# Гомологии. Обзор

## Введение в цепные, симплициальные, сингулярные и клеточные гомологии

20 февраля 2020 г.

Отображение групп (объектов абелевой категории) $f : A \to B$ имеет ядро $\operatorname{Ker} f \subset A$ и образ $\operatorname{Im} f \subset B$.

- Для групп $\operatorname{Ker} f = \{x \in A | f(x) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = f(A)$.

Отображение групп (объектов абелевой категории) $f : A \to B$ имеет ядро $\operatorname{Ker} f \subset A$ и образ $\operatorname{Im} f \subset B$.

- Для групп $\operatorname{Ker} f = \{x \in A | f(x) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = f(A)$.
- Условие $\operatorname{Ker} f = 0$ означает инъективность $f$ $(f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y)$
- Условие $\operatorname{Im} f = B$ означает сюрьективность $f$ $(\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b)$

# Начальные сведения из алгебры

Отображение групп (объектов абелевой категории) $f : A \to B$ имеет ядро $\operatorname{Ker} f \subset A$ и образ $\operatorname{Im} f \subset B$.

- Для групп $\operatorname{Ker} f = \{x \in A | f(x) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = f(A)$.
- Условие $\operatorname{Ker} f = 0$ означает инъективность $f$ $(f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y)$
- Условие $\operatorname{Im} f = B$ означает сюрьективность $f$ $(\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b)$
- Что означает условие $\operatorname{Ker} f = A$, $\operatorname{Im} f = 0$?

Отображение групп (объектов абелевой категории) $f : A \to B$ имеет ядро $\operatorname{Ker} f \subset A$ и образ $\operatorname{Im} f \subset B$.

- Для групп $\operatorname{Ker} f = \{x \in A | f(x) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = f(A)$.
- Условие $\operatorname{Ker} f = 0$ означает инъективность $f$ $(f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y)$
- Условие $\operatorname{Im} f = B$ означает сюрьективность $f$ $(\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b)$
- Что означает условие $\operatorname{Ker} f = A$, $\operatorname{Im} f = 0$?

Важную роль будут играть свободные абелевы группы.

Отображение групп (объектов абелевой категории) $f : A \to B$ имеет ядро $\operatorname{Ker} f \subset A$ и образ $\operatorname{Im} f \subset B$.

- Для групп $\operatorname{Ker} f = \{x \in A | f(x) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = f(A)$.
- Условие $\operatorname{Ker} f = 0$ означает инъективность $f$ $(f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y)$
- Условие $\operatorname{Im} f = B$ означает сюрьективность $f$ $(\forall b \in B \exists a \in A f(a) = b)$
- Что означает условие $\operatorname{Ker} f = A$, $\operatorname{Im} f = 0$?

Важную роль будут играть свободные абелевы группы.

- Свободная (абелева) группа с образующими из множества $A$ (обозн. $\mathbb{Z}^A$) это множество отображений $A \to \mathbb{Z}$, имеющих конечное количество элементов с ненулевым образом.
- Для каждого $a \in A$ в $\mathbb{Z}^A$ есть образующая $f : A \to \mathbb{Z}, f(x) = \delta(x, a)$
- Образующую, соответствующую элементу $a$, будем обозначать $a$
- Гомоморфизм $\mathbb{Z}^A \to G$ в любую группу достаточно (произвольно) задать на образующих

### Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

## Точные последовательности

### Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$

### Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$
- $C \to B \to 0$

# Точные последовательности

## Определение

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \dots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$
- $C \to B \to 0$
- $0 \to F \to C \to B$

# Точные последовательности

## Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$
- $C \to B \to 0$
- $0 \to F \to C \to B$
- $G \to C \to B \to 0$

# Точные последовательности

## Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\mathrm{Im}\, f_{n-1} = \mathrm{Ker}\, f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$
- $C \to B \to 0$
- $0 \to F \to C \to B$
- $G \to C \to B \to 0$
- (*Короткая точная последовательность*) $0 \to A \to C \to B \to 0$

# Точные последовательности

## Определение

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} U_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} U_n \xrightarrow{f_n} U_{n+1} \to \cdots$$

Ограниченная или неограниченная последовательность абелевых групп $F_n$ и их гомоморфизмов $f_n : F_n \to F_{n+1}$ (в общем случае, объектов абелевой категории) называется точной в члене $n$, если

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n.$$

И просто точной, если она точна во всех членах.

Что означает точность в этих примерах?

- $0 \to A \to C$
- $C \to B \to 0$
- $0 \to F \to C \to B$
- $G \to C \to B \to 0$
- (*Короткая точная последовательность*) $0 \to A \to C \to B \to 0$
- (*Левая резольвента*) $\cdots \to P_2 \to P_1 \to F \to 0$

# Цепные комплексы

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

**Лемма**

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

# Цепные комплексы

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

**Лемма**

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

**Лемма**

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

**Итог**

Цепной комплекс

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{n-1}} K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \leftarrow \cdots$$

## Цепные комплексы

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

**Лемма**

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

**Итог**

Цепной комплекс

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{n-1}} K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \leftarrow \cdots$$

Элементы $K_n$ – *цепи*, размерности $n$.

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

**Лемма**

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

**Итог**

Цепной комплекс

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{n-1}} K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \leftarrow \cdots$$

Элементы $K_n$ – *цепи*, размерности $n$.
Элементы $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset K_n$ – *границы*.
Элементы $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n \subset K_n$ – *циклы*.

## Цепные комплексы

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

### Лемма

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

### Итог

Цепной комплекс

$$\dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \leftarrow \dots$$

Элементы $K_n$ – *цепи*, размерности $n$.
Элементы $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset K_n$ – *границы*.
Элементы $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n \subset K_n$ – *циклы*.
Условие комплекса: $B_n \subset Z_n$. *Гомологии* $H_n = Z_n / B_n$.

## Цепные комплексы

А что, если ослабить условие $\operatorname{Im} f_n = \operatorname{Ker} f_{n+1}$ до $\operatorname{Im} f_n \subset \operatorname{Ker} f_{n+1}$? Такая последовательность будет называться *коцепной комплекс*.
Если перенумеровать группы в обратном порядке, то такой комплекс называют *цепным*, гомоморфизмы традиционно обозначают $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$.

### Лемма

Условие $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$ эквивалентно $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Поскольку последовательность уже не точная, можно измерить, насколько сильно она не точная. Для этого положим $H_n = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$

### Итог

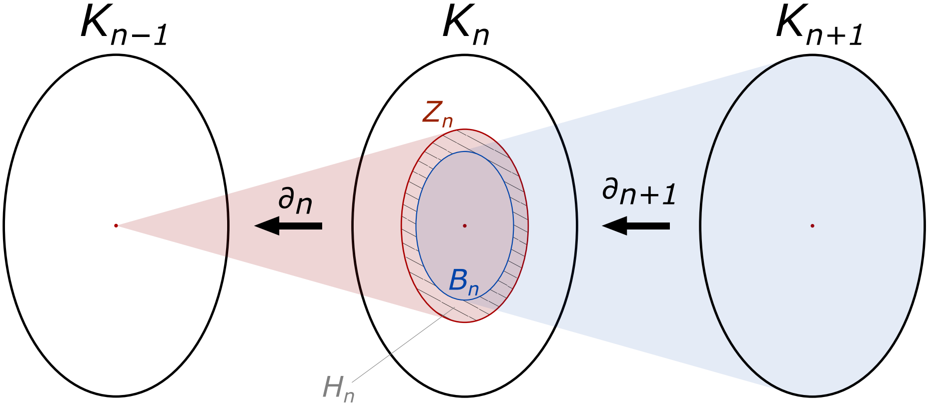
Цепной комплекс

$$\cdots \xleftarrow{\partial_{n-1}} K_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} K_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} K_{n+1} \leftarrow \cdots$$

Элементы $K_n$ – *цепи*, размерности $n$.
Элементы $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset K_n$ – *границы*.
Элементы $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n \subset K_n$ – *циклы*.
Условие комплекса: $B_n \subset Z_n$. *Гомологии* $H_n = Z_n / B_n$.

Чему равны гомологии точной последовательности?

# Схема гомологий



Все дальнейшие примеры гомологий описывают только построение цепного комплекса. Сами гомологии вычисляются в соответствии с определением гомологий цепного комплекса

- На $X$ вводится некая геометрическая структура

# Геометрические примеры комплексов

Все дальнейшие примеры гомологий описывают только построение цепного комплекса. Сами гомологии вычисляются в соответствии с определением гомологий цепного комплекса

- На $X$ вводится некая геометрическая структура
- По этой стуктуре строится цепной комплекс

# Геометрические примеры комплексов

Все дальнейшие примеры гомологий описывают только построение цепного комплекса. Сами гомологии вычисляются в соответствии с определением гомологий цепного комплекса

- На $X$ вводится некая геометрическая структура
- По этой стуктуре строится цепной комплекс
- У этого комплекса вычисляются гомологии и объявляются гомологиями $X$
- Обычно, геометрические комплексы состоят из свободных (абелевых) групп $\mathbb{Z}^A$.
- Вместо $\mathbb{Z}$ можно использовать поле, например, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{F}_2$, в этом случае, вычисление упрощается, однако, теряется часть информации.

Все дальнейшие примеры гомологий описывают только построение цепного комплекса. Сами гомологии вычисляются в соответствии с определением гомологий цепного комплекса

- На $X$ вводится некая геометрическая структура
- По этой стуктуре строится цепной комплекс
- У этого комплекса вычисляются гомологии и объявляются гомологиями $X$
- Обычно, геометрические комплексы состоят из свободных (абелевых) групп $\mathbb{Z}^A$.
- Вместо $\mathbb{Z}$ можно использовать поле, например, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{F}_2$, в этом случае, вычисление упрощается, однако, теряется часть информации.

**Проблема**

А если ввести геометрическую структуру иным образом, получатся ли гомологии такими же?

## Геометрические примеры комплексов

Все дальнейшие примеры гомологий описывают только построение цепного комплекса. Сами гомологии вычисляются в соответствии с определением гомологий цепного комплекса

- На $X$ вводится некая геометрическая структура
- По этой стуктуре строится цепной комплекс
- У этого комплекса вычисляются гомологии и объявляются гомологиями $X$
- Обычно, геометрические комплексы состоят из свободных (абелевых) групп $\mathbb{Z}^A$.
- Вместо $\mathbb{Z}$ можно использовать поле, например, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{F}_2$, в этом случае, вычисление упрощается, однако, теряется часть информации.

**Проблема**

А если ввести геометрическую структуру иным образом, получатся ли гомологии такими же?
Это называется инвариантностью гомологий.

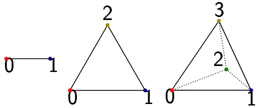
# Симплициальные гомологии

- У топологического пространства с заданной триангуляцией
- Требуют задания явной структуры
- Имеют формальное обобщение
- Можно вычислять гомологии, хотя и трудоёмко
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность доказать сложно

# Симплициальные гомологии

- У топологического пространства с заданной триангуляцией
- Требуют задания явной структуры
- Имеют формальное обобщение
- Можно вычислять гомологии, хотя и трудоёмко
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность доказать сложно

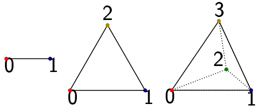
Симплекс $\Delta_n$ размерности $n$ - выпуклая оболочка $n + 1$ точки общего положения



# Симплициальные гомологии

- У топологического пространства с заданной триангуляцией
- Требуют задания явной структуры
- Имеют формальное обобщение
- Можно вычислять гомологии, хотя и трудоёмко
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность доказать сложно

Симплекс $\Delta_n$ размерности $n$ - выпуклая оболочка $n+1$ точки общего положения

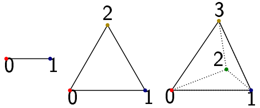



$$\partial[01] = [0] - [1]; \partial[012] = [01] - [02] + [12];$$

$$\partial[x_1 x_2 \dots x_n] = \sum_{i=1..n} (-1)^{n-i} [x_1 \dots x_i \dots x_n]$$

- У топологического пространства с заданной триангуляцией
- Требуют задания явной структуры
- Имеют формальное обобщение
- Можно вычислять гомологии, хотя и трудоёмко
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность доказать сложно

Симплекс $\Delta_n$ размерности $n$ - выпуклая оболочка $n+1$ точки общего положения




$\partial[01] = [0] - [1]; \partial[012] = [01] - [02] + [12];$

$$\partial[x_1 x_2 \dots x_n] = \sum_{i=1..n} (-1)^{n-i} [x_1 \dots x_i \dots x_n]$$

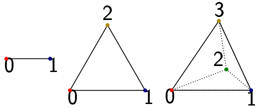
Вопросы:

- Чему равно $\partial[0123]$?
- Проверить $\partial\partial[012] = 0$
- Почему $\partial\partial = 0$?

# Симплициальные гомологии

- У топологического пространства с заданной триангуляцией
- Требуют задания явной структуры
- Имеют формальное обобщение
- Можно вычислять гомологии, хотя и трудоёмко
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность доказать сложно

Симплекс $\Delta_n$ размерности $n$ - выпуклая оболочка $n+1$ точки общего положения




$\partial[01] = [0] - [1]; \partial[012] = [01] - [02] + [12];$

$$\partial[x_1 x_2 \dots x_n] = \sum_{i=1..n} (-1)^{n-i} [x_1 \dots x_i \dots x_n]$$

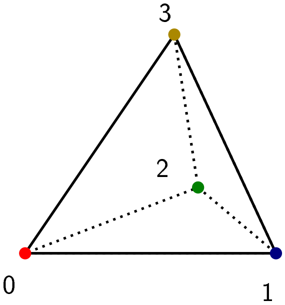
Вопросы:

- Чему равно $\partial[0123]$?
- Проверить $\partial\partial[012] = 0$
- Почему $\partial\partial = 0$?

## Определение

- Симплициальное пространство состоит из симплексов
- Вместе с каждым симплексом включает все его грани
- Два симплекса не могут иметь более 1 общей грани!
- Симплициальный комплекс состоит из свободных (абелевых) групп
- По одной образующей $n$-ной компоненты на каждый $n$-симплекс
- Дифференциал определяется значениями на порождающих свободной группы

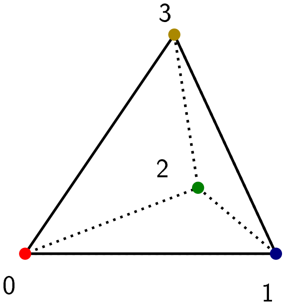
Пример — сфера.



# Симплициальные гомологии. Пример

Пример — сфера. Тут

- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$

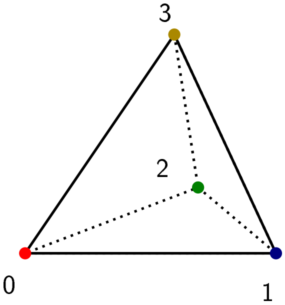



$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & \mathbb{Z}^6 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & 0 \\
Z & & & & & & & & & \\
B & & & & & & & & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}
$$

# Симплициальные гомологии. Пример

Пример — сфера. Тут

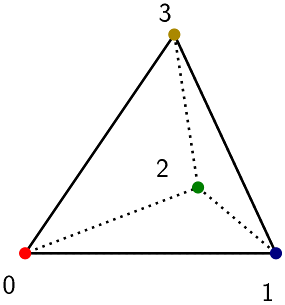
- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$




$$
\begin{array}{llllllllll}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & \mathbb{Z}^6 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & 0 \\
Z & & & K_0 & & & & & & \\
B & & & & & & & 0 & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Пример — сфера. Тут

- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$

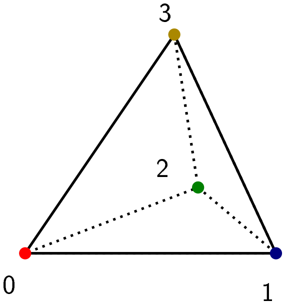



$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\ K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & \mathbb{Z}^6 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & 0 \\ Z & & & K_0 & & & & \mathbb{Z} & & \\ B & & & & & B_1 & & 0 & & \\ H & & & & & & & & & \end{array}$$

# Симплициальные гомологии. Пример

Пример — сфера. Тут

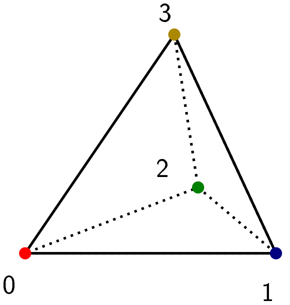
- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$




$$\begin{array}{lccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & \mathbb{Z}^6 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & 0 \\
Z & & & K_0 & & B_1 & & \mathbb{Z} & & \\
B & & & \mathbb{Z}^3 & & B_1 & & 0 & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}$$

Пример — сфера. Тут

- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$

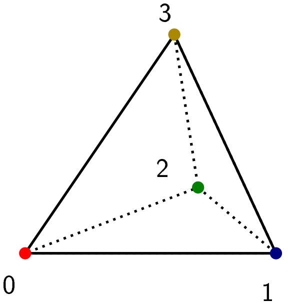



$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & \mathbb{Z}^6 & \leftarrow & \mathbb{Z}^4 & \leftarrow & 0 \\
Z & & & K_0 & & B_1 & & \mathbb{Z} & & \\
B & & & \mathbb{Z}^3 & & B_1 & & 0 & & \\
H & & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

# Симплициальные гомологии. Пример

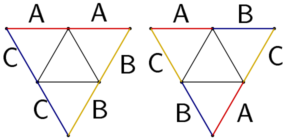
Пример — сфера. Тут

- 0 симплексов $\Delta_3$
- 4 симплекса $\Delta_2$
- 6 симплексов $\Delta_1$
- 4 симплекса $\Delta_0$

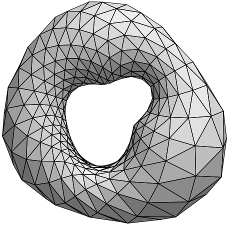



| | | | 0 | | 1 | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | $0$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}^4$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}^6$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}^4$ | $\leftarrow$ | $0$ |
| $Z$ | | | $K_0$ | | $B_1$ | | $\mathbb{Z}$ | | |
| $B$ | | | $\mathbb{Z}^3$ | | $B_1$ | | $0$ | | |
| $H$ | | | $\mathbb{Z}$ | | $0$ | | $\mathbb{Z}$ | | |

Сфера и проективная плоскость. С ней сложнее



Симплициальные



Цепные

$K_{n-1} \leftarrow K_n \leftarrow K_{n+1}$

$Z_{n-1} \quad Z_n \quad Z_{n+1}$

$B_{n-1} \quad B_n \quad B_{n+1}$

$H_{n-1} \quad H_n \quad H_{n+1}$

# Сингулярные гомологии

- У произвольного топологического пространства
- Не требуют никакой особой структуры
- Оперируют с бесконечнопорождёнными (несчётнопорождёнными) группами, вычислять гомологии очень сложно
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность очевидна
- Можно доказать инвариантность для других видов гомологий, путём сведения к сингулярным

- У произвольного топологического пространства
- Не требуют никакой особой структуры
- Оперируют с бесконечнопорождёнными (несчётнопорождёнными) группами, вычислять гомологии очень сложно
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность очевидна
- Можно доказать инвариантность для других видов гомологий, путём сведения к сингулярным

Построение

- В каждой размерности $n \geqslant 0$ берётся один симплекс $\Delta_n$
- Рассматриваются всевозможные непрерывные отображения $n$-симплекса в топологическое пространство $X$. Каждое отображение — образующая $K_n$.

- У произвольного топологического пространства
- Не требуют никакой особой структуры
- Оперируют с бесконечнопорождёнными (несчётнопорождёнными) группами, вычислять гомологии очень сложно
- Просто доказать условие комплекса $\partial\partial = 0$
- Инвариантность очевидна
- Можно доказать инвариантность для других видов гомологий, путём сведения к сингулярным

Построение

- В каждой размерности $n \geqslant 0$ берётся один симплекс $\Delta_n$
- Рассматриваются всевозможные непрерывные отображения $n$-симплекса в топологическое пространство $X$. Каждое отображение — образующая $K_n$.
- Оператор $\partial$ от отображения $f : \Delta_n \to X$ берёт сумму ограничений $f$ на всевозможные грани $\Delta_n$ с соответствующими знаками.
- Далее, комплекс по образующим и заданию $\partial$ на образующих строится точно так же, как и симплициальный

Вычислим сингулярные гомологии ...

Вычислим сингулярные гомологии . . . точки $(*)$.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | | | | | | |
| $Z$ | | | | | | |
| $B$ | | | | | | |
| $H$ | | | | | | |

Вычислим сингулярные гомологии ...точки $(*)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & & \\
B & & & & & & & & & & & & \\
H & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$

Вычислим сингулярные гомологии . . . точки $(*)$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & & \\
B & & & & & & & & & & & & \\
H & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$
- $\partial f_n =$

Вычислим сингулярные гомологии . . . точки $(*)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & & \\
B & & & & & & & & & & & & \\
H & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$
- $\partial f_n = f_{n-1} - f_{n-1} + f_{n-1} - \ldots + (-1)^n f_{n-1}$

Вычислим сингулярные гомологии ...точки $(*)$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & & & & & & \\
B & & & & & & & & & & & & \\
H & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$
- $\partial f_n = f_{n-1} - f_{n-1} + f_{n-1} - \ldots + (-1)^n f_{n-1}$
- Таким образом $\partial f_n = 0$, если $n$ — нечётное, и $f_{n-1}$, если чётное

Вычислим сингулярные гомологии ...точки $(*)$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & \\
B & & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & \\
H & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

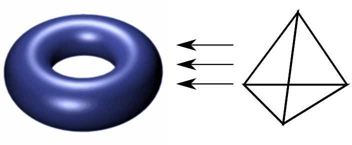
- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$
- $\partial f_n = f_{n-1} - f_{n-1} + f_{n-1} - \ldots + (-1)^n f_{n-1}$
- Таким образом $\partial f_n = 0$, если $n$ — нечётное, и $f_{n-1}$, если чётное
- $\partial f_n = 0$ означает, что $f_n \in Z_n$ и $B_{n-1} = 0$

Вычислим сингулярные гомологии …точки $(*)$.

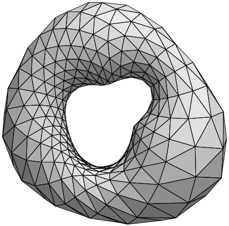
$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow \\
Z & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & \\
B & & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & \\
H & & & \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

- Для каждого $n$ есть только одно отображение $f_n : \Delta_n \to *$
- $\partial f_n = f_{n-1} - f_{n-1} + f_{n-1} - \ldots + (-1)^n f_{n-1}$
- Таким образом $\partial f_n = 0$, если $n$ — нечётное, и $f_{n-1}$, если чётное
- $\partial f_n = 0$ означает, что $f_n \in Z_n$ и $B_{n-1} = 0$

## Сингулярные



## Симплициальные



**Цепные**

$$K_{n-1} \leftarrow K_n \leftarrow K_{n+1}$$

$$Z_{n-1} \quad Z_n \quad Z_{n+1}$$

$$B_{n-1} \quad B_n \quad B_{n+1}$$

$$H_{n-1} \quad H_n \quad H_{n+1}$$

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.
Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера?

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.

Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера? Ответ: окружность
- Что такое 0-мерная сфера?

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.

Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера? Ответ: окружность
- Что такое 0-мерная сфера? Ответ: две точки
- Что такое -1-мерная сфера?

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.

Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера? Ответ: окружность
- Что такое 0-мерная сфера? Ответ: две точки
- Что такое -1-мерная сфера? Ответ: пустое множество

Топологическое пространство можно профакторизовать по замкнутому множеству, т. е. склеить это замкнутое множество в одну точку.

- Если профакторизовать замкнутый шар $D^n$ по границе $(n > 0)$, то получим

# Ликбез по геометрии

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.
Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера? Ответ: окружность
- Что такое 0-мерная сфера? Ответ: две точки
- Что такое -1-мерная сфера? Ответ: пустое множество

Топологическое пространство можно профакторизовать по замкнутому множеству, т. е. склеить это замкнутое множество в одну точку.

- Если профакторизовать замкнутый шар $D^n$ по границе $(n > 0)$, то получим сферу $\mathbb{S}^n$

Сфера $\mathbb{S}^n$ — граница $n+1$-мерного открытого шара (в метрическом смысле). Открытый шар $O^n$ топологически $n$-мерное евклидого пространство. По определению, $O^0 = *$.
Вопросы:

- Что такое 1-мерная сфера? Ответ: окружность
- Что такое 0-мерная сфера? Ответ: две точки
- Что такое -1-мерная сфера? Ответ: пустое множество

Топологическое пространство можно профакторизовать по замкнутому множеству, т. е. склеить это замкнутое множество в одну точку.

- Если профакторизовать замкнутый шар $D^n$ по границе $(n > 0)$, то получим сферу $\mathbb{S}^n$
- Если открытый шар $O^n$ — открытое подмножество пространства $X$, то факторизация $X$ по дополнению до шара — это $\mathbb{S}^n$. Причём это верно даже для $n = 0$.

Можно определить индекс отображения $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Неформально — сколько раз одна сфера "наматывается" на другую. Индекс может быть отрицательным.

# Клеточные гомологии

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

## Определение CW-пространства

- Клетка размерности $n$ — непрерывное **вложение** открытого шара $O^n$ в наше пространство $X$.
- Клетки не пересекаются. $X$ это объединение всех клеток всех размерностей.
- $n$-остов объединение всех клеток размерности $n$ и меньше, обозначение $X_n$

# Клеточные гомологии

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

## Определение CW-пространства

- Клетка размерности $n$ — непрерывное **вложение** открытого шара $O^n$ в наше пространство $X$.
- Клетки не пересекаются. $X$ это объединение всех клеток всех размерностей.
- $n$-остов объединение всех клеток размерности $n$ и меньше, обозначение $X_n$
- Вложение клетки продолжается по непрерывности на её границу ($n-1$-мерную сферу). Образ границы обязан лежать в $n-1$-остове и пересекаться лишь с конечным числом клеток размерности $n-1$ и меньше.

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

### Определение CW-пространства

- Клетка размерности $n$ — непрерывное **вложение** открытого шара $O^n$ в наше пространство $X$.
- Клетки не пересекаются. $X$ это объединение всех клеток всех размерностей.
- $n$-остов объединение всех клеток размерности $n$ и меньше, обозначение $X_n$
- Вложение клетки продолжается по непрерывности на её границу ($n-1$-мерную сферу). Образ границы обязан лежать в $n-1$-остове и пересекаться лишь с конечным числом клеток размерности $n-1$ и меньше.
- При построении CW-комплекса образующими $K_n$ будут $n$-мерные клетки

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

### Пример

Сфера $\mathbb{S}^2$. Можно собрать её из

### Определение CW-пространства

- Клетка размерности $n$ — непрерывное **вложение** открытого шара $O^n$ в наше пространство $X$.
- Клетки не пересекаются. $X$ это объединение всех клеток всех размерностей.
- $n$-остов объединение всех клеток размерности $n$ и меньше, обозначение $X_n$
- Вложение клетки продолжается по непрерывности на её границу ($n-1$-мерную сферу). Образ границы обязан лежать в $n-1$-остове и пересекаться лишь с конечным числом клеток размерности $n-1$ и меньше.
- При построении CW-комплекса образующими $K_n$ будут $n$-мерные клетки

- У топологического пространства с заданным разбиением на клетки
- Требуют задания явной структуры
- Гомологии вычислять легко и приятно (нет)
- Инвариантность и $\partial\partial$ доказать сложно, но можно свести к сингулярным, откуда это следует

## Пример

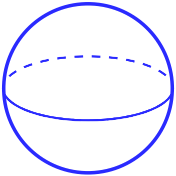
Сфера $\mathbb{S}^2$. Можно собрать её из одной 2-мерной клетки ($O_2$) и одной 0-мерной (точки). Весь круг — граница $O_2$ — отображается в точку.

## Определение CW-пространства

- Клетка размерности $n$ — непрерывное **вложение** открытого шара $O^n$ в наше пространство $X$.
- Клетки не пересекаются. $X$ это объединение всех клеток всех размерностей.
- $n$-остов объединение всех клеток размерности $n$ и меньше, обозначение $X_n$
- Вложение клетки продолжается по непрерывности на её границу ($n-1$-мерную сферу). Образ границы обязан лежать в $n-1$-остове и пересекаться лишь с конечным числом клеток размерности $n-1$ и меньше.
- При построении CW-комплекса образующими $K_n$ будут $n$-мерные клетки

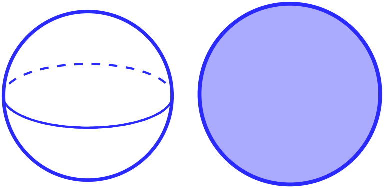
## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Сфера, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены.



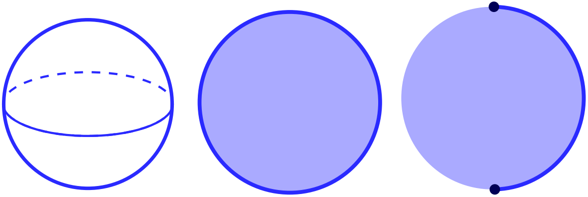
## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Сфера, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены.
Если удалить все "дубликаты" точек, получим



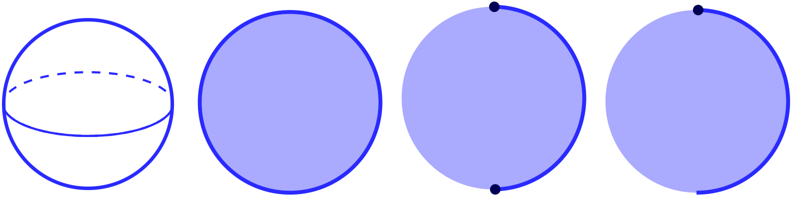
## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Сфера, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены.
Если удалить все "дубликаты" точек, получим



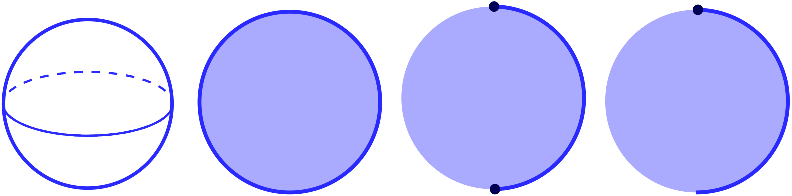
## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Сфера, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены.
Если удалить все "дубликаты" точек, получим



## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Сфера, у которой диаметрально противоположные точки отождествлены.
Если удалить все "дубликаты" точек, получим открытый круг, интервал и точку. Т. е. по одной клетке размерностей 0, 1, 2.



## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.

## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.

## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.
- Если клетка $y$ не пересекается с $\operatorname{Im} \bar{x}$, то она не входит в $\partial x$.

## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.
- Если клетка $y$ не пересекается с $\operatorname{Im} \bar{x}$, то она не входит в $\partial x$.
- Иначе, профакторизуем $n-1$-остов по дополнению до $y$. Как утверждалось, получим снова сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ и отображение из $\hat{y} : X_{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.

## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.
- Если клетка $y$ не пересекается с $\mathrm{Im}\,\bar{x}$, то она не входит в $\partial x$.
- Иначе, профакторизуем $n-1$-остов по дополнению до $y$. Как утверждалось, получим снова сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ и отображение из $\hat{y} : X_{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.
- Беря композицию отображения границы $x$ в остов и отображения факторизации получим отображение $\hat{y} \circ \bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$

## Граничный гомоморфизм

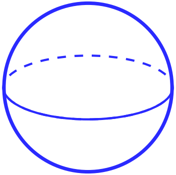
- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.
- Если клетка $y$ не пересекается с $\operatorname{Im} \bar{x}$, то она не входит в $\partial x$.
- Иначе, профакторизуем $n-1$-остов по дополнению до $y$. Как утверждалось, получим снова сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ и отображение из $\hat{y} : X_{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.
- Беря композицию отображения границы $x$ в остов и отображения факторизации получим отображение $\hat{y} \circ \bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$
- Его степень - индекс вхождения клетки $y$ в $\partial x$.

## Граничный гомоморфизм

- Чтобы построить $\partial$ нужно определить, сколько раз каждая $n-1$-клетка $y : O^{n-1} \to X$ входит в границу $n$-клетки $x : O^n \to X$.
- Для этого вспомним, что отображение $x$ продолжается на границу шара $O^n$, которая является сферой $\mathbb{S}^{n-1}$. Получаем отображение $\bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to X_{n-1}$ в $n-1$-мерный остов.
- Если клетка $y$ не пересекается с $\operatorname{Im} \bar{x}$, то она не входит в $\partial x$.
- Иначе, профакторизуем $n-1$-остов по дополнению до $y$. Как утверждалось, получим снова сферу $\mathbb{S}^{n-1}$ и отображение из $\hat{y} : X_{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$.
- Беря композицию отображения границы $x$ в остов и отображения факторизации получим отображение $\hat{y} \circ \bar{x} : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$
- Его степень - индекс вхождения клетки $y$ в $\partial x$.
- Как и раньше, $\partial$ в общем виде задаётся значениями на образующих

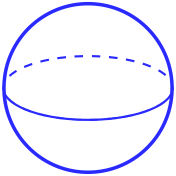
## Пример

Сфера $\mathbb{S}^2$.



## Пример

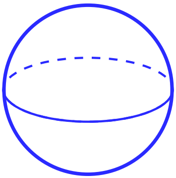
Сфера $\mathbb{S}^2$. Как было сказано, задаётся двумя клетками: двумерной и 0-мерной.



**Пример**

Сфера $\mathbb{S}^2$. Как было сказано, задаётся двумя клетками: двумерной и 0-мерной.

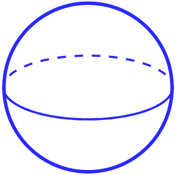
$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\ K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \end{array}$$



### Пример

Сфера $\mathbb{S}^2$. Как было сказано, задаётся двумя клетками: двумерной и 0-мерной.

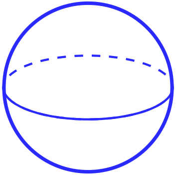
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & \\
B & & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$



**Пример**

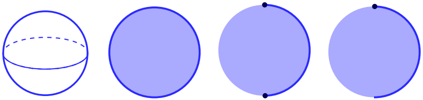
Сфера $\mathbb{S}^2$. Как было сказано, задаётся двумя клетками: двумерной и 0-мерной.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & & \\
B & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
H & & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & &
\end{array}
$$



## Пример

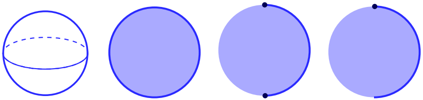
Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$.



## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной.

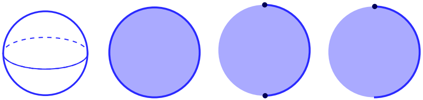
| | | | 0 | | 1 | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | $0$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}$ | $\leftarrow$ | $\mathbb{Z}$ | $\leftarrow$ | $0$ |
| $Z$ | | | $\mathbb{Z}$ | | | | | | |
| $B$ | | | | | | | $0$ | | |
| $H$ | | | | | | | | | |



## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной. Тут придётся подумать, как устроены граничные операторы.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\
B & & & & & & & 0 & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}
$$

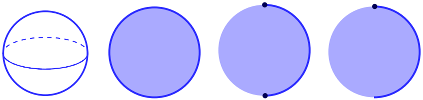


# Клеточные гомологии. Пример 2

## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной. Тут придётся подумать, как устроены граничные операторы.
Граница круга два раза наматывается на одномерную клетку. Поэтому коэффициент будет равен двум.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & & & 0 & & \\
B & & & & & 2\mathbb{Z} & & 0 & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}
$$

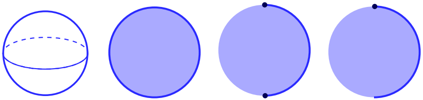


# Клеточные гомологии. Пример 2

## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной. Тут придётся подумать, как устроены граничные операторы.
Граница круга два раза наматывается на одномерную клетку. Поэтому коэффициент будет равен двум.
Граница полуокружности дважды переодит в 0-мерную клетку, но с разными знаками, поэтому коэффициент 0. Это очевидно также из включения $B_1 \subset Z_1$

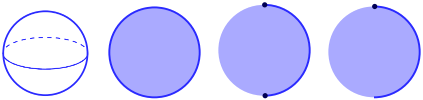
$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \\
B & & & 0 & & 2\mathbb{Z} & & 0 & & \\
H & & & & & & & & &
\end{array}
$$



## Пример

Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной. Тут придётся подумать, как устроены граничные операторы.
Граница круга два раза наматывается на одномерную клетку. Поэтому коэффициент будет равен двум.
Граница полуокружности дважды переодит в 0-мерную клетку, но с разными знаками, поэтому коэффициент 0. Это очевидно также из включения $B_1 \subset Z_1$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\
K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\
Z & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \\
B & & & 0 & & 2\mathbb{Z} & & 0 & & \\
H & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}_2 & & 0 & &
\end{array}
$$

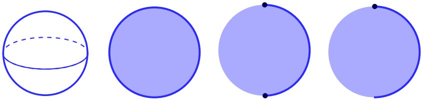


## Пример

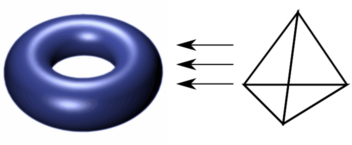
Проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$. Как было сказано, задаётся тремя клетками: двумерной, 1-мерной и 0-мерной. Тут придётся подумать, как устроены граничные операторы.
Граница круга два раза наматывается на одномерную клетку. Поэтому коэффициент будет равен двум.
Граница полуокружности дважды переодит в 0-мерную клетку, но с разными знаками, поэтому коэффициент 0. Это очевидно также из включения $B_1 \subset Z_1$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 0 & & 1 & & 2 & & \\ K & 0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\ Z & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & \\ B & & & 0 & & 2\mathbb{Z} & & 0 & & \\ H & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}_2 & & 0 & & \end{array}$$

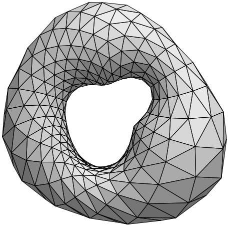
Верхняя группа гомологий 0, это признак того, что поверхность неориентируема.



## Сингулярные



## Симплициальные

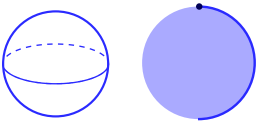


## Цепные

$$K_{n-1} \leftarrow K_n \leftarrow K_{n+1}$$

$$
\begin{array}{ccc}
Z_{n-1} & Z_n & Z_{n+1} \\
B_{n-1} & B_n & B_{n+1} \\
H_{n-1} & H_n & H_{n+1}
\end{array}
$$

## Клеточные



## Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

## Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии

# Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии

# Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий

# Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий
- Гомотопическая инвариантность

## Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий
- Гомотопическая инвариантность
- Функториальность

## Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий
- Гомотопическая инвариантность
- Функториальность
- Гомологическую точную последовательность

# Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий
- Гомотопическая инвариантность
- Функториальность
- Гомологическую точную последовательность
- Умножение в когомологиях

# Что не затронули

Что ещё интересного в основах теории гомологий

- Когомологии
- Относительные гомологии
- Другие теории гомологий
- Гомотопическая инвариантность
- Функториальность
- Гомологическую точную последовательность
- Умножение в когомологиях
- Ещё много всего