线性代数

重要性质和结论

一般内容，重要内容，高频内容

本材料不涉及一些题型和解题过程，仅总结重要的性质和结论。

第一部分：行列式

行列式本质上是一个数，是一个式子！

余子式、代数余子式：

$$\boldsymbol{A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}}$$

Mij 称为 Aij 的余子式，Aij 称为 aij 的代数余子式

范德蒙行列式：

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

如：V4=(a4-a1)(a4-a2)(a4-a3)(a3-a2)(a3-a1)(a2-a1)

注解：非常重要

Vn≠0 <=> a1,a2,…,an 两两不等

分块行列式：

1.A，B 分别是 m，n 阶矩阵，则$\begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$

行列式的性质：

（一）要把行列式 D 转化为上三角或下三角，并计算行列式的值：

可以利用如下性质：

1. $\mathrm{D}=D^T$

2. 对调两行或两列，行列式改变符号

3. 行列式用公因子可提取 $\begin{cases} \text{有一行或一列为0，则} D=0 \\ \text{两行或两列相同，则} D=0 \\ \text{两行或两列成比例，则} D=0 \end{cases}$

4. $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

5. 行列式的某行（列）的倍数加到另一行（列），行列式不变

7. 行列式的某行（列）元素与另一行（列）元素的代数余子式之积的和为 0。

（二）降阶性质（0 特多时使用）

6. 行列式等于行列式某行（列）元素与其对应的代数余子式之积的和。即：

$$\mathrm{D}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}(i=1,2,\dots,n)$$

$$\mathrm{D}=a_{1i}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}(j=1,2,\dots,n)$$

$$0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}(i\neq j)$$

行列式性质的应用：

克拉默法则：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

D 称为系数行列式，即：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

定理一：对(1)齐次：

①$\mathrm{D} \neq 0 \xLeftrightarrow{\text{充要条件}} (1)$*只有零解*

②$\mathrm{D} = 0 \xLeftrightarrow{\text{充要条件}} (1)$*除零解外有无数个非零解*

定理一：对(2)非齐：

①$\mathrm{D} \neq 0 \xLeftrightarrow{\text{充要条件}} (2)$*有唯一解*，$x_i = \frac{D_i}{D}\,(i = 1,2,\ldots n)$

②$\mathrm{D} = 0 \xLeftrightarrow{\text{充要条件}} (2)$*无解或无数解*

第二部分：矩阵

矩阵本质上是一个表格。

矩阵的三则运算：

（1）加减法：矩阵相加，矩阵必须同型

（2）数乘以矩阵：矩阵内每一个元素都乘以这个数

（3）矩阵与矩阵相乘：内标相同可乘，外标作为新的矩阵的下标。

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{2,1} & b_{2,2}\\ b_{3,1} & b_{3,2}\end{bmatrix}$$

$$C=AB=\begin{bmatrix}a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+a_{1,3}b_{3,1}, & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{3,2}\\ \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1}+a_{2,3}b_{3,1}, & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{3,2}\end{bmatrix}$$

矩阵的积：tr(A)=矩阵主对角线元素相加。

若 A=α×βT，则 tr(A)=(α，β)=λ1+…+λn

注解：

①A≠0，B≠0 无法推出 AB≠0

②AB 与 BA 不一定相等，矩阵乘法没有交换律

③矩阵多项式：$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，设 A 是一个 m 阶方阵，则$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$，f(A)可以因式分解。如 $f(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-2)$ 可以写成 $f(A)=A^2-2A-3=(A+E)(A-3E)$

④齐次线性方程组写为 AX=0，非齐次写为 AX=b，**A 为系数矩阵，X 为未知数列向量，B 为常数列向量**

伴随矩阵如何求？

矩阵 A 的伴随矩阵是 A 的行列式每一个元素的代数余子式的列排

$$\mathbf{A}\times\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\times\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\times\boldsymbol{E}$$

矩阵的逆阵理论

（一）逆阵的存在性

注解：

1.

①$|A^T|=|\mathrm{A}|$

②$|\mathrm{kA}|=k^n|A|$

③**拉普拉斯法则**：A、B 都是同型矩阵，$|\mathrm{AB}|=|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|$

2.

①$(A^{-1})^{-1}=A$

②$\mathrm{k}\neq 0,(\mathrm{kA})^{-1}=\frac{1}{k}\times A^{-1}$

③$(\mathrm{AB})^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

④$\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \\ & \mathrm{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & \\ & B^{-1}\end{pmatrix}$

⑤$|A^*|=|\mathrm{A}|^{n-1}$

逆阵存在性定理：

A 为 n 阶方阵，则 A 可逆⇔|A|≠0

注解：

若 A 可逆，则 $\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*}$，$\boldsymbol{A^*=|A|\cdot A^{-1}}$，$\boldsymbol{AA^*=|A|E}$

当研究很讨厌的伴随矩阵时，干脆将其化为逆阵。

（二）逆阵的求法

方法一：伴随矩阵法（三阶以内）

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$$

方法二：初等变换法（三阶以上）

理论一：矩阵的 3 种初等行变换（解方程组，一行一方程）

①对调两行

②某行乘以一个不为零的 k

③某行的 k 倍加到另一行（加减消元法）

注解：

$$①\begin{cases}\text{对调两列} \\ \text{某列乘以}k\neq 0 \qquad \text{称为初等列变换，解方程组禁止使用} \\ \text{某列的}k\text{倍加到另一列}\end{cases}$$

②初等行变换和初等列变化统称为初等变换

理论二：三个初等矩阵

$$①E_{(i,j)}\triangleq\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

$$E_{(i,j)}\begin{cases}E_{(i,j)}A\text{，}A\text{对调 } i,j\text{行} \\ AE_{(i,j)}\text{，}A\text{对调 } i,j\text{列} \\ \left|E_{(i,j)}\right|=-1\text{，可逆} \\ {E_{(i,j)}}^{-1}=E_{(i,j)}\end{cases}$$

②$E_{(i(c))} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & c & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$，单位矩阵 i 行/i 列×C

$$E_{(i(c))}\begin{cases} E_{(i(c))}A\text{，使}A\text{的 }i\text{行 }c\text{倍} \\ AE_{(i(c))}\text{，使}A\text{的 }i\text{列 }c\text{倍} \\ \left|E_{(i(c))}\right| = c\text{，可逆} \\ {E_{(i(c))}}^{-1} = E_{\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)} \end{cases}$$

③$E_{(ij(k))} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & k & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$$E_{(ij(k))}\begin{cases} E_{(ij(k))}A\text{，使}A\text{的 }j\text{行 }k\text{倍加到 }i\text{行} \\ AE_{(ij(k))}\text{，使}A\text{的 }j\text{列 }k\text{倍加到 }i\text{列} \\ \left|E_{(ij(k))}\right| = 1\text{，可逆} \\ {E_{(ij(k))}}^{-1} = E_{(ij(-k))} \end{cases}$$ 有考点

理论三：三个问题

1. A 是可逆的 n 阶方阵，则 A 一定可以通过初等行变换为 E，且次数是有限的。

2. N 阶不可逆矩阵不一定可以通过有限次初等行变换化为$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

3. N 阶不可逆矩阵一定可以通过有限次初等行/列变换化为$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

理论四：求逆阵

定理 1：A 是 n 阶可逆矩阵，则$(\mathrm{A} \vdots \mathrm{E}) \xrightarrow{初等行变换} (E \vdots A^{-1})$

定理 2：A 是 n 阶可逆矩阵，B 为 n×s，则$(\mathrm{A} \vdots \mathrm{B}) \xrightarrow{初等行变换} (E \vdots A^{-1}B)$

矩阵的秩理论

注解：

①A 是 m×n 阶矩阵，则 r(A)≤m，r(A)≤n, 即 r(A)≤min{m, n}。**A 的秩小于等于下标中较小的哪个**

②$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, r(\alpha) \le 1$，则$r(\alpha) = \begin{cases} 0 & ,\alpha = 0 \\ 1 & ,\alpha \ne 0 \end{cases}$

③A 是 m×n 阶矩阵

|A|≠0⇔A 可逆，称 A 为**非奇异矩阵**

|A|≠0⇔r(A)=n，称 A **满秩**

|A|=0⇔r(A)<n

A 可逆⇔非奇异⇔满秩

r(A)的求法（**秩本质上是方程组的约束条件的个数**）

将矩阵 A 进行初等行变换为阶梯化，留下来的不全为 0 的行数为秩

注解：

①r(A)=0⇔A=0

②r(A)≥1⇔A≠0

③r(A)≥2，A 至少 2 行不成比例。

④r(A)=1，A 各行成比例。

秩的性质（各性质需要掌握证明）

1. 秩和转置的秩的关系$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$

   见到A^TA，AA^T，就用此性质。A^TA=0，A 一定是 0.

2. 两个矩阵的和/差的秩的性质

   r(A+B)≤r(A)+r(B)

   r(A-B)≤r(A)+r(B)

   注：见到 A+B, A-B, r(A)+r(B)，用此性质

3. 两个矩阵乘积的性质

$$A_{m\times n}, B_{n\times s}, 则\begin{cases} r(AB)\le r(A) \\ r(AB)\le r(B) \end{cases} \overset{等价}{\Longleftrightarrow} r(AB)\le \min\{r(A), r(B)\}$$

   矩阵乘得愈多，秩越小。

   注：见 AB，r(A), r(B)用此性质

4. **最重要的性质**

$$A_{m\times n}, B_{n\times s}, 且AB=0\ 则$$

$$r(A)+r(B)\le n$$

   A, B 秩的和不超过内标。

   注：见到 AB=0，用此性质。

5. **大规模使用的性质**

   P、Q 可逆，则 r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)

   记忆：FaQ（PAQ）

6. 伴随的秩

$$\mathrm{r}(A^*)=\begin{cases}n\ \ ,r(A)=n\\1\ \ ,r(A)=n-1\\0\ \ ,r(A)<n-1\end{cases}$$

第三部分：向量

向量的内积

注解：

①$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

②$(\alpha,\alpha)=\alpha^T\alpha=|\alpha|^2$。$(\alpha,\alpha)=0\overset{等价}{\Longleftrightarrow}\alpha=0$

③$(\alpha,k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s)=k_1(\alpha,\beta_1)+k_2(\alpha,\beta_2)+\cdots+k_s(\alpha,\beta_s)$

④$(\alpha,\beta)=0$称正交。

⑤时刻提防垃圾向量 0 向量。

相关性与线性表示

相关性的 8 大性质：

1. $\alpha_1\sim\alpha_n$线性相关（齐次线性方程组有非 0 解）⇔至少一个向量可由其余向量线性表示

   注解：

   ①含零向量的向量组线性相关

   ②α，β线性相关⇔两个向量组成比例，可被替代，一个可化为 0

2. $\alpha_1\sim\alpha_n$线性无关：

   $\alpha_1\sim\alpha_n$，b线性无关⇔b 不可由$\alpha_1\sim\alpha_n$线性表示

$\alpha_1 \sim \alpha_n$，b线性相关⇔b 可由$\alpha_1 \sim \alpha_n$线性表示且表示方法唯一

3. 全组无关⇔部分组无关

4. 全组相关⇔部分组相关

5. $\alpha_1 \sim \alpha_n$为 n 个 n 维向量（组成了方阵），则

   $\alpha_1 \sim \alpha_n$线性无关⇔$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| \neq 0$

   $\alpha_1 \sim \alpha_n$线性相关⇔$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = 0$

6. $\alpha_1 \sim \alpha_n$为 n 个 m 维向量（长方形），且 m<n（长大于宽），则**一定线性相关**，**一定会产生自由变量**，**一定有非零解**。

7. ①向向量组中**添加**向量的**个数**会提高**相关性**。

   ②向向量组中**添加**向量的**维度**会提高**无关性**。

8.

$$\alpha_1 \sim \alpha_n \begin{cases} \text{非零向量组} \\ \text{两两正交} \end{cases} \xRightarrow{\text{反之不成立}} \text{线性无关}$$

正交：两个向量内积=0

施密特正交化后面讲

向量组等价

A 组可由 B 组表示，则 AB 等价

极大线性无关组

极大线性无关组：去除垃圾之后的向量组。

注解：

①极大组不一定唯一

②向量组与极大组等价

③$\alpha_1 \sim \alpha_n$线性无关⇔$\alpha_1 \sim \alpha_n$为极大组⇔$\alpha_1 \sim \alpha_n$的秩=n

④A=$\alpha_1 \sim \alpha_n$，$\bar{A} = \alpha_1 \sim \alpha_n, b$

Case1：r(A)=$\mathrm{r}(\bar{\mathrm{A}})$ ⇔b 可由$\alpha_1 \sim \alpha_n$线性表示

Case2：$\mathrm{r}(\bar{\mathrm{A}}) = r(A) + 1$（b 留下来了）⇔b 不可由$\alpha_1 \sim \alpha_n$线性表示

⑤$\boldsymbol{A_{m\times n}, B_{n\times s} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s), AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_s)}$

⑥重要的习惯

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_2 - \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

向量组的秩

向量秩的性质：

1. 三秩相等：秩=行秩=列秩
2. $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$，若 A 组跟 B 组线性相关，则 r(A)≤r(B)
3. A 组与 B 组等价⇔A、B 秩相等

第四部分：线性方程组

线性方程组解的理论：

定理一：对于齐次：

①r(A)=n⇔齐次方程组只有 0 解

②r(A)<n⇔齐次方程组有非 0 解

定理二：对非齐次：

①有解⇔$\mathrm{r}(\mathrm{A})=\mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}})\begin{cases}=n\ ,唯一解\\<n\ ,无数解\end{cases}$

②无解⇔ $\mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}})=\mathrm{r}(\mathrm{A})+1$， $\mathrm{r}(\overline{\mathrm{A}})\neq\mathrm{r}(\mathrm{A})$

定理三：

$\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s)$。若 AB=0，则 B 的列为 AX=0 的解。

第五部分：特征值与特征向量

特征方程：$|\lambda\mathrm{E}-\mathrm{A}|=0$

注：

①λ不一定是实数

②设λ0 位一个特征值，λ0 对应的特征向量是(λ0E-A)X=0 的非零解。

矩阵的相似（反复考）：

注解：

①$\begin{cases}A\sim A\\A\sim B\leftrightarrow B\sim A\\A\sim B,B\sim C\rightarrow A\sim C\end{cases}$

②$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}\leftrightarrow\mathrm{r}(\mathrm{A})=\mathrm{r}(\mathrm{B})$

③$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}\rightarrow|\boldsymbol{\tau}\mathbf{E}-\mathbf{A}|=|\boldsymbol{\tau}\mathbf{E}-\mathbf{B}|$

④$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}\rightarrow\begin{cases}A^T\sim B^T\\f(A)\sim f(B)\\若A、B可逆，则\begin{cases}A^{-1}\sim B^{-1}\\A^*\sim B^*\end{cases}\end{cases}$

⑤ $A \sim B \rightarrow |\lambda E - A| = |\lambda E - B| \rightarrow \begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$

特征值与特征向量的基本性质

（一）一般性质

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \begin{cases} (\lambda_1 E - A)X = 0 \rightarrow \zeta_1, \dots \zeta_s \\ (\lambda_2 E - A)X = 0 \rightarrow \eta_1, \dots \eta_t \end{cases} \rightarrow \zeta_1, \dots \zeta_s, \eta_1, \dots \eta_t$线性无关

2. $A\alpha = \lambda_0 \alpha$，$\alpha \neq 0$

①$f(A)\alpha = f(\lambda_0)\alpha$

如：$(A^2 - A - 2E)X = (\lambda^2 - \lambda - 2)X$

②若 A 可逆，则$\lambda_0 \neq 0$，则$\begin{cases} A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda_0}\alpha \\ A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda_0}\alpha \end{cases}$

A 与其逆阵、伴随矩阵，特征向量相同，与逆阵的特征值互为倒数（别被题目骗）

3. $A_{n \times n}$，则 A 可对角化⇔A 有 n 个线性无关的特征向量

（二）$A^T = A$实对称矩阵性质

1. 若$A^T = A$，则$\lambda_1 \in R, \lambda_2 \in R, \dots \lambda_n \in R$

2. 若$A^T = A$，则$\lambda_1 \neq \lambda_2, A\alpha = \lambda_1 \alpha, A\beta = \lambda_2 \beta \rightarrow \alpha \perp \beta$, 正交

3. 若$A^T = A$，则 A 一定可以对角化

对角化过程涉及到的重要性质

正交化：

（一）向量正交

性质：

$$\alpha_1 \sim \alpha_n \begin{cases} \text{非零向量组} \\ \text{两两正交} \end{cases} \xRightarrow{\text{反之不成立}} \text{线性无关}$$

施密特正交化：

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$线性无关，则$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$,

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$称β1~βn 两两正交。

（二）正交矩阵

性质：

①$A^T A = E \to |A| = \pm 1$

②$A^T A = E \to A^T = A^{-1}$

③$A^T A = E \to \lambda = \pm 1$

等价条件：

定理：$A_{n\times n} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$则$A^T A = E \leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$<u>两两正交且规范</u>

施密特正交化是为了制造正交矩阵，为实对称矩阵对角化提供理论基础和工具。

第六部分：二次型极其标准形

略