集训队试题准备解题报告

广州二中 马耀华

cf571E Geometric Progressions 解题报告

题目大意

给定n个整数等比数列，第i个的首项为a_i，公比为b_i，求出最小的正整数x，使得它是所有序列的元素，或声明不存在这样的x。若存在x的话，输出$x \bmod 10^9+7$的值，否则输出-1。

数据范围

- $1 \le n \le 100$
- $1 \le a_i, b_i \le 10^9 (1 \le i \le n)$

解题过程

首先将所有的a_i，b_i均分解质因数，由于n较小，采用根号试除法即可。

假设所有的等比数列共有m个不同的质因子，从小到大依次为p_1，p_2，$\ldots$，p_m。于是我们可以知道第i个等比数列的第k项为$\prod_{j=1}^m p_j^{c_{i,j}+d_{i,j}\cdot k}$，其中$c_{i,j}$是$a_i$中$p_j$的指数，$d_{i,j}$是$b_i$中$p_j$的幂次。

若$\exists j$，使得$\exists u$有$d_{u,j}=0$。我们发现当$\forall 1 \le i \le n$都有$d_{i,j}=0$时，显然当$c_{i,j}$均相等时可以忽略掉这个质因子（最后答案乘上即可），否则直接无解。若$\exists v$有$d_{v,j}>0$，那么合法的x至多只有一个，直接尝试解出来判定是否合法即可。

经过上面的处理后，我们可以认为所有的$d_{i,j}$均不为0。此时如果仍有$m>1$，我们尝试消到只剩一个质因子，具体是对于某个$1<j\le m$，我们枚举$1<i\le n$，若有$\frac{d_{1,1}}{d_{i,1}} \ne \frac{d_{1,j}}{d_{i,j}}$，那么同样合法的$x$至多只有一个，尝试解出来判定是否合法即可，否则先看$c_{i,j}$是否成比例，如果不成比例也无解，成的话就可以忽略掉p_j了。

这样我们终于转化为了只有一个质因子p_1的情况，那么我们设最终x中p_1的幂次为y，显然有$\forall 1 \le i \le n$，$y \equiv c_{i,1} \pmod{d_{i,1}}$。这样问题转化为了给出$n$个线性同余方程，要求出最小的非负整数解。这个问题有经典的扩展CRT做法，即每次尝试合并两个同余方程（可能无解）。求出了最小的y后就容易求出答案了。

注意有一个坑点，刚刚的同余方程其实忽略了一些信息，有可能这样求出来的最小的y会比某个$c_{i,1}$小，因此需要加上$lcm_{i=1}^n d_{i,1}$的倍数。

时间复杂度是$\mathcal{O}(n(\sqrt{V}+m))$。

cf696F ...Dary! 解题报告

题目大意

给定一个n个点的凸多边形，按逆时针顺序给出每个顶点的坐标(x_i, y_i)，保证任意三点不共线。

要求最小化实数r，使得可以在多边形内部（可以在边界或顶点上）选出两个可以重合的点，令多边形每条边所在的直线上存在至少一点（可以不在边上）距离两个点之一不超过r，即以这两点作半径为r的圆，与多边形每条边所在直线至少有一个交点。

输出最小的r和选择的点的坐标，当绝对或相对误差不超过10^{-6}时答案被认为是正确的。

数据范围

- $3 \le n \le 300$
- $|x_i|, |y_i| \le 10^4 (1 \le i \le n)$

解题过程

容易想到二分实数r，关键是如何判定一个半径r是否合法。

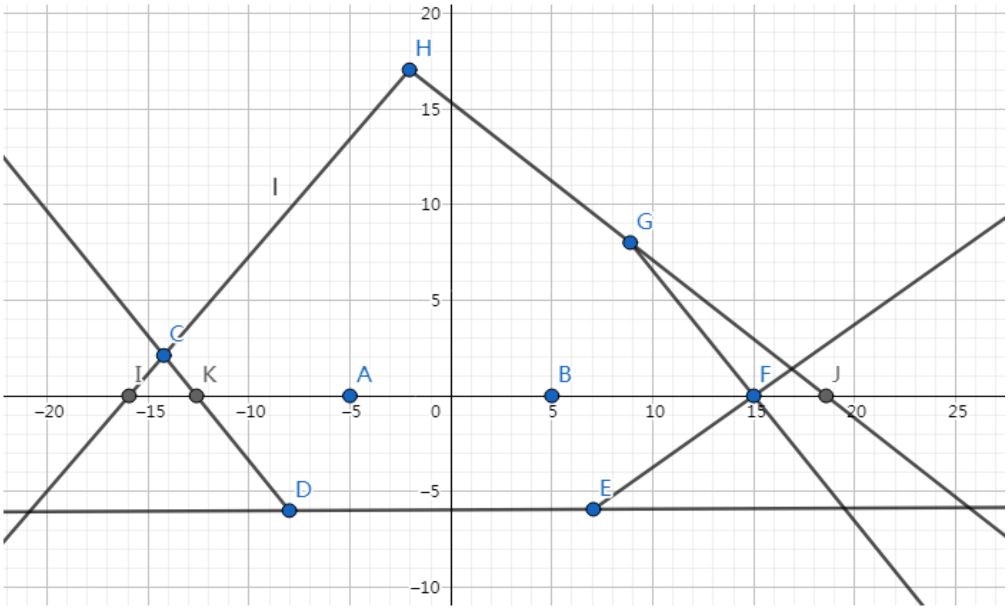
这个判定问题其实可以转化为判定能否将多边形的边分成两部分，每一部分都可以用多边形内的一点作半径为r的圆与其内部所有边所在直线相交。给定了某一部分的边的话，将该部分的边向内缩半径r后可以得到若干半平面，多边形的边也对应了若干半平面，显然合法的点需要在这些半平面内，问题即为判定这些半平面与多边形对应的半平面的交是否为空。

注意到若某个集合的半平面与多边形对应的半平面的交不为空，一定包含某两条直线（包括向内缩的和原多边形的）的交点。一个暴力的算法是枚举所有直线的交点（在多边形内的），再枚举每条边向内缩r后对应的半平面看是否在内部，这样得到一个可以覆盖的边的集合，最后看能不能用两个这样的点覆盖所有边，时间复杂度为$\mathcal{O}(n^3 \log V)$，不能通过。

要得到复杂度更优秀的算法，我们需要证明一个结论，将边按逆时针顺序标号后，最优解中分成的两部分都是连续的区间（可以循环，即$\{n, 1, 2, \dots\}$这样的，下同）。

CF上原题解的证明过程有问题，这里感谢毛啸同学（mathew99）给出的证明。

设我们最后选择的点为A和B，一般地，只考虑A和B不重合的情况。恰当地旋转坐标系和选择原点，可以使A和B落在x轴上且关于原点对称（令A在原点左侧）。考虑凸多边形每条边所在直线与x轴的交点（若与x轴平行的话与A和B距离相等，可以忽略），那么它不可能落在A和B之间，否则与凸多边形的定义矛盾，并且显然会划分成连续的两部分，一部分交点落在A左侧，一部分落在B右侧（事实上每一部分的交点坐标是单峰的）。注意到若交点落在A左侧，会距离A更近；若落在B右侧，会距离B更近，因此距离A更近的和距离B更近的边都形成连续的区间（相等的划分到一侧即可），最优解中显然也会这么划分。于是证明完毕。



有了这个结论后，我们的想法是算出每个区间能否用一个点作圆覆盖。如果直接枚举每个区间计算半平面交判定，复杂度并没有优化。不过我们可以注意到若区间$[l,r]$的子区间$[l',r']$不能用一个点作圆覆盖，那$[l,r]$也不能用一个点作圆覆盖。于是我们可以考虑双指针，枚举左端点l，那么最大可行的r单调不降，因此总共只用判定$\mathcal{O}(n)$个区间。算出了每个l最大可行的r后就容易判定是否可行了。

实现的时候我们需要预先对所有的半平面排序，再利用增量法求出半平面交。时间复杂度$\mathcal{O}(n^2\log n)$。

arc093E Bichrome Spanning Tree 解题报告

题目大意

给一个N个点M条边的带权连通无向图，图中没有重边和自环。第i条边连接了点U_i和V_i且权重为W_i。给每条边任意染成黑色或白色，求出使得在所有包含两种颜色的边的生成树中权重和最小的和恰为X的方案数，输出答案 $\bmod 10^9+7$的值。

数据范围

- $1 \le N \le 1\,000$
- $1 \le M \le 2\,000$
- $1 \le U_i, V_i \le N (1 \le i \le M)$
- $1 \le W_i \le 10^9 (1 \le i \le M)$
- $1 \le X \le 10^{12}$

解题过程

考虑先不管染色，任意求出原图的一棵MST，设为T。这个可以用经典的kruskal算法解决。

我们称生成树T的权重和为$w(T)$。

若$w(T) > X$，显然一定无解。接下来我们假设$w(T) \le X$。

那么对于一个染色方案，若T中同时有两种颜色的边，那它本身就是符合题意的生成树中权重和最小的之一。显然当且仅当$w(T) = X$时，它对答案有$(2^{n-1}-2) \cdot 2^{m-n+1}$的贡献（$T$中的边不能全部同色，不在$T$中的边可以任意染色）。

接下来我们考虑T中只有一种颜色的情况，不妨设T中的边全部染成黑色，白色的情况贡献是相同的。

我们可以证明，这种情况下，若存在符合题意的生成树，那么一定有至少一棵是选择一条不在T中的白色边(u,v)，替换掉T上u和v间路径上的最大边权的边得到的。证明是我们可以考虑从T开始，不断替换一条边为不在T中的边，仍然得到一棵生成树。每次替换的过程都不会减小权重和，因此我们不会替换一条黑色边进去，并且也不会替换两条白色边。

进一步地，我们替换第i条边的话，会增大$cost(i) = w_i - \max\{w_j | (u_j, v_j)\text{在}T\text{中}(u_i, v_i)\text{两点间路径上}\}$的贡献。因此我们一定会选择$cost$最小的边替换。

有了上面的分析就可以计数了。我们把所有不在T中的边按$cost$排序（$cost$相同也强行定下顺序），那么第i条边对答案有贡献当且仅当$w(T) + cost(i) = X$，并且它是排序后第一条染成白色的边。假设它按$cost$排序后排在pos的位置，会对答案有$2^{m-n+1-pos}$的贡献（只有后面的边能任意染色）。

我们发现复杂度瓶颈在于计算$cost$，即计算树上两点间的最大边权。因为范围不大，可以暴力枚举路径上的边查询，单次复杂度$\mathcal{O}(n)$，稍微用倍增优化一下即可单次复杂度$\mathcal{O}(\log n)$。

时间复杂度视实现为$\mathcal{O}(nm)$或$\mathcal{O}(m \log n)$。