

24fall 数学 I

Kalzefer

January 2025

1 填空题

1. 设 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta}$ 的最小值
2. 设 $x + y + z = 1$, 求 $f(x, y, z) = xy^2z^3$ 的最大值
3. 设 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{4}$, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{24}{7}$, 求 $\cos \alpha + \cos \beta$
4. 计算 $9 \tan \theta + 2 \tan 2\theta + 4 \tan 4\theta - \tan 8\theta$
5. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{(x, y); \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}, x, y \in A\}$, $H = \{(x, y); \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}^+, x, y \in A\}$, 求 $S \cap H$
6. 判断命题 “ f, g 为满射, 则 $f \circ g$ 为满射” 的真假
7. 设 $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 有以下性质
 - $f(x) = f(x+3)$
 - $f(x) + f(-x) = 0$
 - $f(2) = 0$则在区间 $(-6, 6)$ 上 $f(x)$ 至少有几个零点
8. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$, 求 $f(-5) + f(-4) + \cdots + f(5) + f(6)$
9. 设 $a, b, c > 0, a + b + c = 1$, 求 $a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}$ 的最大值
10. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b + c + d = 3, a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 6d^2 = 5$, 求 a 的取值范围

2 解答题

1. 设 f, g 为有界函数, 函数 $h = \min \{f, g\}$, 证明

$$i. h \text{ 有界} \quad ii. \inf h = \min \{\inf f, \inf g\}$$

2. 设 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 求

$$i. f(x) \text{ 的值域} \quad ii. f(x) \text{ 的反函数}$$

3. 求 $f(x) = \cos 4x + 6 \cos 3x + 17 \cos 2x + 30 \cos x$ 的值域

4. 证明加权幂平均不等式

- 5.

$$def. \text{ Lipschitz condition : } |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, L \in \mathbb{R}^+$$

设 $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, d(x) = \inf\{|x - a|, x \in \mathbb{R}\}, a \in A$, 证明 $d(x)$ 满足 Lipschitz condition.