

IOI2020 中国国家集训队第一阶段作业 解题报告

成都市第七中学 房励行

1 Present for Vitalik the Philatelist

1.1 试题来源

Codeforces Round #325 (Div. 1) E

1.2 试题大意

给出 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n ，求出有多少种方案可以从 n 个数中选出一个子集 s 和一个不在子集 s 中的数 x ，满足 $\gcd(s) > 1$, $\gcd(s \cup \{x\}) = 1$ 。答案模质数。

1.3 数据范围

$$2 \leq n \leq 5 \times 10^5$$

$$2 \leq a_i \leq 10^7$$

1.4 时空限制

时间限制：5s

空间限制：256MB

1.5 算法介绍

首先考虑如何求出满足 $\gcd(s) = 1$ 的子集 s 的个数 A ，直接求 \gcd 恰好等于一个值的集合个数不好求，考虑更方便求的是 \gcd 是一个值的倍数的集合个数，可以求出这个以后进行容斥。设 $f(x)$ 表示 \gcd 是 x 的倍数的子集个数，那么集合中每个数都是 x 的倍数，即 $f(x) = 2^{cnt_x} - 1$ ，其中 cnt_x 表示是 x 的倍数的数的个数。特别地， $f(1) = 2^n$ 。

因此需要找出一个函数使得每个数在约数处的函数值的和为 0，即恰好被算 0 次。而在 1 处是 1。

很明显，莫比乌斯函数 μ 就符合这一条件，因此：

$$A = \sum_{i=1} \mu(i)f(i)$$

得到 A 后同样可以得到 $\gcd(s) > 1$ 的子集 s 的个数 B ，即 $B = 2^n - A$ 。

解决了 s 的问题，现在的问题是如何选出一个 x 使得 $\gcd(s \cup \{x\}) = 1$ 。考虑枚举一个 x ，那么 s 的选择需要从 B 中减去两部分：一部分是包含 x 的子集，另一部分是不含 x 但与 x 有公因子的子集。

观察发现包含 x 的子集一定含有 x 的因子，因此只需要从 B 中减去与 x 有公因子的子集。

仿照上一部分，这一部分同样可以使用 μ 函数进行容斥。对于 x 的每个非 1 约数 d ，再从 B 中减去含这个约数的子集个数，即此部分的答案为：

$$\text{answer of } x = B + \sum_{d|x, d \neq 1} \mu(d)f(d)$$

最后将所有枚举 x 所得到的答案求和，即是最终的答案。

剩下一个问题在如何求 cnt_x ，观察发现因 $\mu(x) = 0$ 时 $f(x)$ 的值不产生影响，因此只需要求出不含平方因子的数的 cnt 值。可以考虑枚举 a_i ，将 a_i 分解出 k 个不同质因子，然后在 $O(2^k)$ 时间内枚举出不含平方因子的因子。

由于值域有限制，分解质因子可以使用欧拉筛预处理。

总时间复杂度为 $O(V + n2^{\omega(n)})$ ，其中 $V = \max_{i=1}^n a_i$ ， $\omega(n)$ 为 $\leq n$ 的数中所含最多的不同质因子数。

1.6 总结

本题由最大公约数的性质自然而然想到容斥，考察了选手对数论函数的恒等式、容斥等较为基础的套路的理解和应用，思维难度和实现难度都较低，是 Codeforces Div. 1 上一道偏易的中档题。

2 Three Circuits

2.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 032 C

2.2 试题大意

给定一张 N 个点 M 条边的简单无向连通图，判断能否将图分为三条回路，使得每条边恰在一个回路中。

2.3 数据范围

$$1 \leq N, M \leq 10^5$$

2.4 时空限制

时间限制：2s

空间限制：2048MB

2.5 算法介绍

本题需按照点的度数分情况讨论。

情况一：存在点度数为奇数 \rightarrow 无解

因图为无向连通图，因此若能分为三条回路，将三条回路顺次连接可以得到一条回路。而由欧拉图的判定定理无向图存在点度为奇数时，不存在这样一条回路，因此该情况无解。

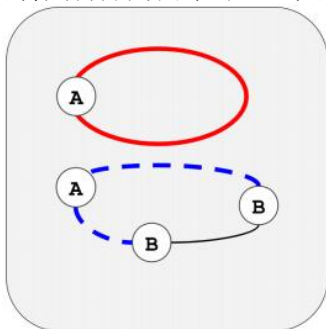
情况二：点度为偶数，存在点度 $\geq 6 \rightarrow$ 有解

因点度均为偶数，可以找出一条欧拉回路。假设存在点 A 度数 ≥ 6 ，那么 A 必定被经过至少三次。将这三次经过 A 点之间的路径分别各组成一条回路，即得到三条回路。

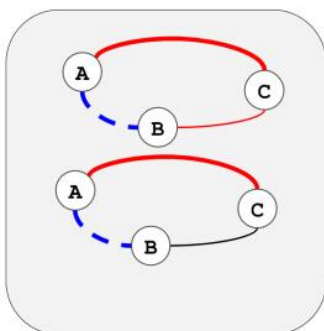
情况三：点度为偶数，存在至少三个点度 $= 4 \rightarrow$ 有解

假设点度 $= 4$ 的三个点分别为 A 、 B 和 C ，同样，因 A 在欧拉回路中被经过两次，可以将图分为两个包含 A 的环。

若其中一个环中除 A 外也有点被经过了两次，不妨设其为 B ，如下图所示。那么将该环中 B 至 B 的部分单独取出即可将其再分为两个环，一共三个环。

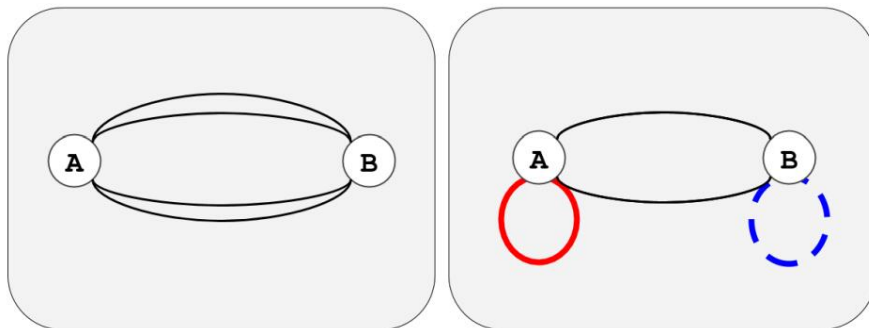


若两个环中的点均只经过一次，因 B 和 C 度数为 4，它们必定在两个环中都出现过，如下图所示。因此，将两个环中的 $A \rightarrow B$ 段组成一个环， $B \rightarrow C$ 段组成一个环， $C \rightarrow A$ 段组成一个环即可得到三个环。



情况四：点度为偶数，只有两个点点度 = 4 \rightarrow 需再细分讨论

因只有两个点点度 = 4，其余的度数均为 2，假设这两个点为 A 、 B ，那么图有下列两种可能。



左图无法再分为三个环，而右图可以分为 $A \rightarrow A$ ， $A \rightarrow B \rightarrow A$ ， $B \rightarrow B$ 三个环。

因此在这种情况下，若存在 $A \rightarrow A$ 且不经 B 的环，则问题有解，否则无解。

情况五：点度为偶数，不多于一个点点度 = 4 \rightarrow 无解

当只有一个点点度为 4 时，原图只有两个环，无法拆分成三个环。

当所有点点度均为 2，原图为一个环，无法拆分成三个环。

综合以上所有情况，题目得以解决，时间复杂度为 $O(N + M)$ 。

2.6 总结

与欧拉回路的判定类似，本题需从点度入手进行分类讨论，考察了选手对欧拉回路等图论知识的理解程度，并且需要一定的分类讨论和构造或证明能力才能得出正确的结论。思维难度较高，需要比较缜密的思维，但结论比较简洁，代码难度极低，是一道很有 AtCoder 风格的思维题。

3 01 on Tree

3.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 023 F

3.2 试题大意

给定一棵 N 个点的有根外向树，每个点有一个权值 $V_i \in \{0, 1\}$ 。现要求出该外向树的一个拓扑序 P ，使得序列 $V_{P_1}, V_{P_2}, \dots, V_{P_N}$ 的逆序对数量最小。

仅需求出这个最小的逆序对数。

3.3 数据范围

$$1 \leq N \leq 2 \times 10^5$$

3.4 时空限制

时间限制：2s

空间限制：256MB

3.5 算法介绍

从一个一般化的问题入手：如果每个节点上的权值 V 并非一个数字，而是一个 01 串，不考虑串内部的逆序对，求出拓扑序使得逆序对数最小化。

假设当前第 i 个节点上的 01 串是 V_i ，其中含有 $C0_i$ 个 0 和 $C1_i$ 个 1。称一个点 i 的“零占比” $R_i = \frac{C0_i}{C1_i}$ ，其中当 $C1_i = 0$ 时，定义该节点的 $R_i = +\infty$ 。

直观上来看一个点的 R_i 越大那么这个点就越应该放到前面。可以证明，对于当前树上除根节点外 R_i 最大的点（如果有多个任选一个），一定存在一个使答案最小化的拓扑序，使得该点紧跟在它的父节点之后。下面给出结论的证明：

证明. 令当前 R 最大的非根节点为 v ，其父节点为 u 。

假设在拓扑序中 v 之前并非 u 而是 w ，那么 w 与 v 之间的逆序对数为 $C1_w \times C0_v$ 。交换 w 与 v 后， w 与 v 间的逆序对数变为 $C1_v \times C0_w$ ，而除了 w 和 v 间的逆序对数之外，其余逆序对数都不变。因为 v 是 R 最大的节点，有 $R_v \geq R_w$ ，即 $\frac{C0_v}{C1_v} \geq \frac{C0_w}{C1_w}$ ，化简得 $C1_v \times C0_w \leq C1_w \times C0_v$ ，即交换 w 和 v 答案不会变劣。

因此将 v 置于 u 之后答案不会劣于最优答案。 \square

至此可以得到一个朴素的算法是，对该树执行 $N - 1$ 次下列操作。首先找到 R 最大的非根节点 v ，然后将它与其父节点 u 合并，并在答案中加上 u 和 v 的贡献 $C1_u \times C0_v$ 。然而，该算法的时间复杂度是 $O(N^2)$ 的，并不能通过所有测试数据。

为了给该算法加速，可以使用并查集和优先队列。执行每次操作时，从优先队列中取出 R 最大的非根节点，然后合并两个节点时使用并查集进行合并，最后把修改后的 R 值重新放入优先队列。

用此种方法，每一步的时间复杂度均为 $O(\log N)$ ，因此总时间复杂度为 $O(N \log N)$ 。

3.6 总结

本题需从何时答案会更优入手，将特殊问题推广到一般化的问题进行分析，证明得出子节点可以与父节点合并的做法，最后辅以基础的数据结构进行复杂度的优化，综合考察了选手的问题推广分析能力，思维难度较高，但实现难度一般，同样也是一道较难的 AtCoder 思维题。