Chương 4 - đfdb

Công nghệ Web (Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Đà Nẵng)

Chương 4
PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH ẢNH

Để biểu diễn các đối tượng trong đồ hoạ máy tính, ta cần thực hiện một số phép biến đổi hình học. Biến đổi hình học cho phép thay đổi các thông tin về toạ độ của đối tượng, từ đó làm đối tượng thay đổi về hướng, kích thước, hình dạng. Chương này trình bày các phép biến hình trong không gian 2D như phép quay, dịch chuyển, phép chiếu và kết hợp các phép biến đổi với nhau.

3.1. PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH HỌC

Có hai cách biến đổi đồ hoạ thông dụng:

- Biến đổi đối tượng (*Object transformation*): Thực hiện thay đổi toạ độ các điểm mô tả nó theo một quy tắc nào đó;
- Biến đổi toạ độ (*Coordinate transformation*): Tạo ra một hệ toạ độ mới và tất cả các điểm mô tả đối tượng sẽ được chuyển về hệ toạ độ mới.

Hai phép biến đổi trên đều có những ưu điểm riêng và có thể chuyển đổi qua lại lẫn nhau: phép biến đổi này có thể được thực hiện bằng cách thực hiện một số lần phép biến đổi kia.

3.2. PHÉP BIẾN ĐỔI AFFINE

Phép biến đổi affine là phép biến đổi toạ độ điểm đặc trưng của đối tượng thành tập tương ứng các điểm mới theo một quy luật nào đó để tạo ra các hiệu ứng cho toàn đối tượng. Trong biến đổi 2D, một điểm P trong mặt phẳng sẽ biến đổi thành điểm có toạ độ mới Q theo một quy luật T. Phép affine T là một ánh xạ biến điểm $P(P_x, P_y)$ thành điểm $Q(Q_x, Q_y)$ được xác định bởi phương trình:

$$\begin{cases} Q_x = aP_x + cP_y + Tr_x \\ Q_y = bP_x + dP_y + Tr_y. \end{cases}$$

trong đó a, b, c, d, Tr_x, Tr_y là các hằng số.

Để tránh suy biến, ta luôn giả thiết rằng $ad - bc \neq 0$.

Đặt $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $P = (P_x, P_y)$, $Q = (Q_x, Q_y)$, $Tr = (Tr_x, Tr_y)$ có dạng ma trận của phương trình là: $Q = P.M + Tr$.

M: *Ma trận biến đổi*

Tr: *Vector tịnh tiến*

Ký hiệu: $T = (M, Tr)$

Vậy một phép affine được xác định bởi 6 hằng số gồm một ma trận vuông cấp 2 và một vector hai chiều.

Trong đồ hoạ máy tính, ta thường dùng thuật ngữ phép biến đổi thay cho phép biến đổi affine, bao gồm các phép tịnh tiến, phép biến đổi tỉ lệ, phép quay, …

3.3. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI AFFINE CƠ BẢN

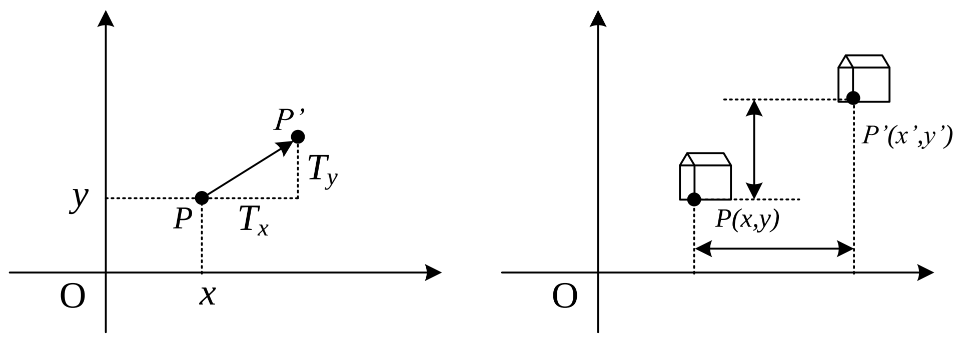
3.3.1. Phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến (*Translation*) dùng để dịch chuyển đối tượng từ vị trí này sang vị trí khác theo một hướng với một khoảng cách xác định (Hình 3.1b).

Phép tịnh tiến một vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ có phương trình:

$$\begin{cases} Q_x = P_x + v_x \\ Q_y = P_y + v_y \end{cases}$$

Đây là phép affine có M là ma trận đơn vị, $M = E$, và $Tr = \vec{v}$.



a. Tịnh tiến một điểm *b. Tịnh tiến một hình*

Hình 3.1. Phép tịnh tiến hai chiều

3.3.2. Phép biến đổi tỉ lệ

Phép biến đổi tỉ lệ (*Scaling*) dùng để thay đổi kích thước đối tượng bằng cách phóng to hoặc thu nhỏ đối tượng theo hai trục với hệ số co giãn (S_x, S_y) lần lượt theo trục x và trục y.

Để co hay giãn toạ độ của một điểm $P(x, y)$ theo trục hoành và trục tung, ta nhân S_x và S_y lần lượt cho các toạ độ của điểm P.

$$\begin{cases} Q_x = S_x P_x \\ Q_y = S_y P_y \end{cases}$$

Đây là phép affine có ma trận biến đổi

$$M = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

Vector tịnh tiến là vector không, $Tr = \theta$.

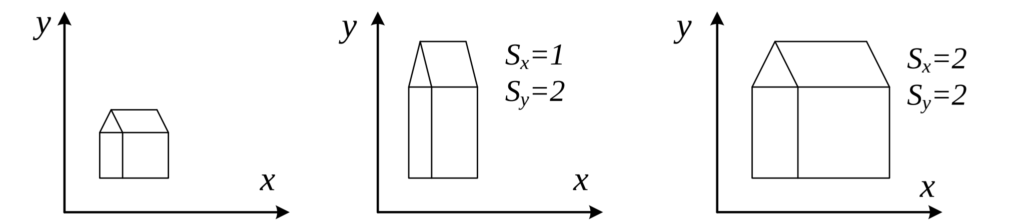
Trường hợp $|S_x| = |S_y| = S$: phép biến đổi đồng bộ

- S = 1: Phép thu nhỏ hình ảnh.
- S = 1: Phép phóng to hình ảnh.
- S = 1: Phép đồng nhất, đối xứng trục, đối xứng tâm.

a. Đối xứng qua trục x: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_x = 1 \\ S_y = -1 \end{cases}$

b. Đối xứng qua trục y: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_x = -1 \\ S_y = 1 \end{cases}$

c. Đối xứng qua tâm O: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_x = -1 \\ S_y = -1 \end{cases}$



a) Ban đầu *b) Biến đổi co giãn* *c) Biến đổi đồng dạng*

Hình 3.2. Phép biến đổi tỉ lệ

Hình 3.2 minh hoạ kết quả của phép biến dạng đối với một hình ban đầu.

3.3.3. Phép quay quanh gốc O

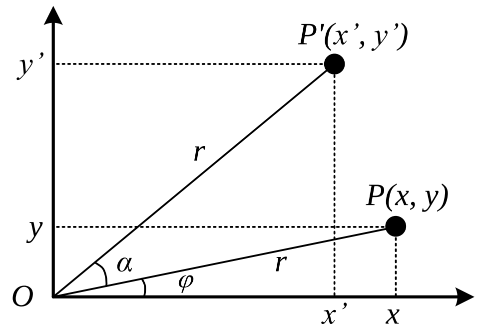
Xét phép quay (*Rotation*) quanh gốc toạ độ *O* một góc α.

Xét điểm *P*(*x*, *y*) trên hình 3.3, quay đến vị trí *P'*(*x'*, *y'*) với góc quay α. Ta quy ước phép quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm. Ở đây ta xét phép quay quanh gốc toạ độ.

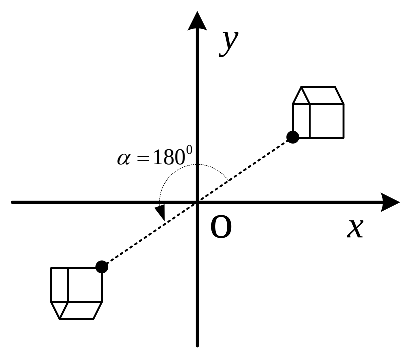
Biểu diễn dạng toán học của phép quay:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \varphi) \\ y' = r\sin(\alpha + \varphi). \end{cases}$$

với α và φ là các góc quay như trên hình 3.3.



Hình 3.3. Phép quay hình



Hình 3.4. Phép đối xứng qua tâm là gốc toạ độ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y' = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha \\ y' = r\cos\varphi\sin\alpha \; + r\sin\varphi\cos\alpha \end{cases}$$

Biểu diễn qua (x, y)

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha \; + y\cos\alpha \end{cases}$$

Đây là phép affine có ma trận biến đổi

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Vector tịnh tiến là vector không, $Tr = \theta$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Trường hợp quay một góc quay $\alpha = 180^0$. Đây là phép đối xứng, *P* và *P'* đối xứng qua gốc toạ độ.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow [T_R]^{180^o} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

3.3.4. Phép biến dạng

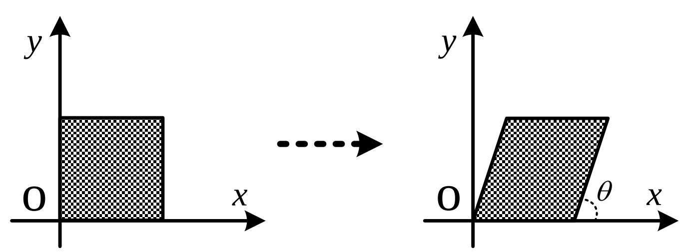
Phép biến dạng (*Shearing*) dùng để thay đổi hình dạng của đối tượng, được thực hiện bằng cách thêm vào một hàm tuyến tính với sh_x, sh_y là các hệ số biến dạng theo trục *x*, trục *y* tương ứng.

a. Phép biến dạng theo trục x: làm thay đổi toạ độ *x*, toạ độ *y* giữ nguyên.

$$\begin{cases} x' = x + y.sh_x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \left[T_{sh_x,0}\right] = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

với $sh_x = tan\theta$.



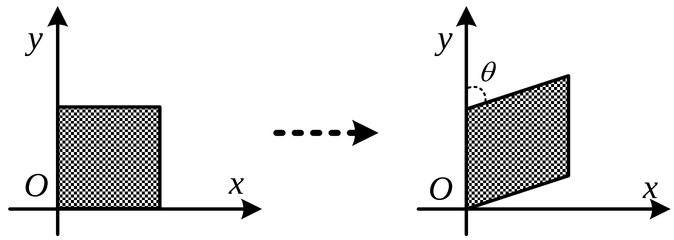
Hình 3.9. Phép biến dạng theo trục x

b. Phép biến dạng theo trục y: làm thay đổi toạ độ y, toạ độ *x* giữ nguyên.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = x.sh_y + y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \left[T_{0,sh_y}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

với $sh_y = tan\theta$.

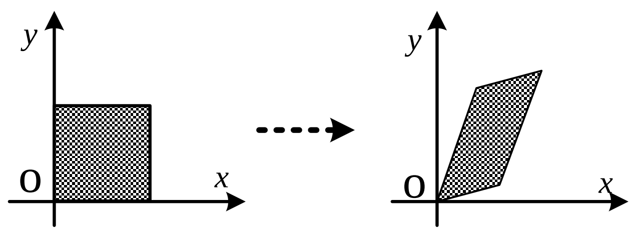


Hình 3.10. Phép biến dạng hình vuông theo trục y

c. Phép biến dạng tổng quát

$$\begin{cases} x' = x + y.sh_x \\ y' = x.sh_y + y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \left[T_{sh_x,\, sh_y} \right] = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3.11. Phép biến dạng tổng quát theo trục x, y

3.4. CÁC TÍNH CHẤT

Tính chất của các phép biến đổi affine:

1) *Phép biến đổi affine bảo toàn tính thẳng hàng*

Ảnh của ba điểm thẳng hàng qua phép biến đổi affine cũng là 3 điểm trên đường thẳng.

Phương trình tham số của đường thẳng qua hai điểm *A, B* là:

$$P(t) = (1-t)A + tB$$

u cũng chính là tỉ lệ chia đoạn thẳng *AB* của điểm *P*.

Phép affine *T* = (*M*, *Tr*) : *P*→*Q* ⇔ *Q* = *P*.*M* + *Tr*.

Gọi *A'* = *T*(*A*)*, B'* = *T*(*B*), *Q* = *T*(*P*) có

A' = *AM* + *Tr*

B' = *BM* + *Tr*

$Q = PM + Tr \Leftrightarrow Q = [(1 - t)A + tB]M + Tr$

$\Leftrightarrow Q = (1 - t)AM + tBM + Tr$

$\Leftrightarrow Q = (1 - t)(AM + Tr) + t(BM + Tr) + Tr - (1 - t)Tr - tTr$

$\Leftrightarrow Q = (1 - t)A' + tB'$.

Đây chính là phương trình tham số của đường thẳng $A'B'$. Hay $Q \in A'B'$. Q cũng chia đoạn thẳng $A'B'$ theo cùng tỉ lệ t.

Từ kết quả trên, để biến đổi một đoạn thẳng đi qua hai điểm A và B, ta chỉ cần áp dụng phép biến đổi cho hai điểm A, B rồi vẽ lại đoạn thẳng qua hai điểm mới.

2) *Phép biến đổi affine bảo toàn tỉ lệ chia đoạn thẳng:*

Từ hai tính chất trên, có kết luận: ảnh của đoạn thẳng là đoạn thẳng, hay ảnh của một đa giác là một đa giác. Để tìm ảnh của một đa giác chỉ cần tìm ảnh các đỉnh rồi nối chúng lại.

3) *Phép biến đổi affine bảo toàn tính song song của các đường thẳng:*

Ảnh của hai đường thẳng song song là hai đường song song.

Phương trình tham số của đường thẳng qua điểm A có vector chỉ phương $\vec{\beta}$ dạng ma trận là: $P = A + t\beta,\ t \in \mathbb{R}$.

Hai đường thẳng song song $L_1 // L_2$ đi qua hai điểm A, B tương ứng và có cùng vector chỉ phương $\vec{\beta}$ có phương trình:

$L_1 : P = A + t\beta$.

$L_2 : P = B + t\beta$.

Qua phép affine $T = (M, Tr)$ có ảnh của đường thẳng L_1 là:

$L'_1 : Q = PM + Tr$

$L'_1 : Q = (A + t\beta)M + Tr$

$L'_1 : Q = (AM + Tr) + t\beta M$

$L'_1 : Q = A' + t\beta M$.

Đây là phương trình của đường thẳng qua điểm A có vector chỉ phương $\overrightarrow{\beta M}$.

Tương tự, phương trình của đường thẳng L'_2 là ảnh của L_2 là:

$L'_2 : Q = B' + t\beta M$.

L'_2 là đường thẳng có cùng vector chỉ phương $\overrightarrow{\beta M}$. Hay $L'_1 // L'_2$.

Từ tính chất này có: ảnh của một hình bình hành là một hình bình hành.

4) *Tích các phép affine là phép affine*

Cho $T_1 = (M_1, Tr_1) : P \rightarrow Q$ và $T_2 = (M_2, Tr_2) : Q \rightarrow W$ thì ánh xạ tích $T = T_2T_1 : P \rightarrow W$.
Cần tìm phương trình W theo P.

$Q = PM_1 + Tr_1$

$W = QM_2 + Tr_2 \Leftrightarrow (PM_1 + Tr_1)M_2 + Tr_2$

$\Leftrightarrow W = PM_1M_2 + Tr_1M_2 + Tr_2$

$\Leftrightarrow W = PM + Tr$

với $M = M_1M_2$ và $Tr = Tr_1M_2 + Tr_2$.

Vậy tích của hai phép affine là một phép affine.

Tương tự, tích n phép affine $T_i = (M_i, Tr_i),\ i = 1,2,\ldots n,$ là một phép affine $T = (M, Tr)$ với: $M = M_1M_2 \ldots M_n$ và $Tr = Tr_1M_2 \ldots M_n + Tr_2M_3 \ldots M_n + \ldots + Tr_{n-1}M_n + Tr_n$.

Một phép affine bất kì có thể xem là tích của các phép affine cơ bản trên. Chẳng hạn, xét T là phép quay quanh một điểm I bất kì một góc θ. T có thể xem là tích của ba phép affine cơ bản sau:

T_1 : Tịnh tiến vector $\overrightarrow{OI}$ để đưa điểm I về gốc O. $M_1 = E$ và $Tr_1 = \overrightarrow{OI}$.

T_2 : Quay quanh O một góc θ. $M_2 = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ và $Tr_2 = \vec{0}$.

T_3 : Tịnh tiến vector $\overrightarrow{OI}$ để đưa điểm $I(v_x, v_y)$ về gốc vị trí cũ. $M_3 = E$ và $Tr_3 = \overrightarrow{OI}$.

Theo tính chất 4 thì T là phép affine, $T = (M, Tr)$.

Đặt $c = cos(\theta), s = \sin(\theta), \vec{v} = \overrightarrow{OI} = (v_x, v_y)$. Ta có

$$M = M_1M_2M_3 = EM_2E = M_2 = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$Tr = Tr_1M_2M_3 + Tr_2M_3 + Tr_3$

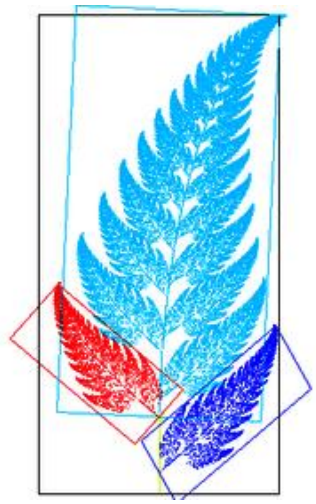
$Tr = -vM_2 + v$

$$Tr = \left(-v_x, -v_y\right)\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} + \left(v_x, v_y\right)$$

$Tr = (-cv_x + sv_y, -sv_x - cv_y) + (v_x, v_y)$

$Tr = ((1 - c)v_x + s\, v_y, -sv_x + (1 - c)v_y)$

Hình 3.12 minh hoạ quá trình tạo lá dương xỉ dựa vào các phép biến đổi affine. Mỗi lá của cây dương xỉ là kết quả của phép affine của phần lá trước: Ví dụ, từ lá màu đỏ có thể được biến đổi thành lá xanh nhỏ và lá xanh lớn bằng cách kết hợp các phép biến đổi đối xứng, quay, co giãn và tịnh tiến.



Hình 3.12. Thực hiện tích các phép affine để tạo lá cây dương xỉ

5) *Nghịch đảo của phép affine là phép affine*

Cho phép affine $T = (M, Tr) : P \rightarrow Q$.

thì phép biến đổi ngược $T^{-1}: Q \rightarrow P$. Ta có: $Q = PM + Tr \Leftrightarrow (Q - Tr) = PM$

$\Leftrightarrow P = (Q - Tr)M^{-1}$

$\Leftrightarrow P = QM^{-1} - TrM^{-1}$

$\Leftrightarrow P = QM' + Tr'$.

Đây là phép affine, $T^{-1} = (M', Tr')$ với $M' = M^{-1}$ và $Tr' = -TrM^{-1}$.

Theo giả thiết $ad - bc \neq 0$ nên $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch với

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

- T là phép tịnh tiến một vector $\vec{v} = \left(v_x, v_y\right)$. Ta có $M = E$ và $Tr = \vec{v}.M' = M^{-1} = E$ và $Tr' = -TrM^{-1} = -Tr = \vec{v}$. Vậy, nghịch đảo của phép tịnh tiến một vector $\vec{v}$ là phép tịnh tiến một vector $-\vec{v}$.
- T là phép quay quanh O một góc θ. Ta có:

  $$M = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ và } Tr = \vec{0}.$$

$$M' = M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(-\theta) & sin(-\theta) \\ -sin(-\theta) & cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

và $Tr' = \vec{0}$. Vậy, nghịch đảo của phép quay quanh *O* một góc θ là phép quay quanh *O* một góc $-\theta$.

- *T* là phép biến đổi tỉ lệ theo hai trục với hệ số (S_x, S_y) có

$$M = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \text{ và } Tr = \vec{0} \quad M' = M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{S_x S_y}\begin{bmatrix} S_y & 0 \\ 0 & S_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} \end{bmatrix}$$

và $Tr' = \vec{0}$. Vậy, nghịch đảo của phép co giãn với hệ số (S_x, S_y) là co giãn với hệ số $\left(\frac{1}{S_x}, \frac{1}{S_y}\right)$.

- T là phép nghiêng theo cả hai trục với hệ số (h, g) có: $M = \begin{bmatrix} 1 & g \\ h & 1 \end{bmatrix}$ và $Tr = \vec{0}$.

  $M' = M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{1-gh}\begin{bmatrix} 1 & -g \\ -h & 1 \end{bmatrix}$ và $Tr' = \vec{0}$. Nếu T là phép nghiêng theo *x* với hệ số *h* (*g* = 0) thì $M = \begin{bmatrix} 1 & g \\ h & 1 \end{bmatrix}$ và $Tr = \vec{0}$. $M' = M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -g \\ -h & 1 \end{bmatrix}$ và $Tr' = \vec{0}$. Vậy nghịch đảo của phép nghiêng theo *x* với hệ số *h* là phép nghiêng theo *x* với hệ số $-h$. Tương tự, nghịch đảo của phép nghiêng theo *y* với hệ số *g* là phép nghiêng theo *y* với hệ số $-g$.

3.5. HỆ TOẠ ĐỘ THUẦN NHẤT

Để đơn giản trong việc cài đặt các phép affine, một điểm *P*(*x*, *y*) được xem tương ứng với một điểm trong hệ tọa độ thuần nhất là $\overline{P}(x, y, 1)$. Phép affine *T* = (*M*, *Tr*) trong hệ toạ độ thuần nhất được biểu diễn bởi một ma trận vuông cấp ba bằng cách nhúng *M* và *Tr* vào đó:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ Tr_x & Tr_y & 1 \end{bmatrix}.$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp, việc tìm ảnh *Q* của điểm *P* từ tính tích của vector với ma trận rồi tính tổng của hai vector chỉ còn tính tích của một vector với ma trận.

$Q = PM + Tr \Leftrightarrow \bar{Q} = \bar{P}\bar{M}.$

Tương tự, việc tìm tích của các phép affine chỉ còn là tính tích của các ma trận cấp ba.

$$\bar{M} = \overline{M_1}\ \overline{M_2}\ \ldots\ \overline{M_n}.$$

Để đơn giản hơn nữa, một điểm trong hệ toạ độ thuần nhất là $\overline{P}(x, y, 1)$ được nhúng vào dòng cuối của ma trận 0 thì mọi việc chỉ còn là tính tích hai ma trận cấp ba.

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ P_x & P_y & 1 \end{bmatrix}.$$

Mục đích của hệ toạ độ thuần nhất là nhằm để đơn giản hơn trong cài đặt mã lệnh.

3.6. Khai báo và cài đặt

3.6.1. Khai báo kiểu

```
typedef struct{
  float x, y;
} Point;

typedef struct{
  float dx, dy;
} Vector;

typedef float Affine[3][3];
typedef Affine Matran;
```

3.6.2. Cài đặt

```
void Tinhtien(Affine T, Vector V)
{
  T[0][0]=1;    T[0][1]=0;    T[0][2]=0;
  T[1][0]=0;    T[1][1]=1;    T[1][2]=0;
  T[2][0]=V.dx; T[2][1]=V.dy; T[2][2]=1;
}

void Quay(Affine T, float theta)
{
  float c, s;
  c=cos(theta); s=sin(theta);
```

```
  T[0][0]=c;     T[0][1]=s;     T[0][2]=0;
  T[1][0]=-s;    T[1][1]=c;     T[1][2]=0;
  T[2][0]=0;     T[2][1]=0;     T[2][2]=1;
}

void Nghieng(Affine T, float h, float g)
{
  T[0][0]=1;     T[0][1]=g;     T[0][2]=0;
  T[1][0]=h;     T[1][1]=1;     T[1][2]=0;
  T[2][0]=0;     T[2][1]=0;     T[2][2]=1;
}

void Codan(Affine T, float Sx, float Sy)
{
  T[0][0]=Sx;    T[0][1]=0;     T[0][2]=0;
  T[1][0]=0;     T[1][1]=Sy;    T[1][2]=0;
  T[2][0]=0;     T[2][1]=0;     T[2][2]=1;
}

void TichMatran(Matran A, Matran B, Matran C)
{
  int i,j,k;

          for (i=0;i<3;i++)
            for (j=0;j<3;j++){
                        C[i][j]=0;
                        for(k=0;k<3;k++)
                        C[i][j]+=A[i][k]*B[k][j];
            }
}

void TichAffine(Affine A, Affine B, Affine C)
{
  TichMatran(A, B, C);
}

void Biendoi(Affine T, Point P, Point *Q)
```

```
{
  Matran PP={0}, QQ={0};

  PP[2][0]=P.x; PP[2][1]=P.y; PP[2][2]=1;
  TichMatran(PP, T, QQ);
  Q->x=QQ[2][0]; Q->y=QQ[2][1];
}
```

3.7. KẾT CHƯƠNG

Các phép biến đổi hình học cơ sở bao gồm tịnh tiến, quay và biến đổi tỉ lệ. Ngoài ra một số phép biến đổi khác cũng thường được áp dụng đó là phép đối xứng và biến dạng. Các phép biến đổi hình học cho phép dễ dàng thao tác lên các đối tượng đã được tạo ra, làm thay đổi mô tả về toạ độ của các đối tượng, từ đó đối tượng sẽ được thay đổi về hướng, kích thước và hình dạng. Cách biểu diễn dưới dạng ma trận thuần nhất 3×3 thuận tiện cho việc thực hiện các thao tác kết hợp giữa các phép biến đổi hình học.
