

CSAI 讲座讲义

AI 学组 人智 2402 韩子慕

第一部分：集合论

例：用数理逻辑证明：

$$(A \oplus B) \oplus C = (C \oplus B) \oplus A;$$

• **例：下式成立吗？请用数理逻辑判断。**

$$A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

设 A, B, C 为集合，其满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $B \approx C$ ，试证明： $A \cup B \approx A \cup C$ 。

2. (10 分) 所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数？请证明你的结论。

证明： $2^{\aleph_0} = \aleph$

3. (12 分) 令 $\{0,1\}^*$ 为有限长的 0-1 串的集合， $\{0,1\}^\omega$ 为无限长的 0-1 串的集合，我们知道前者可数而后者不可数。试问：

(1) $\{0,1\}^\omega$ 中仅含有限个字符“1”的串的集合是否可数？为什么？

(2) $\{0,1\}^\omega$ 中包含无限个字符“1”的串的集合是否可数？为什么？

第二部分：图论

给出完全二部图 $K_{m,n}$ 是哈密顿图的充要条件，并证明。

给出完全二部图 $K_{m,n}$ 是半哈密顿图的充要条件，并证明。

某简单平面图有6 个顶点，12 条边，求每面的次数，判断是否极大平面图。

设 G 为有8 个顶点的极大平面图，则其面数为？

已知连通简单平面图不含 K_3 ，证明 G 的最小度 $\delta(G) \leq 3$ ， G 是可 4-着色的。

平面图 G 满足 $\delta(G) \geq 3$ 且 $r < 12$ ，证明 G 有不超过四次的面。

六、设 $G=(V,E)$ 是一个简单无向图， $|V|=10$ 。

- 1.如果 $m=37$,那么 G 一定是哈密顿图吗?请阐述理由.
- 2.如果 $m=22$,那么 G 一定是二分图吗?请阐述理由.
- 3.如果 $m=25$,那么 G 一定是平面图吗?请阐述理由.
- 4.如果 $\deg(v_i)(i=1\sim 10)$ 均是偶数,并且 $m=37$,那么 G 一定是欧拉图吗? 请阐述理由.

设 G 是 $n \geq 11$ 的平面图，证明其补图是非平面图。

第三部分：代数系统

五、(本题 10 分) Q 表示有理数集, $+$ 为加法, \times 为乘法。请证明 $\langle Q, +, \times \rangle$ 为域。

证明: 设 a 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的幂等元, 则 a 一定是单位元。

设 $i = \sqrt{-1}$, $S = \{1, -1, i, -i\}$, 证明 $\langle S, * \rangle$ 构成群, 其中 $*$ 为复数域上的乘法运算。

证明: G 为交换群当且仅当 $\forall a, b \in G$, 有 $(ab)^2 = a^2b^2$ 。