摘要

实时仿真动态一般都进行定步长的仿真计算，在步长要求一定时，对于确定的系统，为了在规定的时间内完成仿真，满足仿真速度的要求，需要在保证要求的计算精度和使系统稳定的前提下，分析系统本身的特性是否满足仿真要求，并选择合适的求解器。

本文针对该类问题，首先根据系统数值计算稳定性，给出了各类定步长仿真算法的稳定域，得到了仿真步长与系统特征值之间的关系；然后针对定步长仿真问题，在仿真时间限制下，通过分析各类定步长仿真算法的计算复杂度，给出了定步长仿真算法的计算量级关系，指导相应的算法选择。

引言

在实时仿真中，需要采用尽量大的步长。

# 系统仿真速度与数值计算稳定性、计算精度、单步函数计算次数的拓扑关系

对于已知的系统，在进行仿真时，仿真时长取决于积分步数及每一步积分所需的时长。每一步积分所需时长由单步所需计算右端函数的次数、单次计算所需时长决定，与积分方法选取、模型复杂度有关。

所有积分方法都是按照每帧只有一次右端函数计算的方式实现的。因此，针对已知的系统，对于不同的算法选择、不同的步长，系统的单次右端函数计算时长是固定的，设为。对于不同的算法选择，系统的单步计算时长取决于算法右端函数的计算次数，且近似为线性关系，其对应的单步计算时长为。

对于一般常系数线性微分方程组



若仿真步长为。该系统仿真总时长为



为总的实时仿真时长，为给定仿真时间，为单步计算时长；为单次计算时长，为求解器的计算量级（即右端函数的计算次数）。其中，由模型复杂度决定；由积分方法选择决定；受到数值计算稳定性、计算精度以及仿真速度要求的限制。

## 数值计算稳定性

仿真的前提是要保证数值计算稳定性，不同的积分算法具有不同的数值计算稳定域，步长的选择首先应该满足：



为系统最大特征值，是与不同求解器稳定域相关的参数，由积分算法决定。

## 计算精度

不同的积分算法具有不同的仿真计算精度，阶次为的积分算法的误差量级公式为：



在满足数值计算稳定性的前提下，需要保证仿真计算精度，精度要求为时，步长的选择还应该满足：



## 单步函数计算次数

采用不同的积分算法进行求解时，单步仿真所需计算右端函数的次数也不同，积分方法的计算量级为时，积分算法的单步仿真时长为：



# 一般常系数线性微分方程组的定步长算法数值计算稳定性、计算精度、单步函数计算次数分析

对于一般常系数线性微分方程组

其中，是的常量矩阵，并且有个线性无关的特征向量，且



已知是的常量矩阵且有个线性无关的特征向量，则存在非奇异矩阵，使得，即



## 采用线性单步方法求解模型的初值问题

### 采用Euler法求解模型的初值问题

采用Euler法求解，其计算公式为



算法的单步右端函数计算次数为1。

其误差计算公式为



将带入，得到



根据数值求解稳定性理论可知，误差需要满足



因此，当采用Euler法求解方程组考察绝对稳定性时，对于矩阵的所有特征值，步长需要满足



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



算法的单步截断误差量级为



### 采用Runge-Kutta方法求解模型的初值问题

各种Runge-Kutta方法可以写成如下一般形式[2,3]



其中



式中各系数满足以下关系



可使用阶级来描述各种Runge-Kutta方法：阶表示该种Runge-Kutta方法的阶次，反映截断误差的精度；级表示该类Runge-Kutta方法的计算量级，即每步计算右端函数的次数，减少每步的计算次数也就减少了计算量。

采用经典的阶Runge-Kutta方法时，对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式满足[5]



对应的单步截断误差满足



1. 采用二级二阶R-K(Heun)方法求解模型的初值问题

Heun方法的求解公式为



算法单步右端函数计算次数为2。

对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



算法的单步截断误差量级为



1. 采用四级四阶R-K方法求解模型的初值问题

四级四阶R-K方法的求解公式为



算法单步右端函数计算次数为4。

对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



算法的单步截断误差量级为



## 采用线性多步方法求解模型的初值问题

求解初值问题的线性步法的一般形式为[5]



其中，，是常系数，且满足



式中的左右两边分别是关于和关于的线性表达式，并且其中必含有和，称为线性步法。若，则为显式方法；若，则为隐式方法。

若为初值问题的解，则线性步法在点处的局部截断误差为



若



则称线性步法为阶方法。线性步法的阶数与系数，有关。利用Taylor级数把局部截断误差表示成关于步长的幂级数可以得到它们之间的关系：



其中



若存在一组系数，使得



则



此时，线性步法为阶方法。

采用线性步法求解模型初值问题，对于矩阵的所有特征值，计算公式为



其中。

其误差方程为



误差方程的特征方程为



其中，为特征方程的根，对于特征方程的所有根都满足时，误差满足



因此，线性步法的绝对稳定区域为[5]



### 线性多步方法的显式形式（AB法）求解模型的初值问题[1,4]

线性多步方法显式形式（AB法）的公式为



其中，与具体的公式相关，公式为Adams算法的步外推公式。

由于显式方法采用时刻之前得到的数值进行求解，所有的数值都是已知的，因此，AB法是单遍的数值方法，每个积分步只要求计算一次右端函数，所有的AB法单步右端函数计算次数都是1。

阶Adams显式公式的步外推公式的局部截断误差量级为



1. 两步外推方法(AB2)

时，得到2步外推公式为



对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



局部截断误差为



1. 四步外推方法(AB4)

时，得到4步外推公式为



对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



局部截断误差为



### 线性多步方法的隐式形式（AM法）求解模型的初值问题[1,4]

线性多步方法隐式形式（AM法）的公式为



其中，与具体的公式相关，为内插步数。

隐式方法需要采用时刻的数值，因此，AM算法为两遍的数值积分算法，第一遍完成预报，预报的形式与显式计算公式一致；第二遍进行校正，校正形式与隐式计算公式一致。因此，AM法单步右端函数计算次数是2。

阶Adams隐式公式的步内插公式的局部截断误差量级为



1. 一步内插方法(AM2)

时，得到1步内插式为



对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



局部截断误差为



1. 三步内插方法(AM4)

时，得到3步内插公式为



对于矩阵的所有特征值，绝对稳定区域计算公式为



当为实数时，该方法的绝对稳定区间为



局部截断误差为



## 各类定步长算法稳定域以及截断误差量级

根据理论分析，得到各类定步长算法稳定域、局部截断误差量级表格:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 算法类 | 常用算法 | 稳定域 | 当特征值为实数时的稳定域 | 单步右端函数计算次数 | 单步截断误差量级 |
| AB显式方法 | AB1 |  |  | 1 |  |
| AB2 |  |  |
| AB3 |  |  |
| AB4 |  |  |
| AM隐式方法 | AM1 |  | 2 |  |
| AM2 |  |  |
| AM3 |  |  |
| AM4 |  |  |
| RK | Euler |  |  | 1 |  |
| RK2 |  | 2 |  |
| RK3 |  | 3 |  |
| RK4 |  | 4 |  |
| RKN |  | N+2(N>=7) |  |

这里针对典型的算法给出其单步计算时间量级的关系，对于变型的算法，需要结合实际算法具体分析。

# 系统求解算法与积分步长选择

对于已知的系统，在进行仿真时，给定系统的单次右端函数计算时长，对系统提出仿真速度要求：给定仿真时间为时，实际仿真时长不大于。应该如何选择求解器以及仿真步长？

## 确定单次右端函数计算时长

根据各类算法单步右端函数计算次数分析知道，若以Euler算法为基础进行求解时，其单次右端函数计算时长等于模型单次右端函数计算时长，可通过采用给定步长和仿真时间，根据实时仿真时长，得出系统单次右端函数计算时长：



## 求解算法与积分步长选择

### 确定积分方法计算量级与积分步长的限制

根据仿真速度要求计算仿真计算次数满足：



对于单步计算量级为的算法，固定步长为时，给定仿真时间，总计算次数为



得到



### 根据系统稳定性要求，确定积分步长的限制

为了保证计算稳定性，步长的选择首先应该满足：



是与不同求解器稳定域相关的参数，在第二节中叙述。

### 根据仿真速度的影响，确定积分步长和求解器类型

在实际计算中，在满足精度要求和计算稳定性的前提下，应该首先考虑减小步长，只有当达到最小步长但还没有满足精度要求时，才考虑提高方法的阶数。

根据优先选择低阶求解器，在达到最小步长但还没有满足精度要求时，才考虑提高方法的阶数的思路，确定积分步长和求解器类型。

系统积分步长和积分算法计算量级满足



令



选取积分算法计算量级为时，积分步长满足



然后根据稳定性要求



确定该类积分算法是否满足步长的限制。如果该类算法满足步长限制，说明该类算法满足仿真速度要求。

### 考虑仿真精度的影响，确定求解器是否满足要求

根据阶次为的求解算法的误差量级公式



精度要求为时，求解器阶次满足



根据误差要求以及步长限制，可以确定满足要求的求解器最小阶次。对于满足仿真速度要求的积分算法，如果不满足精度要求，也应舍弃，进一步提高算法阶次，然后再进行积分步长和积分算法的选取。

## 求解算法与积分步长选择表格

各类算法与计算精度、步长选择与步长限制的关系表如下。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 算法类 | 常用算法 | 稳定性步长限制 | 速度要求限制 | 总体截断误差量级 |
| AB显式方法 | AB1 |  |  |  |
| AB2 |  |  |
| AB3 |  |  |
| AB4 |  |  |
| AM隐式方法 | AM1 | 无限制 |  |  |
| AM2 | 无限制 |  |
| AM3 |  |  |
| AM4 |  |  |
| RK | Euler |  |  |  |
| RK2 |  |  |  |
| RK3 |  |  |  |
| RK4 |  |  |  |

# 系统特征值设计

对于已知的系统，在进行仿真时，给定系统的单次右端函数计算时间，对系统提出仿真速度要求：给定仿真时长为时，实际仿真时间不大于。若没有积分方法或者仿真步长满足要求，如何改进系统，设计系统特征值？

## 特征值设计

### 根据仿真速度要求确定积分方法计算量级与积分步长的限制

根据仿真速度要求，系统积分步长和积分算法计算量级满足



### 根据仿真精度要求确定积分方法计算量级与积分步长的限制

阶次为的积分算法的误差量级公式



精度要求为时，积分算法阶次与积分步长满足



则，积分步长满足



### 根据数值计算稳定性要求以及积分步长的限制确定系统特征值限制

对于满足仿真速度与仿真精度要求的积分算法，其步长限制为



根据数值计算稳定性要求



得到系统的特征值限制



当积分步长取到满足系统仿真速度要求的最小步长时，即



系统的最大特征值满足



## 特征值设计表格

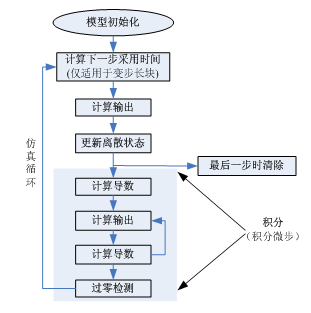
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 算法类 | 常用算法 | 总体截断误差量级对积分步长限制 | 速度要求对积分步长限制 | 系统特征值设计 |
| AB显式方法 | AB1 |  |  |  |
| AB2 |  |  |
| AB3 |  |  |
| AB4 |  |  |
| AM隐式方法 | AM1 |  |  | 无限制 |
| AM2 |  | 无限制 |
| AM3 |  |  |
| AM4 |  |  |
| RK | Euler |  |  |  |
| RK2 |  |  |  |
| RK3 |  |  |  |
| RK4 |  |  |  |

# Simulink模型仿真提速建议

在进行仿真时，仿真积分步长确定后，仿真速度取决于每一步积分所需的时间。要提高系统的仿真速度，需要减小每一步的计算时间。每一步的计算时间主要由算法计算右端函数的次数与单次右端函数计算时间决定，与积分方法选取以及系统的复杂度有关。因此，在积分方法确定的时候，想要提高仿真速度，需要对软件算法的处理方式以及系统的复杂度、系统的特征值进行分析，得到仿真提速的思路。

## 仿真软件求解过程分析

Simulink软件仿真执行过程：Simulink模型的执行分几个阶段进行。首先进行的是初始化阶段，在此阶段，Simulink将库块合并到模型中来，确定传送宽度、数据类型和采样时间，计算块参数，确定块的执行顺序，以及分配内存。然后，Simulink进入到“仿真循环”，每次循环可认为是一个“仿真步”。在每个仿真步期间，Simulink按照初始化阶段确定的块执行顺序依次执行模型中的每个块。对于每个块而言，Simulink用函数来计算块在当前采样时间下的状态，导数和输出。如此反复，一直持续到仿真结束。



根据Simulink软件仿真执行过程分析可知，系统是基于数据流形式的仿真，在每一个仿真步内按照初始化阶段确定的块执行顺序依次执行模型中的每个模块。因此，模块的复杂度与模块数目均会影响单步仿真速度，可以从降低模型复杂度和模型数目进行改进。此外，如果系统的动态特征值存在非常大的值，且这类动态对系统的影响不大，应该考虑是否减小或删除这类特征值。

## 求解算法与积分步长选择

Simulink常用定步长积分算法的类型、稳定性步长限制、速度要求限制以及总体截断误差量级如下[4]。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 积分器 | 对应算法 | 稳定步长限制 | 速度要求限制 | 总体截断误差量级 |
| ode1 | Euler算法 |  |  |  |
| ode2 | Heun算法 |  |  |  |
| ode3 | Bogacki-Shampine公式 |  |  |  |
| ode4 | 4阶Runge-Kutta公式 |  |  |  |
| ode5 | 5阶Dormand-Prince公式 |  |  |  |
| ode8 | 8阶Dormand-Prince公式 |  |  |  |

## 系统特征值设计

Simulink常用定步长积分算法的类型、速度要求限制、总体截断误差量级以及系统特征值设计如下[4]。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 积分器 | 对应算法 | 总体截断误差量级限制 | 速度要求限制 | 稳定步长限制 |
| ode1 | Euler算法 |  |  |  |
| ode2 | Heun算法 |  |  |  |
| ode3 | Bogacki-Shampine公式 |  |  |  |
| ode4 | 4阶Runge-Kutta公式 |  |  |  |
| ode5 | 5阶Dormand-Prince公式 |  |  |  |
| ode8 | 8阶Dormand-Prince公式 |  |  |  |

## 仿真速度提升建议

对于simulink模型建议如下：

* 模型中尽量不要含有MATLAB Function模块。当模型中包含MATLAB Function模块时，每个时间步都会调用MATLAB执行引擎，从而导致仿真速度大大降低，尽可能使用Math Function模块；
* 模型中尽量不要含有MATLAB文件的S-Function模块。MATLAB文件S-Function也会在每个时间步调用MATLAB执行引擎，应考虑将S-Function转换为子系统或C-MEX文件S-Function。
* 模型不要包含代数环。代数环的解在每个时间步迭代计算，因此大大降低了仿真速度。
* 模型中存在积分器时应尽量放在最外层统一进行积分求解。？？？
* 分析模型的动态特征值。如果系统的动态特征值存在非常大的值，且这类动态对系统的影响不大，应该考虑是否减小或删除这类特征值。
* 针对模型中出现不同量级的数值，可采用归一化方式，使得数值量级尽量保持一致。
* 尽量减少模块数目。将一些模块进行合并或者删除，减少模块数目，可以提高仿真速度。
* 尽量避免迭代算法的出现。

# 仿真验证