Задание 1в. Отображения

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, то говорят, что задана **функция** (**отображение**) на множестве A со значениями в множестве B (также: функция из A в B). Обозначение $f : A \to B$ (читается: f функция из A в B). Элемент, сопоставляемый элементу $x \in A$, называется **образом** x при отображении f или **значением** f в точке x и обозначается $f(x)$; также пишут $x \mapsto y$, если $y = f(x)$. Если $x \mapsto y$, то x называется прообразом y. Множество тех $y \in B$, которые представляются в виде $f(x)$ для некоторого $x \in A$ называется **образом** f и обозначается $\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in A\}$.

Отображение $f : A \to B$ называется **инъективным**, если у каждого $y \in B$ не более одного прообраза. Отображение $f : A \to B$ называется **сюрьективным**, если у каждого $y \in B$ не менее одного прообраза (то есть $\mathrm{Im} f = B$). Отображение $f : A \to B$ называется **биективным** или **взаимно однозначным**, если у каждого $y \in B$ ровно один прообраз.

Отображения $f, g : A \to B$ являются равными, если их значения на каждом элементе A совпадают, иными словами $f = g$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A \ f(x) = g(x)$.

Отображение может быть задано

- явно, перечислением образов элементов. Пример: $f : \{1, 2\} \to \{100, 200\}, 1 \mapsto 200, 2 \mapsto 100$;
- формулой. Пример: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

Задача 1. Выпишите (задавая явно) все отображения между следующими конечными множествами A и B и определите их количество. Определите среди них инъективные, сюрьективные и биективные, Im, а также их количество.

(1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{$☼, 🔔$\}$;

(2) $A = \{$☼, 🔔, ☺, $\{1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{$🔔$\}$;

(3) $A = \{$☼, 🔔$\}$, $B = A$;

(4) $A = \{$☼$\}$,
$B = \{$🔔, ☼, ☺, $\{1, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}\}$;

(5) $A = \varnothing$, $B = \{$☼, 🔔$\}$;

(6) $A = \{$☼, 🔔$\}$, $B = \varnothing$;

(7) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{$☼, 🔔$\}$;

(8) $A = \{1, 2\}$, $B = \{$☼, 🔔, $100\}$;

(9) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = A$;

Задача 2. Среди этих отображений найдите инъективные, сюрьективные, биективные, а также вычислите $\mathrm{Im} f$:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$;

(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = -x$;

(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$;

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

(5) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}, f(x) = x^2$;

(6) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$;

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;

(8) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, x переходит в знаменатель записи x в виде несократимой дроби;

Если $f : A \to B$, а $g : B \to C$ для некоторых множеств A, B и C, то определена операция **композиции** (**суперпозиции**) $g \circ f : A \to C$, которая задана следующим образом: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Задача 3. Пусть Country — множество стран, City — множество городов. f : Country $\to$ City ставит в соответствие каждой стране столицу этой страны. g : City $\to$ Country ставит в соответствие каждому городу ту страну, в которой он находится. Определить, какие выражения корректны и вычислить их значения:

(1) f(Дрезден)

(2) g(Новосибирск)

(3) f(Россия)

(4) g(Франция)

(5) $f \circ g$(Колумбия)

(6) $f \circ g$(Мумбай)

(7) $g \circ f$(Солт Лейк Сити)

(8) $g \circ f$(Венгрия)

(9) $g \circ f \circ g$(Астана)

Задача 4. Вычислите суперпозицию функций f и g:

(1) $f(x) = 4x^2, g(x) = \sin x$;

(2) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sin x + \cos x$;

(3) $f(x) = x \cos x, g(x) = \frac{1}{x}$;

(4) $f(x) = x, g(x) = 15x^4$;

(5) $f(x) = \sin(\ln x), g(x) = x$;

(6) $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}, g(x) = \ln x$;

(7) $f(x) = x^x, g(x) = 3$;

(8) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 16x + 4$;

(9) $f(x) = e^x, g(x) = 2 \ln 3$;

Задача 5. Представьте следующие функции в виде суперпозиции более простых функций f и g:

(1) $h(x) = \sin(\cos x)$

(2) $h(x) = e^{2x+4}$

(3) $h(x) = \sin(-5x + 2)$

(4) $h(x) = 3 \sin(x^2)$

(5) $h(x) = \sin^2(x)$

(6) $h(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(7) $h(x) = \sqrt{18x^2 + 1}$

(8) $h(x) = \dfrac{1}{2x \sin \ln x}$

(9) $h(x) = x^x$

Задача 6. Докажите, что композиция инъективных инъективна, композиция сюрьективных сюрьективна, композиция биективных биетивна. Если $g \circ f$ инъективно, верно ли, что а) f инъективно? б) g инъективно? Если $g \circ f$ сюрьективно, верно ли, что а) f сюрьективно? б) g сюрьективно?

Если A множество, то отображение $id_A : A \to A$, задаваемое формулой $id_A(x) = x$ называется тождественным отображением множества A. Если $f : A \to B$, то отображение $g : B \to A$ называется обратным f, если $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$.

Задача 7. а) Докажите, что обратные отображения имеются только у взаимно однозначных функций. б) Для каждого из биективных отображений задачи 1 найдите обратное. в) Выразите обратное композиции $f \circ g$ через обратные к f и g.

Если существует взаимно однозначное отображение между множествами A и B, то такие множества называются **равномощными**, запись: $|A| = |B|$.

Задача 8. Докажите, что если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задание 2а. Векторы. Метод Гаусса

Векторным (линейным) пространством называется произвольное множество V с введёнными на нём двумя операциями $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, которые называются сложением и умножением на числа и удовлетворяют ряду аксиом. Элементы векторного пространства называются векторами. Аксиомы, в частности, влекут существование особенного вектора $\vec{0}$, удовлетворяющего соотношению $\forall v \in V\ v + \vec{0} = v$, и называемого **нулевым вектором**.

Пример: $\mathbb{R}^n$, то есть множество всех записей вида $(x_1, \ldots, x_n)$, в которых в скобках записано через запятую n произвольных действительных чисел. Сложение и умножение в R^n определяются по формулам: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $a \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$, где x_i, y_i, a — действительные числа.

Линейной комбинацией векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется вектор, который можно получить из $v_1, \ldots, v_n$ применяя операции «+» и «·». Любую линейную комбинацию можно представить в виде $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$, где $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ — некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации. Векторы $v_1, \ldots, v_n$ называют **линейно независимыми**, если любая их линейная комбинация, в которой котя бы один коэффициент отличен от нуля, не равна нулевому вектору.

Задача 1. Выразите в виде линейной комбинации (там, где это возможно):

(1) $(10, 15)$ через $(1, 0)$ и $(0, 1)$;

(2) $(4, -7)$ через $(1, 1)$ и $(0, 1)$;

(3) $(8, -8, 8)$ через $(3, -3, 3)$;

(4) $(5, 10, 0)$ через $(3, 6, -4)$ и $(0, 0, \pi)$;

(5) $(0, \frac{3}{2}, 0)$ через $(2, 1, 3)$, $(-1, 0, 0)$ и $(0, 0, 3)$;

(6) $(4, -\frac{7}{8}, 6)$ через $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$;

(7) $(2, 2, 3, 4)$ через $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ и $(0, 0, 0, 1)$;

(8) $\vec{0}$ через $(2, 3)$ и $(5, 3.5)$;

(9) $\vec{0}$ через $(1, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, 1)$ ненулевым образом;

Задача 2. Найдите линейно зависимые наборы векторов и линейные зависимости для них:

(1) $(1, 0)$ и $(0, 1)$;

(2) $(1, 1)$ и $(0, 1)$;

(3) $(1, 2)$ и $(2, 1)$;

(4) $(1, 2)$ и $(1, 2)$;

(5) $(1, 2)$, $(2, 1)$ и $(0, 0)$;

(6) $(5, 10)$ и $(-7, -14)$;

(7) $(1, 0, 2)$ и $(2, 0, 4)$;

(8) $(3, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, $(2, 0, 0)$ и $(0, 8, 8)$;

(9) $(4, 3, 6)$, $(2, 1, 1)$ и $(0, 2, 8)$;

Набор векторов пространства V называется **базисом**, если он линейно независим и любой вектор V линейно выражается через вектора этого набора.

Задача 3. Какие из наборов векторов предыдущей задачи являются базисами в соответствующем пространстве, и почему?

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

(1) прибавить к одной строке любую другую, умноженную на число;

(2) домножить одну строку на число;

(3) поменять строки местами;

Элементарными преобразованиями любую матрицу можно привести к **ступенчатому виду**, то есть виду, в котором каждая строка матрицы начинается с большего количества нулей, чем предыдущая. Этот способ называется **метод Гаусса** и заключается в последовательном обнулении элементов матрицы преобразованиями (1) и (3). В ступенчатой матрице первый ненулевой элемент в каждой строке (если он есть) называется **лидером** ступенчатой матрицы. **Обратный ход метода Гаусса** заключается в обнулении всех элементов матрицы, стоящих над лидерами, с использованием элементарного преобразования (1).

Задача 4. Привести следующие матрицы к ступенчатому виду, а затем выполнить обратный ход метода Гаусса:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & -1 \\ -6 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 8 & -1 \\ -6 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Уравнение вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, в котором a_i, b — конкретные числа, x_i - переменные называется **линейным**. Метод Гаусса применяют для решения систем линейных уравнений. Для этого строится матрица, причём каждой переменной, учавствующей в системе, сопоставляют столбец матрицы, каждому уравнению — строку матрицы. Также, выделяют специальный столбец для правых частей уравнений. Выписывая все коэффициенты получают **матрицу системы уравнений**. Элементарные преобразования строк матрицы системы приводят к матрицам равносильных систем, т. о. метод решения системы заключается в приведении её матрицы к ступенчатому виду и решении получившейся системы. Система линейных уравнений может не иметь решения, иметь одно решение, либо бесконечно много.

Задача 5. Выписать матрицы следующих систем уравнений:

(1) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ y + z - 1 = x \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 8 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + -x_3 = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x - y - 5z = 0 \\ 3y + 8z = 0 \\ 7z + y + 2x = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_3 = -1 \\ -6x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 4 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x - y - 5z = 4 \\ 3x + 8z + 1 = 0 \\ -6x + 9y + 7z = 4 \end{cases}$

Задача 6. Примените к матрицам, получившимся в предыдущей задаче, метод Гаусса и его обратный ход, преобразуйте снова к системам уравнений и решите их.