

3. zadatak

Neka je dan eliptički cilindar čiji je radijus na osi x jednak r , a radijus na y osi jednak s centriran na xy ravnini visine h . Neka su $e = (e_1, e_2, e_3)$ i $d = (d_1, d_2, d_3)$. Odredite siječe li zraka $e + \lambda d$ zadani cilindar.

Ukoliko imamo kvadričnu jednadžbu cilindra, sjecišta zrake i cilindra možemo odrediti rješavanjem jednadžbe oblika $f(p(\lambda)) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, gdje je $p(\lambda)$ jednadžba zrake, a funkcija f kvadrična funkcija cilindra $f(\langle x, y, z \rangle) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K$.

Medutim, to u ovom zadatku nemamo.

Gledamo projekciju zrake na xy ravninu i njeno sjecište s neograničenim cilindrom. Projiciramo zraku na ravninu xy tako da u ravnini odredimo ortonormirane vektore \vec{u} i \vec{v} i projiciramo ju na njih:

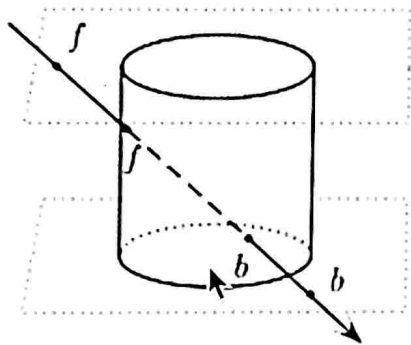
$\vec{p}_n = (\vec{p} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} + (\vec{p} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$, gdje je \vec{p} vektor zrake.

Nakon toga, označimo pravac u smjeru projiciranog vektora s općom jednadžbom $y = ax + b$. Ubacujemo jednadžbu pravca u jednadžbu elipse i dobivamo $\frac{x^2}{r^2} + \frac{(ax+b)^2}{s^2} = 1$, pa izlučivanjem dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$(s^2 + a^2 r^2)x^2 + (2r^2 ab)x + b^2 r^2 - r^2 s^2 = 0.$$

Zraka siječe cilindar samo u slučaju kada ova jednadžba ima 2 rješenja, jer onda imamo 2 sjecišta.

Prethodni dio odnosio se na sjecište zrake s cilindrom neograničene visine. Kako mi gledamo cilindar konačne visine h , moramo još provjeriti siječe li zraka ravnine koje omeđuju cilindar.



Ravninu možemo definirati kao skup svih točaka x za koje vrijedi $x \cdot \vec{n} = q$, gdje je q skalar, a \vec{n} vektor normale na ravninu.

Ako zraka prolazi kroz ravninu, izjednačimo točku ravnine a s jednadžbom zrake i imamo: $q = a \cdot \vec{n} = e \cdot \vec{n} + \lambda \cdot d \cdot \vec{n}$, iz čega izrazimo λ . Ako je $\lambda < 0$, onda zraka ne siječe ravninu. Ako je $\lambda > 0$, zraka siječe ravninu.

Ovaj postupak napravimo i za gornju i za donju ravninu koje omeđuju cilindar i dobijemo sjecišta s cilindrom konačne visine h .