



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Динамическое программирование и процессы управления»

Студент 415 группы
А. Д. Агальцов

Руководитель практикума
Ю. Ю. Минаева

Москва, 2012

1 Постановка задачи

Задача № 1

Написать солвер на `Matlab` для регуляризации одномерных ОДУ: $\dot{y} = f(t, y)$ с областью определения правой части $y > 0$. В качестве тестового уравнения взять

$$\dot{y} = \sqrt{y} - 3 \sin^2 t + m(t)$$

на отрезке $[0, 4\pi]$ с начальным условием $y(0) = 1$, где $m(t)$ — регуляризующая добавка, которая выбирается так, чтобы y всегда оставалось в области $y > 0$, иногда скользя вдоль её границы на некотором расстоянии ε .

Важные моменты в данной задаче:

- а) В `Matlab` уже есть солвер `ode45`, который позволяет решать ОДУ при ограничениях на знакоопределённость по части переменных, но он
 - i) не выдаст добавку $m(t)$, т.е. её надо отдельно высчитывать из решения;
 - ii) не подходит для решения ОДУ с более сложной конфигурацией области определения правой части. Основной пример такого ОДУ — уравнения на матрицы эллипсоидов, в которых $M(t)$ — это уже матрица, а область определения правой части — это множество симметричных положительно определённых матриц $Q(t)$. Такой случай уже проблематично свести к случаю ограничений типа $y > 0$ по части переменных.
- б) `ode45` предполагает существование производных до четвёртого порядка правой части, а это требование не всегда можно соблюсти.

Задача № 2

Эллипсоидальная аппроксимация с регуляризацией для простейшей двумерной системы.

Задача № 3

Эллипсоидальная аппроксимация многомерной системы.

2 Регуляризация ОДУ

2.1 Одномерные системы

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (1)$$

с непрерывной правой частью. Предположим, что правая часть определена при $y > 0$ и пусть $y(t) = y(t, t_0, y_0)$ — решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $y(t_0, t_0, y_0) = y_0 > 0$. Может случиться так, что с течением времени перестанет выполняться ограничение $y > 0$ и в некоторый момент времени $t^* > t_0$ фазовая переменная $y(t)$ обратится в нуль. Попробуем модифицировать правую часть ОДУ так, чтобы фазовая переменная не могла выйти на множество $y = 0$. Для этого добавим к правой части некоторую добавку $m(t)$. Получим модифицированное уравнение

$$\dot{y} = f(t, y) + m(t)$$

Нас будет интересовать численное решение исходного дифференциального уравнения (1) с учётом ограничений на правую часть. Поправка $m(t)$ будет выбираться на очередном шаге численного метода из соображений выполнения ограничения $y > 0$ для решения на этом шаге. В качестве базового метода будем использовать явный метод Адамса (произвольного порядка точности). Аналогичные построения могут быть проделаны и для метода Эйлера (как для частного случая метода Адамса). Для метода Рунге-Кутты предлагаемое решение работать не будет.

У предлагаемого метода регуляризации имеется три параметра: $\varepsilon \geq 0$, $\delta \geq 0$ и $\alpha > 0$. Параметр ε определяет наименьшее допустимое значение переменной y . Меньше чем ε переменная не может стать никогда. Параметр $\varepsilon + \delta$ определяет значение переменной y , при котором начинает действовать регуляризация. Таким образом, если $\delta = 0$, то регуляризатор появляется лишь тогда, когда без регуляризации было бы нарушено ограничение $y > \varepsilon$. Введение параметра δ позволяет добиться непрерывности регуляризующей добавки $m(t)$, которая в общем случае является разрывной. Смысл параметра α будет пояснён дальше.

Пусть мы решаем уравнение (1) на отрезке $[a, b]$. Выберем на этом отрезке равномерную сетку с шагом τ и положим $t_k = a + k\tau$, $y_k = y(t_k)$, $f_k = f(t_k, y_k)$, $m_k = m(t_k)$. Предположим, что используется m -шаговый явный метод Адамса и запишем формулы для k -го шага ($k \geq m$) метода Адамса, в предположении, что y_{k-1}, \dots, y_{k-m} все больше чем $\varepsilon + \delta$ без использования регуляризации:

$$\tilde{y}_k = y_{k-1} + \tau [b_1 f_{k-1} + \dots + b_m f_{k-m}] \quad (2)$$

Коэффициенты b_1, \dots, b_m определяются методом Адамса, y_1, \dots, y_{m-1} вычисляются произвольным методом с точностью не ниже m -го порядка по τ (например, методом Рунге-Кутты). Полагаем $m_0 = \dots = m_{k-2} = 0$. Предположим, что $\varepsilon < y_k < \varepsilon + \delta$.

Подправим \tilde{y}_k следующим образом. Определим r_k как меру близости \tilde{y}_k к ε в полосе $[\varepsilon, \varepsilon + \delta]$:

$$r_k = \left(1 - \frac{\tilde{y}_k - \varepsilon}{\delta}\right)^\alpha$$

Подкорректируем \tilde{y}_k исходя из её близости к ε :

$$y_k = \tilde{y}_k + (y_{k-1} - \tilde{y}_k)r_k$$

Исходя из этого соотношения и (2), получаем выражение для регуляризатора:

$$m_{k-1} = \frac{y_{k-1} - \tilde{y}_k}{b_1 \tau}$$

Пусть теперь $\tilde{y}_k < \varepsilon$. В таком случае доопределим регуляризатор из предыдущего случая по непрерывности. Положим $r_k = 1$ и будем иметь

$$y_k = \tilde{y}_k + (y_{k-1} - \tilde{y}_k)r_k = y_{k-1}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда на предыдущих шагах метода Адамса уже производилась регуляризация. Используя те же рассуждения, получим формулы для очередного шага метода Адамса с регуляризацией:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_{k-1} + \tau [b_1 f_{k-1} + \dots + b_m f_{k-m}] + \tau [b_2 m_{k-2} + \dots + b_m m_{k-m}] \\ r_k &= \min \left\{ \left(1 - \frac{\min\{\tilde{y}_k - \varepsilon, \delta\}}{\delta}\right)^\alpha, 1 \right\} \\ y_k &= \tilde{y}_k + (y_{k-1} - \tilde{y}_k)r_k \\ m_{k-1} &= \frac{y_{k-1} - \tilde{y}_k}{b_1 \tau} \end{aligned}$$

Здесь $k \geq m$ и заданы начальные условия $m_0, \dots, m_{m-1} = 0$ (предполагается, что на начальных шагах регуляризация не нужна, чего всегда можно добиться выбором маленького шага τ). По этим формулам ведётся расчёт решения и регуляризатора в одномерном случае.

Можно дать физическую интерпретацию предлагаемому методу. Фазовая переменная ведёт себя так, как если бы в полосе $[\varepsilon, \varepsilon + \delta]$ действовало вязкое трение в неоднородной и анизотропной среде: чем ближе фазовая переменная к точке $y = \varepsilon$, тем сильнее действующая на неё сила трения при движении к этой точке (неоднородность). При движении от этой точки никакая сила не действует (анизотропность). Параметр α описывает насколько быстро увеличивается вязкость при приближении к точке $y = \varepsilon$. Значению $\alpha = 1$ соответствует линейное увеличение вязкости. Использование параметра α позволяет добиться гладкости регуляризатора в некоторых случаях.

2.2 Многомерные системы

Рассмотрим теперь уравнение

$$\dot{Y} = f(t, Y) \tag{3}$$

где Y , $M(t)$, $f(t, Y)$ – вещественные квадратные матрицы размера $n \times n$. Будем считать, что отображение $f(t, Y)$ определено лишь для положительно определённых матриц Y и что $f'(t, Y) = f(t, Y)$. Пусть $Y(t) = Y(t, t_0, Y_0)$ – решение ОДУ (3) с начальными данными $Y(t_0) = Y_0 > 0$. В любой момент времени $t \geq t_0$ матрица $Y(t)$ будет симметричной (легко следует из интегрального представления ОДУ (3)), но может случиться так, что матрица $Y(t)$ выродится в некоторый момент времени $t^* > t_0$, перестав быть положительно определённой. Попробуем, действуя как в одномерном случае, избавиться от проблемы с вырождаемостью матрицы $Y(t)$. Сведём исходное ОДУ к уравнению

$$\dot{Y} = f(t, Y) + M(t)$$

Регуляризирующая добавка $M(t)$ будет выбираться из соображений положительной определённости решения и требований гладкости. Предлагаемый метод регуляризации снова использует параметры ε , δ , α , однако теперь ε задаёт минимальное допустимое значение для каждого собственного значения матрицы $Y(t)$, а $\varepsilon + \delta$ задаёт критическое значение собственных значений: если какое-либо из собственных значений меньше $\varepsilon + \delta$, в системе появляется регуляризирующая добавка. Параметр α имеет тот же смысл, что и в одномерном случае.

Пусть мы решаем ОДУ (3) на отрезке времени $[a, b]$. Выберем на этом отрезке равномерную сетку с шагом τ и обозначим $t_k = a + k\tau$, $Y_k = Y(t_k)$, $F_k = F(t_k, Y_k)$, $M(t_k) = M_k$. Будем решать уравнение (2) явным методом Адамса m -го порядка точности. Значения Y_0, \dots, Y_{m-1} приближённого решения этого уравнения с точностью порядка m по τ получим с помощью какого-нибудь другого метода численного решения ОДУ, например с помощью метода Рунге-Кутты, в предположении, что для их получения регуляризация не требуется, то есть все собственные значения матриц Y_0, \dots, Y_{m-1} больше, чем $\varepsilon + \delta$. Положим $M_0, \dots, M_{m-2} = 0$ (нулевые матрицы подходящего размера). Выпишем формулы для очередного шага метода Адамса:

$$\tilde{Y}_k = Y_{k-1} + \tau [b_1 F_{k-1} + \dots + b_m F_{k-m}] + \tau [b_1 M_{k-2} + \dots + b_m M_{k-m}], \quad k \geq m$$

Некоторые собственные значения матрицы \tilde{Y}_k могут оказаться меньше $\varepsilon + \delta$. Из геометрического смысла положительно определённой матрицы как эллипсоида, собственные векторы такой матрицы задают направления главных осей эллипсоида, а собственные значения задают их длину. Значит, в случае общего положения можно проследить за изменением направления каждой из осей эллипсоида и за изменением длины каждой оси с течением времени. Представим матрицу эллипсоида в виде $\tilde{Y}_k = U_k \tilde{D}_k U_k'$, где \tilde{D}_k – диагональная, а U_k – ортогональная матрица (такое представление возможно, так как вещественная симметрическая матрица ортогонально подобна диагональной). Столбцы матрицы U_k являются взаимно ортогональными и нормированными собственными векторами матрицы \tilde{Y}_k . Мы можем менять местами столбцы матрицы U_k и умножать их на -1 , снова получая матрицу из собственных векторов матрицы \tilde{Y}_k , таким образом у нас есть свобода в выборе матрицы U_k . Однако матрица \tilde{Y}_k мало отличается от матрицы Y_{k-1} , если τ достаточно мало, что даёт нам возможность

найти разложение $\tilde{Y}_k = U_k \tilde{D}_k U_k'$ такое, что столбцы U_k будут мало отличаться от столбцов U_{k-1} , а элементы D_k – от элементов D_{k-1} .

Можно предложить несколько способов нахождения вышеуказанной ортогональной матрицы U_k , ближайшей по столбцам к ортогональной матрице U_{k-1} . Первый способ основан на использовании алгоритма *RQI* (Rayleigh Quotient Iteration) поиска собственного вектора заданной матрицы, ближайшего к заданному (см. [1]). Другой способ более быстрый: сперва получаем произвольную ортогональную матрицу U_k такую, что $\tilde{Y}_k = U_k \tilde{D}_k U_k'$, затем скалярно перемножаем столбцы матриц U_k и U_{k-1} . Для далёких векторов скалярное произведение будет близко к нулю. После того как будут выбраны пары векторов, произведение которых близко по модулю к единице, останется умножить на -1 те векторы, которые в произведении давали число, близкое к -1 . После того как такая матрица U_k выбрана на очередном шаге, задача сводится к одномерному случаю. Рассматриваем разложения $\tilde{Y}_k = U_k \tilde{D}_k U_k'$ и $Y_{k-1} = U_{k-1} D_{k-1} U_{k-1}'$. Соответствующие диагональные элементы корректируем как в одномерном случае, получая матрицу D_k . После этого получаем $Y_k = U_k D_k U_k'$ и соответствующую матрицу поправки $M_{k-1} = (Y_k - \tilde{Y}_k)/(b_1 \tau)$. Выпишем итоговые формулы для метода Адамса с регуляризацией при $k \geq m$:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k &= Y_{k-1} + \tau [b_1 F_{k-1} + \dots + b_m F_{k-m}] + \tau [b_1 M_{k-2} + \dots + b_m M_{k-m}], \\ \tilde{Y}_k &= U_k \tilde{D}_k U_k', \\ r_k^i &= \min \left\{ \left(1 - \frac{\min\{(\tilde{D}_k)_{ii} - \varepsilon, \delta\}}{\delta} \right)^\alpha, 1 \right\} \\ (D_k)_{ij} &= (\tilde{D}_k)_{ij} + (D_{k-1} - \tilde{D}_k)_{ij} r_k^i \\ Y_k &= U_k D_k U_k' \\ M_{k-1} &= (Y_k - \tilde{Y}_k)/(b_1 \tau) \end{aligned}$$

где ортогональные матрицы U_k и диагональные матрицы D_k выбраны непрерывно (в описанном выше смысле). При $k < m$ предполагается, что регуляризация не нужна и $M_0 = \dots = M_{m-2} = 0$. Этого всегда можно добиться выбором малого шага τ .

2.3 Примеры

Рассмотрим для начала одномерную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = \sqrt{y} - 3 \sin^2 t, \quad y(0) = 1$$

Сначала посмотрим, как влияет на решение и на вид регуляризатора параметр α . На рис. 1 слева приведены решения, отвечающие регуляризации с $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$. Зелёным изображено решение, отвечающее $\alpha = 1$, синим — $\alpha = 0.1$. Жёлтым выделен уровень $\delta + \varepsilon$, на котором начинает действовать регуляризатор, красным — уровень, ниже которого решение не может опуститься. Видно, что чем больше α , тем меньше регуляризующая добавка, если значение переменной ещё не критично (больше ε). Видно также, что уменьшение α «сглаживает» углы на интегральной кривой. Поэтому

нужно выбирать α , достигая компромисса в гладкости регуляризатора и его побочном действии, когда регуляризация ещё не требуется (решение больше ε).

Теперь посмотрим на влияние параметра δ . На рис. 1 справа изображены интегральные кривые, отвечающие параметрам регуляризации $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$. Зелёному цвету отвечает $\delta = 1$, красному — $\delta = 0.5$, синему — негладкая регуляризация $\delta = 0$ (именно такая регуляризация реализуется в **Matlab** опцией **Nonnegative**). Как и в случае с параметром α , увеличение δ приводит к регуляризации, когда она ещё не требуется (когда решение больше ε), однако уменьшение δ приводит к появлению углов на интегральной кривой или, что то же самое, к появлению разрывов производной решения. Как видно из этих двух примеров, влияние параметров δ и α на решение и характер регуляризатора схоже, однако есть существенное различие. Параметр δ задаёт размер области, в которой наблюдается «побочный» эффект регуляризации, когда она не требуется, а параметр α задаёт поведение регуляризатора уже внутри этой области. Поэтому при использовании параметров α и δ желательно достигать гладкости регуляризатора за счёт увеличения α и стараться сделать δ как можно меньше.

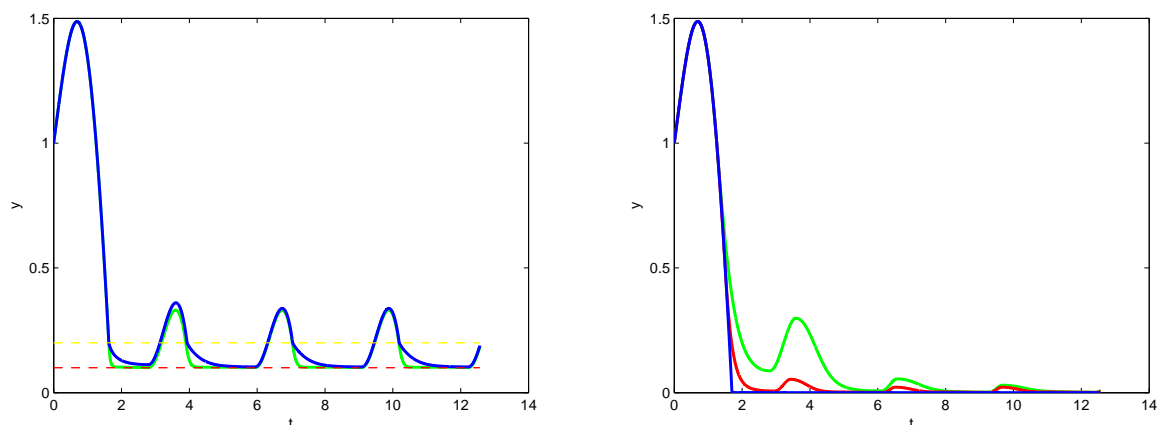


Рис. 1: Изменение решения при изменении параметров регуляризации.

Наконец, сравним «жёсткую» (или негладкую) регуляризацию из **Matlab**, соответствующую ε , $\delta = 0$ и «мягкую» регуляризацию с ε , $\delta \neq 0$. На рис. 2 слева зелёным изображён непрерывный регуляризатор, а синим — соответствующее решение ОДУ. Используются параметры $\varepsilon = 0$, $\delta = 0.2$, $\alpha = 1$. Справа зелёным изображён разрывный регуляризатор, а синим — интегральная кривая. Параметры: $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$, $\alpha = 1$. Видно, что введение дополнительных параметров регуляризации позволило выбрать непрерывный регуляризатор.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений на матрицу Q двумер-

ного эллипсоида и его центр q :

$$\begin{cases} \dot{Q} = \begin{pmatrix} \sqrt{Q_{11}} - 3 \sin^2(t) & 0 \\ 0 & \sqrt{Q_{22}} - 3 \sin^2(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q, \\ Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \\ q(0) = (1 \ 1)'. \end{cases}$$

В качестве параметров регуляризации выбраны $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.5$, $\alpha = 2$. Результат регуляризации изображён на рис. 3 слева. Видно, что регуляризатор непрерывен, а его графиком (как эллипсоидозначной функции, соответствующей матричной функции регуляризатора) являются непересекающиеся трёхмерные «капли».

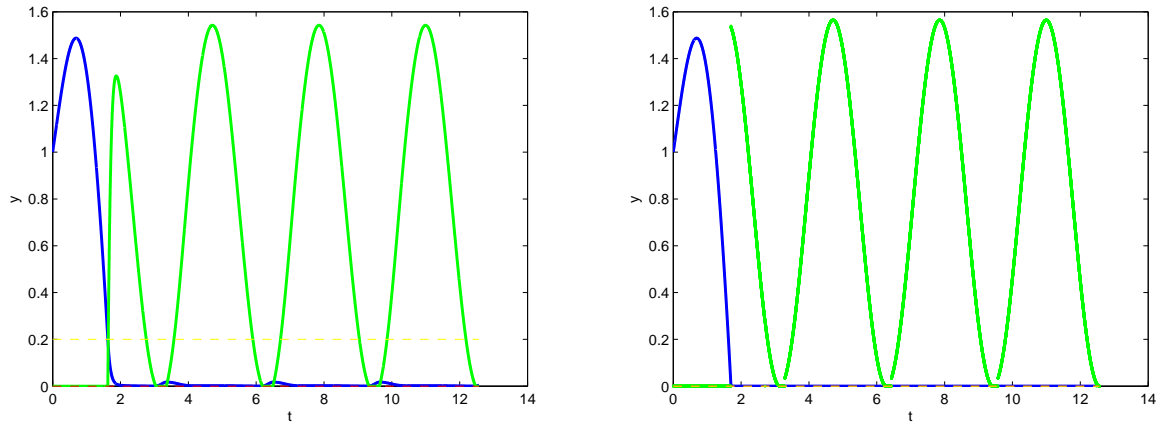


Рис. 2: Интегральная кривая и регуляризатор.

Наконец, возьмём следующую систему на матрицу Q двумерного эллипсоида и его центр q :

$$\begin{cases} \dot{Q} = - \begin{pmatrix} \sqrt{Q_{11}} - 0.5 \sin^2(t) & 0 \\ 0 & \sqrt{Q_{22}} - 0.5 \sin^2(t) \end{pmatrix}, \\ \dot{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}', \\ Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \\ q(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}'. \end{cases}$$

В качестве параметров регуляризации выбраны $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 1$. Иллюстрации приводятся на рис. 3 справа. Регуляризатор снова получился непрерывным, а его график состоит из непересекающихся трёхмерных «капель».

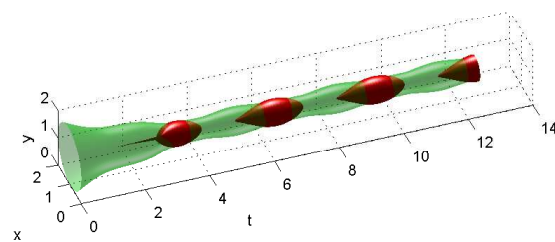
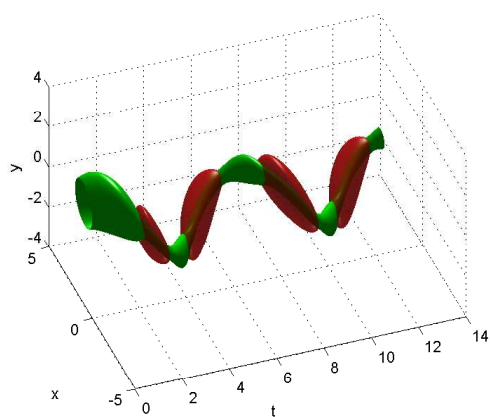


Рис. 3: Интегральные воронки регуляризованного решения (зелёный цвет) и регуляризатора (красный цвет).

3 Множества достижимости для линейных систем с помехами

3.1 Введение

Будем рассматривать линейные управляемые системы, подверженные действиям помех:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + C(t)v(t), & t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}_0 \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ непрерывны, $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$ – неизвестное возмущение из класса \mathcal{V}_0 измеримых по Лебегу функций, удовлетворяющих ограничению $v(t) \in \mathcal{Q}(t)$, а $u(\cdot)$ – управление с обратной связью из класса управлений \mathcal{U}_C , обеспечивающих существование и продолжительность решения системы (4) и удовлетворяющих ограничению $u(t, x) \in \mathcal{U}(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$. Далее будем рассматривать лишь эллипсоидальные ограничения:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \mathcal{E}(x^0, X_0), \\ \mathcal{Q}(t) &= \mathcal{E}(q(t), Q(t)), \\ \mathcal{P}(t) &= \mathcal{E}(p(t), P(t)). \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, переходя к множествам $\mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(B(t)p(t), B(t)P(t)B'(t))$, $\mathcal{Q}(t) = \mathcal{E}(C(t)q(t), C(t)Q(t)C'(t))$, можно считать, что $B(t) = I$, $C(t) = I$. Кроме того, переходя, если нужно, к переменной $y(t) = X(t_0, t)x(t)$, где $X(t, \tau)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$, можно считать, что $A(t) = 0$. Пусть далее μ – некоторое неотрицательное число, а B^{n_x} обозначает шар единичного радиуса с центром в нуле в \mathbb{R}^{n_x} .

Определение 1. Множеством достижимости с непрерывной коррекцией для системы (4) в момент времени $t \geq t_0$ из множества \mathcal{X}_0 в момент времени t_0 называется множество

$$X(t, t_0, \mathcal{X}_0, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid \exists x_0 \in \mathcal{X}_0, \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}_C : \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow x(t, t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in x + \mu B^{n_x}\},$$

где $x(t, t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ – решение системы (4) при соответствующих значениях параметров.

Это определение можно обобщить на случай, когда μ есть произвольная непрерывная функция времени. Рассмотрим разбиение $t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_k = t$ отрезка $[t_0, t]$ на k частей. Обозначим его за Σ_k . Определим величины

$$\begin{aligned} \mu_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mu(s) ds \\ \mathcal{P}_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{P}_i(s) ds \\ \mathcal{Q}_i &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{Q}_i(s) ds \end{aligned}$$

Далее сопоставим этим величинам и разбиению Σ_k множество достижимости максиминного типа с k коррекциями:

$$X_k^-(t, t_0, \mathcal{X}_0, \Sigma_k, \mu(\cdot)) = (\dots \{ [\dots (\mathcal{X}_0 + \mu_1 B^{n_x} + \mathcal{P}_1 \dot{-} (-\mathcal{Q}_1)) + \dots \dots] + \mu_i B^{n_x} + \mathcal{P}_i \dot{-} (-\mathcal{Q}_i) \} + \dots) + \mu_k B^{n_x} + \mathcal{P}_k \dot{-} (-\mathcal{Q}_k)$$

Это множество состоит из точек, достижимых из множества \mathcal{X}_0 с коррекциями управления на основе состояния системы в моменты $x(\tau_i)$ при условии, что помеха известна в моменты τ_i .

Определение 2. Альтернированным множеством достижимости системы (4) называется предел по хаусдорфовой метрике

$$X(t, t_0, \mathcal{X}_0, \mu(\cdot)) = \lim_{\text{diam } \Sigma_k \rightarrow 0, \Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}} X_k^-(t, t_0, \mathcal{X}_0, \Sigma_k, \mu(\cdot))$$

Для альтернированного множества достижимости справедлива следующая теорема (см. [2]).

Теорема 1. Альтернированное множество достижимости является максимальным по включению решением эволюционного уравнения интегральных «воронок»:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h_+ [X(t + \sigma) - \sigma \mathcal{Q}(t), (I + \sigma A(t))(X(t) + \sigma \mu(t) B^{n_x} + \sigma \mathcal{P}(t))] = 0$$

$$X(t_0) = \mathcal{X}_0$$

Здесь h_+ – полурасстояние по Хаусдорфу:

$$h_+(X, Y) = \inf \{ \varepsilon \mid X \subseteq Y + \varepsilon B^{n_x} \}$$

3.2 Квадратично регуляризованные множества достижимости

Как видно из определения множества достижимости максиминного типа с k коррекциями, на каждом из отрезков $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ в точке коррекции происходит прибавление шара радиуса μ_i . Можно обобщить понятие множества достижимости с k коррекциями на случай прибавления эллипсоидов. Для этого сначала введём понятие квадратичной суммы множеств.

Определение 3. Чебышёвским центром множества $X \in \text{comp } \mathbb{R}^n$ называется точка $c(X) \in \mathbb{R}^n$, определяемая формулой

$$c(X) = \operatorname{argmax}_{x \in X} \min_{y \in \mathbb{R}^n \setminus X} \|x - y\|$$

Определение 4. Квадратичной суммой множеств $X, Y \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ называется множество $X \oplus Y \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, определяемое опорной функцией

$$\rho(l \mid X \oplus Y) = \sqrt{\rho(l \mid X - c(X))^2 + \rho(l \mid Y - c(Y))^2} + c(X) + c(Y),$$

где $c(X), c(Y)$ – чебышёвские центры множеств X и Y .

Рассмотрим теперь непрерывную матричную функцию $M(t) \geq 0$. Сопоставим ей эллипсоид

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{E}(0, \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} M(s) ds)$$

Заменим формально в определении множества достижимости максиминного типа прибавление шара в геометрическом смысле прибавлением эллипсоида в квадратичном смысле. Получим множество

$$X_k^{q,-}(t, t_0, \mathcal{X}_0, \Sigma_k, M(\cdot)) = (\dots \{ [\dots (\mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{M}_1 + \mathcal{P}_1 \dot{-} (-\mathcal{Q}_1)) \oplus \dots \\ \dots] \oplus \mathcal{M}_i + \mathcal{P}_i \dot{-} (-\mathcal{Q}_i) \} \oplus \dots) \oplus \mathcal{M}_k + \mathcal{P}_k \dot{-} (-\mathcal{Q}_k)$$

Определение 5. Квадратично регуляризованным альтернированным множеством достижимости называется предел по хаусдорфовой метрике

$$X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot)) = \lim_{\text{diam } \Sigma_k \rightarrow 0, \Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}} X_k^{q,-}(t, t_0, \mathcal{X}_0, \Sigma_k, M(\cdot))$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 1 (см. [3]).

Теорема 2. Квадратично регуляризованное множество достижимости является максимальным по включению решением следующего эволюционного уравнения интегральных «воронок»:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h_+ [X(t + \sigma) - \sigma \mathcal{Q}(t), (I + \sigma A(t))(X(t) \oplus \mathcal{E}(0, \sigma M(t)) + \sigma \mathcal{P}(t))] = 0 \\ X(t_0) = \mathcal{X}_0$$

Кроме того, справедливы следующие оценки (см. [3]):

$$X(t, t_0, \mathcal{X}_0, \mu_-(\cdot)) \subseteq X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot)) \subseteq X(t, t_0, \mathcal{X}_0, \mu_+(\cdot)), \\ \mu_-(t) = \mu_-(X^q(t), M(t)) = \min \left\{ \frac{l, M(t)l}{2\rho(l|X^q(t))} \mid l \in B^{n_x} \right\} \\ \mu_+(t) = \mu_+(X^q(t), M(t)) = \max \left\{ \frac{l, M(t)l}{2\rho(l|X^q(t))} \mid l \in B^{n_x} \right\}$$

3.3 Эллипсоидальное оценивание

Зададимся вопросом о поиске внешней эллипсоидальной оценки для квадратично регуляризованного альтернированного множества достижимости.

Определение 6. Пусть $l(\cdot): [t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ – гладкая векторная функция. Эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(x(t), X(t))$ множества $X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot))$ назовём тугой по направлению $l(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t]$, если выполнено равенство

$$\rho(l(s) \mid X^q(s, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot))) = \rho(l(s) \mid \mathcal{E}(x(s), X(s))) \quad \forall s \in [t_0, t]$$

Может случиться так, что внутренняя оценка, тугая вдоль направления $l(\cdot)$ и соответствующая нулевой матрице $M(t)$, в некоторый момент t «схлопывается»: одна из осей эллипсоида оценки становится очень маленькой. В таком случае можно подбирать матрицу $M(t)$ из тех соображений, чтобы все собственные значения оценки были отделены от нуля, например, как это описано в разделе о регуляризации матричных ОДУ. Имея на вооружении эту технику регуляризации ОДУ, сформулируем теорему, которая позволяет строить внутренние оценки, тугие вдоль заданных направлений (см. [3]).

Теорема 3 (Внутреннее эллипсоидальное оценивание). Эллипсоидальная оценка $\mathcal{E}^-(t) = \mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))$ с параметрами, определяемыми из следующих соотношений, является внутренней тугой оценкой множества $X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot))$ на отрезке $[t_0, t]$ вдоль направления $l(\cdot)$, определяемого из сопряжённой системы

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -A'(t)l, \\ l(t_0) &= l_0 \in B^{n_x} \end{aligned} \tag{5}$$

если матричная функция $M(\cdot)$ такова, что решение матричного уравнения

$$\dot{X}_- = G(A(t)X_-(t) + X_-^*(t)S(t)P^{\frac{1}{2}}(t)) - \pi(t)X_-(t) - \pi^{-1}(t)Q(t) + M(t)$$

продолжаемо на отрезке $[t_0, t]$. Здесь оператор $G(A) = A + A'$, $(X_-^*)'(t)X_-^*(t) = X_-(t)$, а матрица $S(t)$ выбрана в виде $S(t) = S_a(t)S_b'(t)$, причём вектор l_1 и ортогональные матрицы $S_a(t)$, $S_b(t)$ таковы, что для направления $l(t)$, определяемого (6), выполнены соотношения

$$\begin{aligned} S_a(t)P^{\frac{1}{2}}(t)l(t) &= (P(t)l(t), l(t))^{\frac{1}{2}}l_1, \\ S_b(t)X_-^*(t)l(t) &= (X_-(t)l(t), l(t))^{\frac{1}{2}}l_1, \end{aligned}$$

а функция $\pi(t)$ определена из соотношения

$$\pi(t) = \frac{(l(t), Q(t)l(t))^{\frac{1}{2}}}{(l(t), X_-(t)l(t))^{\frac{1}{2}}}$$

Имеет место аналогичная теорема для внешних оценок.

Теорема 4 (Внешнее эллипсоидальное оценивание). Эллипсоидальная оценка $\mathcal{E}^+(t) = \mathcal{E}(x_+(t), X_+(t))$ с параметрами, определяемыми из следующих соотношений, является внешней тугой оценкой множества $X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot))$ на отрезке $[t_0, t]$ вдоль направления $l(\cdot)$, определяемого из сопряжённой системы

$$\begin{aligned} \dot{l} &= -A'(t)l, \\ l(t_0) &= l_0 \in B^{n_x} \end{aligned} \quad (6)$$

если матричная функция $M(\cdot)$ такова, что решение матричного уравнения

$$\dot{X}_+ = G(A(t)X_+(t) - X^*(t)S(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)) + \pi(t)X_+(t) + \pi^{-1}(t)P(t) + M(t)$$

продолжаемо на отрезке $[t_0, t]$. Здесь оператор $G(A) = A + A'$, $(X_+^*)'(t)X_+(t) = X_+(t)$, а матрица $S(t)$ выбрана в виде $S(t) = S_a(t)S_b'(t)$, причём вектор l_1 и ортогональные матрицы $S_a(t)$, $S_b(t)$ таковы, что для направления $l(t)$, определяемого (6), выполнены соотношения

$$\begin{aligned} S_a(t)Q^{\frac{1}{2}}(t)l(t) &= (Q(t)l(t), l(t))^{\frac{1}{2}}l_1, \\ S_b(t)X_+^*(t)l(t) &= (X_+(t)l(t), l(t))^{\frac{1}{2}}l_1, \end{aligned}$$

а функция $\pi(t)$ определена из соотношения

$$\pi(t) = \frac{(l(t), P(t)l(t))^{\frac{1}{2}}}{(l(t), X_+(t)l(t))^{\frac{1}{2}}}$$

Как следует из [3], при построении внешних оценок следует выбирать $M(t)$ равным $M_-(t)$, где $M_-(t)$ вычисляется в системе для внутренних оценок.

3.3.1 Получение $M(t)$

Пусть требуется посчитать внешние оценки, тугие по направлениям $l_1(\cdot), \dots, l_k(\cdot)$. Выше было отмечено, что для этого нам потребуется строить внутренние оценки. В программе это построение внутренних и внешних оценок производится параллельно: сперва получаются все оценки в момент времени t_i , затем вычисляются все оценки в момент времени t_{i+1} .

Опишем переход от момента времени t_i к моменту времени t_{i+1} . Упорядочим каким-нибудь образом все вычисляемые внутренние оценки. Перейдём к первой внутренней оценке. Для неё, пользуясь методом регуляризации матричных ОДУ, получим регуляризатор $M_1(t_i)$, необходимый для того, чтобы эта оценка была положительно определённой в момент времени t_{i+1} . Перейдём ко второй внутренней оценке. В систему для этой оценки подставим регуляризатор $M_1(t_i)$ и для такой системы получим регуляризатор $M_2(t_i)$, обеспечивающий положительную определённость второй оценки в момент времени t_{i+1} . Но этот регуляризатор неотрицательно определён (это гарантирует наш алгоритм регуляризации), значит, если подставить $M_1(t_i) + M_2(t_i)$

в правую часть системы для первой внутренней оценки, то в момент времени t_{i+1} первая оценка заведомо будет положительно определена (так как она регуляризуется не только суммой $M_1(t_i) + M_2(t_i)$, но, по построению, и первым слагаемым этой суммы $M_1(t_i)$). Таким образом, матрица $M_1(t_i) + M_2(t_i)$ обеспечивает положительную определённость первых двух внутренних оценок в момент времени t_{i+1} . Далее, подставляем в правую часть системы для третьей оценки регуляризатор $M_1(t_i) + M_2(t_i)$ и поступаем как в случае со второй оценкой. И так далее. Так, переходя от оценки к оценке, за конечное число шагов мы получим матрицы $M_1(t_i), \dots, M_k(t_i)$. Пользуясь методом математической индукции, получим, что $M(t_i) = M_1(t_i) + \dots + M_k(t_i)$, будучи подставленным в правую часть системы для любой из внутренних оценок, гарантирует положительную определённость каждой из этих оценок в момент времени t_{i+1} , то есть является общим регуляризатором для внутренних оценок. Этот регуляризатор мы и будем использовать в качестве общего регуляризатора для всех оценок. Таким образом, в программе будут считаться внешние тугие оценки квадратично регуляризованного множества достижимости с параметром $M(\cdot)$ (то есть для множества $X^q(t, t_0, \mathcal{X}_0, M(\cdot))$), определяемым указанным способом на каждом шаге системы.

Заметим, что можно было предложить другой способ выбора общего регуляризатора для всех внутренних оценок, например, можно было посчитать регуляризаторы для каждой из оценок отдельно и взять их сумму (в программе эта возможность предусмотрена), однако описанный выше способ последовательного выбора добавки в ряде случаев позволяет уменьшить её величину (точнее, величину эллипсоида, задаваемого матрицей добавки).

4 Примеры

4.1 Устойчивая симметричная система

Рассмотрим для начала простейшую двумерную систему, задаваемую следующей таблицей.

A	B	C	x_0	X_0	p	P	q	Q
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	I	I	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I

Это система с устойчивой матрицей, и с течением времени множество достижимости этой системы стягивается в точку. Регуляризация не позволяет внешним оценкам стянуться в точку. Регуляризатор оказывается непрерывным, а его график представляет собой шарообразную функцию. Иллюстрации приведены на рис. 4.

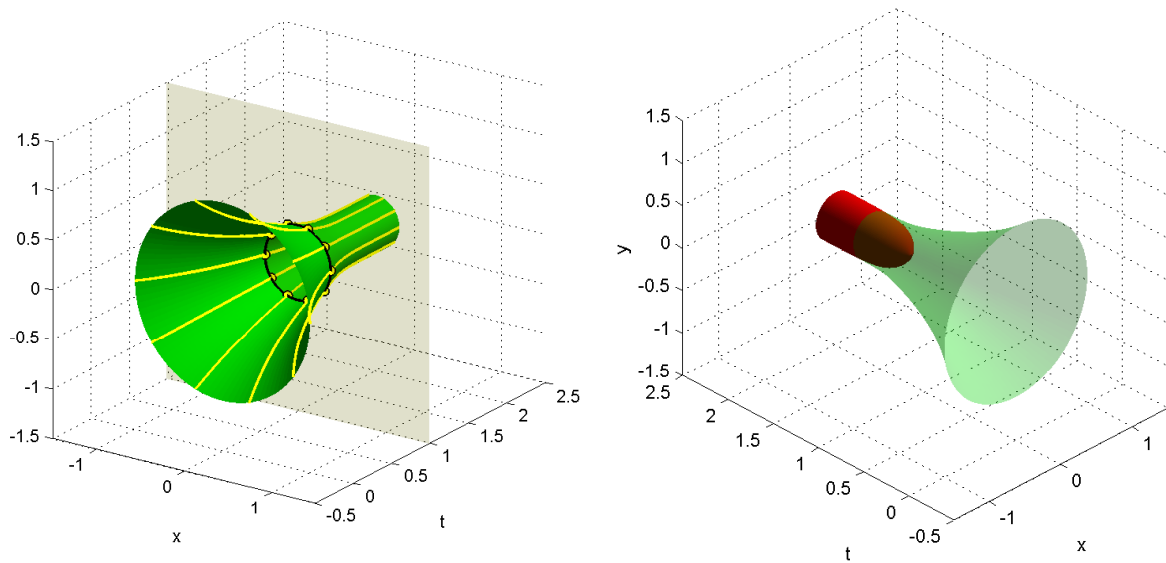


Рис. 4: Пересечение внешних оценок (зелёным), хорошие кривые (жёлтым), регуляризатор (красным) и оценки в момент $\tau = 1$. Параметры регуляризации $\varepsilon = 0$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 2$.

4.2 Устойчивая трёхмерная система

Обратимся теперь к более интересной с точки зрения регуляризации трёхмерной системе. Пусть система задаётся следующими параметрами.

A	B	C	x_0	X_0
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos^2 t + 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I
p	P	q	Q	
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \sin t + 4 \end{pmatrix}$	$\sin t$	$\sin^2(2t) + 1$	

Матрица этой системы устойчива, а центр помехи осциллирует. Внутренние оценки на отрезке $[0, 6]$ без регуляризации для этой системы вырождаются, однако добавление регуляризации позволяет решить эту проблему. Приведём иллюстрации построения внешних тугих оценок с регуляризацией с параметрами $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 2$ на рис. 5 и рис. 6. Регуляризатор получается непрерывным, а его график представляет из себя крутящуюся ленту. Проецирование осуществляется на плоскость векторов $[1, 0, 0]'$ и $[0, 1, 0]'$ (для динамической плоскости это плоскость в момент времени $\tau = 6$).

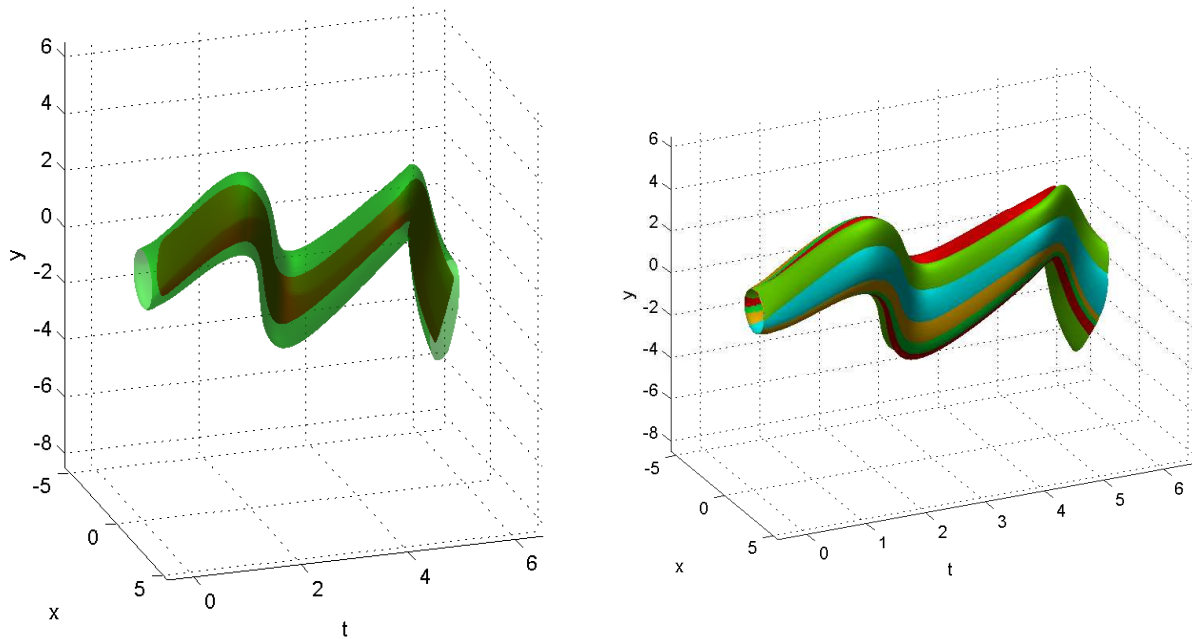


Рис. 5: Слева проекции пересечения внешних тугих оценок (зелёным) и регуляризатора (красным) на трёхмерную динамическую плоскость. Справа выведены отдельные внешние тугие оценки в проекции на трёхмерную динамическую плоскость.

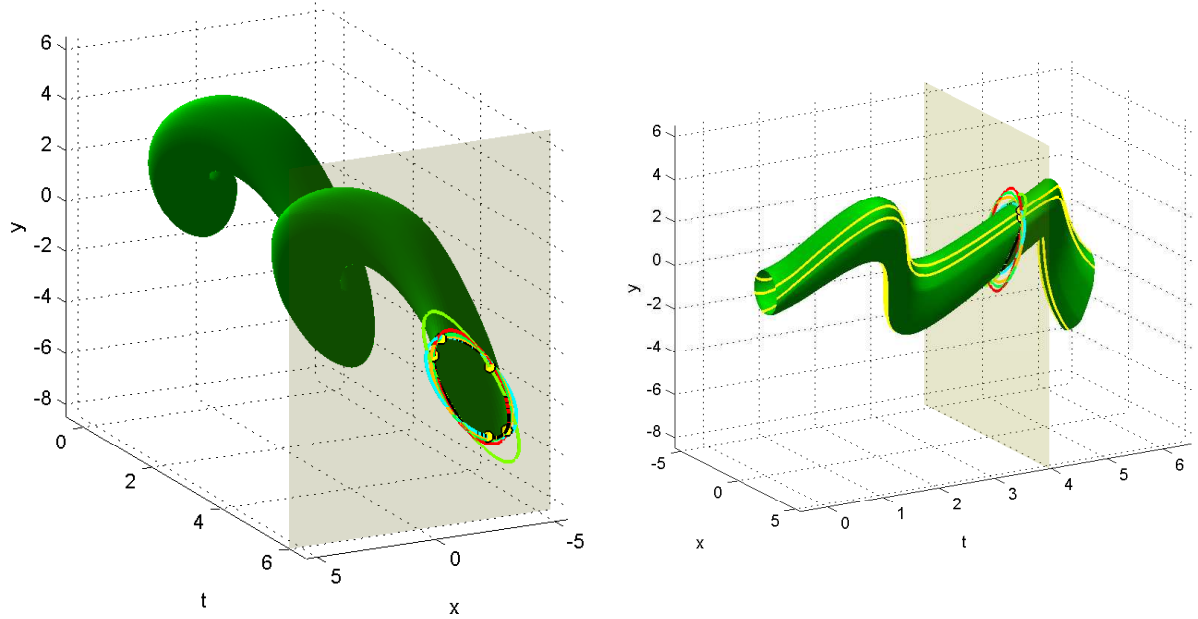


Рис. 6: Слева проекция пересечения внешних тугих оценок на статическую трёхмерную плоскость и её двумерное сечение в момент времени $\tau = 6$. Справа проекция пересечения на трёхмерную динамическую плоскость, его двумерное сечение в момент времени $\tau = 4$ и хорошие кривые (жёлтым).

4.3 Периодическая система

Теперь обратимся к системе с зависящими от времени, периодическими непрерывными коэффициентами. Точнее, пусть параметры задаются следующей таблицей.

A	B	C	x_0	X_0	p	P	q	Q
$\begin{pmatrix} -3 \sin \pi t & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin \pi t & 0 \\ 0 & 0 & -3 \sin \pi t \end{pmatrix}$	I	I	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	I	$\begin{pmatrix} \sin \pi t \\ \cos \pi t \\ 0 \end{pmatrix}$	I

Будем строить внешние тугие оценки множества достижимости на отрезке $[0, 4]$. На этом примере покажем, как может меняться регуляризатор при изменении параметров регуляризации. Для начала, рассмотрим параметры регуляризации $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 2$. Проецирование будем осуществлять на плоскость векторов $[1, 0, 0]'$ и $[0, 1, 0]'$ (для динамической плоскости, опять же, понимаем под этим плоскость в последний момент времени). Иллюстрации приводятся на рис. 7. Теперь попробуем изменить параметры регуляризации и посмотреть, как это отразится на оценках и на регуляризаторе. Что из этого получается, видно из рис. 8. Видно, что если задана регуляризация с параметрами $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ («жёсткая» регуляризация), то никакой добавки к правой части уравнения не требуется, внутренние оценки не вырожда-

ются. Однако с увеличением параметров δ и ε , появятся два отрезка времени, на которых возникнет регуляризирующая добавка. Как видно из рис. 8, проекция графика регуляризатора на трёхмерную плоскость в данном случае представляет из себя непересекающиеся трёхмерные «капли».

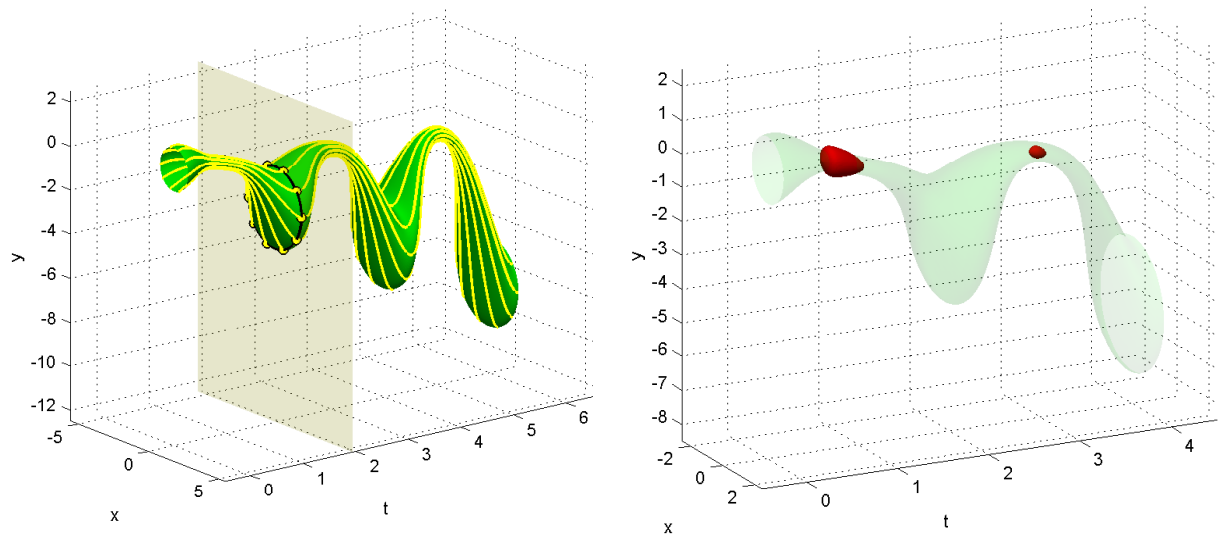


Рис. 7: Слева проекция пересечения внешних тугих оценок на трёхмерную динамическую плоскость и её двумерное сечение в момент $\tau = 2$. Жёлтым изображены десять хороших кривых. Справа проекция на трёхмерную динамическую плоскость пересечения внешних оценок (зелёным) и регуляризатора (красным).

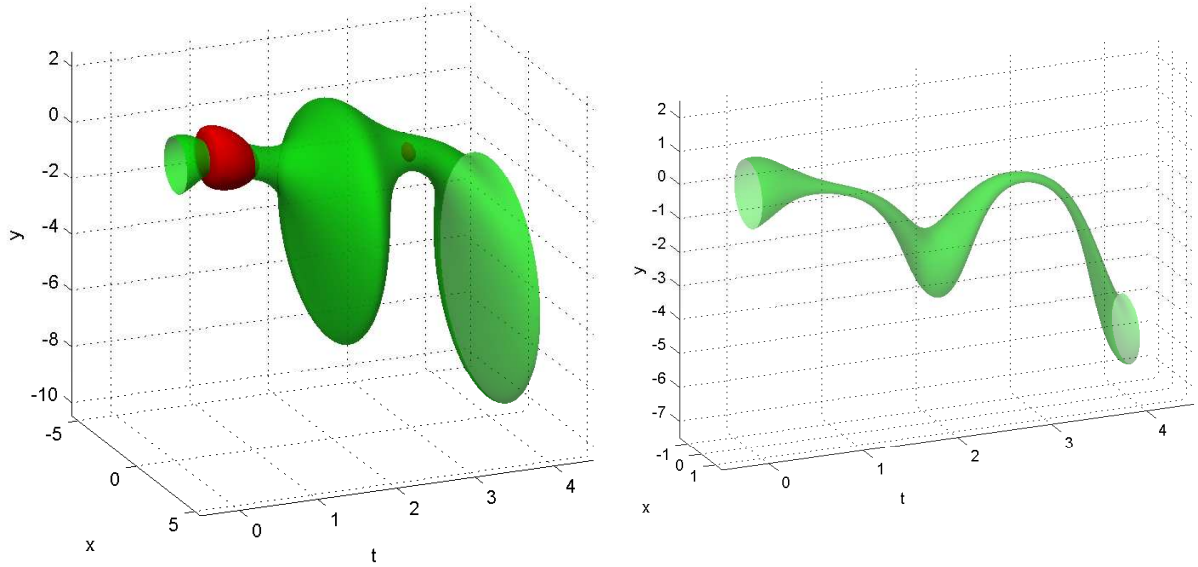


Рис. 8: Зелёным изображена проекция на трёхмерную динамическую плоскость пересечения внешних тугих оценок. Красным изображена проекция регуляризатора. Слева $\delta = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, справа $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$.

4.4 Колебательная система

Теперь обратимся к основному примеру. Пусть параметры определяются из следующей таблицы.

A								B, C			
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.833 & 0.166 & 0 & 0.333 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.166 & -2.033 & 0 & -0.066 & 0 & -1.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0.333 & -0.066 & 0 & -2.133 & 0 & -0.5 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}$								$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$			

x_0	X_0	p	P	q	Q
$0 \in \mathbb{R}^8$	$I \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$	$\begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ 0 \\ 2 \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix}$	$4I \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$	$0 \in \mathbb{R}^8$	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$

Такие параметры описывают колебательную систему с четырьмя степенями свободы во внешнем поле при наличии трения и неизвестной, но ограниченной помехи. Первые четыре компоненты вектора x имеют смысл координат, а последние четыре — скоростей колебательной системы. При этом вектор силового поля принадлежит шару

с центром, вращающимся вокруг нуля, а помеха ограничена эллипсоидом с центром в нуле. Система будет рассматриваться на отрезке времени $[0, 8]$. В качестве параметров регуляризации будем использовать стандартные параметры $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$, $\alpha = 2$. Эмпирически эти параметры получены из тех соображений, что они, во-первых, достаточно мало отличаются от параметров $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 2$, при которых регуляризация происходит только если имеется вырождение внутренней оценки, а во-вторых, часто позволяют повысить гладкость регуляризатора, как, в частности, и в этом примере. Сперва построим внешние оценки, тугие по направлениям из плоскости векторов x_5 , x_6 и спроецируем их на эту плоскость. Из рис. 9 видно, что регуляризатор получается достаточно гладким, а хорошие кривые более-менее равномерно распределяются по поверхности пересечения внешних оценок. Проекцию этих оценок на статическую плоскость можно увидеть на рис. 10 слева.

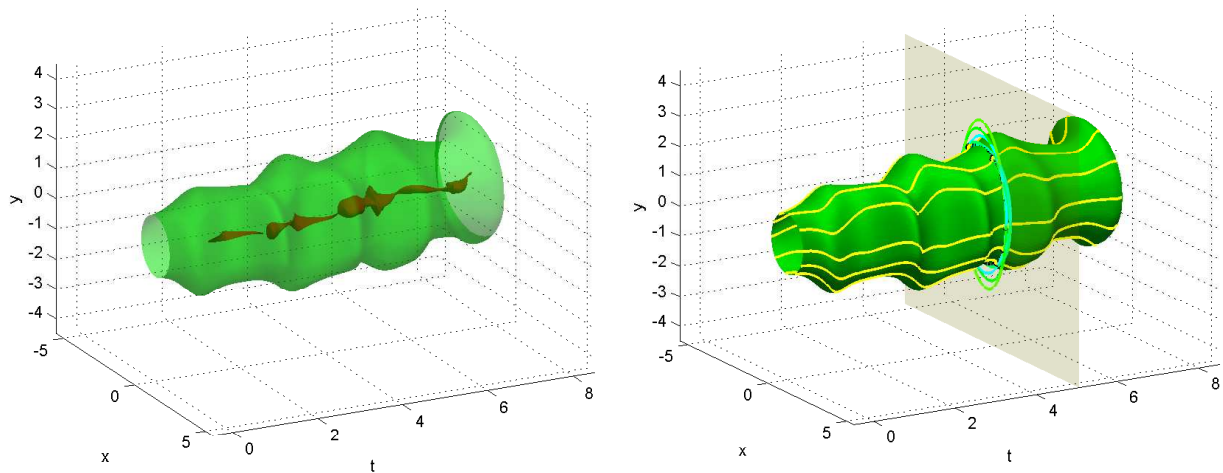


Рис. 9: Проекция пересечения внешних тугих оценок на трёхмерную динамическую плоскость изображена зелёным. Красным слева изображён регуляризатор. Жёлтым справа изображены хорошие кривые. Справа также приводится двумерное сечение внешней оценки в момент времени $\tau = 5$.

Построим теперь внешние оценки, тугие по направлениям из плоскости векторов x_3 , x_5 в момент времени $t = 7.5$. Как видно из рис. 10 справа, гладкий регуляризатор на всём отрезке $[0, 7.5]$ построить не удаётся. Он будет гладким на подотрезке, не содержащем точку 7.5. Если мы попробуем построить аналогичные оценки на отрезке $[0, 6]$ или даже на $[0.8]$, то получим качественно аналогичную картину.

Теперь построим внешние оценки по направлениям из плоскости векторов x_1 , x_2 . Иллюстрации приводятся на рис. 11. Как видно из иллюстраций, с точки зрения качественного характера регуляризатора этот случай аналогичен первому из рассмотренных: проекции на плоскость векторов x_5 , x_6 .

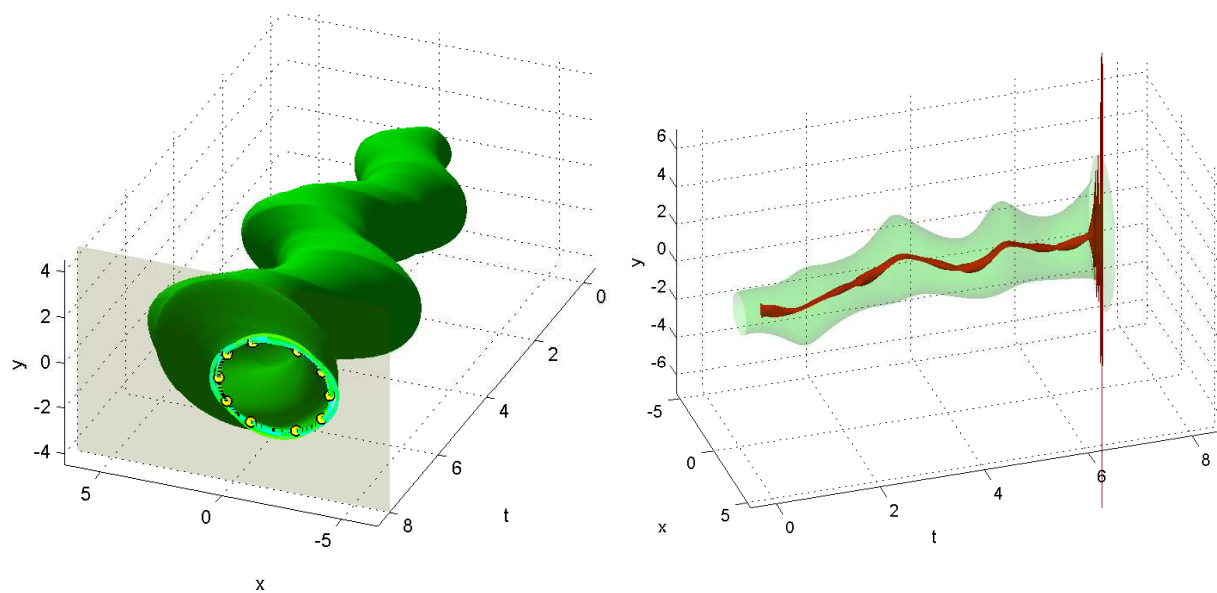


Рис. 10: Слева изображена проекция пересечения внешних тугих оценок на трёхмерную статическую плоскость векторов x_5, x_6 и её двумерное сечение в конечный момент времени. Справа проекция пересечения внешних тугих оценок на трёхмерную динамическую плоскость, отвечающую векторам x_3, x_5 в последний момент времени $\tau = 7$.

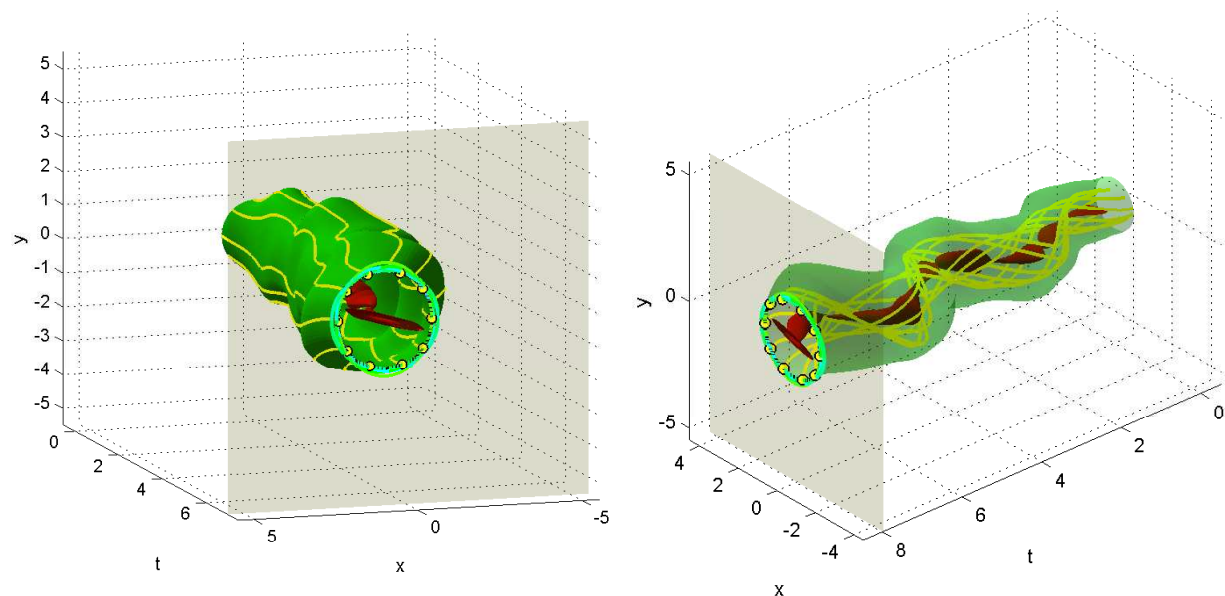


Рис. 11: Проекция пересечения внешних тугих оценок на динамическую (слева) и статическую (справа) плоскость векторов x_1, x_2 . Красным изображена проекция регуляризатора, жёлтым — хорошие кривые. Приведено также двумерное сечение оценок в конечный момент времени.

Содержание

1	Постановка задачи	2
	Задача №. 1.	2
	Задача №. 2.	2
	Задача №. 3.	2
2	Регуляризация ОДУ	3
2.1	Одномерные системы	3
2.2	Многомерные системы	4
2.3	Примеры	6
3	Множества достижимости для линейных систем с помехами	10
3.1	Введение	10
3.2	Квадратично регуляризованные множества достижимости	11
3.3	Эллипсоидальное оценивание	13
3.3.1	Получение $M(t)$	14
4	Примеры	16
4.1	Устойчивая симметричная система	16
4.2	Устойчивая трёхмерная система	16
4.3	Периодическая система	18
4.4	Колебательная система	20

Список литературы

- [1] *Lloyd N. Trefethen, David Bau III* Numerical Linear Algebra, SIAM, 1997
- [2] *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On reachability under uncertainty, SIAM Journal on Control and Optimization, 2002, 181-216
- [3] *Гагаринов П. В.* Вычисление альтернированных трубок достижимости для линейных управляемых систем при неопределённости, 2012