解题报告

杭州第二中学 方汤骐

1 Intergalaxy Trips

1.1 题目大意

在一个 n 个点的有向图中，每个时刻边 (i,j) 有 $p_{i,j}$ 的概率出现（每经过一个时刻所有边都会重新按概率决定是否出现）。你可以花 1 的时间经过一条边或者等到下一个时刻。求点 1 到点 n 的期望时间。

1.2 数据范围

- $1 \le n \le 1000$

1.3 解题过程

尝试计算 $f_1, f_2, ..., f_n$，其中 f_i 表示从 i 号点到 n 号点的期望时间。

当计算 f_i 时，考虑当我们在 i 号点时会如何决策。可以发现，当前时刻如果有边 (i,j) 存在且能保证 $f_j < f_i$ 那么我们一定会走向点 j（存在多个满足的 j 时我们会走向其中 f_j 最小的那一个），而如果不存在，我们一定会等到下一个时刻。

由此我们发现，如果我们能仿照 dijsktra 算法依序从小到大计算出每个 f_i，我们就能得到正确答案。算法流程如下：

假设当前已经确定了 k 个点的 f，这 k 个点为 $a_1, a_2, ..., a_k$，对于 $\forall 1 \le i < k$，$f_{a_i} \le f_{a_{i+1}}$，且这 k 个点的 f 值是所有点里最小的 k 个。我们通过这些已经确定的 f, 去尝试找到第 $k+1$ 小的 f。我们令 $f'_x = \sum\limits_{1 \le i \le k} f_{a_i} \times g_{x,i} + w_x$，其中 $g_{x,y} = \frac{p_{x,a_y} \times \prod\limits_{1 \le i < y} (1-p_{x,a_i})}{1-\prod\limits_{1 \le i \le k}(1-p_{x,a_i})}$ 表示从 x 走到的下一个点为 y 的概率，$w_x = \frac{1}{1-\prod\limits_{1 \le i \le k}(1-p_{x,a_i})}$ 表示从 x 走出第一步包含等待在内需要的时间。我们取所有 f'_x 中最小的，令其为 f'_u，那么第 $k+1$ 小的 f 即 f'_u。

考虑如何证明。可以发现，f' 的意义为下一步只考虑往前 k 小的点走的期望时间。假设存在另一个点 v 为我们想求的 f 值第 $k+1$ 大的点，那么此时的 $f'_v = f_v$，且 $f_u > f_v$。然而根据上面的决策，因为 $f_u > f_v$，所以在某些情况下我们将会从 u 走向 v，因此我们只走前 k 小的点的决策对于 u 是不优的，可得 $f'_u > f_u$。但是 f'_u 又是所有 f' 中的最小值，因此得到 $f'_u < f'_v$。因此 $f_v < f_u < f'_u < f'_v = f_v$，矛盾。所以不存在这样一个点 v，即 u 就是我们想要求的 f 值第 $k+1$ 大的点。

因此我们按照刚才的算法一步步将每个点的 f 值确定，并且每次新确定一个点都维护一下 g 和 w，最终求出的 f_1 就是所求的答案。

最终时间复杂度 $O(n^2)$，空间复杂度 $O(n)$。

2 Snuke the Phantom Thief

2.1 题目大意

二维平面上有 n 个点，每个点有权值 v_i，并且有若干个形如“x 或 y 坐标 $\leq a_i$ 或 $\geq a_i$ 的范围内最多选 b_i 个”的限制。

要求找出一组选点的方案使得满足限制并且权值和最大。

2.2 数据范围

- $1 \leq n \leq 80$
- $1 \leq$ 限制数 ≤ 320

2.3 解题过程

为了简化问题，我们首先枚举最终选了多少个点。以下假设我们总共选了 k 个点。

考虑一维的情况，一个形如“在 x 坐标 $\leq a_i$ 范围内最多选 b_i 个点”的限制等价于“x 坐标第 b_i+1 大的点（如果存在的话）的 x 坐标必须 $> a_i$”，同理“在 x 坐标 $\geq a_i$ 范围内最多选 b_i 个点”可以转化成“x 坐标第 $k-b_i$ 大的点（如果存在的话）的 x 坐标必须 $< a_i$”。将所有限制都转化成这个形式，我们就可以得到 $Lx_{1..n}, Rx_{1..n}$ 表示 x 坐标第 i 大的点的 x 坐标必须在 Lx_i, Rx_i 之间。

即现在的问题转化为求一个元素互不相同的序列 p 满足：

1.$\forall 1 \leq i < k,\ x_{p_i} \leq x_{p_{i+1}}$

2.$\forall 1 \leq i \leq k,\ Lx_i \leq x_{p_i} \leq Rx_i$

并且 $\sum v_{p_i}$ 最大。

显然 $Lx_i < Lx_{i-1}$ 是没有意义的，同理 $Rx_i > Rx_{i+1}$ 也是没有意义的。我们将 Lx 数组转化成他的前缀最大值数组，将 Rx 数组转化成他的后缀最小值数组，限制和原本相比没有差别。现在我们可以保证 Lx 和 Rx 都是单调不降的。

在此前提下，我们发现可以直接忽略限制 1 求出答案。考虑原因：首先正确答案一定被包含在忽略限制 1 的解集里，因此我们求出的答案 $\geq$ 正确答案。而任何一组只满足限制 2 的 p 都可以在组成元素不变的前提下通过改变顺序成为一组合法解（简要证明：假设我们求出的 p 中存在 $x_{p_i} > x_{p_{i+1}}$，那么当我们交换 p_i 和 p_{i+1}，因为 $L_i \leq L_{i+1} \leq x_{p_{i+1}} < x_{p_i} \leq Rx_i \leq Rx_{i+1}$，所以仍然合法），因此我们求

出的答案又 $\leq$ 正确答案。所以我们求出的答案就是正确答案。忽略限制 1 后，我们只需要使用二分图最大权匹配就可以解决一维情况下的问题。

在二维意义下，问题与一维非常相似，唯一的区别在于对于每个 p_i 需要满足的条件变成了 $Lx_i \leq x_{p_i} \leq Rx_i$ 且 $Ly_i \leq y_{p_i} \leq Ry_i$（$Ly$ 和 Ry 的定义参考 Lx 和 Rx)。考虑扩展一下二分图最大权匹配的费用流建图，将每个原本的点拆成两个点，然后按以下方式连边（所有边的流量均为 1):

- S 向 x 坐标下的限制连费用为 0 的边。
- x 坐标下的限制向满足这个限制的点的左端点连费用为 0 的边。
- 每个点的左端点向右端点连费用为这个点权值的边。
- 每个点的右端点向它满足的 y 坐标限制连费用为 0 的边
- y 坐标下的限制向 T 连费用为 0 的边。

这样就得到了一个点数 $O(n)$，边数 $O(n^2)$ 的费用流。因为流量均为 1，所以只需要增广 k 次，每次用 dijsktra 算法可以做到 $O(n^2)$ 的复杂度。因为还枚举了 k，所以最终时间复杂度为 $O(n^4)$。

3 Chords

3.1 题目大意

一个圆上有 $2n$ 个点，你要将这 $2n$ 个点两两配对（已经有 k 对点配对好了）。将配对的两个点之间连一条线段，每个点向它通过这些线段能走到的点连一条边（经过线段交点时可以走到另一条线段上）。求所有配对方案中连通块数量的和。

3.2 数据范围

- $1 \le n \le 300$
- $1 \le k \le n$

3.3 解题过程

记存在一个编号最小值为 i，最大值为 j 的连通块的方案数为 $f_{i,j}$, 那么最终的答案就是 $\sum\limits_{1 \le i < j \le 2n} f_{i,j}$。

当存在一个编号最小值为 i，最大值为 j 的连通块时，可以发现不能存在一条从区间 $[i,j]$ 连到 $[1,i) \cup (j,n]$ 的线段。因此当存在一条已经配对的不合法线段存在时，$f_{i,j} = 0$，否则我们可以计算出最终不存在不合法线段的方案数。记将 x 个点两两匹配的方案数为 g_x，区间 $[l,r]$ 中的未匹配点数量是 $num_{l,r}$，那么最终不存在不合法线段的方案数为 $g_{num_{i,j}} \times g_{num_{1,2n} - num_{i,j}}$。在此基础上，我们尝试去掉点 i 所在的连通块的最大值小于 j 的情况，枚举这个最大值为 p，得到以下的式子: $f_{i,j} = (g_{num_{i,j}} - \sum\limits_{i \le p < j} f_{i,p} \times g_{num_{p+1,j}}) \times g_{num_{1,2n} - num_{i,j}}$。在维护出 num 和 g 的前提下，可以 $O(n^3)$ 计算。

接下来唯一的问题就是我们如何求 g 和 num。考虑每次枚举 1 号点和哪个点匹配，得 $g_x = (x-1) \times g(x-2)$，可以 $O(n)$ 计算。而 num 可以用前缀和 $O(n)$ 实现。因此我们得到了一个时间复杂度 $O(n^3)$，空间复杂度 $O(n^2)$ 的做法，可以通过此题。