Задание 2а. Векторы. Метод Гаусса

Векторным (линейным) пространством называется произвольное множество V с введёнными на нём двумя операциями $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, которые называются сложением и умножением на числа и удовлетворяют ряду аксиом. Элементы векторного пространства называются векторами. Аксиомы, в частности, влекут существование особенного вектора $\vec{0}$, удовлетворяющего соотношению $\forall v \in V\ v + \vec{0} = v$, и называемого **нулевым вектором**.

Пример: $\mathbb{R}^n$, то есть множество всех записей вида $(x_1, \ldots, x_n)$, в которых в скобках записано через запятую n произвольных действительных чисел. Сложение и умножение в R^n определяются по формулам: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$, где x_i, y_i, a — действительные числа.

Линейной комбинацией векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется вектор, который можно получить из $v_1, \ldots, v_n$ применяя операции «+» и «·». Любую линейную комбинацию можно предстравить в виде $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$, где $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ — некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ называют **линейно независимыми**, если любая их линейная комбинация, в которой котя бы один коэффициент отличен от нуля, не равна нулевому вектору.

Задача 1. Выразите в виде линейной комбинации (там, где это возможно):

(1) $(10, 15)$ через $(1, 0)$ и $(0, 1)$;

(2) $(4, -7)$ через $(1, 1)$ и $(0, 1)$;

(3) $(8, -8, 8)$ через $(3, -3, 3)$;

(4) $(5, 10, 0)$ через $(3, 6, -4)$ и $(0, 0, \pi)$;

(5) $(0, \frac{3}{2}, 0)$ через $(2, 1, 3)$, $(-1, 0, 0)$ и $(0, 0, 3)$;

(6) $(4, -\frac{7}{8}, 6)$ через $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$;

(7) $(2, 2, 3, 4)$ через $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$;

(8) $\vec{0}$ через $(2, 3)$ и $(5, 3.5)$;

(9) $\vec{0}$ через $(1, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, 1)$ ненулевым образом;

Задача 2. Найдите линейно зависимые наборы векторов и линейные зависимости для них:

(1) $(1, 0)$ и $(0, 1)$;

(2) $(1, 1)$ и $(0, 1)$;

(3) $(1, 2)$ и $(2, 1)$;

(4) $(1, 2)$ и $(1, 2)$;

(5) $(1, 2)$, $(2, 1)$ и $(0, 0)$;

(6) $(5, 10)$ и $(-7, -14)$;

(7) $(1, 0, 2)$ и $(2, 0, 4)$;

(8) $(3, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $(2, 0, 0)$ и $(0, 8, 8)$;

(9) $(4, 3, 6)$, $(2, 1, 1)$ и $(0, 2, 8)$;

Набор векторов пространства V называется **базисом**, если он линейно независим и любой вектор V линейно выражается через вектора этого набора.

Задача 3. Какие из наборов векторов предыдущей задачи являются базисами в соответствующем пространстве, и почему?

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

(1) прибавить к одной строке любую другую, умноженную на число;

(2) домножить одну строку на число;

(3) поменять строки местами;

Элементарными преобразованиями любую матрицу можно привести к **ступенчатому виду**, то есть виду, в котором каждая строка матрицы начинается с большего количества нулей, чем предыдущая. Этот способ называется **метод Гаусса** и заключается в последовательном обнулении элементов матрицы преобразованиями (1) и (3). В ступенчатой матрице первый ненулевой элемент в каждой строке (если он есть) называется **лидером** ступенчатой матрицы. **Обратный ход метода Гаусса** заключается в обнулении всех элементов матрицы, стоящих над лидерами, с использованием элементарного преобразования (1).

Задача 4. Привести следующие матрицы к ступенчатому виду, а затем выполнить обратный ход метода Гаусса:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & -1 \\ -6 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & -1 \\ -6 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Уравнение вида $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$, в котором a_i, b — конкретные числа, x_i - переменные называется **линейным**. Метод Гаусса применяют для решения систем линейных уравнений. Для этого строится матрица, причём каждой переменной, учавствующей в системе, сопоставляют столбец матрицы, каждому уравнению — строку матрицы. Также, выделяют специальный столбец для правых частей уравнений. Выписывая все коэффициенты получают **матрицу системы уравнений**. Элементарные преобразования строк матрицы системы приводят к матрицам равносильных систем, т. о. метод решения системы заключается в приведении её матрицы к ступенчатому виду и решении получившейся системы. Система линейных уравнений может не иметь решения, иметь одно решение, либо бесконечно много.

Задача 5. Выписать матрицы следующих систем уравнений:

(1) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ y + z - 1 = x \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + -x_3 = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x - y - 5z = 0 \\ 3y + 8z = 0 \\ 7z + y + 2x = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_3 = -1 \\ -6x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x - y - 5z = 4 \\ 3x + 8z + 1 = 0 \\ -6x + 9y + 7z = 4 \end{cases}$

Задача 6. Примените к матрицам, получившимся в предыдущей задаче, метод Гаусса и его обратный ход, преобразуйте снова к системам уравнений и решите их.