Задание 1в. Отображения

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие ровно один элемент множества B, то говорят, что задана **функция** (**отображение**) на множестве A со значениями в множестве B (также: функция из A в B). Обозначение $f : A \to B$ (читается: f функция из A в B). Элемент, сопоставляемый элементу $x \in A$, называется **образом** x при отображении f или **значением** f в точке x и обозначается $f(x)$; также пишут $x \mapsto y$, если $y = f(x)$. Если $x \mapsto y$, то x называется прообразом y. Множество тех $y \in B$, которые представляются в виде $f(x)$ для некоторого $x \in A$ называется **образом** f и обозначается $\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in A\}$.

Отображение $f : A \to B$ называется **инъективным**, если у каждого $y \in B$ не более одного прообраза. Отображение $f : A \to B$ называется **сюрьективным**, если у каждого $y \in B$ не менее одного прообраза (то есть $\mathrm{Im} f = B$). Отображение $f : A \to B$ называется **биективным** или **взаимно однозначным**, если у каждого $y \in B$ ровно один прообраз.

Отображения $f, g : A \to B$ являются равными, если их значения на каждом элементе A совпадают, иными словами $f = g$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A\ f(x) = g(x)$.

Отображение может быть задано

- явно, перечислением образов элементов. Пример: $f : \{1, 2\} \to \{100, 200\}, 1 \mapsto 200, 2 \mapsto 100$;
- формулой. Пример: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

Задача 1. Выпишите (задавая явно) все отображения между следующими конечными множествами A и B и определите их количество. Определите среди них инъективные, сюрьективные и биективные, Im, а также их количество.

(1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(2) $A = \{☼, 🔔, ☺, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $B = \{🔔\}$;

(3) $A = \{☼, 🔔\}$, $B = A$;

(4) $A = \{☼\}$, $B = \{🔔, ☼, ☺, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 2\}\}$;

(5) $A = \varnothing$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(6) $A = \{☼, 🔔\}$, $B = \varnothing$;

(7) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{☼, 🔔\}$;

(8) $A = \{1, 2\}$, $B = \{☼, 🔔, 100\}$;

(9) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = A$;

Задача 2. Среди этих отображений найдите инъективные, сюрьективные, биективные, а также вычислите $\mathrm{Im} f$:

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$;

(2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = -x$;

(3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, f(x) = x$;

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$;

(5) $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}, f(x) = x^2$;

(6) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$;

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$;

(8) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, x переходит в знаменатель записи x в виде несократимой дроби;

Если $f : A \to B$, а $g : B \to C$ для некоторых множеств A, B и C, то определена операция **композиции** (**суперпозиции**) $g \circ f : A \to C$, которая задана следующим образом: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Задача 3. Пусть Country — множество стран, City — множество городов. f : Country $\to$ City ставит в соответствие каждой стране столицу этой страны. g : City $\to$ Country ставит в соответствие каждому городу ту страну, в которой он находится. Определить, какие выражения корректны и вычислить их значения:

(1) f(Дрезден)

(2) g(Новосибирск)

(3) f(Россия)

(4) g(Франция)

(5) $f \circ g$(Колумбия)

(6) $f \circ g$(Мумбай)

(7) $g \circ f$(Солт Лейк Сити)

(8) $g \circ f$(Венгрия)

(9) $g \circ f \circ g$(Астана)

Задача 4. Вычислите суперпозицию функций f и g:

(1) $f(x) = 4x^2, g(x) = \sin x$;

(2) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sin x + \cos x$;

(3) $f(x) = x \cos x, g(x) = \frac{1}{x}$;

(4) $f(x) = x, g(x) = 15x^4$;

(5) $f(x) = \sin(\ln x), g(x) = x$;

(6) $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}, g(x) = \ln x$;

(7) $f(x) = x^x, g(x) = 3$;

(8) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 16x + 4$;

(9) $f(x) = e^x, g(x) = 2 \ln 3$;

Задача 5. Представьте следующие функции в виде суперпозиции более простых функций f и g:

(1) $h(x) = \sin(\cos x)$

(2) $h(x) = e^{2x+4}$

(3) $h(x) = \sin(-5x + 2)$

(4) $h(x) = 3 \sin(x^2)$

(5) $h(x) = \sin^2(x)$

(6) $h(x) = \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(7) $h(x) = \sqrt{18x^2 + 1}$

(8) $h(x) = \dfrac{1}{2x \sin \ln x}$

(9) $h(x) = x^x$

Задача 6. Докажите, что композиция инъективных инъективна, композиция сюрьективных сюрьективна, композиция биективных биетивна. Если $g \circ f$ инъективно, верно ли, что а) f инъективно? б) g инъективно? Если $g \circ f$ сюрьективно, верно ли, что а) f сюрьективно? б) g сюрьективно?

Если A множество, то отображение $id_A : A \to A$, задаваемое формулой $id_A(x) = x$ называется тождественным отображением множества A. Если $f : A \to B$, то отображение $g : B \to A$ называется обратным f, если $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$.

Задача 7. а) Докажите, что обратные отображения имеются только у взаимно однозначных функций. б) Для каждого из биективных отображений задачи 1 найдите обратное. в) Выразите обратное композиции $f \circ g$ через обратные к f и g.

Если существует взаимно однозначное отображение между множествами A и B, то такие множества называются **равномощными**, запись: $|A| = |B|$.

Задача 8. Докажите, что если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 9. Докажите (находя взаимно однозначное отображение) равномощность следующих множеств:

(1) $\{1, 2, 3\}$ и $\{☼, ☺, \bell\}$;

(2) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$;

(3) $\mathbb{Z}$ и $\{x \in \mathbb{Z} | x > 1\}$;

(4) $\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z} = \{2x | x \in \mathbb{Z}\}$;

(5) $[0, 1]$ и $[0, 2]$ ($[0, 1]$ — это отрезок, то есть множество $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$);

(6) $[0, 1]$ и $[-1, 1]$;

(7) $[0, 1]$ и $(0, 1]$ ($(0, 1]$ — это полуинтервал, то есть множество $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leqslant 1\}$);

(8) $(0, 1]$ и $[1, \infty)$;

(9) $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$;

(10) любые два отрезка на плоскости;

(11) отрезок и окружность;

(12) множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ и множество всех бесконечных последовательностей 0 и 1;

Задача 10 (Теорема Кантора). Множество всех подмножеств множества A обозначается через 2^A. Рассматривая для отображения $f : A \to 2^A$ множество $\{x \in A | x \notin f(x)\}$ докажите, что A не может быть равномощно 2^A.