



『多模型自适应滤波算法』

Prof. Yuan-Li Cai

Spring 2024

0. Outline

Outline / 1

1 引言 / 3

2 多模型组合滤波公式 / 6

3 静态多模型滤波 / 8

4 动态多模型滤波 / 14

5 数值算例——机动目标跟踪 / 24

References / 29

1. 引言

标准的卡尔曼滤波方法是基于模型的，包括过程噪声和量测噪声的协方差 Q 和 R 等参数，都是卡尔曼滤波器的模型（设计）参数。除了仿真研究，对于实际系统的状态估计，无法直接度量其好坏。但我们可以获得量测估计残差（新息），简称滤波器的残差，这是评价滤波性能唯一可以依赖的数据。

显然，如果模型参数是正确或合适的，那么残差就应当比较小。而当模型参数不合适，那么滤波器的残差就会比较大。这是许多自适应滤波算法以及滤波器参数整定的基础。

对一个实际系统，假设我们并行地运行一族滤波器，每个滤波器的设计参数均不同，我们可以根据不同滤波器的残差来判断哪个滤波器更加适应当前的物理系统。进一步地，可以根据每个滤波器的输出获得系统当前最好的状态估计。这就是多模型滤波算法的基本思想或出发点，其工作原理如图1所示。

多模型方法已经获得了非常广泛的应用，包括目标跟踪、组合导航、故障诊断与识别、飞行器制导与控制、过程控制等等 [1, 2, 3]。

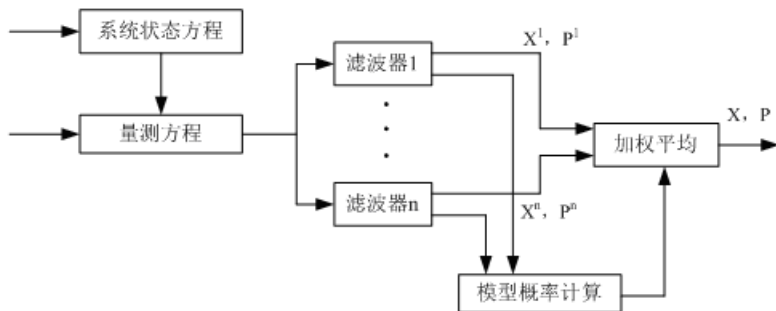


图 1: 多模型滤波原理示意图

2. 多模型组合滤波公式

假设共有 r 个滤波器 $\{m_i\}_{i=1}^r$ ，记 k 时刻第 i 个滤波器的输出为 \hat{x}_{k,m_i} 和 P_{k,m_i} ，那么系统当前时刻的组合估计为

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^r p_k(m_i) \hat{x}_{k,m_i} \quad (1)$$

对应的估计误差协方差为

$$\begin{aligned} P_k &= E(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T \\ &= \sum_{i=1}^r p_k(m_i) [P_{k,m_i} + (\hat{x}_k - \hat{x}_{k,m_i})(*)^T] \end{aligned} \quad (2)$$

以上两式中, $p_k(m_i)$ 表示 k 时刻模型 (滤波器) m_i 的概率, 即

$$p_k(m_i) = \Pr(m = m_i | y_1, y_2, \dots, y_k) \quad (3)$$

3. 静态多模型滤波

假设对象的真实模型是 r 个模型 $\{m_i\}_{i=1}^r$ 中的一个，不随时间变化，但事先并不知道具体是哪个。由此建立的多模型方法称为静态多模型滤波方法，这里的“静态”是指对象真实的模型是固定的，当然对象的状态仍然随时间变化，是动态的。

3.1 模型概率递推计算公式

设 k 时刻的量测为 y_k , 那么模型 m_i 的似然函数为

$$\Lambda(y_k|m_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|C_{k,m_i}|}} e^{-\frac{1}{2}[y_k - H_{k,m_i}\hat{x}_{k,m_i}^-]C_{k,m_i}^{-1}[*]^T} \quad (4)$$

式中

$$C_{k,m_i} = H_{k,m_i}P_{k,m_i}^-H_{k,m_i}^T + R_{k,m_i} \quad (5)$$

根据全概率公式, 可导出模型 (滤波器) m_i 的概率递推公式如下:

$$p_k(m_i) = \frac{\Lambda(y_k|m_i)p_{k-1}(m_i)}{\sum_{j=1}^r \Lambda(y_k|m_j)p_{k-1}(m_j)} \quad (6)$$

注意到 $\Lambda(y_k|m_i)$ 是一个标量, 此外每一时刻有

$$\sum_{i=1}^r p_k(m_i) = 1 \quad (7)$$

初始 $k = 0$ 时, 一般取

$$p_0(m_i) = \frac{1}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

3.2 算法步骤

这里给出的多模型滤波算法的主要步骤。首先, 根据具体问题, 设计 r 个独立的卡尔曼滤波器。根据 (8) 式或其他信息设置每个模型的初始概率, 并行、独立地运行这些滤波器, 当完成所有滤波器的时间修正 (一步预测) 后, 进行如下计算:

- (a) 根据当前时刻的量测数据 y_k , 按 (4) 式计算每个模型 m_i 的似然函数;
- (b) 根据 (6) 式递推计算每个模型 m_i 的概率 $p_k(m_i)$;
- (c) 计算每个模型的验后估计 \hat{x}_{k,m_i} 及误差协方差 P_{k,m_i} ; (对于非线性系统, 可以采用 EKF、UKF 等)
- (d) 根据 (1) 和 (2) 式计算系统状态的组合滤波 \hat{x}_k 和误差协方差 P_k 。

3.3 模型估计的收敛性

上述算法在进行状态估计的同时, 对系统的模型也同步进行了估计。已有研究表明 [4], 如果真实系统模型与模型族 $\{m_i\}_{i=1}^r$ 中某模型一致, 那

么上述多模型滤波算法将收敛到对象的真实模型。一般情况下，将收敛到一个加权平均表示的定常模型。

如果真实系统的模型在运行过程中是不断变化的，即可能从一个模型跳变到另外一个模型。此时，可以采用直观的处理方法避免收敛到单一的模型。一些可能的途径包括：

- 人为地限制每个模型概率的下界；
- 在模型似然函数计算中采用衰减记忆技术；
- 在模型似然函数计算中采用有限记忆（滑动窗）技术。

采用这些直观处理方法可能带来一些负效应，例如不正确模型的估计误差可能越来越大，甚至发散。因此，必要的时候需要将所有的滤波器重新初始化，例如采用当前时刻最可能的滤波值及其协方差重启所有的滤波器。

4. 动态多模型滤波

如果对象的模型不是一成不变的，每个时刻都可能从一个模型跳变到另外一个模型，此时的多模型方法研究起来要困难许多。一种简单的方法是按似然函数 (4) 计算任意时刻 k 模型 m_i 的概率，即

$$p_k(m_i) = \frac{\Lambda(y_k|m_i)}{\sum_{j=1}^r \Lambda(y_k|m_j)} \quad (9)$$

其他计算与上述静态多模型方法相同。当然，严格的处理方法需要引入一些新的假设和数学工具。

4.1 马尔科夫模型假设

Ackerson 等引入了马尔科夫链来描述系统模型的跳变 [5], 由此发展起来了多种动态多模型滤波方法。假设模型序列 $\{M(t_0), M(t_1), \dots, M(t_k)\}$ 构成一个马尔科夫链, 模型之间的转移概率可表示为

$$\pi_{ij}(t_k, t_{k-1}) = \Pr[M(t_k) = M_j | M(t_{k-1}) = M_i] \quad (10)$$

根据马尔科夫链的性质, 有 $\sum_{i=1}^r \pi_{ij}(t_k, t_{k-1}) = 1$ (假设共有 r 个可能模型)。注意, 如果 $\pi_{ij} = \delta_{ij}$, 退化为静态多模型方法。

如果严格按照马尔科夫链模型, 最优估计需要的计算时间和计算机内存将随时间成指数增加, 没有任何实用价值。为此, 发展起来了若干

次优算法，例如广义伪贝叶斯方法（GPB）、交互多模型方法（IMM）等 [1, 2, 5, 6, 7]，使得每步都可以在有限的时间内获得次优的状态估计及模型估计。下面重点介绍 IMM 方法。

4.2 交互多模型滤波算法

交互多模型算法是一种高效的多模型滤波算法，广泛应用于目标跟踪问题 [6, 7]。IMM 滤波器结构见图2。

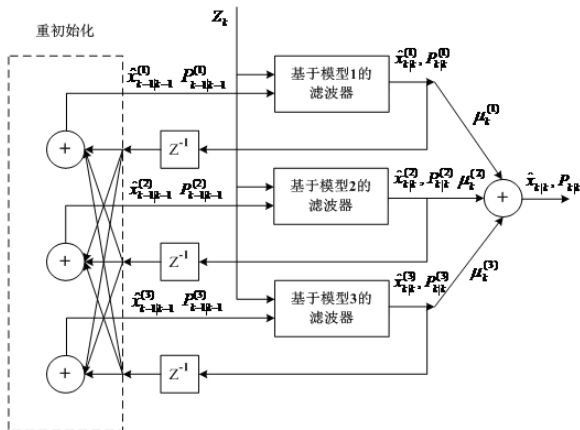


图 2: IMM 滤波器结构图

4.2.1 马尔科夫跳变系统

许多对象可以用线性马尔科夫跳变系统来描述，对应的状态方程和量测方程为

$$x(k+1) = F_j x(k) + G_j w_j(k) \quad (11)$$

$$y(k) = H_j x(k) + v_j(k) \quad (12)$$

式中， $x(0) \sim N(\bar{x}_0, P_0)$ ； $w_j(k)$ 与 $v_j(k)$ 表示模型相关的过程噪声和量测噪声，假设两者相互独立（与 $x(0)$ 也不相关），都是零均值的高斯白噪声。

$$E w_j(k) = 0, \quad E w_j(k) w_j(k)^T = Q_j \quad (13)$$

$$E v_j(k) = 0, \quad E v_j(k) v_j(k)^T = R_j \quad (14)$$

记 $M_j(k) = \{F_j, G_j, H_j, Q_j, R_j\}$, 表示 k 时刻系统的模型, 假设为有限状态马尔科夫链。模型状态的转移概率设为

$$\pi_{ij} \triangleq \Pr[M_j(k)|M_i(k-1)] \geq 0 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^r \pi_{ij} = 1, \quad i, j \in \mathfrak{R} \triangleq \{1, 2, \dots, r\} \quad (16)$$

模型状态马尔科夫链的初始分布为 $\{\mu_1(0), \mu_2(0), \dots, \mu_r(0)\}$, 满足

$$0 \leq \mu_j(0) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^r \mu_j(0) = 1, \quad j \in \mathfrak{R} \quad (17)$$

4.2.2 IMM 算法步骤

设已知: $\hat{x}_j(k-1), P_j(k-1), \mu_j(k-1), \pi_{ij}$ (设计参数)。下面给出一个采样周期内的算法步骤。

1) 计算模型交互概率:

$$\begin{aligned}\mu_{i|j}(k-1) &\triangleq \Pr[M_i(k-1)|M_j(k), Y^{k-1}] \\ &= \frac{\Pr[M_j(k)|M_i(k-1), Y^{k-1}]\Pr[M_i(k-1)|Y^{k-1}]}{\Pr[M_j(k)|Y^{k-1}]} \\ &= \frac{\pi_{ij}\mu_i(k-1)}{\bar{c}_j}, \quad i, j \in \mathfrak{R}\end{aligned}\quad (18)$$

2) 计算交互滤波初值 ($j \in \mathfrak{R}$):

$$\hat{x}_{0j}(k-1) = \sum_{i=1}^r \mu_{i|j}(k-1) \hat{x}_i(k-1) \quad (19)$$

$$P_{0j}(k-1) = \sum_{i=1}^r \mu_{i|j}(k-1) \{P_i(k-1) + [\hat{x}_i((k-1) - \hat{x}_{0j}(k-1))][*]^T\} \quad (20)$$

3) 滤波及模型概率修正 ($j \in \mathfrak{R}$):

$$[\hat{x}_j(k), P_j(k), v_j(k), S_j(k)] = \text{KF}(\hat{x}_{0j}(k-1), P_{0j}(k-1), y_k) \quad (21)$$

其中, $v_j(k)$ 、 $S_j(k)$ 分别表示新息及其协方差, y_k 为 k 时刻系统的量测(矢量)。

k 时刻模型 $M_j(k)$ 的似然函数为

$$\Lambda_j(k) = N(v_j(k); 0, S_j(k)) \quad (22)$$

模型概率为

$$\begin{aligned} \mu_j(k) &:= \Pr[M_j(k)|Y^k] \\ &= \frac{1}{c} p[y_k|M_j(k), Y^{k-1}] \Pr[M_j(k)|Y^{k-1}] \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^r \Pr[M_j(k)|M_i(k-1), Y^{k-1}] \Pr[M_i(k-1)|Y^{k-1}] \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^r \pi_{ij} \mu_i(k-1) \\ &= \frac{1}{c} \Lambda_j(k) \bar{c}_j \end{aligned} \quad (23)$$

4) 组合滤波输出:

$$\hat{x}(k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \hat{x}_j(k) \quad (24)$$

$$P(k) = \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \{P_j(k) + [\hat{x}(k) - \hat{x}_j(k)][*]^T\} \quad (25)$$

上面的 \bar{c}_j 和 c 为归一化常数, 分别为

$$\bar{c}_j = \sum_{i=1}^r \pi_{ij} \mu_i(k-1) \quad (26)$$

$$c = \sum_{j=1}^r \Lambda_j(k) \bar{c}_j \quad (27)$$

5. 数值算例——机动目标跟踪

目标初始位置为 $(1, 1, 1)$ (单位: km), 先以速度 $v = (50, 30, 10)$ (单位: m/s) 做匀速直线运动, 之后依次做匀速圆周运动、匀加速运动、匀速直线运动、匀速圆周运动和匀加速运动。共运行六个阶段。其中, 第三阶段和第六阶段目标运动加速度分别为 $a = (0.5, -0.3, 0.5)$ 与 $a = (0.5, 0.5, -1)$ (单位: m/s^2), 第二阶段和第五阶段目标匀速圆周运动角速度为 $\omega = \frac{\pi}{270} rad/s$ 。

采用 CV 模型、CA 模型与“当前”统计模型三个模型进行滤波器设计。
模型状态转移概率矩阵为

$$[\pi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

模型初始概率为

$$[\mu(0)] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

N 次 MC 仿真计算的均方根误差定义为

$$RMSE_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\hat{x}^{(i)}(k) - x^{(i)}(k)\|^2} \quad (28)$$

仿真结果如图3与图4所示。

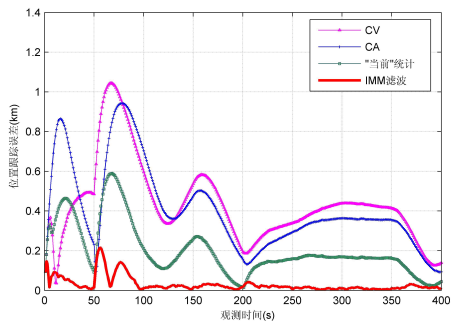


图 3: 机动目标的位置跟踪均方根误差

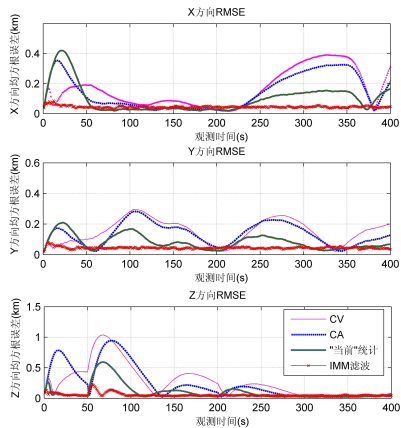


图 4: 机动目标三方向位置估计均方根误差

5. References

- [1] Yaakov Bar-Shalom *et al.* *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [2] Efim Mazor and *et al.* Interacting multiple mode methods in target tracking: A survey. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(1):103–123, January 1998.

- [3] Gordon C. Griffen and Peter S. Maybeck. *MMAE/MMAC control for bending with multiple uncertain parameters. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 33(3):903–912, July 1997.
- [4] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li. *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*. Artec House, Inc., 1993.
- [5] Guy A. Ackeson and K.S. Fu. On state estimate in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(1):10–17, February 1970.
- [6] Henk A. P. Blom and Yaakov Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8):780–783, August 1988.

- [7] X. Fu, Y. Jia, J. Du, and F. Yu. New interacting multiple model algorithms for the tracking of the manoeuvring target. *IET Control Theory and Applications*, 4(10):2184–2194, April 2010.