IOI2020 中国国家集训队第一阶段作业解题报告

成都市第七中学 魏精

1 cf578E Walking!

1.1 试题来源

Codeforces Round #320 (Div. 1) E

1.2 题目大意

给出一个串 S，求一个 1 到 $|S|$ 的排列 p 使 S_{p_i} 中 L,R 交替出现，并且出现 $p_i > p_{i+1}$ 的数量最少。

保证存在至少一种合法的 p。

1.3 数据范围

$|S| \le 100000$

1.4 时空限制

时间限制：1s
空间限制：256MB

1.5 解题过程

保证有解就是保证 S 中 L 和 R 的数量相差不超过 1。

显然，一个包含 $k-1$ 次向后走的答案，可以看作是将 S 划分为 k 个 LR 交替的 (不一定连续) 的子序列再拼接起来。所以我们可以先求出 S 最少划分为多少交替子序列，就得到了答案的下界。接下来我们证明只要将 S 划分为了 k 个交替子序列，就有一种合适的方式把它们首尾相接组成一个完整的交替序列，含有 $k-1$ 次向后走。

把这些子序列按首尾分类为 LL,RR,LR,RL。首先，LL 和 RR 的数量相差不超过 1，所以可以把这两类全拼到一起，组成一个 LR，或者一个 LL/RR。

接下来处理 LR/RL。可以把所有 LR 拼成一个大 LR，把所有 RL 拼成一个大 RL。考虑如何把一个大 LR 和一个大 RL 拼起来。只要判断两者的结尾，把其中更靠后的那个结尾摘下来，接到另一边的结尾后面。这样就不会增加向后走的情况，而把 LR 和 RL 变成了 LL 和 RR，他们就可以拼成一个 LR 了。最后再把这个 LR 和上一步剩下的一个 LL 或 RR(如果有) 拼起来。

还剩一个问题是如何求出一种最优的划分方案。这相当于在 $|S|$ 个结点的 DAG 里，每个点连向它后面所有点中与它字符不同的点，在这样的图上做最小链覆盖。

最小链覆盖的做法是，选出尽量多的边来把点串起来，满足每个点至多用 1 个出度、1 个入度。通常的模型是用二分图匹配做的。但在这个特殊问题中直接贪心就可以了，因为较后出现的点可以匹配的前驱，一定完全包含较先出现的点可以匹配的前驱。实现等价于每添加一个字符，就在前面划分好的链中找一个可以接到末尾的接进去，没有可以接的就新开一条链。

2 agc035E Develop

2.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 035 E

2.2 题目大意

从整数的全集开始，求通过有限次进行如下操作，可以得到多少种不同的集合 S：

选择 $x \in S \cap [1, N]$，$S \leftarrow (S \setminus \{x\}) \cup \{x-2, x+K\}$

2.3 数据范围

$1 \le K \le N \le 150,\ 10^8 \le M \le 10^9$

2.4 时空限制

时间限制：5s

空间限制：1024MB

2.5 解题过程

这个操作可以看成如下模型：一个以 $[1, N]$ 为结点的有向图，每个 x 向 $x-2$ 和 $x+K$(如果存在) 连边。初始所有点都是白的，每次可以把一个点染黑，并把后继染白。

考虑黑点构成的子图，必须是没有环的。因为对于原图中每一个环，只要环上至少有一个白点，一次操作后必然还有至少一个白点在环上。

另一方面，只要黑点构成的图是个 DAG，就有办法通过有限次操作得到它。只要按照拓扑序依次操作即可。因此，问题等价于选一个 $[1, N]$ 的子集不存在 $-2/+K$ 环的方案数。

利用 -2 的性质，如果 K 是偶数，那么对任意这样的环，可以从其中截出一个极小的环，只包含 1 次 $+K$ 和 $\frac{K}{2}$ 次 -2。类似地，如果 K 是奇数，对每一个环，都可以截出一个极小环，只包含 2 次 $+K$ 和 K 次 -2。

接下来考虑对 K 是奇数的情况（偶数更容易），用一个从 1 到 N 的 DP 来选出不含环的子集。一个数 a 不能被加入集合当且仅当存在 $b < a,\ a \neq b \pmod 2$ 并且 $a-2, a-4, \ldots, b-K, b, b-2, \ldots, a-K$ 都已经在集合里了。

用 $f[b][a][x][y]$ 来 DP，表示 1 到 $b-1$ 都决定好了。其中 x 表示与 b 奇偶性相同的最大的不在 S 里的整数，y 表示奇偶性不同的最大的不在 S 里的整数。我们在 b 处就可以决定与 b 奇偶性不同的那侧至多可以连续填到多少，用 a 来表示这个限制，在 $y + K \leq b$ 时用 $x + K$ 来更新 a 的限制。

注意只有当 $x > y$ 时上述限制才有意义（否则另一边会更早出现环）。所以当 $x > y$ 时用上述 DP，$x < y$ 时类似地设计一个 $g[a][b][x][y]$。这样复杂度是 $O(n^4)$，官方题解说常数比较松，可以通过。

3 agc025D Choosing Points

3.1 试题来源

AtCoder Grand Contest 025 D

3.2 题目大意

对正整数 N, D_1, D_2，求出 N^2 个不同的点，满足每个点的 2 维坐标都是 $[0, 2N)$ 中的整数，并且其中任一对点的距离都既不是 $\sqrt{D_1}$ 也不是 $\sqrt{D_2}$。

3.3 数据范围

$1 \leq N \leq 300,\ 1 \leq D_1, D_2 \leq 2 \times 10^5$

3.4 时空限制

时间限制：2s

空间限制：1024MB

3.5 解题过程

最后会发现，题目本质是给定了两个二分图，要求一个点集在两个图中同时是独立集。

距离为 $\sqrt{D}$ 的一对整点 (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 满足 $\Delta x^2+\Delta y^2=D$，因此 $\Delta x+\Delta y=D \pmod 2$。如果 D 是奇数，我们直接将点按 $x+y$ 的奇偶性染色就得到了二分图。

如果 D 是偶数，相当于所有连边都在上述染色的同色点中发生。考察同色的点，它们构成了一张斜 45° 放置的大 $\sqrt{2}$ 倍的网格。于是我们把问题规约到了 $D/2$，因为两个独立的二分图单纯并起来还是二分图。对 D 中因子 2 的个数归纳，就证明了这个性质。

题目转化为，在一堆点中连了两张二分图，求出至少 $\frac{1}{4}$ 的点在两个图中同时是独立集。显然两个图的染色把点分成了 4 类，只要取最多的一类即可。

官方题解说瓶颈在 $O(n^3)$ 的建图。但观察上面的证明，只要根据 D 中因子 2 个数的奇偶性判断是正着染还是斜着染，就可以容易地 $O(n^2)$ 染好色了。二分图的边是不必要建出来的。