Case of Computer Network

题目大意

给定一个n个点m条边的无向图，以及q个节点对(s_i, d_i)，求能否将边定向后，对于任意的i，s_i都能通过有向边到达d_i。

数据范围

$n, m, q \le 2 \cdot 10^5$，$s_i \ne d_i$，无自环，可能有重边。

解题过程

首先，对于原图的任意一个边双联通分量，我们总有办法将分量内的边进行定向使得该联通分量内的任意两个节点之间可以互相到达。

这样，我们可以将每一个边双联通分量缩成一个点考虑。由于缩点后的图不在存在边双联通分量，两个点之间将会至多有一条路径。因此，缩点后的图是一个森林。

现在，问题转化成了，将森林的每一条边进行定向，使得给定的每一对节点(s_i, d_i)都满足s_i可以到达d_i。

如果存在一对(s_i, d_i)不连通，那么问题一定无解。反之，每一对(s_i, d_i)都将森林里的一条链上的边的方向完全确定了。如果存在一条边e被赋予了两种不同的方向，那么问题一定无解，反之一定有解。

(s_i, d_i)的联通性很好判定，而链赋值也可以通过树上差分完成。

因此，解决这道题的过程就是：先用tarjan将边双联通分量缩点，再判断每一对(s_i, d_i)的连通性，最后用树上差分判断缩点后每一条边的方向。

Go Home

题目大意

有一条数轴上有N个公寓，第i个公寓坐标为X_i，有P_i个人居住于此。现在所有居民坐在大巴车上，大巴车从坐标S处出发，将每个居民送到对应的公寓。大巴车在每一个时刻的行驶方向由车上的乘客投票得到，满足少数服从多数，投票出现平局时，大巴车会向数轴负方向行驶。每个居民的原则是自己尽量早到家，并会按照这个原则投票。如果两个方向到家的时间相同，则居民会把票投给负方向。

数据范围

- $1 \le N \le 10^5$
- $1 \le S \le 10^9$
- $1 \le X_1 < X_2 < \cdots < X_N \le 10^9$
- $X_i \ne S (1 \le i \le N)$

- $1 \leq P_i \leq 10^9 (1 \leq i \leq N)$
- 输入涉及到的所有数字都是整数。

解题过程

假设我们只考虑最靠左的公寓a和最靠右的公寓b，并且现在大巴车在这两个公寓之间。那么，我们会发现一个重要的结论：如果$P_a \geq P_b$，那么大巴车必然先经过a再经过b。反之先经过b再经过a。

为什么呢？假设$P_a \geq P_b$。大巴车会先经过a, b之间的某些公寓，我们把这些公寓删掉，因为它们的居民已经不能投票了。然后，就产生了两种可能：

- 大巴车左边就是a，右边还有许多公寓。
- 大巴车右边就是b，左边还有许多公寓。

对于第一种情况，如果大巴向左行驶，显然会先经过a，如果向右行驶，大巴车也不可能先经过b，因为在经过b之前必然存在一个时刻，车上只有a, b两个公寓的居民，这时，a公寓的居民会主导大巴的方向。

对于第二种情况，分析同理。

因此，b公寓的所有居民最优的策略就是让大巴车尽早到达a，这样到达b的时间也会更早。因此，我们可以直接把b公寓拆掉，把所有人赶到a公寓去，并且累加大巴前往b公寓多走的路程。

这样，就可以递归求解该问题了。递归边界就是只剩两个公寓了，或者S不在任何两个公寓的中间。

Modulo Pairing

题目大意

将$2N$个整数分为N个数对(a_i, b_i)，每一对恰好包含两个整数，每个整数恰好属于一对。最小化
$\max\{(a_i + b_i) \bmod M\}$。

数据范围

- 输入中设涉及的所有数均为整数。
- $1 \leq N \leq 10^5$
- $1 \leq M \leq 10^9$
- $0 \leq a_i < M$

解题过程

不难发现：

$$(a_i + b_i) \bmod M = \begin{cases} a_i + b_i & (a_i + b_i < M) \\ a_i + b_i - M & (a_i + b_i \geq M) \end{cases}$$

假设我们已经知道了哪些数构成的数对属于第二种情况，我们只需要将这些数对中各选一个数，减去M，然后，把所有数对当成第一种情况求解答案即可。

假设所有数对都属于第一种情况，我们将可以贪心地将数进行匹配：

- 先将所有数字升序排序

- a_i和a_{n+1-i}构成一个数对

为什么这样一定最优呢？假设存在四个数$a \le b \le c \le d$，构成了数对$(a,c),(b,d)$或者$(a,b),(c,d)$，我们发现，交换顺序后$(a,d),(b,c)$一定比原来更优。因此，最优的配对方式一定满足：任意两个数对之间都满足区间上的包含关系。

另外，我们还可以证明一个结论：属于第二种情况的那些数字永远是排序后最大的那些数字，也就是说，我们可以选择最最大的若干个数，将它们减去M。证明过程是这样的：假设选择减去M的数字不是最大的那些，将这些数字替换为较大的一些，答案一定不会变差。

再另外，我们还可以证明一个结论：减去M的数字越多，答案会越小(即更优秀)。但是，减去M的数字太多，会导致出现$a_i + b_i < 0$的情况发生，这种情况是不合法的。

根据这三个结论，我们可以二分将多少个数字减去M，然后按照大小配对，判定是否合法。取减去M的数字尽量多的合法的配对方案的答案即可。