IOI2020 中国国家集训队第一阶段作业

第一部分 解题报告

东北师大附中 李天晓

Fox and Travelling

题目来源：cf512D

题意

给定一张 n 个点 m 条边的简单无向图，每次可以选择一个度数小于 2 的点并将其删除，求删去 $0 \sim n$ 个点的方案数模大质数的值。两种方案不同当且仅当二者在某一步选择的点不同。

约定

$1 \leq n \leq 100$。

解析

在环上的点一定无法被选择，因此去除所有删不掉的点后的图是一个森林。我们对于其中的每棵树分别计算选择 $0 \sim size$ 个点的方案，卷积起来即为答案。

注意到如果一个点在原图中与不可选的点之间有边，那么它在这个连通块里一定是最后被选择的。注意到以这个点为根时，在点 x 子树里的点都被选后，点 x 才能被选。因此我们考虑树 dp，令 $f_{i,j}$ 表示在 i 的子树里选出 j 个点的方案，转移为对子树的 f 卷积。

然而当一个连通块在原图中就是树时，我们无法确定选择所有点时最后被选的点。这种情况下，我们枚举所有点作为根做上述 dp，再将统计的

答案求和。对于有 i 个点没选的方案，它会在以这 i 个点中的每一个为根时都被计算一次，因此将 i 个点没选的方案数除以 i 即可去重。

与 size 相关的树 dp 复杂度是 $O(n^2)$ 的，因此总时间复杂度为 $O(n^3)$。

High Elements

题目来源：agc028_e

题意

给出一个长为 n 的序列 P，将 P 按下标顺序分配到序列 X 和 Y 里，要求两个序列中极高的位置个数相等。求字典序最小的合法分配方案。

称序列 A 中位置 i 是极高的，当且仅当 $A_i = max_{j=1}^{i} A_j$。

约定

$1 \le n \le 2 \times 10^5$。

解析

显然可以逐位确定，只需判断合法解的存在性。

记之前确定的 X, Y 中极高元素的个数为 C_X, C_Y，已确定元素的最大值为 H_X, H_Y，当前位之后 X 中极高的元素依次为 $A_1, A_2, \ldots A_k$，Y 中极高的元素为 $B_1, B_2, \ldots B_l$，P 中还未被分配的极高元素数量为 Q。

注意到在 P 中的极高元素被分配之后同样是极高的。如果有一个 A_i 在 P 中不是极高的，表明它前面的最大值被分配到了 Y 里，对于 B_i 亦然。因此如果 A 和 B 中都含有在 P 中非极高的元素，交换二者所在的序列可以使 X 和 Y 中极高的元素数目都 -1，可以得知一定存在只有一个序列中包含 P 中非极高元素的合法解，不失一般性地，令这个序列为 X。

设 A 中有 x 个 P 中的极高元素，y 个 P 中的非极高元素，容易得到 $C_X + x + y = C_Y + Q - x$，也即 $2x + y = C_Y + Q - C_X$，而等号右边是一个定值。由于在 $x > 0$ 或 $y > 1$ 时 $2x + y$ 可以减少 2，因此若有一组方案满足 $2x + y \ge C_Y + Q - C_X$ 且 $2x + y \equiv C_Y + Q - C_X \pmod 2$，就必然存

在满足 $2x+y=C_Y+Q-C_X$ 的方案。而存在合法解时，显然上述不等式也会被满足。

在实际实现中，先对 P 倒序做带权的最长下降子序列，P 中的极高元素权为 2，其余元素权为 1，分别维护为奇数和偶数的最大长度。这一步可以用线段树实现。逐位确定到 i 时，只需查询从 $j(j>i,P_j>H_X)$ 开始，长度与当前的 $C_Y+Q-C_X \mod 2$ 同余的 LIS 的最大长度即可。

复杂度 $O(n\log n)$。

Checkers

题目来源：agc022_f

题意

一维数轴上有 n 个棋子，第 i 个棋子的坐标为 10^{100i}。每次操作选择两个棋子 i,j，之后 i 跳到关于 j 的对称点上，删掉 j。求 $n-1$ 次操作后，剩下的棋子可能的坐标个数模大质数的值。

约定

$1\le n\le 50$。

解析

两种方案不同当且仅当某个棋子对最后答案贡献的系数不同。

对于一次操作 $i\to j$，我们从 j 向 i 连边，得到一棵树，称有奇数个子节点的点为奇点，反之为偶点。

由于每被跳过一次坐标 $\times 2$，树上深度为 d 的点的系数是 $\pm 2^d$。而对于正负性，自顶向下考虑：对于一个点的 k 个儿子，其中有 $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ 个点与父亲同号，另外 $\lceil\frac{k}{2}\rceil$ 个点反之。如果这个儿子是一个奇点，还需要取反从父亲处继承的符号。

我们按深度 dp，且默认上一层所有奇点的符号相同，记为 b。稍后会证明其正确性。

令 $f_{i,j}$ 表示已经挂了 i 个点，最后一层有 j 个奇点的答案。枚举这一层的点数 x 和符号与 b 不同的点数 y，因为方案只与系数有关而同树的形态无关，我们不需要关注它们父亲的具体标号。

假设当前层加入的 x 个点都是偶点，那么符号与 b 不同的点数应该是 $\frac{x+j}{2}$（上一层的奇点会使不同的数量比相同的数量多 j，偶点无影响），因此 $\left|y-\frac{x+j}{2}\right|$ 即为这一层至少需要的奇点个数（全部从同一种符号的点里选择）。注意到如果多取了若干对符号相反的奇点，它们对下一层的影响可以抵消掉。因此转移到取 $\left|y-\frac{x+j}{2}\right|$ 个奇点的状态即可。

复杂度 $O(n^4)$。