

# 基础知识补充与回顾

## 思考与练习题

1、设  $A \in R^{n \times n}$ ,  $A^T = A$ ,  $x \in R^n$ , 证明  $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = 2Ax$ 。

2、证明:  $\dot{P}^{-1} = -P^{-1} \dot{P} P^{-1}$ 。

3、论证贝叶斯公式, 并给出可能的形式。

4、设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 求  $EX^3, E(X - \mu)^4$ 。

5、设随机变量  $X$  与  $Z$  的联合概率密度为

$$f_{xz}(x, z) = \begin{cases} C x z e^{-(x^2+z^2)}, & (x > 0, z > 0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求: (1) 常数  $C$ ; (2)  $E[X|z]$ 。

6、推证:  $\frac{d}{dt}(E[x]) = E\left(\frac{dx}{dt}\right)$ 。

7、试证明:

(1) 高斯随机变量的线性函数仍然是高斯分布的;

(2) 正交的高斯随机变量是相互独立的。

8、直流电机的运动方程可以表示为

$$J \ddot{\theta} + F \dot{\theta} = T$$

其中,  $\theta$  是电机的角位移,  $J$  是转动惯量,  $F$  是粘性摩擦系数,  $T$  是作用在电机上的力矩。试完成: (1) 写出描述该电机的状态方程 ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ); (2) 设  $J = 10 \text{ kg m}^2$ ,  $F = 100 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ,  $T = 10 \text{ N m}$  (牛顿-米), 初始时刻  $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ , 以采样步长  $0.05 \text{ s}$  建立离散时间系统方程, 并仿真比较两个模型电机角位移及角速度随时间的变化曲线 ( $t = 0 \sim 5 \text{ s}$ )。

9、RLC 串联电路的动态方程可以描述为

$$u = V_C + I R + L \dot{I}$$

$$I = C \dot{V}_C$$

其中,  $u$  是施加在电路两端的电压,  $I$  是电路中的电流,  $V_C$  是电容器两端的电压。试完成: (1) 取  $x_1$  为电容器两端的电压,  $x_2$  为电路中的电流, 写出该系统的状态方程; (2) 设  $R = 3, L = 1, C = 0.5$ , 系统初始状态为  $0$ , 输入电压为  $u(t) = e^{-2t}$ , 求电容器两端电压的解析解; (3)

编写程序（编程语言不限），在积分步长 $h = 0.1$ 和 $h = 0.5$ 下，采用4阶龙格-库塔方法从 $t = 0$ 到 $t = 5$ 仿真计算该电路，分析电容器两端电压精确解与数值解之间的差异，讨论仿真步长、仿真精度及计算时间的关系。

10、悬停火箭垂直维度的运动可以建模为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{Ku - Dx_2}{x_3} - \frac{GM}{(R + x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= -u\end{aligned}$$

其中参数说明见表1。试完成：(1)求解火箭进入悬停态( $x_1^*(t) = 0, x_2^*(t) = 0$ )时的控制输入 $u(t) = u^*(t)$ 以及对应的 $x_3^*(t)$ ，并以此为基准建立线性化模型；(2)假设 $u(t) = u^*(t) + \Delta u \cos(t)$ ，分别取 $\Delta u = 10, \Delta u = 100, \Delta u = 300$ ，仿真比较两个模型的火箭高度( $x_1(t)$ )变化曲线( $t = 0 \sim 5$  s)，提交计算机仿真源代码及三张比较图，并分析线性化的精度。

表1 悬停火箭模型参数说明

参数	说 明
$x_1$	火箭垂直位置，单位：m
$x_2$	火箭垂直速度，单位：m/s
$x_3$	火箭质量，单位：kg
$u$	控制输入(火箭发动机燃烧秒流量)，单位：kg/s
$K$	火箭推力常数，取值：1000
$D$	气动阻力常数，取值：50
$G$	万有引力常数，取值： $6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$
$M$	地球质量，取值： $5.965 \times 10^{24} \text{kg}$
$R$	地球半径，取值：6371000 m

11、在三维实数空间中，讨论或说明向量、内积、范数、正交、勾股定理及三角不等式。

12、构造有解析解的微分方程，并编写四阶龙格-库塔求解程序，分析求解精度及求解时间等。