Задание 1в. Отображения

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, то говорят, что задана *функция* (*отображение*) на множестве A со значениями в множестве B (также: функция из A в B). Обозначение $f : A \to B$ (читается: f функция из A в B). Элемент сопоставляемый элементу $x \in A$ называется образом x при отображении f и обозначается $f(x)$; также пишут $x \mapsto y$, если $y = f(x)$. Если $x \mapsto y$, то y называется *образом* x или *значением* f в точке x, а x называется прообразом y.

Отображение $f : A \to B$ называется *инъективным*, если у каждого $y \in B$ не более одного прообраза. Отображение $f : A \to B$ называется *сюръективным*, если у каждого $y \in B$ не менее одного прообраза. Отображение $f : A \to B$ называется *биективным* или *взаимно однозначным*, если у каждого $y \in B$ ровно один прообраз.

Отображения $f, g : A \to B$ являются равными, если их значения на каждом элементе A совпадают, иными словами $f = g$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A\ f(x) = g(x)$.

Отображение может быть задано

- явно, перечислением образов элементов. Пример: $f : \{1, 2\} \to \{100, 200\}, 1 \mapsto 200, 2 \mapsto 100$;
- формулой. Пример: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

Задача 1. Выпишите (задавая явно) все отображения между следующими конечными множествами A и B и определите их количество. Определите среди них инъективные, сюръективные и биективные, а также их количество.

(1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(2) $A = \{☼, 🔔, ☺, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{🔔\}$;

(3) $A = \{☼, 🔔\}$, $B = A$;

(4) $A = \{☼\}$, $B = \{🔔, ☼, ☺, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}\}$;

(5) $A = \varnothing$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(6) $A = \{☼, 🔔\}$, $B = \varnothing$;

(7) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(8) $A = \{1, 2\}$, $B = \{☼, 🔔, 100\}$;

(9) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = A$;

Задача 2. Среди этих отображений найдите инъективные, сюръективные, биективные:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$;

(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = -x$;

(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$;

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

(5) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}, f(x) = x^2$;

(6) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$;

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;

(8) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, x переходит в знаменатель записи x в виде несократимой дроби;

Если $f : A \to B$, а $g : B \to C$ для некоторых множеств A, B и C, то определена операция *композиции* $g \circ f : A \to C$, которая задана следующим образом: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Задача 3. Пусть Country — множество стран, City — множество городов. f : Country $\to$ City ставит в соответствие каждой стране столицу этой страны. g : City $\to$ Country ставит в соответствие каждому городу ту страну, в которой он находится. Определить, какие выражения корректны и вычислить их значения:

(1) f(Дрезден)

(2) g(Новосибирск)

(3) f(Россия)

(4) g(Франция)

(5) $f \circ g$(Колумбия)

(6) $f \circ g$(Мумбай)

(7) $g \circ f$(Солт Лейк Сити)

(8) $g \circ f$(Венгрия)

(9) $g \circ f \circ g$(Астана)

Задача 4. Докажите, что композьция инъективных инъективна, композиция сюрьективных сюрьективна, композиция биективных биетивна. Если $g \circ f$ инъективно, верно ли, что а) f инъективно? б) g инъективно? Если $g \circ f$ сюрьективно, верно ли, что а) f сюрьективно? б) g сюрьективно?

Если A множество, то отображение $id_A : A \to A$, задаваемое формулой $id_A(x) = x$ называется тождественным отображением множества A. Если $f : A \to B$, то отображение $g : B \to A$ называется обратным f, если $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$.

Задача 5. а) Докажите, что обратные отображения имеются только у взаимно однозначных функций. б) Для каждого из биективных отображений задачи 1 найдите обратное. в) Выразите обратное композиции $f \circ g$ через обратные к f и g.

Если существует взаимно однозначное отображение между множествами A и B, то такие множества называются равномощными, запись: $|A| = |B|$.

Задача 6. Докажите, что если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 7. Докажите (находя взаимно однозначное отображение) равномощность следующих множеств:

(1) $\{1, 2, 3\}$ и $\{☼, ☺, 🔔\}$;

(2) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$;

(3) $\mathbb{Z}$ и $\{x \in \mathbb{Z} | x > 1\}$;

(4) $\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z} = \{2x | x \in \mathbb{Z}\}$;

(5) $[0, 1]$ и $[0, 2]$ ($[0, 1]$ — это отрезок, то есть множество $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$);

(6) $[0, 1]$ и $[-1, 1]$;

(7) $[0, 1]$ и $[0, 1)$ ($[0, 1)$ — это полуинтервал, то есть множество $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x < 1\}$);

(8) $[0, 1)$ и $[0, \infty)$;

(9) $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$;

(10) любые два отрезка на плоскости;

(11) отрезок и окружность;

(12) множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ и множество всех бесконечных последовательностей 0 и 1;

Задача 8(Теорема Кантора). Множество всех подмножеств множества A обозначается через 2^A. Рассматривая для отображения $f : A \to 2^A$ множество $\{x \in A | x \notin f(x)\}$ докажите, что A не может быть равномощно 2^A.