

# 估计问题中常见的评价指标

Dr. Yuan-Li Cai

Spring • 2024



# 0. Outline

- 1 引言 / 2
- 2 均方根误差 / 3
- 3 平均绝对误差 / 4
- 4 平均绝对百分比误差 / 5
- 5 决定系数 / 7
- 6 小结 / 9

# 1. 引言

在回归、估计、机器学习、神经网络等问题中，经常需要用一定的指标函数或代价函数对算法的好坏进行评价。

主要有平均绝对误差 (Mean Absolute Error, MAE)、平均绝对百分比误差 (Mean Absolute Percentage Error, MAPE)、均方误差 (Mean Squared Error, MSE)、均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE)、均方对数误差 (Mean Squared Log Error, MSLE) 和决定系数 (Determination Coefficient) 等。采用评价指标数值大小可以进行客观评价，从而避免仅比较数据曲线带来的主观偏差。

## 2. 均方根误差

均方根误差 (Root Mean Squared Error, RMSE) 也称为标准误差, 定义如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2} \quad (1)$$

其中,  $N$  是总的个数;  $\mathbf{x}_i$  是  $i$  时刻系统状态的真实值;  $\hat{\mathbf{x}}_i$  是系统状态对应时刻的估计值。

RMSE 在数量级上直接反映出系统状态真实值与估计值之间的误差, 取值范围为  $[0, +\infty)$ , 取值越小则表明估计误差越小。

# 3. 平均绝对误差

平均绝对误差 (Mean Absolute Error, MAE) 是系统状态每一个时刻的估计值与真实值的偏差的绝对值的平均, 定义为

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\| \quad (2)$$

其中,  $N$  是总的数据个数;  $\mathbf{x}_i$  是  $i$  时刻系统状态的真实值;  $\hat{\mathbf{x}}_i$  是系统状态对应时刻的估计值。

MAE 取值范围为  $[0, +\infty)$ , 取值越小则表明估计算法越好。

## 4. 平均绝对百分比误差

平均绝对百分比误差 (Mean Absolute Percentage Error, MAPE) 是在 MAE 的基础改进来的, 利用状态真实值幅度作为参考值来表示误差的相对大小, 定义如下:

$$MAPE = 100\% \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\|}{\|\mathbf{x}_i\|} \quad (3)$$

其中,  $N$  是总的个数;  $\mathbf{x}_i$  是  $i$  时刻系统状态的真实值;  $\hat{\mathbf{x}}_i$  是系统状态对应时刻的估计值。

容易发现, MAPE 限制了被估计量不能取值为 0, 这是 MAPE 的局限性。对于明确知道非零的被估计量, MAPE 不失为一种有意义的指标。

# 5. 决定系数

决定系数 (Determination Coefficient) 也被称为判定系数或拟合优度, 常缩写为  $\mathcal{R}^2$ , 它反映了被估计量与估计量之间关系密切程度的统计指标, 定义如下:

$$\mathcal{R}^2 = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2}{\|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|^2} \quad (4)$$

其中,  $N$  是总的的数据个数;  $\mathbf{x}_i$  是  $i$  时刻系统状态的真实值;  $\hat{\mathbf{x}}_i$  是系统状态对应时刻的估计值;  $\bar{\mathbf{x}}$  是被估计量的平均值。



$\mathcal{R}^2$  常用来表示数据的拟合程度，当  $\mathcal{R}^2$  越接近于 1 时，则认为拟合情况越好，估计值（预测值）越接近真实值。

## 6. 小结

在估计算法研究中，经常需要用不同的指标来比较不同算法的优劣。大家可以根据需要，在上面几种指标函数的基础上进行适应性改造。

对于标量情形，可以用绝对值代替上面评价指标中的向量范数。例如，对应向量形式的  $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ ，标量时即为  $|x - \hat{x}|$ 。

## 6. 参考文献

- [1] 蔡远利 (Cai, Y.L.). 最优估计与控制简明教材. *Xi'an Jiaotong University*, 2022.

Questions?