

解题报告

刘肖

2019 年 11 月 19 日

1 cf506C Mr. Kitayuta vs. Bamboos

1.1 题目大意

有 n 棵初始高度为 h_i 并且会在每天结束的时候高度增加 a_i 的竹子。可以在每天减少 k 次任意一棵竹子的高度 p （若高度小于 0 则会被设为 0），要求最小化 m 天后最高竹子的高度。

1.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5; 1 \leq m \leq 5000; 1 \leq k \leq 10; 1 \leq p \leq 10^9$$
$$0 \leq h_i \leq 10^9; 1 \leq a_i \leq 10^9$$

1.3 解题过程

用二分的方法将原问题转化为判定性问题，即能否让所有的竹子在 k 天后高度均不超过 X 。

考虑反向模拟原问题，问题将会变为：初始时所有竹子高度均为 X ，并且在每天的开始时所有竹子高度会减少 a_i ，每天可以增加 k 次任意一棵竹子的高度 p ，如果任意一棵竹子的高度在任意时刻为负则失败，判定是否有可行方案。

反向模拟后就不用再考虑原问题中高度减少到 0 以下带来的影响，这样贪心选择高度最快减少到 0 的竹子并增加它的高度一定是最优策略，用堆维护即可。

2 cf679E Bear and Bad Powers of 42

2.1 题目大意

定义 42 的整数次幂为不优美的数，其他均为优美的数。

给出一个由优美的数组成的序列，维护下列操作：

- 求单点值
- 区间赋值为 x ，保证 x 为优美的数
- 区间加 $x(x > 0)$ 并重复这一过程直到区间没有不优美的数。

2.2 数据范围

$$1 \leq n, q \leq 10^5$$

初始值与 x 不超过 10^9

2.3 解题过程

先不考虑区间赋值操作。

用线段树维护每个位置最少还需要加多少才成为不优美的数（记为 b_i ）。

若加后存在 b_i 小于等于 0，则暴力更新 b_i 并判断是否需要再次进行区间加操作。

容易发现一个数最多暴力更新 \log 值域次。

如果有了区间赋值为 x 的操作，只需要把区间最靠右的位置设为 x ，区间其他位置打上“当前这个数等于下一个数”的标记，并且在每次操作区间时重新计算左右端点的准确值并删除标记即可。

3 arc098F Donation

3.1 题目大意

给出一个连通简单无向图，需要遍历图上每个点且向每个点 i 捐赠 B_i 元，移动到一个点 i 上时要求剩余金额不少于 A_i 元，可选择初始点，求最少携带多少钱可以完成目标。

3.2 数据范围

$$1 \leq n \leq 10^5; n - 1 \leq m \leq 10^5$$

$$1 \leq a_i, b_i \leq 10^9$$

3.3 解题过程

考虑将原问题进行转化。

将与 A_v 有关的限制更改为以下限制：对于每一个节点 v ，当你处于 v 节点时，你剩余的钱必须不少于 $C_v = \max(A_v - B_v, 0)$ （即使你已经向此节点捐赠过）。

显然在原问题里合法的一个操作序列在修改过的问题里也合法。

又因为在捐赠后再次访问这个节点不优，所以在修改过的问题里合法的一个操作序列在原问题中依然合法。

设节点 v 为 C_v 最大的节点，根据上面的结论，我们可以假设最优的操作方式在向节点 v 捐赠后就不再访问 v 了。

设原图除去 v 后剩下的连通块为 G_1, G_2, \dots, G_k ，向 v 捐赠后进入子连通块 G_i 。

我们可以强制构造一种最优决策满足一下形式：

- 连通块 $G_1, G_2, \dots, G_{i-1}, G_{i+1}, \dots, G_k$ 里的所有节点捐赠。
- 移动到节点 v 并捐赠。
- 向连通块 G_i 里的所有节点捐赠，并且再次期间不会移动到此连通块外。

然后就把问题划分为了若干个和原问题等价的子问题。

若将 v 与子连通块内的 v' 连边，构成了一棵树，即将原问题转换为了树上的最优化问题。

按照 C 从小到大排序建树，即可用简单的动态规划求解。