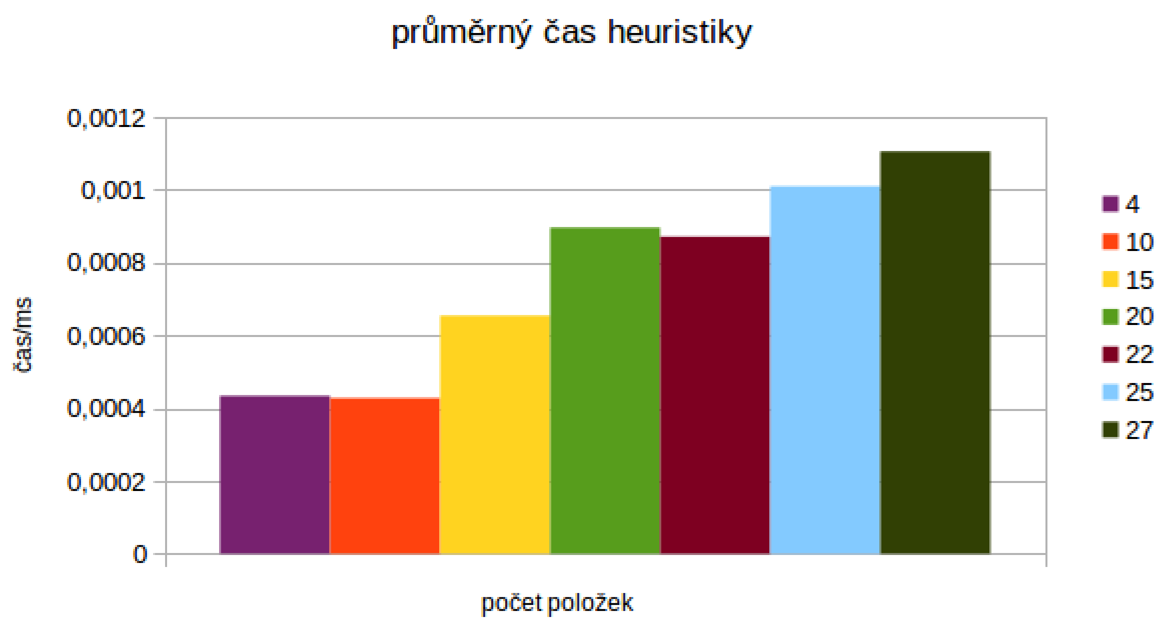
heuristika

Pro řešení pomocí heuristiky jsem zvolil poměr cena/váha. Pro každou věc jsem vypočetl poměr cena/váha. poté jsem věci seřadil a postupně přidával do batohu, dokud byl součet hmotností menší než kapacita batohu M.

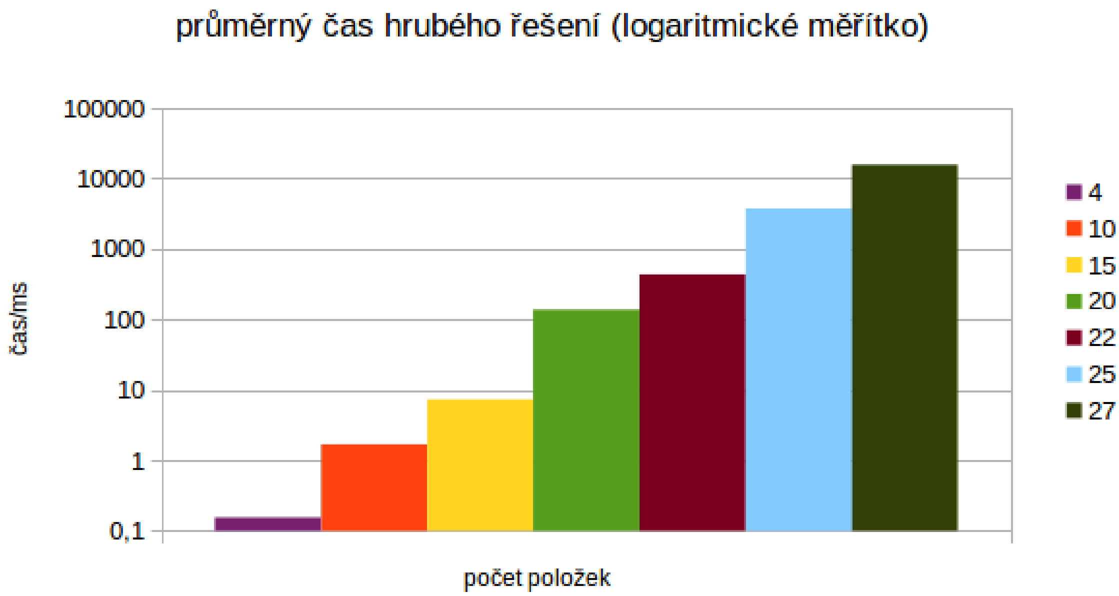
Naměřené výsledky

počet hodnot	čas heuristického výpočtu / μs	čas přesné metody / ms	průměrná odchylka / %	maximální odchylka / %
4	0,4342	0,1548	2,17	36,36
10	0,4278	1,6702	1,28	11,48
15	0,6548	7,2857	0,47	8,54
20	0,8968	136,9545	0,60	8,43
22	0,8718	438,5975	0,68	7,22
25	1,0102	3755,0674	0,49	3,67
27	1,1060	15700,4294	0,50	10,60

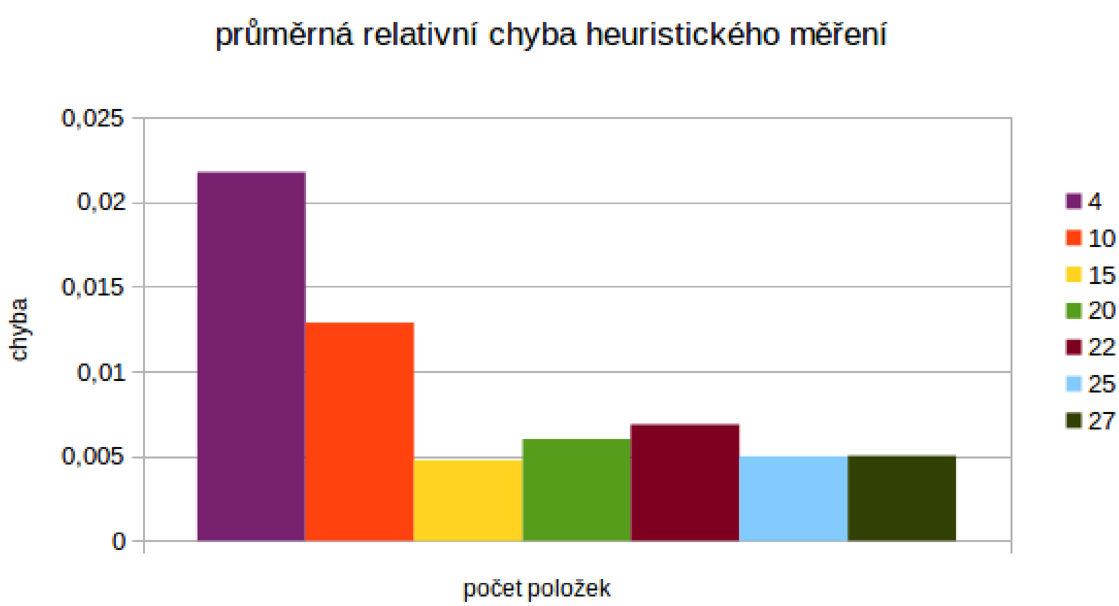
Jak je vidět na následujícím grafu, čas při počítání úlohy pomocí heuristiky roste přibližně lineárně. To je podle očekávání.



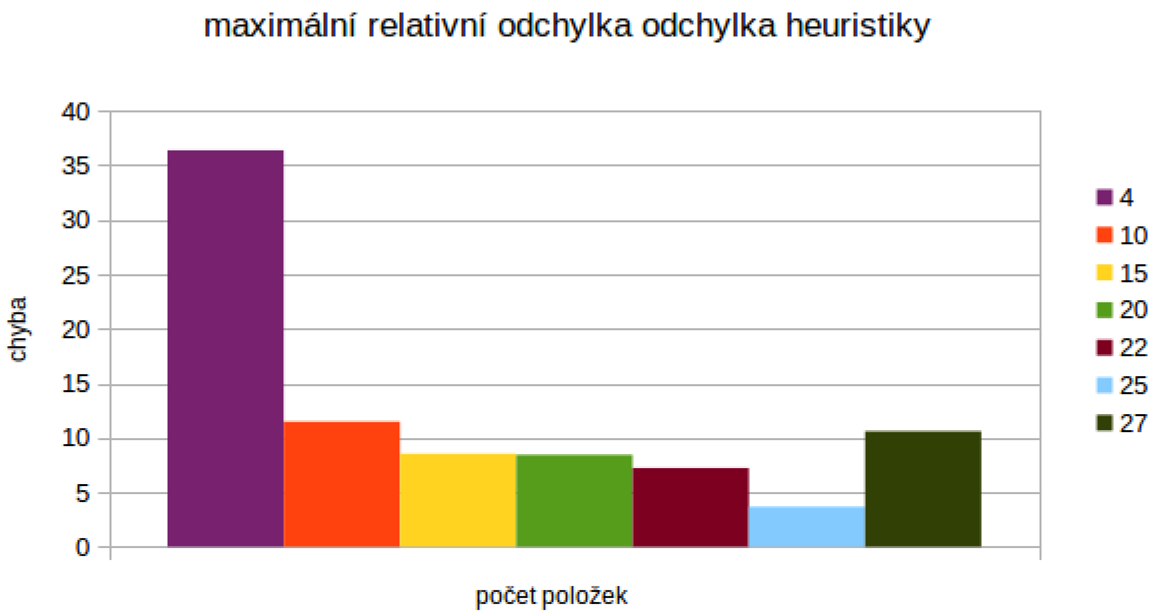
Na druhém grafu je vidět, že čas roste exponencielně s velikostí řešené úlohy. Pro lepší zobrazení jsem v grafu zvolil logaritmické měřítko, protože při použití klasického měřítka byly vidět pouze poslední 3 sloupce.



Na třetím grafu je vidět velikost průměrné relativní chyby heuristické metody oproti řešení hrubou silou (které bylo také kontrolováno vůči referenčnímu řešení). Graf přehledně ukazuje, že chyba se se zvyšujícím počtem položek zmenšuje.



Na posledním grafu je vidět velikost maximální chyby pro jednotlivé sady instancí. Přestože chyba pořád klesá, poslední instance má chybu opět větší. Jedná se však pouze o jedno měření a průměrná chyba je dle očekávání (viz předchozí graf).



Závěr

Vypočítat řešení hrubou silo se mi podařilo pouze pro úlohy do 27 položek v batohu. Bylo by možné vypočítat i více, ale čas by byl již v řádu hodin a pro celou sadu 50 úloh by to bylo velice zdlouhavé. Naopak výpočet pomocí heuristiky téměř nic nestojí a jeho výsledek je okamžitě. Jeho relativní chyba je také velice malá a klesá od přibližně 2% u úloh se 4mi prvky až na pouhé 0,5% u úloh s více než 20ti prvky. Tato chyba je podle mého názoru ve většině případů akceptovatelná. Maximální chyba však činila cca 36%, což už je hodě, medián je ale 0. To znamená, že více než polovina případů byla vypočítána zcela přesně.

Konfigurace počítače

Procesor Intel CORE i7, frekvence 1,8 GHz, Operační paměť 8Gb. Linux Ubuntu 64 bitů. Naprogramováno v jazyce Java.