分治算法

是一种自顶向下的算法（有争议，但还是姑且认为自顶向下）将大问题拆成若干个小问题，每个小问题与大问题类型一致而规模小很多，然后将若干个小问题的解合并成为大问题的答案。
分治算法所要求解的问题必须具备最优子结构。
通常求解子问题合并大问题使用dp，如果用分治则要做大量重复工作，对公共子问题求解多次。
通常将大问题分成大小相等的k份，这样的划分几乎比其他情况的划分都要好。

递归算法

递归算法即函数不断直接或间接调用自身。

递归函数两大要素：边界条件与递归方程。

递归算法耗用的时间和空间都比其对应的非递归算法要多。但是递归算法结构更加明确，编写算法简单。

算法递推式

例如
$T(n) = 8T(n/2) + O(n^2)$

排序问题

> 问题：
> 用递归得出一个序列的全排列

dfs。

整数划分的递归版本

> 将一个正整数划分成若干个正整数相加，有多少种方法。

将问题扩展为：求整数n的最大加数不超过m的划分方法数
考虑几种情况：

- 如果$n = 1, m = 1$，$p(n,m) = 1$
- 如果$n < m$，那么显然$p(n,m) = p(n,n)$(最大加数不可能超过总和本身)
- 如果$n == m$, 那么$p(n,m) = p(n,n) = p(n,n-1) + 1$
- 如果n>m，那么显然$p(n.,m) = p(n,m-1) + p(n-m,m)$
  最后我们想要的答案就是$p(n,n)$

算法复杂度的时间递推式

一般根据递归方程写出该算法的时间复杂度。注意两点：

- 注意边界条件，最后项数是多少。
- 计算复杂度时取无穷大优先级最高的。

计算结论：
$T(n) = bT(n/a) + O(n)$

- $= nlog_a(n), b == a$
- $= n^{log_a(b)}, b > a$
- $= O(n), b < a$

二分

搜索的复杂度为$O(logn)$。取定中点，当目标小于中点向左搜索，大于目标向右搜索。

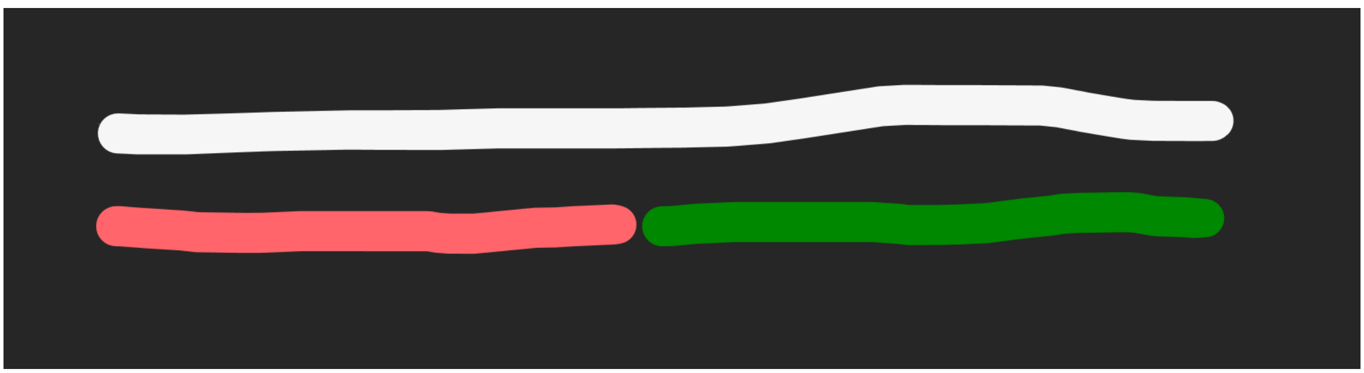
把二分板子拿过来：（考试不要求实现）

#整数二分

二分一共有两套模板，这里一一介绍。

二分的本质是在有一定顺序（不一定升序或降序）的序列中查找一个边界位置。

当我们所求的位置的要求是，在这个边界右边的区间（包含这个边界）都满足条件，在这个左边的边界的区间都不满足条件，可用第一套模板。例如在下图中：



白色为我们所要求的数轴区间。如果我们的要求中右边绿色区间都满足条件，那么可得：
当判断条件为true，mid同样有可能是答案，搜索区间更新为 [l, mid];
而如果不满足条件，则mid在左边，那么区间更新为[mid+1, r];
这就是第一套模板。

同样的，当我们的条件是查找在这个边界左边区间中都满足条件（包含这个边界），而右边区间都不满足时，又可得：

当判断条件为true，则mid满足条件，区间更新为[mid, r];
如果判断条件为false，则mid在右边，区间更新为[l, mid-1]；

注意如果使用第二套模板（查找满足左区间条件的）则最初的mid定义为l+r+1>>1；相反的，第一套模板定义为l+r>>1；

第一套模板：

> 在一个序列中查找第一次出现x的下标。

易得，在这个边界的右半区间都满足的条件是：>=x。

```
//此处省略其他内容

l=0;
r=n-1;
mid=l+r>>1;
while(l<r)
{
        if(arr[mid]>=x)
        {
                r=mid;
        }
        else
        l=mid+1;

}
if(arr[l]==x)
{
return l;
}
else
return -1;
// 此处省略其他内容
```

第二套模板：

> 在一个序列中查找最后一次x出现的下标。

易得，在这个区间的左半部分满足的条件是<=x。用第二套模板。

```
//此处省略其他内容

l=0;
```

```
r=n-1;
mid=l+r>>1;
while(l<r)
{
        if(arr[mid]<=x)
        {
                l=mid;
        }
        else
        r=mid-1;

}
if(arr[l]==x)
{
return l;
}
else
return -1;
// 此处省略其他内容
```

例题:

[789. 数的范围 - AcWing题库]

```
# include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll n;
ll q;
ll arr[100005];


int main (void)
{
        scanf("%d",&n);
        scanf("%d",&q);
        for(int i=0;i<n;i++)
        scanf("%d",&arr[i]);

        while(q--)
        {
                ll x;
```

```
            scanf("%d",&x);
            ll l=0;
            ll r=n-1;
            ll mid;
            while(l<r)
            {
                mid=l+r>>1;

                if(arr[mid]>=x)
                {
                    r=mid;
                }
                else
                l=mid+1;
            }
            if(arr[l]!=x)
            {
                cout<<"-1 -1"<<endl;
                continue;
            }
            else
            cout<<l<<" ";
            l=0;
            r=n-1;
            while(l<r)
            {
                mid=l+r+1>>1;
                if(arr[mid]<=x)
                {
                    l=mid;
                }
                else
                r=mid-1;
            }
            cout<<l<<endl;

        }
}
```

#浮点数二分

相较于整数，浮点数二分非常简单，无需考虑整除问题，因此左边界与右边界与mid的更新都可以直接进行。

[790. 数的三次方根 - AcWing题库]

```
# include<bits/stdc++.h>
# include<iomanip>
using namespace std;
typedef long long ll;

typedef long double ld;

int main (void)
{

        ld n;
        cin>>n;
        ld l=-10000;
        ld r=10000;
        ld mid=(l+r)/2;
        while(r-l>1e-8)
        {

                mid=(l+r)/2;
                if(mid*mid*mid>=n)
                {
                        r=mid;
                        }
                        else
                        l=mid;
        }
        cout<<fixed<<setprecision(6)<<l<<endl;

}
```

归并排序

归并排序的思想非常简单，即为将数组先分成若干个小序列，然后在每个小序列内对数组进行排序，每个小序列排序好之后再总体结合起来成为一个较大的序列，再对这些较大的序列进行排序，得到更大的序列，依次类推，直到得到完整的序列排序。

复杂度为$O(nlogn)$

重点在实现（考试不要求）

```
# include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long  ll;
ll temp[114514];
void merge_sort(ll arr[],ll l,ll r)
{
        if(l>=r)
        return;
        ll mid=l+r>>1;
        merge_sort(arr,l,mid);
        merge_sort(arr,mid+1,r);
        ll k=0,i=l,j=mid+1;
        while(i<=mid&&j<=r)
        {
                if(arr[i]<arr[j]) temp[k++]=arr[i++];
                else temp[k++]=arr[j++];
        }
        while(i<=mid)  temp[k++]=arr[i++];
        while(j<=r) temp[k++]=arr[j++];
        for(int i=l,j=0;i<=r;i++,j++)
        arr[i]=temp[j];
}
int main (void)
{
        ll arr[114514];
        for(int i=0;i<=17;i++)
        arr[i]=rand()%(114514-i+1)+1;
        merge_sort(arr,0,17);
        for(int i=0;i<=17;i++)
        cout<<arr[i]<<endl;

}
```

快速排序

思想和归并排序很相似。只需记住复杂度最坏为$O(n^2)$，平均为$O(nlogn)$。
重点在实现，考试不要求。

```
# include<bits/stdc++.h>
typedef long long ll;
```

```
using namespace std;
void quick_sort(int arr[],int l,int r)
{
	if(l>=r)    //注意这里的大小关系非常容易弄混
	return;
	int i=l-1;
	int j=r+1;
	int x=arr[(l+r)/2];
	while(i<j)
	{
		do i++;while(arr[i]<x);
		do j--;while(arr[j]>x);
		if(i<j)
		swap(arr[j],arr[i]);
	}
	quick_sort(arr,l,j);
	quick_sort(arr,j+1,r);

}
int main (void)
{
	int arr[1155];
	for(int i=0;i<15;i++)
	arr[i]=rand()%(114514-i+1)+1;
	for(int i=0;i<15;i++)
	cout<<arr[i]<<" ";
	cout<<endl;

	quick_sort(arr,0,14);
	for(int i=0;i<15;i++)
	cout<<arr[i]<<" ";
	return 0;

}
```

比赛日程表安排

设计一个满足以下要求的比赛日程表：
(1) 每个选手必须与其他n-1个选手各赛一次；
(2) 每个选手一天只能赛一次；
(3) 循环赛一共进行n-1天。

本质为将所有选手先划分为一个个只有两个人的小子集，在子集内安排比赛；然后合并，直到最大的集合。

复杂度为$O(n)$