解题报告

杭州第二中学　叶卓睿

1 Cross Sum

1.1 题目大意

平面坐标系中有 n 条不同的直线。令 $\mathcal{I}$ 为这些直线两两交点的可重集。

给出一个询问点 (p,q)，令 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{I}$ 中所有点到询问点的距离可重集，要求出 $\mathcal{D}$ 中前 m 小的元素和。注意 $\mathcal{D}$ 中大小相同的元素被认为是不同的。

1.2 数据范围

- $2 \le n \le 50000$；
- $1 \le m \le 3 \times 10^7$。

1.3 解题过程

首先二分答案，我们现在的问题变成求出直线两两交点有多少个在半径为 R 的圆内。此时我们只需考虑距离圆心 $\le R$ 的直线。对于每条直线，我们求出它和圆的两个交点，由几何知识知，两条直线交点在圆内当且仅当 4 个交点在圆周上是形如 $ABAB$ 这样交叉的，其中 A,B 分别为两条直线和圆的交点。

我们先通过极角排序求出长为 $2k$ 的序列，其中 $1\dots k$ 中的每个数出现恰好 2 次，表示每条直线和圆的两个交点按极角排序后得到的序列。

求形如 $ABAB$ 这样的四元组是经典数据结构问题，可以使用扫描线，具体算法如下：从左往右扫描，遇到第一个 A 时答案加上树状数组中它到与之匹配的另一个 A 之间的点数，然后将与之匹配的另一个 A 加入树状数组。

我们还剩下一个问题没有解决：求出半径 R 后，需要求出所有 m 个交点到询问点的距离。仍然在长为 $2k$ 的序列上考虑，现在的任务是枚举每个形如 $ABAB$ 这样的四元组，统计入答案。同样使用上述的扫描线算法，唯一不同的是把树状数组换成 set，需要 set 中插入元素，以及遍历区间中的所有元素。

最后还有一个小细节，由于存在重点，可能不存在任何一个 R 使得圆内交点个数恰好为 k。我们只需求出最大的 R 满足个数 $\le k$，剩下未统计到的点可以估计为 $R+\epsilon$。

由于 set 中遍历复杂度为 $\mathcal{O}(\text{元素个数} + logn)$ 的，最后的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m + n\log n \log \frac{1}{\epsilon})$。

2 Gachapon

2.1 题目大意

有一个可以随机生成 $[0, n-1]$ 中的整数的随机数生成器。整数 $i(0 \le i \le n-1)$ 以 $\frac{A_i}{S}$ 的概率被生成，$S = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$。每次生成整数的过程是独立执行的。

现在要使用这个随机数生成器重复生成整数，直到下面的条件满足：

- 对于每个 $i(0 \le i \le n-1)$，整数 i 已经被生成了至少 B_i 次。

求出生成整数的期望次数，输出结果对 998244353 取模。

2.2 数据范围

- $1 \le n \le 400$;
- $\sum_{i=0}^{n-1} A_i \le 400$；
- $\sum_{i=0}^{n-1} B_i \le 400$；
- $1 \le A_i$;
- $1 \le B_i$。

2.3 解题过程

为了方便表述，令 $P_i = \frac{A_i}{S}$，那么

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{t \ge 0} P(t\text{步后未结束}) \\
&= \sum_{t \ge 0} \left(1 - \left(\prod_i \sum_{j \ge B_i} \frac{(P_i x)^j}{j!}\right)[x^t]t!\right) \\
&= \sum_{t \ge 0} \left(1 - \left(\prod_i \left(e^{P_i x} - \sum_{j < B_i} \frac{(P_i x)^j}{j!}\right)\right)[x^t]t!\right)
\end{aligned}
$$

推导至此，考虑对于一个固定的 t，里面的东西展开，发现可以表示成形如这样的生成函数 $\sum_{p,q} a_{p,q} e^{px} x^q$，其中 $p \ne 1$(由式子，e^x 的系数为 0)。展开求出 $a_{p,q}$ 复杂度为 $\mathcal{O}(\sum A_i \times (\sum B_i)^2)$。

交换 $\sum$ 符号，得到

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{p,q} a_{p,q} \sum_{t \geq q} e^{px} x^q [x^t] t! \\
&= \sum_{p,q} a_{p,q} \sum_{t \geq q} \frac{p^{t-q}}{(t-q)!} t! \\
&= \sum_{p,q} a_{p,q} \sum_{t \geq q} q! p^{t-q} \binom{t}{q} \\
&= \sum_{p,q} a_{p,q} \sum_{t \geq 0} q! p^{t} \binom{t+q}{q}
\end{aligned}
$$

对于式子 $S_q = \sum_{t \geq 0} p^t \binom{t+q}{q}$，我们有

$$
\begin{aligned}
S_q &= \sum_{t \geq 0} p^t \left(\binom{t+q-1}{q-1} + \binom{t+q-1}{q} \right) \\
&= S_{q-1} + pS_q \\
&= \frac{S_{q-1}}{1-p} (q > 0)
\end{aligned}
$$

边界是$S_0 = \frac{1}{1-p}$

故$S_q = \frac{1}{(1-p)^{q+1}} (q \geq 0)$

带回答案式子，得到 $ans = \sum_{p,q} a_{p,q} \frac{q!}{(1-p)^{q+1}}$。由于 $p \neq 1$，所以不需要担心分母为 0 的问题。

总时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sum A_i \times (\sum B_i)^2)$。

3 Coloring Torus

3.1 题目大意

对于一个 $n \times n$ 的网格，称 (r, c) 为处于第 $r+1$ 行，第 $c+1$ 列的格子。一个对网格的好的 k 染色是满足下述条件的染色方案：

- 每个格子被染成 k 种颜色之一;
- k 种中的每种颜色都被至少一个格子使用；
- 我们给 k 种颜色标号 $1, 2, ..., k$。对于任意颜色 $i, j(1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k)$，满足所有颜色为 i 的格子，其上下左右相邻的颜色 j 的格子个数相同 (网格是循环的，如 $(1, k)$ 上面的格子为 (n, k)；如果一个格子多次出现，那么会算多次)。

给出 k，你需要选择一个 $1 \leq n \leq 500$，然后构造一个对 $n \times n$ 的网格的好的 k 染色。可以证明解一定存在。

3.2 数据范围

- $1 \leq n \leq 500$;
- $1 \leq k \leq 1000$。

3.3 解题过程

为了方便描述构造，我们接下来认为颜色在 $[0, k-1]$ 之间。最后只需每个格子颜色 $+1$ 即可。

我们尝试在 n 为偶数的情况下进行构造。可以发现，对于 $k = 2n$，存在这样的构造：

- 若 $i \equiv 0 \pmod 2$, 则$a_{i,j} = (i + j) \bmod n$;
- 若 $i \equiv 1 \pmod 2$, 则$a_{i,j} = (i + j) \bmod n + n$。

而且，把网格 $a_{i,j}$ 无限复制，即认为定义域为 $i, j \in \mathbb{Z}$，满足 $a_{i,j} = a_{i+n,j} = a_{i,j+n}$ 后，这样的解满足这样的性质：$\forall i, j, a_{i,j} = a_{i+2,j-2}$，

对于 $n \leq k \leq 2n$ 的情况，发现可以从上述特殊情况修改一下得到构造：

- 若 $i \equiv 0 \pmod 2$,则$a_{i,j} = (i+j) \bmod n$;
- 若 $i \equiv 1 \pmod 2$且$(i+j) \bmod n + n < k$,则$a_{i,j} = (i+j) \bmod n + n$;
- 若 $i \equiv 1 \pmod 2$且$(i+j) \bmod n + n \geq k$,则$a_{i,j} = (i+j) \bmod n$。

正确性证明如下：首先每种数都只会出现在一条斜线 $x+y=C$ 上。对于 $i \in [k-n, n-1]$，颜色 i 会出现在一条完整的斜线 $x+y=C$ 上，我们称之第一类颜色；对于 $i \in [0, k-n-1] \cup [n, k-1]$，颜色 i 会在一条斜线 $x+y=C$ 上每隔一格出现一次, 我们称之第二类颜色。并且，性质 $a_{i,j} = a_{i+2,j-2}$ 仍然成立。

对于第二类颜色,我们只需证明相邻的出现位置 $(i,j),(i+2,j-2)$ 周围格子颜色可重集相同。这是因为 $a_{i-1,j} = a_{i+1,j-2}, a_{i,j-1} = a_{i+2,j-3}$，且 $a_{i+1,j} = a_{i+3,j-2}, a_{i,j+1} = a_{i+2,j-1}$。

对于第一类颜色，我们还需额外证明 $(i,j),(i+1,j-1)$ 周围格子颜色可重集相同。这是因为 $a_{i-1,j} = a_{i+1,j-2}, a_{i,j-1} = a_{i,j-1}$，且 $a_{i+1,j} = a_{i+1,j}, a_{i,j+1} = a_{i+2,j-1}$。

因此，这个构造是正确的。

最后的问题是选取一个偶数 $n \in [\frac{k}{2}, k]$。特判 $k=1$ 的情况，其余情况只需取 $n = 2\lceil \frac{k}{4} \rceil$ 即可。

时间复杂度与输出复杂度相同，为 $\mathcal{O}(k^2)$。