IOI 2020 中国国家集训队第一阶段作业 解题报告

广州市第二中学 袁无为

1 Data Center Drama

1.1 题目来源

Codeforces Round #296 (Div. 1) C[1]。

1.2 题目大意

给一个无向连通图，要求加上最少的边，然后给边定向，使得每个点的入度和出度都是偶数。可能有自环和重边。

1.3 数据范围和限制

$n \leq 10^5, m \leq 2 \times 10^5$
保证存在一个总边数不超过 5×10^5 的解。
时间限制：2S
空间限制：256MiB

1.4 发掘性质

1.4.1 性质一

引理 1.1. *给边定向前，每个点的度数都为偶数。*

证明. 考虑反证法：如果一个点的度数为奇数，那么给边定向后该点的入度和出度其中之一一定为奇数。 □

引理 1.2. *若原图中有 k 个度数为奇数的点，则最少加入 $\frac{k}{2}$ 条边才能满足引理 1.1。*

证明. 容易证明 k 一定为奇数。因为加入一条边最多减少两个度数为奇数的点，所以至少要加入至少 $\frac{k}{2}$ 条边才能把所有点的度数都变成偶数。 □

[1]题目链接：https://codeforces.com/problemset/problem/528/C

1.4.2 性质二

引理 1.3. 总的边数为偶数。

证明. 考虑定向后的图，那么总的边数就是每个点的出度之和，为偶数。 □

1.5 算法介绍

设给出的图为 G_0。

先加最少数量的边，满足每个点的度数都为偶数。找出 G_0 中度数为奇数的点，设有 k 个这样的点，分别为 $a_1, a_2, \dots, a_k$。可以证明 k 一定是偶数。对于 $\forall i, 1 \le i \le \frac{k}{2}$，在 $2i-1$ 和 $2i$ 号点之间连一条边。加完边之后，所有点的度数就都是偶数了。这样就得到了 G_1。由引理 1.2，G_1 是满足要求的方案中边数最少的。

但是此时 G_1 的边数可能是奇数，如果为奇数就随便找一个点加上一个自环。这样就得到了 G_2。可以得出 $|G_1| \le |G_2| \le |G_1| + 1$。假设存在 G_2' 满足引理 1.1 和引理 1.3，且 $|G_2'| < |G_2|$，因为 $|G_2'|$ 和 $|G_2|$ 奇偶性相同，可得 $|G_2'| \le |G_2| - 2 < |G_1|$，与 G_1 是满足引理 1.1 的方案中边数最少的图矛盾。所以 G_2 是满足要求的图中边数最少的。

现在还剩下最后一步：给边定向。一种可行的定向方案为：找出一条欧拉回路，设路径上的边分别为 $(b_1, b_2), (b_2, b_3), \dots, (b_{p-1}, b_p), (b_p, b_{p+1} = b_1)$（$p = |G_2|$），方案为：$\forall i$，把边 (b_{2i-1}, b_{2i}) 定向为 $b_{2i-1} \to b_{2i}$，把边 (b_{2i}, b_{2i+1}) 定向为 $b_{2i+1} \to b_{2i}$。容易证明这个定向方案能够满足要求。

这个做法的时间复杂度为 $\Theta(n+m)$。

2 Two Permutations

2.1 题目来源

AtCoder Grand Contest 038 F [2]。

2.2 题目大意

给出两个 $(0, 1, \cdots, N-1)$ 的排列 $(P_0, P_1, \cdots, P_{N-1})$ 和 $(Q_0, Q_1, \cdots, Q_{N-1})$。

请求出两个 $(0, 1, \cdots, N-1)$ 的排列 A 和 B，满足以下要求：

- 对于所有 $i (0 \le i \le N-1)$，A_i 为 i 或者 P_i。
- 对于所有 $i (0 \le i \le N-1)$，B_i 为 i 或者 Q_i。

[2] 题目链接：https://atcoder.jp/contests/agc038/tasks/agc038_f

定义两个排列 A 和 B 之间的距离为满足 $A_i \neq B_i$ 的 i 的个数。你只需要输出 A 和 B 之间可能的最大距离。

2.3 数据范围和限制

$1 \leq N \leq 10^5$

时间限制：10S

空间限制：1GiB

2.4 算法介绍

考虑一个包含所有 $i \to P_i$ 的边的图。记 $x(i)$ 为 i 号点的所在的环。记 $v(x(i)) = 1$ 如果该环中 $A_i = i$；记 $v(x(i)) = 0$ 如果该环中 $A_i = P_i$。

考虑令一个包含所有 $i \to Q_i$ 的边的图。记 $y(i)$ 为 i 号点的所在的环。记 $v(y(i)) = 0$ 如果该环中 $B_i = i$；记 $v(y(i)) = 1$ 如果该环中 $B_i = Q_i$。

现在观察一下什么时候会有 $A_i = B_i$：

1. $P_i = Q_i$：任何时候都有 $A_i = B_i$
2. 以上均不满足且 $P_i = i$：$A_i = B_i \Leftrightarrow v(y(i)) = 0$
3. 以上均不满足且 $Q_i = i$：$A_i = B_i \Leftrightarrow v(x(i)) = 1$
4. 以上均不满足且 $P_i \neq Q_i$：$A_i = B_i \Leftrightarrow v(x(i)) = 1 \wedge v(y(i)) = 0$
5. 以上均不满足：$A_i = B_i \Leftrightarrow v(x(i)) \neq v(y(i))$

考虑用网络流求解：

添加一个原点 S 和一个汇点 T。

对于每个环 i，新建一个点 $c(i)$，如果这个点最终属于 S 集，那么就令 $v(i)$ 为 0。否则令 $v(i)$ 为 1。

对于第一种情况：什么都不做。

对于第二种情况：加边 $c(y(i)) \to T$，容量为 1。这样把这条边割掉就说明 $y(i)$ 被分到了 S 集，就有 $A_i = B_i$，这样答案就会减一。

对于第三种情况：加边 $S \to c(x(i))$，容量为 1。

对于第四种情况：加边 $c(y(i)) \to c(x(i))$，容量为 1。

对于第五种情况：加边 $c(x(i)) \to c(y(i))$ 和 $c(y(i)) \to c(x(i))$，容量均为 1。

这样求出最大流（最小割）后，答案为 $n-$ 第一种情况的个数 $-$ 最小割的流量。

因为所有边的边权都是 1，这题的时间复杂度就是 $O(n\sqrt{n})$。

3 Wandering TKHS

3.1 题目来源

AtCoder Grand Contest 029 E [3]。

3.2 题目大意

有一棵 N 个点的树，最开始你在其中一个点，假设为 r 号点。接下来重复以下操作若干次：

- 去到还未去过的，与去过的节点相邻的编号最小的节点。

令 c_r 为他回到 1 号节点的移动次数。求 $c_2, c_3, \ldots, c_N$。注意：无论他在一次移动中走过了多少条边，都只算一次移动。

3.3 数据范围和限制

$2 \le N \le 2 \times 10^5$
时间限制：2S
空间限制：1GiB

3.4 算法介绍

令这棵树的根为 1。记 p_x 为 x 的父亲，m_x 为 p_x 到根的路径上编号最大的点，$Q(x, y)$ 为从 x 点开始走（不是按照题目的要求走），在不经过 x 的父亲以及其他的编号 $> y$ 的点的情况下能走到多少个点。

对于每个点 x，观察 $c_x - c_{p_x}$ 会是多少：

1. 如果 $x > m_x$，那么 $c_x - c_{p_x} = Q(x, m_x)$

2. 如果 $x < m_x$，那么 $c_x - c_{p_x} = Q(x, m_x) - Q(x, m_{p_x})[x \le m_{p_x}]$

以上公式可以通过枚举 x, p_x, m_{p_x} 的大小关系得到。

这样，我们就只需要求出 $Q(x, y)$ 了。

暴力一点的做法有线段树合并，但是这题有一些特殊性质：需要求的 $Q(x, y)$ 中 y 都是 m_x 或 m_{p_x}，可以帮助我们在线性时间内求出所有答案。

[3] 题目链接：https://atcoder.jp/contests/agc029/tasks/agc029_e

考虑最暴力的做法：直接 $O(n^2)$ DP，$Q(x,y) = 1 + \sum_v Q(v,y)[v \le y]$

这个特殊性质告诉我们，对于一个 x，有用的 $Q(x,y)$ 的 y 一定是 x 到根的路径上的最大的三个点的编号其中之一。因此总的状态数就是 $\Theta(n)$ 的。

时间复杂度为 $\Theta(n)$。