

# IOI 2020 国家集训队作业第一部分：解题报告

安徽师范大学附属中学 陈宇

## 1 Flights for Regular Customers

### 1.1 题目来源

Codeforces 576 D

### 1.2 试题大意

给一张  $n$  个点  $m$  条边的有向（不一定简单）图，每条边都有一个属性  $d_i$ ，表示你经过这条边前必须已经经过至少  $d_i$  条边。求从 1 到达  $n$  的最短（不一定简单）路长度。

$n, m \leq 150, d_i \leq 10^9$ .

### 1.3 解法

考虑固定了这条路径上  $d$  的最大值为  $M$ ，那么路径可描述为：先按规则走恰好  $M$  步，再用满足  $d \leq M$  的边走到  $n$ 。

那么显然有这样的算法：升序枚举可能  $M$ ，之后先求出从 1 号点出发按规则走恰好  $M$  步能到达的点集，再求这个点集到  $n$  沿  $d \leq M$  边的多源最短路去更新答案。最短路直接用 BFS，复杂度为  $O(m(n + m))$ 。

按规则走的路径有递推结构，令路径上严格次大值为  $M'$ （不存在则令  $M' = 0$ ），那么路径可描述为：先按规则走恰好  $M'$  步，再用满足  $d \leq M'$  的边走恰好  $M - M'$  步。

于是枚举过程中维护图的传递闭包矩阵  $T$  和可用边的邻接矩阵  $G$ ，考虑  $M$  由  $a$  变为  $b$ ，则先将所有  $d_i = a$  的边加入  $G$ ，之后  $T \leftarrow TG^{b-a}$ （在布尔矩阵乘法意义下），直接压位并快速幂时间复杂度为  $O\left(\frac{mn^3 \log d_i}{\omega}\right)$ ，其中  $\omega$  为机器位长。

## 2 Construction of a tree

### 2.1 题目来源

AtCoder Grand Contest 29 F

### 2.2 试题大意

一张无向图有  $N$  个点，给  $N - 1$  个大小均至少为 2 的点集  $E_i$ ，你要从每个点集中找出两个点连边，使图是树。

$$N \leq 10^5, \sum |E_i| \leq 2 \times 10^5.$$

### 2.3 解法

我们任选一个点为这棵树的根，之后每条边都可看做某个点连向其父亲的边。

我们建立一个二分图去匹配每个点和其连向父亲的边。二分图的左边为除了根以外的点，右边为  $N - 1$  个点集。若  $u$  不是根节点且  $u \in E_i$ ，连边  $(u, E_i)$ 。

这样可以看出，有解的必要条件就是这个二分图存在一组完美匹配；另一个必要条件是，二分图（加上根节点）应当联通。

我们任取一组该二分图的完美匹配，之后考虑从根出发 BFS。一开始，我们将根所在的所有点集的匹配点的父亲均设为根，然后再从这些点递归进行下去。如果最后有的点没被访问，说明二分图不连通，与假设矛盾。于是我们构造出了一组合法解，也说明上面的必要条件便是充要条件。

用 Dinic 等算法求二分图完美匹配，时间复杂度  $O\left(\sum |E_i| \sqrt{N}\right)$ 。

## 3 Median Replace

### 3.1 题目来源

AtCoder Grand Contest 22 E

### 3.2 试题大意

定义一个长度为奇数  $N$  的 01 串是美丽的，当且仅当每次将连续三个位替换为它们的中位数  $\frac{N-1}{2}$  次后，这个串变成一个字符 1.

现在输入了一个字符串  $S$ ，由 0, 1 和 ? 组成，求将问号替换为 0 和 1 得到一个美丽的字符串的方案数。对  $10^9 + 7$  取模。

$|S| \leq 3 \times 10^5$  且  $|S|$  是奇数。

### 3.3 解法

考虑固定了一个 01 串，如何判断其是否美丽。

将操作简化为：将 000 变为 0；将 111 变为 1；删掉相邻的 01 或 10.

考虑这些操作的优先级，显然是每次有 000 就执行，没有就执行 01 或 10，都没有再执行 111.

再考虑每种操作内部的顺序，首先 000 或 111 的执行显然都不用考虑顺序。实际上，01 或 10 的执行也不用考虑顺序。

证明很简单：设我们删的是 01. 如果一种最优方案中这对 01 没一起被删去，由于可认为 000 删的是左边两个，所以原因只可能是 0 和左边一个 1 被删去了（另一半边同理），但注意这种情况序列为 X101Y，删 10 或 01 结果都是 X1Y，没有区别。

现在考虑用栈维护，从左往右加入串中字符，如果加入了 1，那么栈顶是 0 便可弹掉；如果加入了 0，由于 000 优先于其他，栈顶是 1 也暂时不操作，最后再考虑 10 和 111 操作。这样栈的形态是  $x$  个 1 后跟  $y$  个 0，满足  $y \leq 2$ . 执行到最后若  $x \geq y$ ，则为合法串。由于  $x$  从未减小，所以  $x \geq 2$  时一定合法，可将  $x > 2$  的情况视作  $x = 2$ .

这样直接进行一个简单 DP 即可，具体可设  $f_{i,x,y}$  表示加入前  $i$  个字符后，栈的形态为  $(x, y)$  的方案数。由于  $(x, y)$  的状态数为常数，故时间复杂度为  $O(|S|)$ .