IOI2020 中国国家集训队作业
解题报告

绍兴一中 王展鹏

目录

1 Summer Dichotomy

【题目大意】

你作为一个学校的校长，需要招 N 名学生，要满足 $t \leq N \leq T$，要求将 N 名学生分成两组，另外有 n 个老师，需要将每个老师分到其中一组，每个老师要求教的小组学生人数属于一个区间。此外，有 m 对老师关系不好，他们不能分在同一组，要求确定每个小组要招收多少学生，以及每个老师要教哪个小组。

【数据范围】

$1 \leq t \leq T \leq 10^9$

$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq m \leq 10^5$

$0 \leq l_i \leq r_i \leq 10^9$

【算法介绍】

算法一（数据结构）：

将老师们的关系连边，这样会产生一些联通块，显然如果这个图不是二分图就无解，否则对于一个联通块，可以分成分组不同的两个集合，令这两个集合对学生人数要求的区间的交为 l_1, r_1, l_2, r_2。

现在问题转化为找一对 x, y，满足 $t \leq x + y \leq T$ 且对于每个联通块，$x \in [l_1, r_1], y \in [l_2, r_2]$ 或 $y \in [l_1, r_1], x \in [l_2, r_2]$。

我们将这个问题放到平面上，将 x, y 看作点的坐标。

那么所有合法的点是，对于每个联通块，$s(l_1, l_2, r_1, r_2) \bigcup s(l_2, l_1, r_2, r_1)$ 的交，其中 $s(a, b, c, d)$ 表示左上角为 (a, b)，右下角为 (c, d) 的矩形（矩形的边与坐标轴平行）。

换言之，我们将这个区域加一，最后查询那些值为 n 的位置即可，这个问题可以用扫描线 + 线段树简单地维护。

时间复杂度 $O(n\log n+m)$。

算法二（2-sat）：

将老师的分组看作 01 变量取值，那么可以处理老师们相互讨厌的限制。

对于每个小组，建 $T+1$ 个 01 变量（标号为 $0...n$，记为 a_i/b_i），第 i 个变量表示小组人数是否 $\le i$。

那么对于 t 的限制，就是 a_i 是真，那么 b_{t-1-i} 必须为假。

对于 T 的限制，就是 a_i 是假，那么 b_{T-i} 必须为真。

考虑每个老师 l_i 的限制就是对于对应小组标号为 l_i-1 的点必须为假，r_i 就是标号为 r_i 的点必须为真。

由于本题 T 范围较大，这个算法并不能通过。

我们注意到，两个小组人数只有可能在 $0,t,l_i,r_i,t-l_i,t-r_i$ 中取值，如果只建这些点，跑 2-sat，就可以做到 $O(n+m)$ 的复杂度。

算法三（贪心）：

让我们再次忘记 t,T 的限制，考虑两个小组人数 n_1,n_2 应该怎么取。

可以证明，令 $n_1=\min(r_i),n_2=\max(l_i)$ 是最优的。

我们分三种情况：

1. 有三个两两不相交的线段，肯定无解；
2. 如果所有线段两两相交，这可以使得每个老师都可以随意选择小组；
3. 其余情况，显然 n_1 不能再变大，且变小肯定不优（n_2 同理）。

现在我们再来考虑如果 n_1+n_2 不满足 t,T 的限制情况：

如果是第二种，可以发现如果 $n_1 + n_2 < t$，容易证明只增大 n_2 是最优的，因为如果 $2 \times n_1 \geq t$，那就可以使得每个老师都可以选择任意小组，否则只能将 n_2 继续增大（如果 n_1, n_2 都大于 $min(r_i)$ 会不合法，且减小 n_1 不优），同理，如果 $n_1 + n_2 > T$，只减小 n_1 是最优的；

如果是第三种，因为 n_1 不能变大，n_2 不能变小，且如果 n_1 减小，n_2 增大同时发生是不优的，所以结论和第二种情况是一样的。

这样，我们就可以直接确定出最优的 n_1, n_2，那么可以将那些已经确定分组的老师染色，剩余的跑二分图染色即可。

时间复杂度 $O(n + m)$。

2 Rotation Sort

【题目大意】

你有一个 $1,...,N$ 的排列 $p=p_1,...,p_n$ ，你可以用任意顺序进行以下两种操作：

花费代价 A，选择两个整数 $l,r(1\le l\le r\le N)$，将 $(p_l,...,p_r)$ 循环左移一位，这将会使 $p_l,p_{l+1},...,p_{r-1},p_r$ 变为 $p_{l+1},p_{l+2},...,p_r,p_l$；

花费代价 B，选择两个整数 $l,r(1\le l\le r\le N)$，将 $(p_l,...,p_r)$ 循环右移一位，这将会使 $p_l,p_{l+1},...,p_{r-1},p_r$ 变为 $p_r,p_l,...,p_{r-2},p_{r-1}$。

请用最小的花费使得 p 从小到大排序。

【数据范围】

$1\le N\le 5000, 1\le A,B\le 10^9$

【算法介绍】

我们可以将操作看做一个数相对位置的移动，那么我们可以固定一些位置（这些位置上的数升序）。

两个固定的相邻的数 x,y 之间，比 x 小的往左移，比 y 大的往右移，容易证明没有 x,y 之间的数（有的话不优）。

那么就可以设计 DP 状态了。

$dp[i]$ 表示第 i 个位置固定，前 i 个位置的最小费用。

$dp[i]=\min_{j<i,a_j<a_i}(dp[j]+B(\sum_{j<k<i}[a_k<a_j])+A(\sum_{j<k<i}[a_k>a_j]))$

时间复杂度 $O(N^2)$。

事实上，我们还能做到更优的复杂度。

转化一下，令 $C=B-A$

$dp[i]=\min_{j<i,a_j<a_i}(dp[j]+C(\sum_{j<k<i}[a_k<a_j])+A(i-j-1))$

$dp[i] = \min_{j<i,a_j<a_i}((dp[j] - Aj) + C(\sum_{j<k<i}[a_k < a_j]) + A(i-1)$

我们考虑维护决策序列，i 位置的决策放在 a_i 位置上。

那么每当 i 加一，只需要在序列上后缀加 C，计算 $dp[i]$ 只需要计算前缀 min 即可。

用线段树支持这些操作，时间复杂度 $O(N \log N)$。

3 Isomorphism Freak

【题目大意】

定义一棵树上两个点等价当且仅当以这两个点为根的有根树同构，一棵树的权值定义为这棵树的等价类个数。

给出一棵 N 个点的树，可以在这棵树基础不断的加叶子，使得最后树的权值最小，求出这个权值，以及满足之前条件的所有树中最小叶子数。

【数据范围】

$N \leq 100$

【算法介绍】

我们令 f_i 表示离 i 最远的点和 i 的距离，那么 f_i 不同的点显然不等价（等价定义见题目大意）。

我们考虑直径长度为 len，那么显然至少有 $\lceil \frac{len}{2} \rceil$ 种不同的等价类，事实上这是可以达到的。

我们考虑这么一个构造方法：将直径中点作为根，那么令 mx_i 表示深度为 i 的点中度数的最大值，通过加点的方法使得所有深度为 i 的点度数都增加到 mx_i。

容易发现上面的方法可以使任意深度相同的点都等价,等价类个数恰好为 $\lceil \frac{len}{2} \rceil$。

同时我们容易证明，要做到这个答案，相同深度的点必然等价，那么就要求相同深度的点度数都相同，这说明我们也做到了最小的叶子数。

朴素地实现，时间复杂度 $O(N^2)$。