解题报告

杭州第二中学　潘骏跃

1 Number of Binominal Coefficients

1.1 题目大意

给定一个质数 p 和两个整数 α, A，求满足 $0 \le k \le n \le A$ 且 $p^\alpha \mid \binom{n}{k}$ 的整数对 (n,k) 的个数。

答案对 10^9+7 取模。

1.2 数据范围

- $1 \le p, \alpha \le 10^9$;
- $0 \le A < 10^{1000}$;
- p 是质数。

1.3 解题过程

我们知道 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$，所以我们只需要保证 $n!$ 中质因子 p 的次数比 $k!(n-k)!$ 中质因子 p 的次数至少多 α 即可。

由于 $n!$ 中质因子 p 的次数等于 $\sum\limits_{i=1} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$，我们设 n 的 p 进制表示为 $\overline{a_1 a_2 \ldots a_l}$，则 $n!$ 中质因子 p 的次数为 $\sum\limits_{i=1}^{l-1} \overline{a_1 a_2 \ldots a_i} = \sum\limits_{i=1}^{l-1} \sum\limits_{j=1}^{i} a_j p^{i-j} = \sum\limits_{i=1}^{l-1} a_i \sum\limits_{j=0}^{l-i-1} p^j$，即第 i 位的贡献是 $\sum\limits_{j=0}^{l-i-1} p^j$。

我们设 k 的 p 进制表示为 $\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}$，$n-k$ 的 p 进制表示为 $\overline{y_1 y_2 \ldots y_m}$ (都可以有前导 0)，再令 $z_i = x_i + y_i$，则 $k!(n-k)!$ 中质因子 p 的次数为 $\sum\limits_{i=1}^{m} z_i \sum\limits_{j=0}^{m-i-1} p^j$，而 z 进位后所得到的就是 n 的 p 进制表示。

考虑对于 z 的一次进位，假设发生了一次在第 i 位上的进位，即 z_i 减少了 p，z_{i-1} 增加了 1，那么第 i 位的贡献减少了 $p \sum\limits_{j=0}^{m-i-1} p^j = \sum\limits_{j=1}^{m-i} p^j$，第 $i-1$ 位的贡献增加了 $\sum\limits_{j=0}^{m-i} p^j$，那么所产生的总贡献是 $\sum\limits_{j=0}^{m-i} p^j - \sum\limits_{j=1}^{m-i} p^j = 1$。也就是说，每次进位都会产生 1 的增加量。

而我们需要增加量至少是 α，那么问题就转化成了求出非负整数对 (a,b) 的对数，其中 $a+b \le A$ 且 a,b 在 p 进制加法下至少进位了 α 次。

对于这个问题，我们只需要先把 A 表示为 p 进制，再令 $f[i][j][0/1][0/1]$ 表示“前 i 位中已经进位了 j 次，当前的 $a+b$ 是否小于 A 的前 i 位，是否需要后一位的进位”这种状态下的方案数。DP 时枚举 $a+b$ 的当前位是否小于 A 的 p 进制表示下的当前位、是否有后一位的进位，用这种状态下 a,b 可能的种数转移即可。

最后的时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log_p^2 A)$。

2 Orchestra

2.1 题目大意

给定一个 $r \times c$ 的 01 矩阵，其中恰有 n 个元素是 1，其余均为 0。求有多少个子矩形满足其中至少有 k 个 1。

我们定义子矩形为横坐标在 $[xl, xr]$ 内且纵坐标在 $[yl, yr]$ 内的所有元素所构成的可重集。

2.2 数据范围

- $1 \leq r, c, n \leq 3000$;
- $1 \leq k \leq min(n, 10)$。

2.3 解题过程

考虑枚举这个矩形的上边界，再枚举这个矩形的下边界，那么对于每一种左边界，可行的右边界都是一个后缀。同时若我们只保留这个上下边界之间的中提琴手，则从这个左边界开始向右得到的第 k 个中提琴手的横坐标就是这个后缀的左端。

设这个上下边界之间的中提琴手有 m 个，则这些中提琴手把 x 轴划分成了至多 $m+1$ 段，那么同一段内的左边界所对应的后缀相同。所以若我们枚举了上边界，向下移动下边界时，能实时维护每一段左边界所对应的后缀，也即它们向右得到的第 k 个中提琴手的位置，就可以解决整个问题。

于是问题转化成了动态加点（向下移动下边界时加入中提琴手），维护一个点向右得到的第 k 个点的横坐标。由于加入一个点时只会改变它前继 k 个点所对应的后缀，可以用双向链表维护前继关系并在每次加点时用 $\mathcal{O}(k)$ 的复杂度进行修改。具体地说，先将所有中提琴手按纵坐标从大到小的顺序在双向链表中删除，再在从下移动下边界时将删除操作撤销，即可维护点之间的前继关系。

最后的时间复杂度为 $\mathcal{O}(r^2 + rc + rnk)$。

3 Min Max Repetition

3.1 题目大意

设 A, B 是两个正整数，令 $f(A, B)$ 表示满足如下条件的字符串：

- $f(A, B)$ 的长度为 $A + B$；
- $f(A, B)$ 有恰好 A 个字符'A' 和恰好 B 个字符'B'；
- $f(A, B)$ 最长的字符全相同的子串是满足上述条件的所有字符串中最短的；
- $f(A, B)$ 是满足上述条件的所有字符串中字典序最小的。

你需要回答 Q 组询问：$f(A_i, B_i)$ 中第 C_i 位到第 D_i 位分别是什么（字符串下标从 1 开始）。

3.2 数据范围

- $1 \leq Q \leq 10^3$;
- $1 \leq A_i, B_i \leq 5 \times 10^8$;
- $1 \leq C_i \leq D_i \leq A_i + B_i$;
- $D_i - C_i + 1 \leq 100$;
- 输入的数均为整数。

3.3 解题过程

设一个字符串的权值是它最长的字符全相同的子串的长度，首先我们考虑这个字符串的权值最小是多少。假设两种字符的数量分别为 C, D，不妨令 $C \leq D$，'C' 是 C 对应的字符，'D' 是 D 对应的字符，再设 k 是满足 $(C+1)k \geq D$ 的最小的正整数，则 k 就是所求的最小权值。

可以这样证明：首先它是答案的一个上界，因为它可以由'D..DCD..DCD..D' 这种形式构造；同时由于 C 个'C' 最多把字符串划分成 $C + 1$ 段，所以这个字符串中最长的一段'D' 长度至少为 k，即 k 也为答案的一个下界。故 k 即为答案。

接下来考虑如何让字典序最小。为了达成这个目的，我们只需要在满足剩余部分仍有解的情况下能放'A' 就放'A'。所以我们可以二分一个位置，使得它满足如下条件：

- 这个位置之前的字符串形如'AA..ABAA..ABAA..A'，其中除最后一段外其余每段'A' 长度均为 k；
- 若再放一个字符'A'，就会导致 $k(x+1) < y$，而若不放最后一个'A' 就不会产生这样的情况。其中 x 是剩下的字符'A' 的数量，y 是剩下的字符'B' 的数量。

在这之后，我们再尽量少地放一段'B'，直至 $y = kx$。最后我们以 1 个'A' 接上 k 个'B' 的形式放完字符串。由于它满足了“能放'A' 就放'A'”的策略，这个字符串就是所求的 $f(A, B)$。

最后的时间复杂度为 $\mathcal{O}(Q\log(A_i + B_i) + \sum(D_i - C_i + 1))$。