Задание 1а. Предикаты и логические операции

Логические формулы — это формулы, с аргументами или без, которые при подстановке всех аргументов (если они имеются), превращаются в булевское значение — **истину** (1), или **ложь** (0). Логические формулы конструируются с помощью логических операций, знака тождественной истины и тождественной лжи, предикатов, кванторов и скобок (см. таблицу).

Предикат — это суждение о субъекте или субъектах, который может быть задан логической формулой или иным образом. Предикат задаёт логическую функцию с аргументом (аргументами) и обращется в истину или ложь при задании аргументов. *Примеры предикатов*: $\mathrm{blue}(x) = x$ – синий предмет, $\mathrm{odd}(x) = x$ – нечётное число, $\mathrm{nightmare}(x) = \mathrm{blue}(x) \vee \mathrm{odd}(x)$.

В таблице приведены способы конструирования логических формул. A и B — обозначают произвольные логические формулы, x — произвольную переменную, φ — предикат.

Конструкция	**Пишется**	**Читается**	**Значит**
операция $\wedge$ (логическое «и», произведение)	$A \wedge B$	A и B	истина, если и A и B истинны
операция $\vee$ (логическое «или»)	$A \vee B$	A или B	истина, если либо A, либо B истинно, либо и A и B одновременно
операция $\to$ (импликация)	$A \to B$	из A следует B если A, то B	истина, если либо A истинно и B истинно, либо если A ложно
операция $\leftrightarrow$, $=$ (эквивалентность)	$A \leftrightarrow B$ $A = B$	A эквивалентно B	истина, если значения A и B совпадают
операция $\neg$ (отрицание)	$\neg A$	не A A не верно	истина, если либо A истинно и B истинно, либо если A ложно
квантор всеобщности $\forall$	$\forall x\ \varphi(x)$	для всех x истинно $\varphi(x)$ для каждого x истинно $\varphi(x)$ любой x удовлетворяет $\varphi(x)$	истина, если предикат истинен для любого аргумента
квантор существования $\exists$	$\exists x\ \varphi(x)$	существует x, такой что истинно $\varphi(x)$ найдётся x, для которого истинно $\varphi(x)$ хотя бы один x удовлетворяет $\varphi(x)$	истина, если предикат истинен хотя бы для одного значения аргумента

Необходимо знать следующие правила преобразования логических выражений:

- *Законы де Моргана*: $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.
- *Правило дистрибутивности логических операций*: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee B) \wedge (B \vee C)$, $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$.
- *Правило двойного отрицания*: $\neg\neg A = A$.
- *Правило отрицания кванторов*: $\neg(\forall x\ \varphi(x)) = \exists x\ \neg\varphi(x)$, $\neg(\exists x\ \varphi(x)) = \forall x\ \neg\varphi(x)$.

В задачах будет использоваться следующий набор **P** предикатов — $\mathrm{blue}(x)$: x синий, $\mathrm{grass}(x)$: x ест траву, $\mathrm{red}(x)$: x красный, $\mathrm{war}(x, y)$: x враждует с y.

1. Запишите словами и объясните смысл формул, использующих предикаты набора **P**:

(1) $\neg\mathrm{grass}(x)$;

(2) $\mathrm{blue}(x) \vee \mathrm{red}(x)$;

(3) $\forall x\ \neg\mathrm{war}(x, x)$;

(4) $\forall x \forall y\ \neg\mathrm{war}(x, y)$;

(5) $\neg\exists x\ \mathrm{red}(x) \wedge \mathrm{grass}(x)$;

(6) $\mathrm{red}(x) \to \neg\mathrm{grass}(x)$;

(7) $\exists x \exists y\ x \neq y \wedge \neg\mathrm{war}(x, y)$;

(8) $\forall x\ \mathrm{red}(x) \vee \neg\mathrm{red}(x)$;

(9) $\forall x\ \exists y\ \mathrm{war}(x, y)$.

2. Запишите формулами следующие высказывания, используя предикаты набора **P**:

(1) x и красный и синий одновременно;

(2) не бывает синих, которые едят траву;

(3) любой враг x враг y;

(4) враг врага x не враг x;

(5) кто-то с кем-то враждует;

(6) x не враждует с теми, кто есть траву;

(7) есть враждующий со всеми;

(8) у x и y есть общий враг;

3. Для каждой формулы задач 1 и 2 сформулируйте отрицание, запишите его в виде формулы и преобразуйте, используя правила преобразования логических выражений.

4. Составьте таблицы истинности для всех упомянутых логический операций. На основании таблиц докажите законы де Моргана и правило дистрибутивности.

5. Выразите

(1) $\wedge$ через отрицание и $\vee$;

(2) импликацию через $\neg$ и $\vee$;

(3) эквивалентность через $\neg$, $\vee$ и $\wedge$;

(4) операцию суммы $\oplus$ ($0 \oplus 0 = 0; 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1; 1 \oplus 1 = 0$) через эквивалентность и отрицание;

(5) все логические операции через операцию суммы и произведения ($xy = x \wedge y$);

(6) все логические операции через операцию штрих Шеффера ($x|y = \neg(x \wedge y)$);

МГАВТ 2015 осень. Задание 1б (в рамках допуска к экзамену) для группы ТП-1, **ВАР 2**

Задание 1б. Множества

Понятие множества и операции принадлежности $\in$ определяются аксиоматически теорией ZF (Цермело-Фленкеля). Объект x называется элементом множества A, если истинна формула $x \in A$; также говорят, что «x принадлежит множеству A», «A содержит x» или просто «x из A», «x (лежит) в A». Справа от знака $\in$ должно стоять множество, слева — что угодно. Запись $x \in A$ также эквивалентна $A \ni x$. Множества *равны* (запись $A = B$) тогда и только тогда, когда они содержат одни и те же элементы. Говорят, что множество B *включается* в множество A (запись $B \subset A$), если все элементы B являются также элементами A; в таком случае B также называется *подмножеством* A. Иными словами

$$A = B \leftrightarrow (\forall x\, x \in A \leftrightarrow x \in B); \quad B \subset A \leftrightarrow (\forall x\, x \in B \to x \in A).$$

С помощью множеств вводится ограниченная форма кванторов. Если x — переменная, A — множество, φ — предикат, то запись $\exists x \in A\ \varphi(x)$ читается как «в A существует x, для которого $\varphi(x)$» и эквивалентна формуле $\exists x\, x \in A \wedge \varphi(x)$; запись $\forall x \in A\ \varphi(x)$ читается как «для всех x из A, выполнено $\varphi(x)$» и эквивалентна формуле $\forall x\, x \in A \to \varphi(x)$. Для ограниченных кванторов верно правило отрицания кванторов.

Требуется знать стандартные обозначения для следующих множеств: $\varnothing$ (пустое множество, $\forall x\, x \notin \varnothing$); $\mathbb{N}$ (множество натуральных чисел: 1, 2,...); $\mathbb{Z}$ (множество целых чисел); $\mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел); $\mathbb{R}$ (множество действительных чисел).

Способы задания множеств.

1. функцией принадлежности, *например*: «множество коров», «множество чётных чисел», «множество подмножеств множества целых чисел»;

2. явным перечислением элементов. Элементы перечисляются в фигурных скобках, через запятую *например*: $\{10, 20, 30\}$, $\{\smiley, \sun, \{1, 2, 3\}, \bell\}$;

3. с помощью *аксиомы выделения*. Если A — множество, x — переменная, а φ — предикат, то запись $\{x \in A | \varphi(x)\}$ читается как «множество таких x из A, для которых выполено $\varphi(x)$». *Например*: $\{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{Z} | \exists y \in \mathbb{Z}\ x = 2y\}$.

1. Какие из следующих утверждений имеют смысл и верны:

(1) $15 \in \{15\}$;
(2) $8 \in 8$;
(3) $\sun \in \{\smiley, \{\sun\}, \{1, 3\}, \bell\}$;
(4) $\sun \subset \{\smiley, \{\sun\}, \{1\}, \bell\}$;
(5) $\{\sun\} \subset \{\smiley, \{\sun\}, \{1\}, \bell\}$;
(6) $\{\sun\} \in \{\smiley, \{\sun\}, \{1\}, \bell\}$;
(7) $\varnothing \subset \{\smiley, \{\sun\}, \{1\}, \bell\}$;
(8) $\varnothing \in \varnothing$;
(9) $\varnothing \subset \varnothing$;
(10) $\{\bell, \sun\} = \{\bell, \sun, \bell\}$;
(11) $\{\bell, \sun, \bell\} \subset \{\bell, \sun\}$;
(12) $\{1, 2\} \subset \varnothing$;

2. Выпишите элементы каждого из этих множеств и расположите их в порядке неубывания количества элементов:

(1) $\{\varnothing\}$;
(2) $\varnothing$;
(3) $\{\{\mathbb{R}, \smiley\}\}$;
(4) $\{\mathbb{Z}\}$;
(5) $\{\{\mathbb{R}\}\}$;
(6) $\{1, \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, 8\}$;
(7) $\mathbb{Z}$;
(8) $\{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$;

3. Расположите следующие множества в ряд так, что каждое следующее включает предыдущее: $\{\varnothing\}$; $\varnothing$; $\{\varnothing, \sun\}$.
4. Выпишите все подмножества следующих множеств, определите их количество:

(1) $\{1, 2\}$,
(2) $\varnothing$,
(3) $\{\bell, \sun, \smiley\}$,
(4) $\{\bell, \sun, \smiley, \varnothing\}$.
(5) $\{1, 2, 3\}$,
(6) $\{1, \{2, 3\}\}$,
(7) $\{\varnothing\}$,

В задачах будет использоваться следующий набор **S** множеств — Cow: множество коров, Country: множество стран, Obj: множество Васиных предметов, Pen: множество авторучек.

5. Используя множества **S** и предикаты **P** из задания 1а запишите формулами соедующие утверждения:

(1) все коровы едят траву;
(2) у Васи есть синяя ручка;
(3) не все Васины предметы синие;
(4) у Васи только синие и красные ручки;
(5) у Васи нет коровы;
(6) никакое целое число не является четным и нечётным одновременно
(7) все синие предметы принадлежат Васе;
(8) какие-то две страны враждуют;
(9) у Васи по карйней мере две авторучки;
(10) существует как минимум три различные коровы;

6. Используя правило отрицания кванторов и законы де Моргана запишите отрицание к каждому пунткту предыдущей задачи вначале формулой, а затем словами.

7. Придумайте предикат $\varphi(x, y)$, для которого истинна формула

(1) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \varphi(x, y) \to \varphi(y, x)$;
(2) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \varphi(x, y) \to \neg\varphi(y, x)$;
(3) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{Z}\ \varphi(x, y) \wedge \varphi(y, z) \to \varphi(x, z)$;