[CF613E]Puzzle Lover

题目大意

给出一个 $2 \times n$ 的网格，每个格子上有一个小写字母。给出一个长为 k 的包含小写字母的字符串 w。求出满足以下条件的网格序列 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 的个数：

1. 对于所有 $1 \le i \le k$，在格子 c_i 中的字母和 w_i 相同。
2. 在序列中的所有格子互不相同。
3. 对于所有 $1 \le i \le k-1$，格子 c_i 和 c_{i+1} 有一条公共边。

答案对 10^9+7 取模。

数据范围

$1 \le n, k \le 2000$。

解题过程

以下定义 $m = |w|$。

定义 A 为 c_1 在 c_k 左侧的答案，B 为 c_1 在 c_k 右侧的答案，C 为 c_1 和 c_k 在同一列的答案，那么最后的答案为 $A+B+C$。

C 的计算

对于 C 的计算，可以发现路径一定是 U 字形，可以直接通过枚举 c_1 在哪一列简单地计算得到。

A 的计算

计算 A 和计算 B 的做法类似，接下来会详细描述计算 A 的做法。

可以将路径划分成 3 部分：

1. 在 c_1 同一列或左侧的部分

2. 在 c_1 右侧到 c_2 左侧的部分
3. 在 c_2 同一列或右侧的部分

可以发现这 3 部分在路径中是连续的，且对于任意一条路径，它的第一部分和第三部分都非空，而第二部分可能为空。

容易发现第一部分和第三部分均为由一个格子或 U 字形构成，如果枚举 U 字形的长度并使用哈希判断字符串相等，就可以对于对于每个网格 $O(m)$ 求出：如果第一部分在该网格结束，所有可能的第一部分的长度。

由于第二部分路径不能向左延伸，第二部分的方案数可以使用动态规划解决，定义 $f(i,j,k)$ 为第二部分到 (i,j) 结束，上一个格子在 (i,j) 左侧，且第一部分与第二部分的长度和为 k 的方案数；同样，$g(i,j,k)$ 为第二部分到 (i,j) 结束，上一个格子在 (i,j) 同一列，且第一部分与第二部分的长度和为 k 的方案数。那么可以从按左向右的顺序，枚举下一个格子是什么来转移。

对于第三部分，可以枚举第二部分结束的位置，之后第三部分开始位置就在第二部分结束位置的右侧。然后可以采用和第一部分类似的算法，求出如果第三部分从该网格开始，所有可能的第三部分的长度。这样，就求出了所有合法的路径数。

B 的计算

求出了 A 之后，B 的求法和 A 类似，一个简单的方法是将 w 翻转之后再求一遍 A，求出的答案就是 B。

这样就可以求出 A,B,C，也就在 $O(n^2)$ 的时间内解决了这个问题。

[AGC033E]Go around a Circle

题目大意

有一个圆，圆弧被 N 个点分成了等长的 N 段，每段被染成了红色或蓝色。给定一个长为 M 的，只包含 R 和 B 的字符串 S，R 代表红色，B 代表蓝色。求出有多少种给圆弧染色的方案，满足:

将棋子放在任意一个点上，都存在一种进行 M 次操作的方案，每次操作选择将棋子顺时针或逆时针移动一段，使得第 i 此经过的段的颜色为 S_i。

答案对 10^9+7 取模。注意如果两种方案旋转后相同，它们视作不同的方案。

数据范围

$2 \le N \le 2\times 10^5$，$1 \le M \le 2\times 10^5$。

解题过程

如果 S_1 是 B，那么将串中所有的 R 换成 B，B 换成 R，容易发现答案是不会变的。不妨假设 S_1 为 R。

引理 1 圆上没有连续的两段同时为 B。

证明 如果存在两段同时为 B，若初始点在这两点之间，那么第一个经过的弧只能是 B。

如果 S 中所有字符均为 R，容易发现满足引理 1 的方案即为一个合法的方案，那么可以简单地使用动态规划解决。

以下所有引理均假设 S 中至少存在一个 B。

引理 2 圆上每一段连续的 R 的长度均为奇数。

证明 如果存在一段连续的 R 的长度为偶数,不妨设是在 1 号点到 $2k+1$ 号点 (k 是正整数) 之间，那么如果从 1 号点出发，进行恰好偶数步操作才能到 1 号点或 $2k+1$ 号点；如果从 2 号点出发，进行恰好奇数步操作才能到 1 号点或 $2k+1$ 号点。

假设 S 中第一段连续的 R 长为 x，且若出发点在 1 号点到 $2k+1$ 号点之间，那么在进行 x 步之后，棋子一定在 1 号点或 $2k+1$ 号点。这样 x 既是偶数又是奇数，存在矛盾。

引理 3 设 S 中第一段连续的 R 长为 x，那么圆上每一段连续的 R 的长度都不超过 $x+1$。

证明 不妨设圆上长度最长的一段是在 1 号点到 $2k$ 号点之间。如果出发点在 1 号点到 $2k$ 号点之间，进行了 x 步操作后，棋子必定在 1 号点或 $2k$ 号点。

当 x 为偶数时，根据奇偶性，若从 2 号点出发，进行了 x 次操作后，一定会在 $2k$ 号点。可得 $2k-2 \le x$，即 $2k-1 \le x+1$。

当 x 为奇数时，根据奇偶性，若从 1 号点出发，进行了 x 次操作后，一定会在 $2k$ 号点。可得 $2k-1 \le x$。

引理 4 设染色方案满足引理 1、引理 2、引理 3，那么对于每种初始点，都存在一种方案，在进行 x 次操作之后，棋子的周围存在一个 B。

证明 不妨设圆上一段连续的 R 为 1 号点到 $2k$ 号点，且出发点在 1 号点到 $2k$ 号点之间的一个点 p。根据引理 3 可得，$2k-1 \le x+1$。

若 x 为奇数，那么对比等式两边的奇偶性，可得 $2k-1 \le x$。

1. 若 p 为奇数:
   (a) 若 x 为奇数，进行 x 次操作后棋子必定在 $2k$ 号点。那么需要满足 $2k-p \le x$，即 $2k-1 \le x+p-1$。由于 $p \ge 1$，我们需要证明 $2k-1 \le x$。此不等式在上文已被证明成立。
   (b) 若 x 为偶数，进行 x 次操作后棋子必定在 1 号点。那么需要满足 $p-1 \le x$。由于 $p \le 2k-1$，那么我们需要证明 $2k-1 \le x+1$。

根据引理 3，此不等式被满足。

2. 若 p 为偶数：
   (a) 若 x 为奇数，进行 x 次操作后棋子必定在 1 号点。那么需要满足 $p-1 \le x$。由于 $p \le 2k$，我们需要证明 $2k-1 \le x$。此不等式在上文已被证明成立。
   (b) 若 x 为偶数，进行 x 次操作后棋子必定在 $2k$ 号点。那么需要满足 $2k-p \le x$，即 $2k-1 \le x+p-1$。由于 $p \ge 2$，我们需要证明 $2k-1 \le x+1$。根据引理 3，此不等式被满足。

引理 5 假设 S 中最后一个字母为 R，则 S 中最后一段连续的 R 可被删去。

证明 假设 S 中最后一个 B 的位置是 x，进行了 x 次操作后的棋子在位置 i，根据引理 1，可得 i 周围为一个 R 和一个 B。那么在进行了 x 次操作后，可以沿着与 i 相邻的 R 重复走动。

那么可以删去 S 的末尾无用的 R。

以下所有引理均假设 S 的末尾为 B。

引理 6 对于一种合法的染色方案，定义集合 A 为圆上所有位置，满足它周围存在一个 B。那么对于任意 $1 \le i \le M$ 满足 S_i 为 B，和任意 $j \in A$，存在一个出发点使得从该点出发，进行了 i 次操作之后棋子只能在点 j。

证明 可以从第 i 步操作向前倒推。按 $S_i, S_{i-1}, \ldots, S_1$ 的顺序枚举，初始将棋子放到点 j。若当前枚举到的 p 满足 S_p 为 B，那么将棋子沿着 B 的弧移动；若 S_p 为 R，则直接考虑 S 中从 k 到 p 的连续的一段 R，若这段 R 长度为偶数则棋子不动，否则将棋子移至圆上连续的一段 R 的另一端，之后从 $k-1$ 开始继续向下枚举。

若枚举结束后棋子的位置为 l，那么可以发现若一开始从 l 开始，那么进行了 i 次操作之后棋子只能在点 j。

引理 7 假设 S 中存在一段非首段且长为 x 的一段连续的 R，若 x 为奇数，则圆上每一段连续的 R 长度均不超过 x。

设 S 中长为 x 的一段 R 为 $S_l, S_{l+1}, \ldots, S_r$，圆上长度最长的一段 R 在 1 号点到 $2k$ 号点之间。根据引理 6，可得存在一个出发点，使得在进行了 $l-1$ 次操作后，棋子在 1 号点。

根据奇偶性，若再进行 x 次操作，则棋子必定在 $2k$ 号点。那么可得 $2k-1 \leq x$。

定理 1 满足引理 1、引理 2、引理 3、引理 7 的染色方案为合法的染色方案。

证明 对于一个任意的出发点 l，根据引理 4 可得存在一种方案，使得进行完第一段连续的 R 操作后，棋子周围有一个 B。

之后如果当前操作是 B，那么就将棋子沿着 B 移动；如果当前操作是 R，考虑连续的一段 R，如果长为偶数，则重复来回移动使得棋子留在原地，如果长为奇数，则沿着圆上连续的一段 R 移到另一端。由于满足引理 7，上述操作不会出现不合法的情况。

那么，合法的染色方案是由 RRR...RB 拼接而成的，且每一段 R 的个数都是奇数，长度不超过一个定值。那么可以通过动态规划 + 前缀和优化解决。对于环的情况，可以将每种方案旋转到一个合法的序列之后计数，即统计答案时枚举最后一段的长度，将方案数乘上最后一段的长度相加。

这样就在 $O(N+M)$ 的复杂度内解决了此题。

[AGC021F]Trinity

题目大意

对于一个 $N \times M$ 的网格，第 i 行第 j 列上的网格被称作 (i,j)。现在将这个网格的每个格子任意染成黑色或白色。

定义一个长为 N 的整数序列 A 和两个长为 M 的整数序列 B、C 如下：

1. $A_i(1 \le i \le N)$ 为最小的 j 满足 (i,j) 是黑色的，如果不存在，那么 $A_i = M+1$。
2. $B_i(1 \le i \le M)$ 为最小的 k 满足 (k,i) 是黑色的，如果不存在，那么 $B_i = N+1$。
3. $C_i(1 \le i \le M)$ 为最大的 k 满足 (k,i) 是黑色的，如果不存在，那么 $B_i = 0$。

求出可能的出现不同的三元组 (A,B,C) 的个数对 998244353 取模的值。

数据范围

$1 \le N \le 8000$，$1 \le M \le 200$。

解题过程

使用动态规划解决这个问题，定义 $f(i,j)$ 为：对于所有满足每行至少有一个黑色格子的 i 行 j 列的网格，可能出现的三元组的个数。那么若枚举网格中有多少行没有黑色格子，那么答案为 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times f(i,m)$。

对于 $f(i,j)$ 的计算，可以如下转移：

1. 若对于任意 i，$A_i < j$，那么可以得到对于任意一个在第 j 列的黑色格子，其左侧都存在黑色格子。那么：
   (a) 若第 j 列为空，则可得转移 $f(i,j-1) \to f(i,j)$。

(b) 若第 j 列不为空，则任意满足 $1 \leq B_j \leq C_j \leq i$ 的方案都是合法的，则可得转移 $f(i, j-1) \times \frac{i(i+1)}{2} \to f(i, j)$。

2. 若对于 $p_1, p_2, \ldots, p_k$，满足 $A_{p_i} = j$。那么对于 $(p_1, j), (p_2, j), \ldots, (p_k, j)$，均满足其左边不存在黑色格子。且需要满足 $1 \leq B_j \leq p_1$，$p_k \leq C_j \leq i$。且易知若 $(B_j, p_1, p_2, \ldots, p_k, C_j)$ 这个 $k+2$ 元组不同，则三元组 (A, B, C) 必定不同。则方案数为选择 $1 \leq B_j \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k \leq C_j \leq i$ 的方案数。
   可以发现 $(B_j - 1, p_1, p_2, \ldots, p_k, C_j + 1)$ 恰好对应着一组从 $[0, i+1]$ 中选出 $k+2$ 个不同整数的方案数。那么可得方案数为 $\binom{i+2}{k+2}$。则转移为 $\sum_{k=1}^{i} f(i-k, j-1) \times \binom{i+2}{k+2} \to f(i, j)$。

这样就可以获得一个 $O(n^2 m)$ 的动态规划算法计算。

算法复杂度瓶颈为对于每个 $f(i, j)$，计算 $\sum_{k=1}^{i} f(i-k, j-1) \times \binom{i+2}{k+2}$。可以发现在从 $f(0, j-1), f(1, j-1), \ldots, f(n, j-1)$ 转移到 $f(0, j), f(1, j), \ldots, f(n, j)$ 的时候，转移为卷积的形式，可以使用快速傅里叶变换优化至 $O(n \log n)$。那么可以使用 $O(nm \log n)$ 的复杂度解决此题。