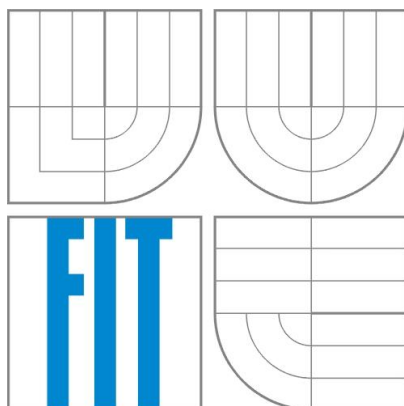


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií



Teorie obvodů

Semestrální projekt – Řešení zadaných obvodů

Obsah:

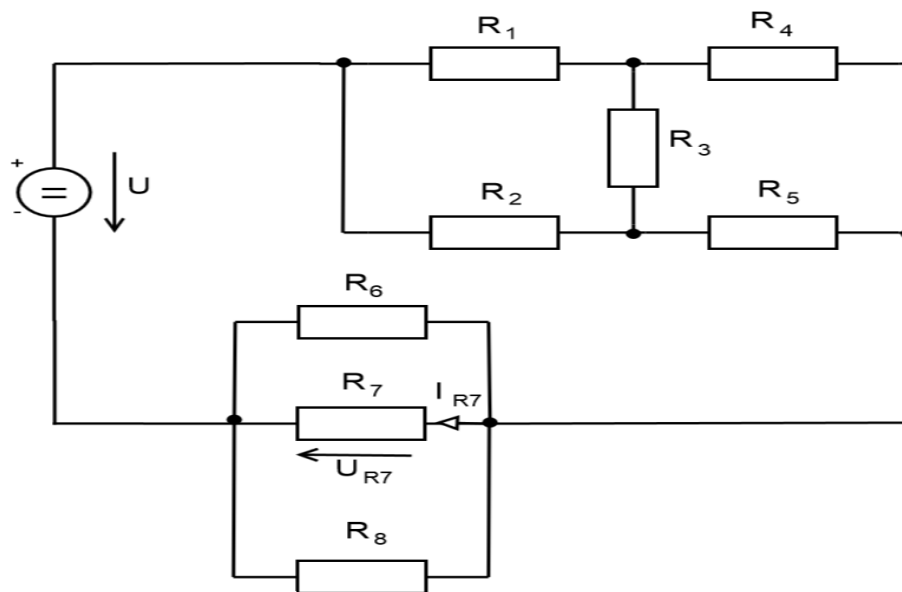
Príklad 1.....	3
Príklad 2.....	6
Príklad 3.....	9
Príklad 4.....	12
Príklad 5.....	15
Príklad 6.....	18
Záver a zhrnutie výsledkov.....	21

Príklad 1

Zadanie:

Stanovte napätie U_{R7} a prúd I_{R7} . Použite metódu postupného zjednodušovania obvodu.

sk.	U[V]	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$	$R_6[\Omega]$	$R_7[\Omega]$	$R_8[\Omega]$
D	105	420	980	330	280	310	710	240	200

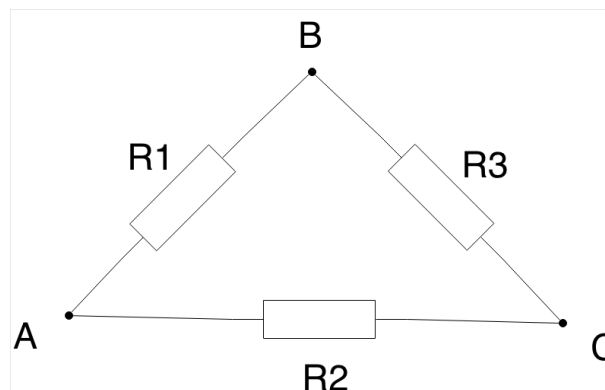


Začnem transfiguráciou trojuholníka na hviezdu a obvod prekreslím.

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

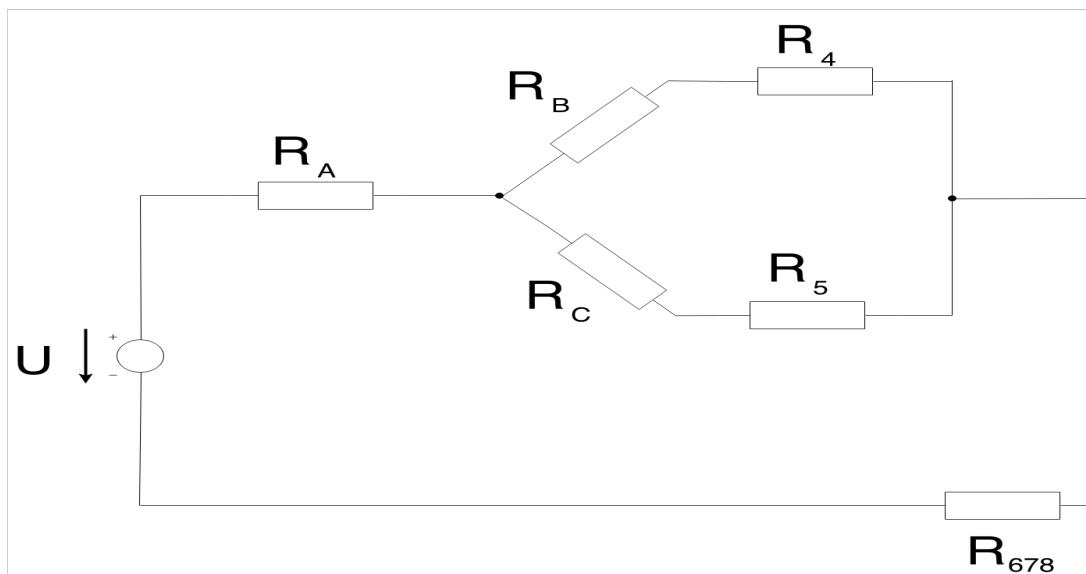


Podľa zadaného obvodu vypočítame R_{678} paralelne:

$$R_{67} = \frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7}$$

$$R_{678} = \frac{R_{67} \cdot R_8}{R_{67} + R_8} = \frac{\frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} \cdot R_8}{\frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} + R_8}$$

Prekreslíme obvod. Odpory R_B a R_4 sú zapojené v sérii. Tak isto i R_C a R_5 . Následne vypočítame R_{B4} a R_{C5} .



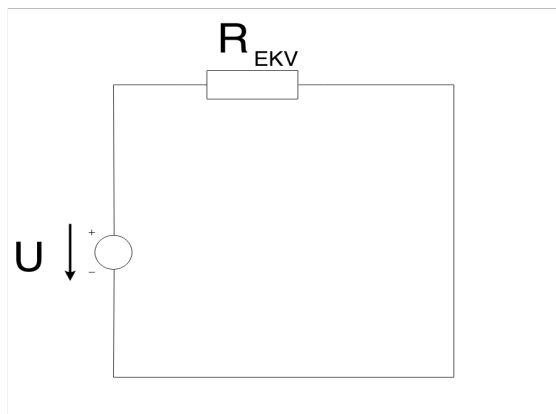
$$R_{B4} = R_B + R_4 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$$

$$R_{C5} = R_C + R_5 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5$$

Odpory R_{B4} a R_{C5} sú zapojené paralelne. Vypočítame R_{B4C5} .

$$R_{B4C5} = \frac{R_{B4} \cdot R_{C5}}{R_{B4} + R_{C5}} = \frac{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5}{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5}$$

Podľa obrázka sú všetky odpory zapojené sériovo. Môžeme vypočítať celkový odpor R_{EKV} .



$$R_{EKV} = R_A + R_{B4C5} + R_{678}$$

$$R_{EKV} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5}{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_5} + \frac{\frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} \cdot R_8}{\frac{R_6 \cdot R_7}{R_6 + R_7} + R_8}$$

$$R_{EKV} = 541,2831 \, \Omega$$

Výpočet celkového prúdu v obvode:

Celkový prúd v obvode môžeme vypočítať pomocou Ohmovho zákona. Je to podiel napätia na zdroji a celkového odporu v obvode, ktorý vypočítame z rovnice vyššie.

$$I = \frac{U}{R_{EKV}}$$

$$I = 0,19398 \, A$$

Konečný výpočet prúdu I_{R7} :

Najskôr si vypočítame napätie U_{R7} . Toto napätie je ekvivalentné s U_{R678} .

$$U_{R7} = U_{R678} = I \cdot R_{678}$$

Následne môžeme vypočítať prúd I_{R7} .

$$I_{R7} = \frac{U_{R678}}{R_7}$$

Po dosadení hodnôt do rovníc a úpravách získavame výsledok.

$$U_{R7} = 18,3434 \text{ V}$$

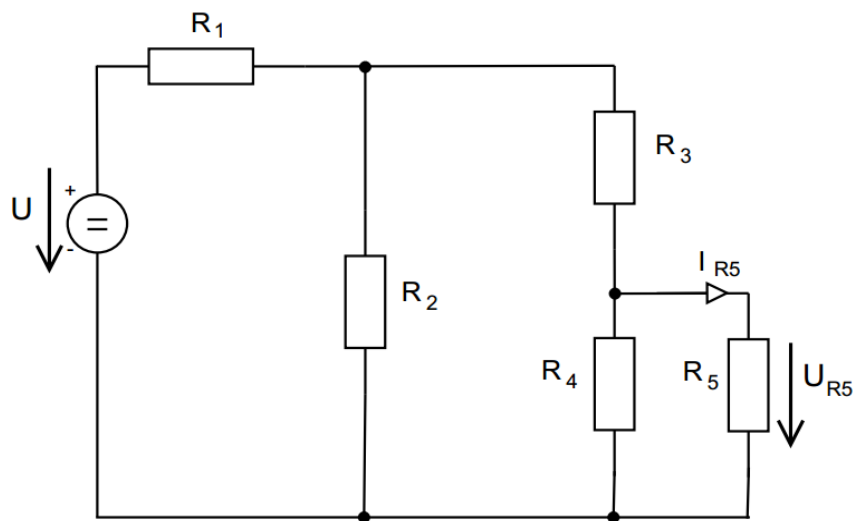
$$I_{R7} = 0,0764 \text{ A}$$

Príklad 2

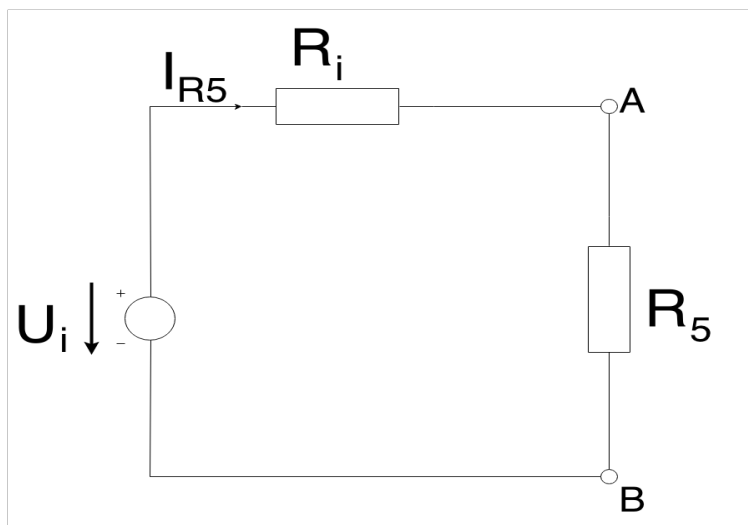
Zadanie:

Stanovte napätie U_{R5} a prúd I_{R5} . Použite metódu Theveninovej vety.

sk.	U[V]	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$R_4[\Omega]$	$R_5[\Omega]$
D	150	200	660	200	220	330



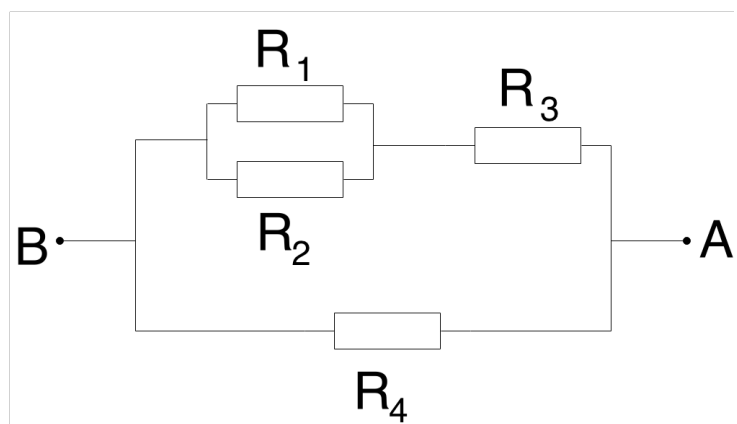
Obvod prekreslíme.



$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5}$$

Výpočet R_i :

Náhradné zapojenie bez R_5 . R_i je odpor medzi bodmy A B.



$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

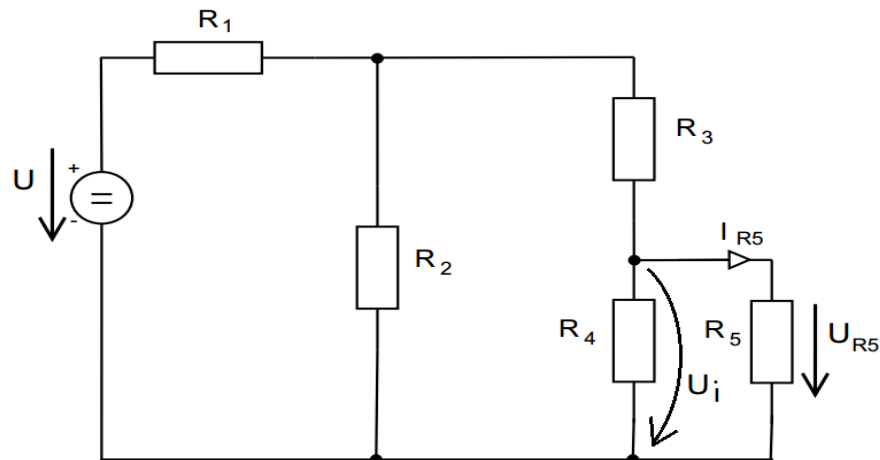
$$R_i = \frac{(R_{12} + R_3) \cdot R_4}{\left(\left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right) + R_3\right) + R_4}$$

Dosadíme hodnoty zo zadania a vypočítame.

$$R_i = \frac{167200}{1233} \Omega$$

Výpočet U_i :

Obvod si prekreslíme na náhradný obvod. U_i - napätie naprázdno bez R_5



Najskôr si určíme rovnice pre smyčky.

$$R_1 \cdot I_A + R_2 \cdot I_A - R_2 \cdot I_B - U = 0$$

$$R_3 \cdot I_B + R_4 \cdot I_B + R_2 \cdot I_B - R_2 \cdot I_A = 0$$

Dosadíme hodnoty zo zadania a počítame dve rovnice pre dve neznáme.

$$I_B = 0,2008 \text{ A}$$

Pre náš výpočet nám stačí poznať I_B , ktoré dosadíme. Potom môžeme dosadiť R_4 zo zadania a vypočítame U_i .

$$U_i = I_B \cdot R_4$$

$$U_i = 44,1784263 \text{ V}$$

Konečný výpočet prúdu a napätia na odpore R_5 :

Poznáme U_i a R_i . Teraz môžeme dosadiť a vypočítať prúd na odpore R_5 .

$$I_{R5} = \frac{U_i}{R_i + R_5}$$

$$I_{R5} = 0,0948 \text{ A}$$

Keďže poznáme I_{R5} , môžeme vypočítať napätie U_{R5} .

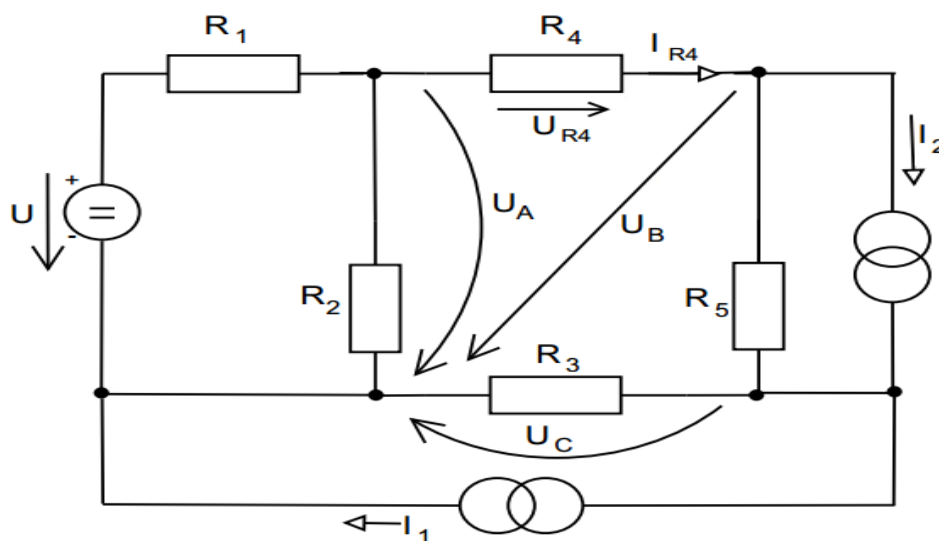
$$U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5$$

$$U_{R5} = 31,3117 \text{ V}$$

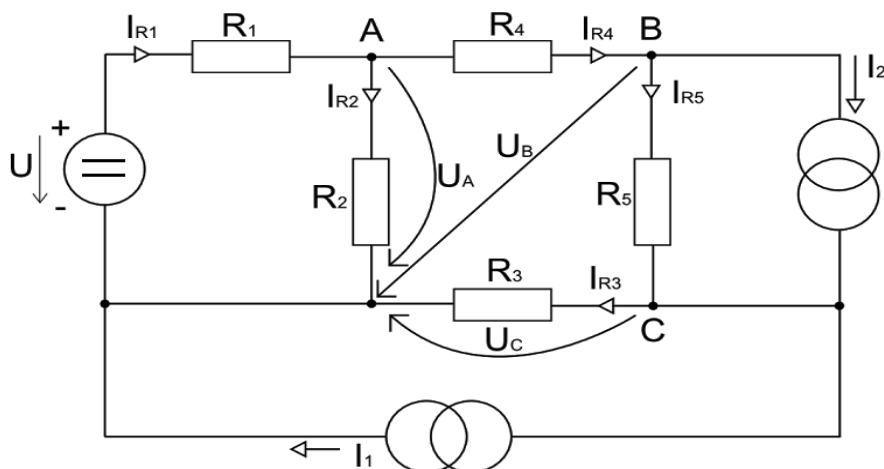
Príklad 3**Zadanie:**

Stanovte napätie U_{R4} a I_{R4} . Použite metódu uzlových napätí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U[V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
F	145	75	0.85	480	440	530	360	255



Obvod prekreslíme a doplníme ho o smery prúdov, ktoré si vhodne určíme a budeme sa ich držať'.



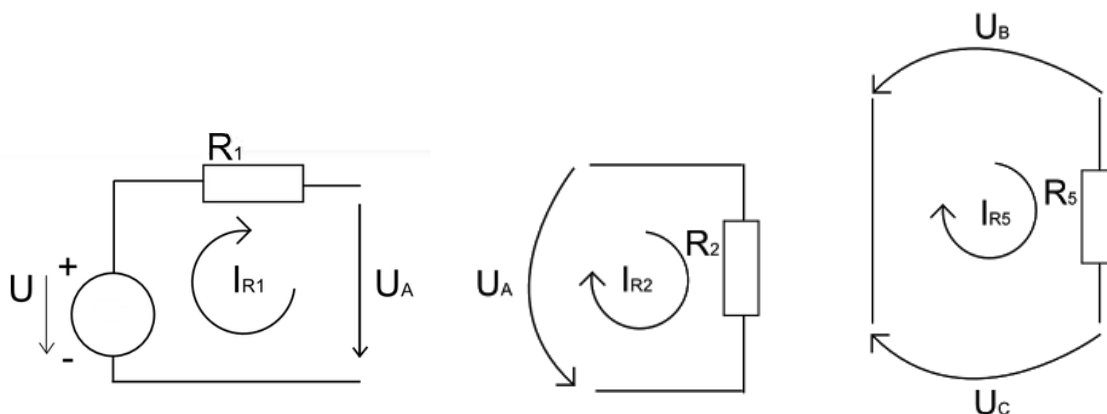
Pre každý uzol A, B, C si vytvoríme rovnice. Z nich je potom možné vypočítať napätie U_A , U_B , U_C . Súčet prúdov, ktoré do uzlu vchádzajú a vychádzajú je rovný nule.

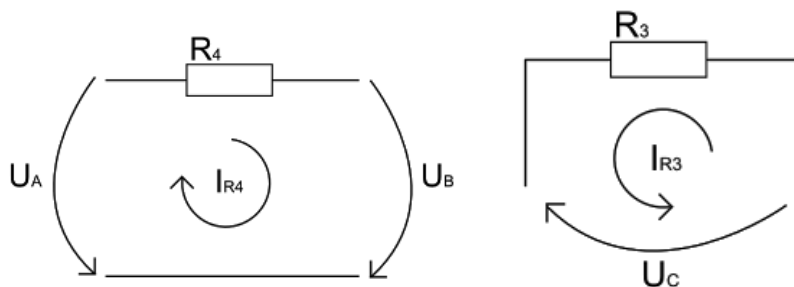
$$A: I_{R1} = I_{R2} + I_{R4}$$

$$B: I_{R4} = I_2 + I_{R5}$$

$$C: I_{R3} + I_1 = I_2 + I_{R5}$$

Určíme si náhradné obvody pre všetky uzle.





Pomocou II. Kirchhoffovho zákona zostavíme rovnice všetkých prúdov.

$$R_1 \cdot I_{R1} + U_A - U = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}$$

$$R_2 \cdot I_{R2} - U_A = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}$$

$$R_3 \cdot I_{R3} - U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{R3} = \frac{U_C}{R_3}$$

$$R_4 \cdot I_{R4} + U_B - U_A = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{R4} = \frac{U_A - U_B}{R_4}$$

$$R_5 \cdot I_{R5} + U_C - U_B = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{R5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

Dosadíme do rovníc pre uzle.

$$\frac{U - U_A}{R_1} = \frac{U_A}{R_2} + \frac{U_A - U_B}{R_4}$$

$$\frac{U_A - U_B}{R_4} = I_2 + \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

$$\frac{U_C}{R_3} + I_1 = I_2 + \frac{U_B - U_C}{R_5}$$

Tieto tri rovnice zjednodušíme.

$$R_2 \cdot R_4 \cdot (U - U_A) = R_1 \cdot R_4 \cdot U_A + R_1 \cdot R_2 \cdot (U_A - U_B)$$

$$R_5 \cdot (U_A - U_B) = R_4 \cdot R_5 \cdot I_2 + R_4 \cdot (U_B - U_C)$$

$$R_5 \cdot U_C + R_3 \cdot R_5 \cdot I_1 = R_3 \cdot R_5 \cdot I_2 + R_3 \cdot (U_B - U_C)$$

Máme tri rovnice pre tri neznáme. Doplníme hodnoty zo zadania a vypočítame. Výpočet môžeme riešiť vytvorením matice.

$$I_A = -6\,617,05 \text{ A}$$

$$I_B = -17\,102,55 \text{ A}$$

$$I_C = -24\,313,02 \text{ A}$$

Konečný výpočet prúdu a napätia na odpore R_4 :

Teraz môžeme dosadiť do rovnice, ktorú sme si vyjadrili vyššie. Vypočítame I_{R4} .

$$I_{R4} = \frac{U_A - U_B}{R_4}$$

$$I_{R4} = 29,12638 \text{ A}$$

Pre výpočet U_{R4} využijeme Ohmov zákon.

$$U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4$$

$$U_{R4} = 10\,485.4968 \text{ V}$$

Príklad 4

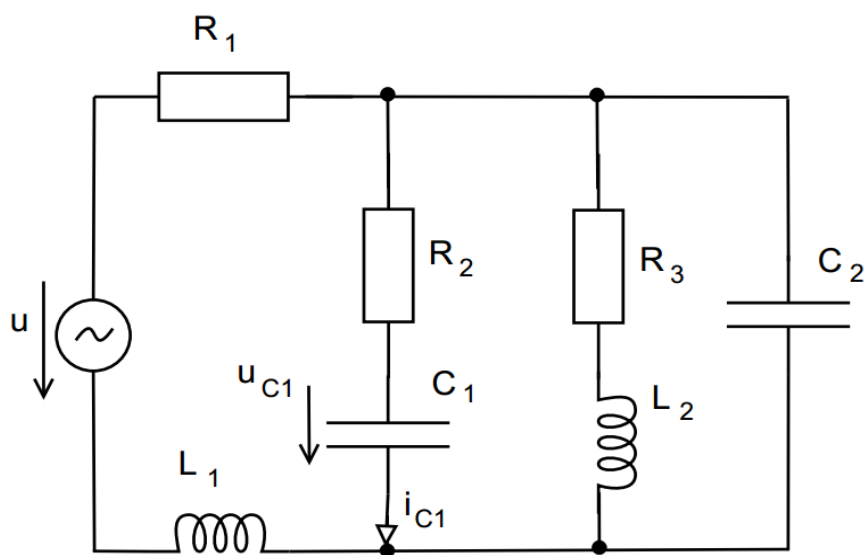
Zadanie:

Pre napájacie napätie platí: $u = U \cdot \sin(2\pi ft)$. Vo vzťahu napätia na kondenzátore

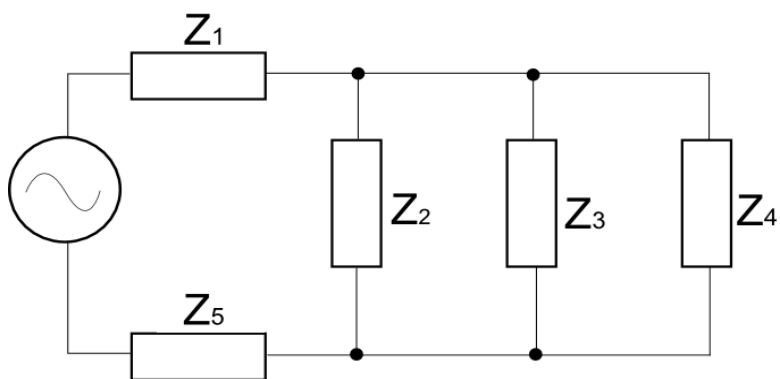
C_1 : $u_{C1} = U_{C1} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C1})$ určte $|C_1|$ a φ_{C1} . Použite metódu zjednodušovania obvodu.

Pozn: Pomocný “smer šípky napájacieho zdroja platí pre špeciálny časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$)”.

sk.	U[V]	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$L_1[\text{mH}]$	$L_2[\text{mH}]$	$C_1[\mu\text{F}]$	$C_2[\mu\text{F}]$	f[Hz]
D	50	190	180	220	420	270	120	205	90



Obvod si môžeme prekresliť tak, aby sa v ňom nachádzali len odpory. Tie môžu reprezentovať impedancie jednotlivých vetiev.



Z1 - impedancia R_1

Z2 - impedancia R_2 a C_1

Z3 - impedancia R_3 a L_2

Z4 - impedancia C_2

Z5 - impedancia L_1

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (\text{uhlová rýchlosť})$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 90 = 180\pi \approx 565,48668 \text{ rad/s}$$

$$Z_1 = R_1 = 190 \, \Omega$$

$$Z_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_1} = (180 - j14,7365688) \, \Omega$$

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_2 = (220 + j152,681403) \, \Omega$$

$$Z_4 = -j \frac{1}{\omega C_2} = -j8,62628 \, \Omega$$

$$Z_5 = j\omega L_1 = j237,5044 \, \Omega$$

Obvod zjednodušíme a vypočítame celkovú impedanciu Z_{EKV} .

$$\frac{1}{Z_{234}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}$$

$$Z_{234} = (0,654142 - j8,70377662) \, \Omega$$

$$Z_{EKV} = Z_1 + Z_{234} + Z_5$$

$$Z_{EKV} = 190,6541423 + j228,8006384 \, \Omega$$

Teraz môžeme vypočítať prúd I .

$$I = \frac{U}{Z} = (0,107473 - j0,128976) \, A$$

Vypočítame napätie na impedancii Z_2 . Rovnaké napätie je i na Z_3 a Z_4 , preto vypočítame tento vzťah.

$$U_{Z234} = Z_{234} \cdot I$$

$$U_{Z234} = (-1,05227 - j1,01979) \, V$$

Prúd prechádzajúci touto vetvou môžeme vypočítať nasledujúcim vzťahom.

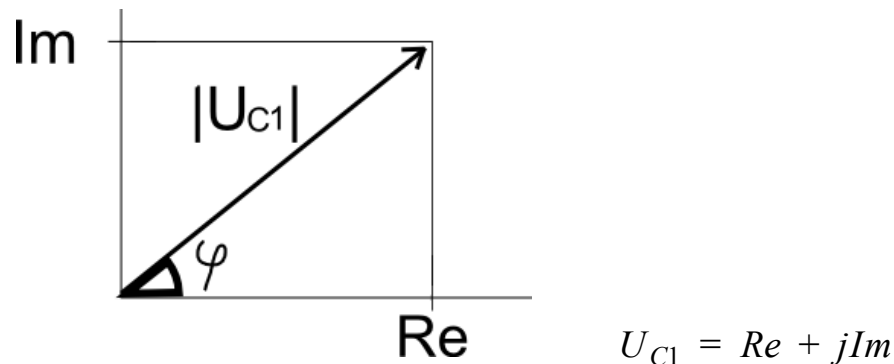
$$I_{Z2} = \frac{U_{Z234}}{Z_2}$$

$$I_{Z2} = (-0,005346 - j0,0061032) \, A$$

Teraz môžeme vypočítať napätie U_{C1} na kondenzátore C_1 .

$$U_{C1} = -j \frac{1}{\omega C_1} \cdot IZ_2$$

$$U_{C1} = (0,0899402 - j0,0787817) \text{ V}$$



U_{C1} môžeme vypočítať pomocou pytagorovej vety.

$$|U_{C1}| = \sqrt{0,0899402^2 + 0,0787817^2} = 0,119565 \text{ V}$$

Fázový posun vypočítame vzťahom:

$$\varphi_{C1} = \arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$$

$$\varphi_{C1} = -41,2162^\circ \text{ to máme v IV. kvadrante}$$

$$\varphi_{C1} = 360^\circ - 41,2162^\circ = 318,7838^\circ$$

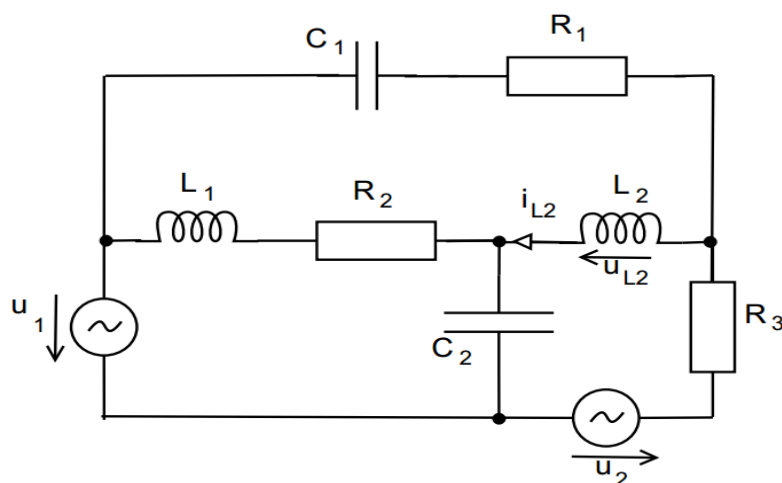
Príklad 5

Zadanie:

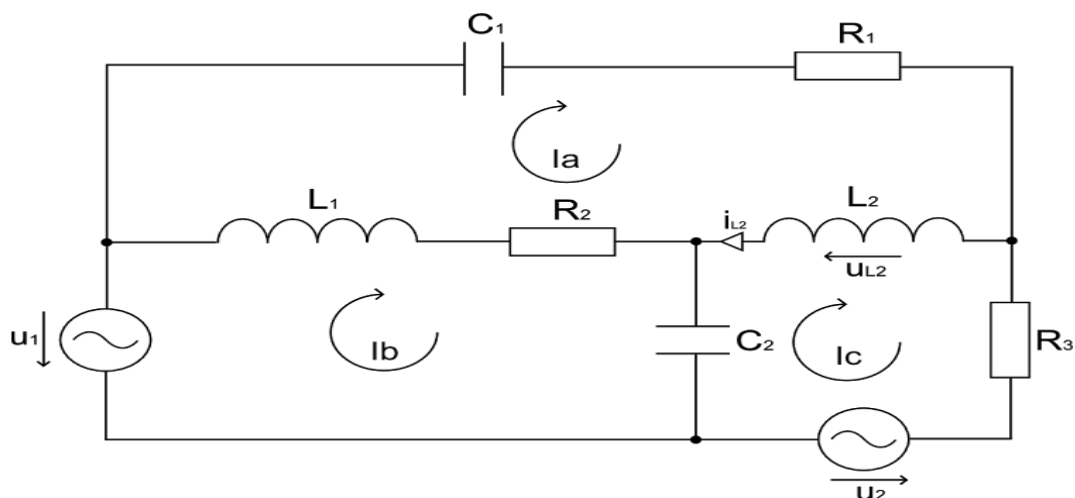
Pre napájacie napätie platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$. Vo vzťahu pre napätie na cievke L_2 : $u_{L2} = U_{L2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L2})$ určte $|U_{L2}|$ a φ_{L2} . Použite metódu smyčkových prúdov.

Pozn: Pomocný “smer šípky napájacieho zdroja platí pre špeciálny časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$)”.

sk.	$U_1[\text{V}]$	$U_2[\text{V}]$	$R_1[\Omega]$	$R_2[\Omega]$	$R_3[\Omega]$	$L_1[\text{mH}]$	$L_2[\text{mH}]$	$C_1[\mu\text{F}]$	$C_2[\mu\text{F}]$	$f[\text{Hz}]$
D	45	50	135	155	200	180	90	210	75	85



Použijeme metódu smyčkových prúdov (smyčky I_A , I_B , I_C). Bude potrebné zostaviť si 3 rovnice pre 3 neznáme (každú pre jednu smyčku). Prúd I_A preteká v smyčke bez zdroja. Prúd I_B preteká v smyčke so zdrojom u_1 . Prúd I_C preteká v smyčke so zdrojom u_2 .



V každej smyčke určíme smer a zostavíme rovnice.

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 85 = 170\pi \approx 534,07075 \text{ rad/s}$$

$$I_A: I_A \cdot (R_1 + R_2 + jX_{L2} + jX_{L1} - jX_{C1}) - I_B \cdot (R_2 + jX_{L1}) - I_C \cdot jX_{L2} = 0$$

$$I_B: -I_A \cdot (R_2 + jX_{L1}) + I_B \cdot (R_2 + jX_{L1} - jX_{C2}) + I_C \cdot jX_{C2} = u_1$$

$$I_C: -I_A \cdot jX_{L2} + I_B \cdot jX_{C2} + I_C \cdot (R_3 + jX_{L2} - jX_{C2}) = u_2$$

Dosadíme hodnoty zo zadania a vytvoríme si maticu.

$$\begin{aligned} I_A \cdot (290 + j135,2822) - I_B \cdot (155 + j96,1327) - I_C \cdot (j48,06637) &= 0 \\ -I_A \cdot (155 + j96,1327) + I_B \cdot (155 + j71,1672) + I_C \cdot j24,9655 &= 45 \\ -I_A \cdot j48,06637 + I_B \cdot j24,9655 + I_C \cdot (200 + j23,10087) &= 50 \end{aligned}$$

Vypočítame hodnoty prúdov, I_B nie je potrebné pre náš výpočet.

$$I_a = (0,3574 + j0,04634) \text{ A}$$

$$I_c = (0,2317 - j0,01528) \text{ A}$$

$$I_2 = I_A - I_C$$

Hodnoty poznáme, dosadíme a prúd I_2 na cievke L_2 vypočítame. Následne počítame U_{L2} .

$$I_2 = (0,1257 + j0,06162) \text{ A}$$

$$U_{L2} = jX_{L2} \cdot I_2 = (-2,9618 + j6,04194) \text{ V}$$

$$|U_{L2}| = \sqrt{2,9618^2 + 6,04194^2} = 6,7289 \text{ V}$$

$$\varphi_{L2} = \arctan\left(\frac{6,04194}{-2,9618}\right) = -63,8856^\circ \quad \text{v II. kvadrante}$$

$$\varphi_{L2} = 180^\circ - 63,8856^\circ = 116,1144^\circ$$

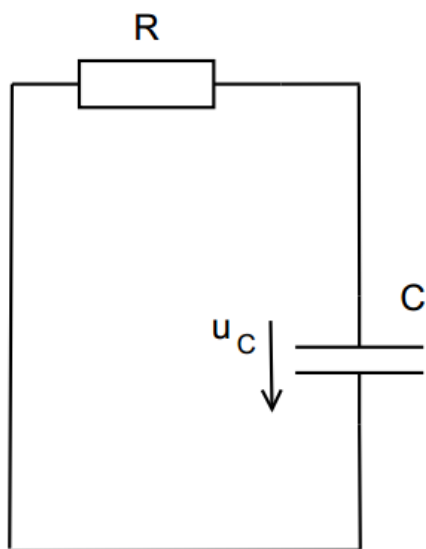
Príklad 6

Zadanie:

Zostavte diferenciálnu rovnicu popisujúcu chovanie obvodu na obrázku, ďalej ju upravte dosadením hodnôt parametrov. Vypočítajte analytické riešenie $u_C = f(t)$.

Urobte kontrolu výpočtu dosadením do zostavenej diferenciálnej rovnice.

sk.	C[F]	R[Ω]	$u_C(0)$ [V]
F	35	15	7



Tento obvod nám znázorňuje vybíjanie kondenzátoru.

Podľa II. Kirchhoffovho zákona je súčet napätí v smyčke rovný nule.

$$u_R + u_C = 0$$

Podľa Ohmovho zákona môžeme zapísať:

$$u_R = R \cdot I$$

$$u_C + R \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{u_C}{R}$$

Zostavíme si diferenciálnu rovnicu. Použijeme axiom a následne dosadíme.

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot I$$

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot \left(-\frac{u_C}{R}\right)$$

$$R \cdot C \cdot u'_C + u_C = 0$$

$$525 \cdot u'_C(t) + u_C(t) = 0$$

$$u_C(0) = 7 \text{ V} - \text{zo zadania}$$

Následne riešime. Napíšeme si charakteristickú rovnicu, dosadíme.

$$a\lambda + b = 0$$

$$\lambda = -\frac{b}{a} \quad a - \text{koefficient derivovaného } u_C = R \cdot C, \quad b - \text{nederivovaného } u_C = 1$$

$$\lambda = -\frac{1}{525}$$

Očakávaný tvar riešenia.

$$u_C(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$$

$$u_C(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t}$$

Derivujeme u_C a následne dosadíme do pôvodnej diferenciálnej rovnice vyššie.

$$u'_C = c'(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} + c(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} \cdot \left(-\frac{1}{525}\right)$$

$$525 \cdot (c'(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} + c(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} \cdot \left(-\frac{1}{525}\right)) + c(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

$$525 \cdot c'(t) \cdot e^{-\frac{1}{525}t} = 0$$

Zistíme kedy je súčin rovný nule. $e^{-\frac{1}{525}t}$ nie je nikdy rovný nule. Uvažujme, že bude platiť $c'(t) = 0$.

Derivácia je rovná nule práve vtedy, keď derivujeme konštantu. Môžeme dosadiť do očakávaného riešenia.

$$c(t) = K$$

$$u_C(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{525}t}$$

Pre naše riešenie použijeme hodnotu napätia v čase $t = 0$ (zo zadania).

$$7 = K \cdot e^{-\frac{1}{525} \cdot 0}$$

$$7 = K \cdot 1$$

$$K = 7$$

Výsledok

Dosadíme a výsledok je:

$$u_C(t) = 7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t}$$

Skúška správnosti

Derivujeme výsledok.

$$u'_C(t) = 7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t} \cdot \left(-\frac{1}{525}\right)$$

Dosadíme do pôvodnej rovnice a vypočítame.

$$\begin{aligned} 525 \cdot u'_C(t) + u_C(t) &= 0 \\ 525 \cdot \left(7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t} \cdot \left(-\frac{1}{525}\right)\right) + 7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t} &= 0 \\ -7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t} + 7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Záver

Tabuľka zadání a zhrnutie výsledkov

Príklad	Skupina	Výsledky
1	D	$U_{R7} = 18,3434 \text{ V}$ $I_{R7} = 0,0764 \text{ A}$
2	D	$U_{R5} = 31,3117 \text{ V}$ $I_{R5} = 0,0948 \text{ A}$
3	F	$I_{R4} = 29,1264 \text{ A}$ $U_{R4} = 10\,485,4968 \text{ V}$
4	D	$ U_{C1} = 0,1196 \text{ V}$ $\varphi_{C1} = 318,7838^\circ$
5	D	$\varphi_{L2} = 116,1144^\circ$ $ U_{L2} = 6,7289 \text{ V}$
6	F	$u_C(t) = 7 \cdot e^{-\frac{1}{525}t}$