

连续时间系统滤波与平滑练习题

1. 考虑如下连续时间标量系统：

$$\dot{x} = -x + w \quad (1)$$

$$y = x + v \quad (2)$$

其中, $w(t) \sim N(0, Q)$ 和 $v(t) \sim N(0, R)$ 是连续时间白噪声, 分别是过程噪声和量测噪声。如果 $Q = 2, R = 1$, 试设计连续时间卡尔曼滤波器估计系统的状态 $x(t)$, 并 (a) 解析求解状态估计误差协方差的稳态值; (b) 分别用离散步长 0.1s, 0.2s, 0.4s 仿真计算系统 1000s, 同时计算并绘制状态估计误差协方差曲线。

2. 考虑一个线性定常系统, 其中 $F = 1, B = 0, H = 1, R = 2Q$, 试用 RTS 平滑算法求平滑状态估计协方差稳态值。

3. 考虑二阶系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (3)$$

其中, $\xi = 0.16, \omega = 6 \text{ rad/s}$; $w(t)$ 是均值为 0 的白噪声, $Q = 0.01$ 。假设进行离散量测, 量测步长为 $\Delta t = 0.5 \text{ s}$, 且

$$y(t_k) = [1, 0]x(t_k) + v(t_k) \quad (4)$$

式中, $v(t_k)$ 是均值为 0 的白噪声, $R = 10^{-4}$ 。

假设初始条件为

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}$$

试分别设计卡尔曼滤波器及 RTS 平滑器, 仿真计算 10s (20 个量测步长), 并在同一张图上绘制系统第一个状态的前向滤波及平滑估计的估计误差协方差曲线, 并分析比较系统两个状态的可平滑性。