

西安电子科技大学

# 硕士学位论文



变增益迭代学习控制研究

作者姓名 \_\_\_\_\_ 贾长青 \_\_\_\_\_

指导教师姓名、职称 \_\_\_\_\_ 刘健 讲师 \_\_\_\_\_

申请学位类别 \_\_\_\_\_ 工学硕士 \_\_\_\_\_

学校代码 10701  
分类号 TP391

学号 20041211890  
密级 公开

# 西安电子科技大学

## 硕士学位论文

### 变增益迭代学习控制研究

作者姓名：贾长青

一级学科：控制科学与工程

二级学科（研究方向）：控制理论与控制工程

学位类别：工学硕士

指导教师姓名、职称：刘健 讲师

学 院：机电工程学院

提交日期：2023 年 6 月

# **Research on Variable Gain Iterative Learning Control**

A thesis submitted to  
XIDIAN UNIVERSITY  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of Master  
in Control Science and Engineering

By  
Jia Changqing  
Supervisor: Liu Jian    Title: Lecturer  
June 2023

## 摘要

迭代学习控制 (Iterative Learning Control, ILC) 是智能控制理论中一个相对较新但成熟的研究领域, 主要用于改善未知系统的瞬态响应和跟踪性能。虽然迭代学习控制可以在整个有限时间区间上实现对理想轨线的完全跟踪, 但并不是所有的迭代学习更新律都能够保证迭代学习过程的瞬态跟踪性能, 即在迭代学习过程中可能会出现超调现象。在实际应用中, 过大的超调可能会对系统的硬件造成致命的伤害。因此, 在迭代学习控制中, 研究系统输出跟踪误差和输入跟踪误差的单调收敛性不仅具有重要理论意义, 还具有重大的实用价值。鉴于变增益迭代学习控制律所需系统动力学信息较少, 且仿真研究中发现其能显著改善迭代学习控制系统的瞬态跟踪性能, 本文将系统深入研究两类具有时变增益的 P-型迭代学习控制律与系统瞬态跟踪性能的作用机理。本文的主要工作内容以及所得结论如下:

(1) 针对单输入单输出 (Single-Input Single-Output, SISO) 离散定常系统, 本文首先利用向量的垒叠技术和矩阵理论等工具严格证明了具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统在 1 范数、2 范数和无穷范数意义下的输出跟踪误差沿迭代轴单调收敛于 0。其次, 本文系统地分析了具有指数衰减增益的 P-型学习律与系统瞬态跟踪性能的作用机理, 研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。再次, 本文设计了一种具有指数递增增益的 P-型学习律, 并分别研究了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在 1 范数、2 范数以及无穷范数意义下的收敛特性。研究得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后, 数值仿真验证了所得理论结果的有效性。

(2) 针对单输入单输出离散时变系统, 本文首先给出了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差单调收敛的充要条件, 并研究了在经典 P-型学习律下系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在 1 范数、2 范数以及无穷范数意义下的收敛特性。其次, 本文通过研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。再次, 本文通过研究得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后, 数值仿真验证了所得理论结果的有效性。

(3) 针对多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output, MIMO) 离散定常系统, 本文首先给出了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差单调收敛的充要条件, 并研究了在

常增益 P-型学习律下系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在 1 范数以及无穷范数意义下的收敛特性。其次，本文通过研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性。再次，本文得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。最后，数值仿真验证了所得理论结果的有效性。

**关键词：**迭代学习控制，完全跟踪，变增益迭代学习律，输出跟踪误差的收敛特性，输入跟踪误差的收敛特性

## ABSTRACT

Iterative Learning Control (ILC) is a relatively new but mature research field in intelligent control theory, mainly used to improve the transient response and tracking performance of control systems with unknown dynamic information. Although ILC can track the desired trajectory over the whole finite time interval, not all ILC update laws can ensure the transient tracking performance of the iterative learning process, that is, overshoot can occur during the iterative learning process. In practical applications, excessive overshoot can cause fatal damage to the system hardware. Therefore, in ILC, studying the monotonic convergence of system output tracking error and input tracking error not only has important theoretical significance, but also has significant practical value. Since the varying gain ILC law requires less system dynamics information, and it is found in the simulation that it can significantly improve the transient tracking performance of the ILC system, this thesis will deeply study the mechanism of two types P-type ILC law with time-varying gain and the transient tracking performance of the system. The main work of this thesis are as follows:

(1) For single input single output (SISO) discrete time invariant systems, this thesis firstly proves that P-type update law with exponential decay gain can't ensure that the output tracking error of the system monotonically converges to zero along the iteration axis in the sense of 1-norm, 2-norm, and  $\infty$ -norm using tools such as vector barrier stacking techniques and matrix theory. Secondly, this thesis analyzes the mechanism of P-type update law with exponential decay gain and the transient tracking performance of the system, and concludes that P-type update law with exponential decay gain can ensure the monotonic convergence of the system input tracking error in the sense of 1-norm, at the same time, a sufficient condition for the monotonic convergence of the system input tracking error in the 2-norm sense is also obtained. Thirdly, this thesis designs a P-type update law with exponentially increasing gain, and studies the convergence characteristics of system output tracking error and input tracking error in the sense of 1-norm, 2-norm, and  $\infty$ -norm, respectively. It is found that the P-type update law with exponentially increasing gain can guarantee the monotonic convergence of the system output tracking error in the sense of  $\infty$ -norm, and a sufficient condition for the monotonic convergence of the system output tracking error in the 2-norm sense is obtained. Finally, numerical simulation verifies the effectiveness of the theoretical results obtained.

(2) For single input single output discrete time varying systems, this thesis firstly presents the necessary and sufficient conditions for the monotonic convergence of system output tracking error and input tracking error, and studies the convergence characteristics of system output tracking error and input tracking error in the sense of 1-norm, 2-norm, and  $\infty$ -norm under classical P-type update law. Secondly, this thesis studies that P-type update law with exponential decay gain can ensure the monotonic convergence of system input tracking error in the sense of 1-norm, at the same time, a sufficient condition for the monotonic convergence of the system input tracking error in the 2-norm sense is also obtained. Thirdly, this thesis studies that the P-type update law with exponentially increasing gain can guarantee the monotonic convergence of the system output tracking error in the sense of  $\infty$ -norm, and a sufficient condition for the monotonic convergence of the system output tracking error in the 2-norm sense is obtained. Finally, numerical simulation verifies the effectiveness of the theoretical results obtained.

(3) For multi input multi output (MIMO) discrete time invariant systems, the necessary and sufficient conditions for the monotonic convergence of the output tracking error and input tracking error of the system are firstly given, and the convergence characteristics of the output tracking error and input tracking error of the system in the sense of 1-norm and  $\infty$ -norm under constant gain P-type update law are studied. Secondly, this thesis studies that the P-type update law with exponential decay gain can ensure the monotonic convergence of the system input tracking error in the sense of 1-norm. Thirdly, this thesis studies that the P-type update law with exponentially increasing gain can guarantee the monotonic convergence of the system output tracking error in the sense of  $\infty$ -norm. Finally, numerical simulation verifies the effectiveness of the theoretical results obtained.

**Keywords:** Iterative learning control, Perfect tracking, Varying gain update law, Convergence characteristics of output tracking error, Convergence characteristics of input tracking error

## 插图索引

图 1.1	迭代学习控制算法流程图 . . . . .	1
图 1.2	本文研究思路框架示意图 . . . . .	7
图 2.1	SISO 离散系统的期望轨迹示意图 . . . . .	32
图 2.2	系统 (2-96) 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数 . . . . .	33
图 2.3	系统 (2-96) 采用 (2-20) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	33
图 2.4	(2-2) 更新律分别应用于系统 (2-95)(2-96) 之后, 输入跟踪误差的 1 范数 . . . . .	34
图 2.5	系统 (2-95) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数 . . . . .	34
图 2.6	系统 (2-96) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 2 范数以及无穷范数 . . . . .	35
图 2.7	系统 (2-96) 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数、无穷范数、 2 范数 . . . . .	35
图 2.8	系统 (2-96) 采用 (2-70) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	36
图 3.1	系统 3.1 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	65
图 3.2	系统 3.2 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	66
图 3.3	系统 3.3 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	66
图 3.4	系统 3.3 采用 (2-20) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	67
图 3.5	系统 3.3 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	67
图 3.6	系统 3.1 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数 . . . . .	68
图 3.7	系统 3.4 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 2 范数 . . . . .	69
图 3.8	系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数 . . . . .	69
图 3.9	系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的无穷范数 . . . . .	70
图 3.10	系统 3.4 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 2 范数 . . . . .	70
图 3.11	系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数 . . . . .	70
图 4.1	MIMO 离散系统的期望轨迹示意图 . . . . .	94
图 4.2	MIMO 离散系统的期望输入示意图 . . . . .	94
图 4.3	系统 4.1 采用三种更新律之后输出跟踪误差的 1 范数 . . . . .	94
图 4.4	系统 4.1 采用三种更新律之后输出跟踪误差的无穷范数 . . . . .	95
图 4.5	系统 4.1 分别采用 (4-2) 更新律和 (4-46) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数 . . . . .	96
图 4.6	系统 4.1 采用 (4-73) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数 . . . . .	96
图 4.7	系统 4.1 采用 (4-2) 更新律和 (4-46) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数 . . . . .	97



图 4.8 系统 4.1 采用 (4-46) 更新律和 (4-73) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数 . . . . .	98
---	----

## 表格索引

表 2.1	SISO 离散定常系统采用常增益 P-型学习律所得结论 . . . . .	37
表 2.2	SISO 离散定常系统采用具有指数衰减增益的 P-型学习律所得结论 . .	37
表 2.3	SISO 离散定常系统采用具有指数递增增益的 P-型学习律所得结论 . .	37
表 3.1	SISO 离散时变系统采用经典 P-型学习律所得结论 . . . . .	72
表 3.2	SISO 离散时变系统采用具有指数衰减增益的 P-型学习律所得结论 . .	72
表 3.3	SISO 离散时变系统采用具有指数递增增益的 P-型学习律所得结论 . .	72

## 符号对照表

符号	符号名称
$\ \cdot\ _1$	向量或矩阵的 1 范数
$\ \cdot\ _2$	向量或矩阵的 2 范数
$\ \cdot\ _\infty$	向量或矩阵的无穷范数
$\max(a, b)$	取 $a, b$ 中较大的值
$\operatorname{sgn}(\cdot)$	符号函数
$A^\top$	矩阵 $A$ 的转置
$\rho(A)$	矩阵 $A$ 的谱半径
$\operatorname{rank}(A)$	矩阵 $A$ 的秩
$\mathbb{R}^n$	$n$ 维实列向量空间
$\mathbb{N}$	正整数集合
$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}^{n \times m}$	$n \times m$ 维矩阵空间

## 缩略语对照表

缩略语	英文全称	中文对照
ILC	<b>I</b> terative <b>L</b> earning <b>C</b> ontrol	迭代学习控制
NOILC	<b>N</b> orm <b>O</b> ptimization <b>I</b> LC	范数最优迭代学习控制
POILC	<b>P</b> arameter <b>O</b> ptimization <b>I</b> LC	参数最优迭代学习控制
SISO	<b>S</b> ingle- <b>I</b> nterface <b>S</b> ingle- <b>O</b> utput	单输入单输出
MIMO	<b>M</b> ultiple- <b>I</b> nterface <b>M</b> ultiple- <b>O</b> utput	多输入多输出
P-I-D	<b>P</b> roportion- <b>I</b> ntegral- <b>D</b> erivative	比例-积分-微分
MC	<b>M</b> onotonic <b>C</b> onvergence	单调收敛性
HOILC	<b>H</b> igher <b>O</b> rders <b>I</b> LC	高阶 ILC
IOCM	<b>I</b> nterface <b>O</b> utput <b>C</b> ouple <b>M</b> atrix	输入输出耦合矩阵

## 目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 课题研究背景与意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	3
1.3 论文的主要工作及章节安排 .....	6
第二章 两类变增益 SISO 定常迭代学习控制系统收敛性分析 .....	9
2.1 问题描述.....	9
2.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性.....	16
2.2.1 输出偏差的收敛特性.....	16
2.2.2 输入偏差的收敛特性.....	19
2.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性.....	26
2.3.1 输出偏差的收敛特性.....	27
2.3.2 输入偏差的收敛特性.....	29
2.4 仿真与分析.....	32
2.5 小结.....	36
第三章 两类变增益 SISO 时变迭代学习控制系统收敛性分析 .....	39
3.1 问题描述.....	39
3.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性.....	45
3.2.1 输出偏差的收敛特性.....	45
3.2.2 输入偏差的收敛特性.....	48
3.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性.....	54
3.3.1 输出偏差的收敛特性.....	55
3.3.2 输入偏差的收敛特性.....	60
3.4 仿真与分析.....	64
3.5 小结.....	71
第四章 两类变增益 MIMO 定常迭代学习控制系统收敛性分析 .....	73
4.1 问题描述.....	73
4.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性.....	82
4.2.1 输出偏差的收敛特性.....	82
4.2.2 输入偏差的收敛特性.....	86
4.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性.....	88
4.3.1 输出偏差的收敛特性.....	88
4.3.2 输入偏差的收敛特性.....	91
4.4 仿真与分析.....	93
4.5 小结.....	98

第五章 总结与展望 .....	99
5.1 论文总结.....	99
5.2 研究展望.....	100
参考文献.....	101

## 第一章 绪论

### 1.1 课题研究背景与意义

迭代学习控制作为一种具有学习能力的控制方法，是智能控制方法中的一个热门研究领域。迭代学习控制的基本思想是通过利用系统的历史运行数据更新系统的输入去改善系统的跟踪性能。该思想最早可追溯到 1970 年，但是直到 1984 年，由日本学者 Arimoto 等人对这一思想进行完善并通过数学方法验证了该方法的可行性，随后用英语发表了相关研究成果，这一思想才得到人们的思考和研究<sup>[1,2]</sup>。此后，迭代学习控制逐渐发展成为智能控制领域的研究热点，经过近 40 年的发展，在理论上取得了丰硕的成果<sup>[3-5]</sup>，并在工业应用领域得到了广泛应用<sup>[6-9]</sup>。

迭代学习控制的主要任务是，针对重复运行的控制系统和给定的期望轨迹（即期望达到的控制效果），通过迭代的方式找到与期望轨迹相对应的理想系统输入，将该输入信号送入系统后，系统的实际输出可以完全跟踪期望轨迹<sup>[10]</sup>。迭代学习控制算法的具体流程如下：对于一个包含未知信息的控制系统，首先将初始输入送入系统并进行记录，系统对于一个输入信号必然会有一个相应的输出信号，将期望输出和系统的实际输出作差就可以得到系统当前运行的输出偏差，然后利用该输出偏差对本次运行的输入信号进行校正，在系统下一次迭代运行时将校正后的输入信号送入系统，最后按照这样的步骤不断迭代运行系统，直至系统输出可以完全跟踪期望输出为止。具体的算法流程如图 1.1 所示。

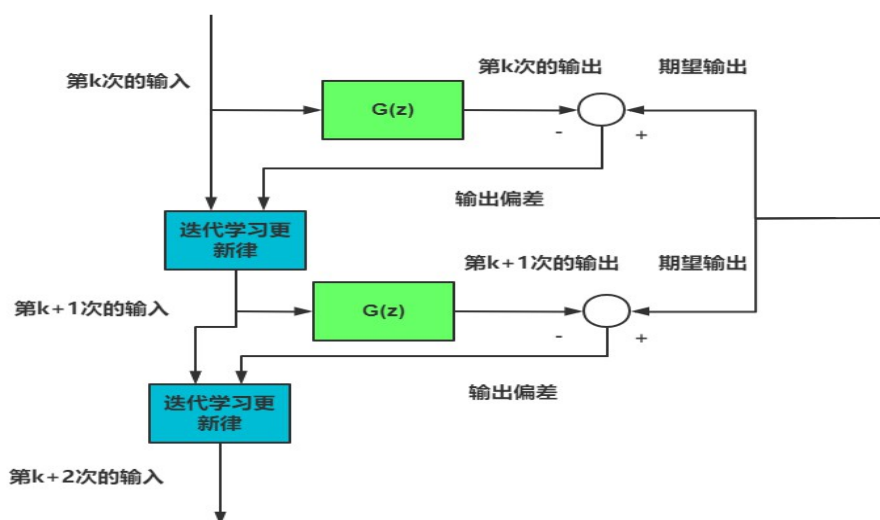


图 1.1 迭代学习控制算法流程图

从迭代学习控制的流程中可以看出，迭代学习控制理论与传统控制理论具有显

著的区别<sup>[11-13]</sup>，以下为迭代学习控制的几个特点：

1) 迭代学习控制针对的系统必须是重复运行的。因为迭代学习控制的核心思想是利用系统之前运行得到的输出偏差来校正下一次的控制输入，即从失败的实践中去学习经验，通过不断地学习，最终找到成功的策略。所以迭代学习控制这一算法更加适合于重复运行的系统，这一要求在工业，交通等领域并非是严格的，恰恰相反，在这些领域中存在许多此类任务，例如控制机械臂重复执行某一动作去完成作业。

2) 迭代学习控制可以实现完全跟踪。一般来说，迭代次数越多，系统的实际输出就越能够更好地跟踪期望输出。当迭代次数达到一定的数量之后，系统的实际输出与期望输出之间的偏差值就会到达一个非常小的数量级。迭代学习控制的这一特点可以帮助实现很多高精度的控制任务<sup>[14]</sup>，例如对光刻机实现精密控制。

3) 传统控制的一般方法是首先对控制对象进行建模，然后根据控制任务和建好的控制模型来计算相应的控制输入，最后将计算得到的控制信号送入控制系统。在这个过程中，对系统进行精确的建模是一件比较困难的事情，一方面并不是每一个系统的参数都是可以获得的，另一方面在获取系统参数时很有可能因为测量等原因产生误差。如果系统模型与真实系统存在较大偏差，那么通过传统控制方法得到的控制信号就很有可能是错误的。与传统控制方法不同，迭代学习控制并不需要对系统进行精确的建模，甚至不需要获取系统全部的动力学信息。从迭代学习控制的流程中可以看出，该控制方法是一种数据驱动的控制方法，仅利用系统的输入输出信息就可以实现控制系统。

4) 应用迭代学习控制的系统必须保证，在每一次运行时系统初始状态保持一致。因为在迭代过程中，迭代学习控制方法会利用学习到的经验来校正控制输入，而系统输出是由零状态响应和零输入响应组成，为了使学习到的经验有效，必须保证系统的初始条件在每一次迭代时保持一致。

尽管迭代学习控制已经成为智能控制领域中一种被广泛应用的控制方法，并为许多控制任务提供了优秀的控制策略，但在实际应用中仍然面临各种问题。其中一个重要的问题是超调现象的发生，即系统输出在趋近期望输出之前会出现较大的误差，根据迭代学习控制的思想，较大的误差会导致下一次输入信号变大，从而对系统设备造成损坏。为了消除超调的产生，一个行之有效的方法是使系统输出跟踪误差实现单调收敛，即 (Better than Better)。这种方法意味着随着迭代次数的增加，系统输出跟踪误差会单调收敛于 0，继而在校正下一次输入时不会导致输入信号太大。因此，研究系统的单调收敛性在理论和实际应用中都具有重大意义。

目前，单调收敛迭代学习控制技术的研究取得了许多杰出成果。针对单输入单输出连续时间线性定常系统，学者 Lee 和 Bien 曾经在数值仿真中指出在 PD-型学习律中引入指数衰减增益可以显著改善系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的瞬态性能，



但其是否可以保证系统输出跟踪误差在 1 范数、2 范数以及无穷范数意义下的单调收敛性 (Monotonic Convergence, MC) 有待进一步论证。针对单输入单输出离散定常系统, 学者 Moore 研究了具有指数衰减增益的 P-型学习律的收敛特性, 指出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在 1 范数和 2 范数意义下的单调收敛性, 并给出严格的理论推导, 但是由于证明过程中存在技术缺陷, 其结论是否成立有待进一步论证。上述这些发现激励本文研究变增益迭代学习更新律的收敛特性。

## 1.2 国内外研究现状

自从迭代学习控制受到关注, 已经有大量的相关文献被发表, 这些文献从不同的方面对迭代学习控制进行了研究。包括以下几个方面:

1) 设计不同的迭代学习更新律以及分析算法的收敛性。典型的迭代学习更新律包括 Arimoto 型更新律<sup>[1, 15, 16]</sup>(1-1), PID 更新律<sup>[17-22]</sup>(1-2) 以及高阶迭代学习 (Higher Order ILC, HOILC) 更新律<sup>[23-26]</sup>(1-3):

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta e_k(t+1) \quad (1-1)$$

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_P e_k(t) + \Gamma_D \dot{e}_k(t) + \Gamma_I \int e_k(\tau) d\tau \quad (1-2)$$

$$u_{k+1}(t) = \sum \Lambda_i u_i(t) + \sum \Gamma_i e_k(t) \quad (1-3)$$

2) 分析系统的初始值问题<sup>[27-30]</sup>。在迭代学习控制算法中, 为了保证算法的有效性, 一般都会假设系统在每次运行时都可以恢复到相同的初始状态。而有时这样的条件是无法满足的, 因此该类研究意在使初始状态无法保持一致或者初始状态仅可以恢复到某一邻域的系统仍然可以使用迭代学习控制方法。

3) 鲁棒性问题<sup>[31, 32]</sup>。鲁棒性研究主要解决当系统存在不确定干扰或测量误差等问题时, 如何设计迭代学习更新律来保证系统的收敛性, 或者是解决噪声抑制和噪声预测等问题。

4) 超调现象的避免<sup>[15, 16, 33-36]</sup>。超调现象的产生使得很多迭代学习更新律并不能够直接地应用在控制任务中, 一个有效消减超调现象产生的方法是使系统的输出跟踪误差或者输入跟踪误差实现单调收敛。迭代学习控制的最终目的是找到系统理想输入使系统输出完全跟踪期望输出。如果输入跟踪误差可以实现单调收敛, 那么只要第一次的输入信号不会对设备造成毁坏, 之后的输入信号对于设备来说也是安全的; 输出跟踪误差单调收敛意味着输出偏差在校正下一次输入时不会导致输入信号出现超调, 从而保证了系统设备的安全。

5) ILC 优化<sup>[37-41]</sup>。ILC 优化主要分为两种, 一种是迭代学习控制范数优化 (Norm Optimization ILC, NOILC), 另一种是迭代学习控制参数优化 (Parameter Optimization

ILC, POILC)。但是这两种优化都有一个共同的目标,即对于不同的迭代学习更新律寻找一个合适的增益,从而改善系统的收敛速度和跟踪性能。一般的做法是首先定义一个二次型函数,然后通过对其求导,从而找出二次型函数的极小值,进而得到控制输入的极小值点。一般来说,在计算极小值点的公式中就会包含所要求的增益。

在实现系统单调收敛性方面,已经有学者做出大量的研究。Lee 和 Bien 两位学者在 [33] 文中指出,即使系统输出跟踪误差在  $\lambda$  范数意义下是单调收敛的,在无穷范数或是  $\sup$  范数意义下仍有可能出现超调现象。之后,两位学者通过仿真实验发现在常增益的基础上添加指数衰减因子  $e^{-\alpha t}$  可以显著改善系统的瞬态性能,减少超调现象的出现,但两位学者并没有对这一发现进行严格的理论推导。[42][43] 指出使用高反馈增益可以实现单调收敛性,但是使用高反馈增益在实际的应用中其实并不合适,因为这种技术可能会导致执行器饱和<sup>[44]</sup>,继而使迭代学习控制方法失效。

此外,一些学者将 ILC 与 PID 控制进行了结合<sup>[45, 46]</sup>, [47][48] 提出 PD 型迭代学习更新律, [49] 提出 PI 型迭代学习更新律,这些文献虽然没有直接给出可以保证系统输出跟踪误差单调收敛的条件,但是在设计增益方面给出了合理的建议,而一个合适的增益不仅能够改善系统瞬态跟踪性能,还可以加快系统收敛速度。[50] 针对 D 型迭代学习更新律做出了改进,通过对输出跟踪误差求分数阶导数来保证系统的单调收敛性, [20–22] 通过对 PID 型迭代学习更新律进行研究,衍生出了一些 PID 型迭代学习律的变种并提供了变种更新律中增益的设计方法,通过这些手段实现了系统的单调收敛性。

另外一些学者发现闭环极点的位置决定了学习过程中系统的瞬态响应,因此提出通过极点配置的方法去帮助系统实现单调收敛<sup>[51–56]</sup>。在之前的相关文献中,系统输出跟踪误差或者输入跟踪误差单调收敛的条件总是与时间  $T$  有关, [51] 提出了一种半滑动窗口迭代学习更新律,在采用该学习律之后,得出了另一个实现系统单调收敛性的条件,而这个条件与时间  $T$  无关。值得一提的是,该迭代学习更新律使用的增益是常增益,相比于时变增益,常增益在实际应用中更易于实现。美中不足的是在该更新律中,学习增益与系统传递函数的分母系数成比例,即该学习律的应用严重依赖于系统参数。在 [54] 中,主要通过反馈来改变系统 Markov 参数,从而使反馈之后的系统满足单调收敛的条件。[56] 研究了反馈在迭代学习控制中对瞬态性能的影响, [55] 指出状态反馈部分不会改变受控系统的可实现性,可用于改善系统的瞬态跟踪性能。

还有一些学者对高阶迭代学习更新律进行了研究<sup>[23, 24, 57, 58]</sup>, 文献 [59] 通过大量的仿真实例表明高阶迭代学习更新律可以改善系统瞬态跟踪性能,而更加严谨的证明在文献 [60] 中。[61] 研究了系统输出跟踪误差在  $lebesgue - p$  范数意义下的单调收敛性。[62] 从基于梯度的迭代学习更新律中得出系统输出跟踪误差单调收敛的充要

条件。[63] 指出只要系统执行任务的时间在  $T_{sup}$  内, 那么就可以利用 PD 型迭代学习更新律实现系统输出跟踪误差的单调收敛性。针对这一约束, 一方面可以减少任务执行时间来满足条件, 另一方面可以通过增加  $T_{sup}$  使得在执行任务的时间总是在  $T_{sup}$  之内, 该方法的不足之处是  $T_{sup}$  的确定需要系统精确的参数。文献 [64] 和 [44] 提出一种基于调整学习间隔的 PD 型迭代学习更新律, 该学习律在不同的迭代次数中学习的时间段是不一样的。例如在第一次迭代时, 该学习律会从  $0 - t_1$  时间段内的输出偏差进行学习, 在第二次迭代时, 该学习律会从  $0 - t_2$  时间段内的输出偏差进行学习。

在 NOILC 中, 主要是通过定义一个优化函数, 然后通过求导寻找极小值点从而获得下一次的输入信号, 优化函数一般定义为输出偏差的范数与在迭代轴上两个相邻输入的增量范数之和。通过 NOILC 去保证系统单调收敛一般是需要条件的, 例如文献 [65] 指出, 要想通过 NOILC 得到下一次的输入信号, 首先就需要计算系统矩阵的逆矩阵。[66] 在保持系统输出跟踪误差单调收敛的前提下, 使用连续映射的方法加速了 NOILC 的过程。POILC 对于保证单调收敛性的方法也是类似的, 不同的是 POILC 在优化函数中添加了可自定义的参数, 但也是通过求导计算去得到下一次的输入信号。

变增益迭代学习控制是相对于常增益迭代学习控制而言的, 在常增益迭代学习控制中, 学习增益是不会随着迭代次数和系统运行时间变化的, 而在变增益迭代学习中, 学习增益不仅可以随着系统运行时间进行变化, 还可以在系统迭代学习过程中随着迭代次数进行变化。已经有很多学者对变增益迭代学习控制进行了深入研究, 通过利用可变增益的方法, 成功解决了在传统固定增益迭代学习控制中存在的一些问题, 如收敛速度较慢、系统动态变化等问题。这些研究成果已经在迭代学习控制领域中得到广泛应用和验证, 为改进和优化迭代学习控制算法提供了有力的理论和技术支撑。

文献 [29] 结合闭环 D 型迭代学习控制, 提出了一种带初始误差校正的变增益迭代学习更新律, 该更新律可以很好地校正系统的初始状态误差, 并且校正误差所需的时间随着迭代次数的增加而不断减少。为了应对系统初始状态复位时偏差较大的问题, 文献 [67] 设计了一种闭环变增益加速迭代学习更新律来解决这个问题。[68] 提出了一种具有初始状态学习的闭环指数变增益学习律, 该学习律不仅收敛速度快, 而且解决了迭代学习控制中初始状态需要严格保持一致的问题。针对具有时滞的分数阶非线性系统, 文献 [69] 提出了一种变增益反馈  $PD^\alpha$  型迭代学习更新律。该更新律利用系统当前迭代运行时的输出偏差和系统上一次运行时的输出偏差同时对输入信号进行校正, 通过理论和仿真验证发现该更新律不仅可以加快迭代方向的收敛速度, 而且可以减少时间方向的跟踪误差。文献 [70] 将遗忘因子和变增益进行了结合, 该方法不仅可以加快系统收敛速度, 而且可以使系统输出偏差曲线差更加平滑, 确保系统输出能够完全跟踪期望轨迹。从以上这些文献中可以清楚地看出, 变增益迭代

学习更新律除了可以处理特定的情况之外，还可以被用于加快系统收敛速度。需要注意的是，本文使用的迭代学习更新律虽然也是变增益迭代学习更新律，但本文使用的学习律并不能够加快系统收敛速度，反而会减缓系统的收敛速度。这是因为在上述文献的学习律中，变增益一般都是大于 1 的，例如文献 [68] 中使用的变增益为  $\lambda(t) \cdot \eta$ ，其中  $\eta$  为常量， $\lambda(t) = e^{nt} (n > 0)$ ，显然由于  $n > 0$ ，变增益的数值是要大于常增益的。而本文中使用的变增益为  $e^{-\alpha t} \cdot \eta$  和  $e^{-(T-t-1)\alpha} \cdot \eta$ ，由于指数的幂次为负数，所以本文中的变增益数值要比常增益数值更小。另外需要注意的是，变增益可以随着时间和迭代次数同时进行变化，例如文献 [29] 中使用的学习律为：

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma e^{\beta(k)t} \dot{e}_k(t) + B^{-1} \sigma_k(t) \delta(t) \quad (1-4)$$

在等式右边第二项的  $\Gamma e^{\beta(k)t} \dot{e}_k(t)$  中， $\Gamma$  为常增益，而  $e^{\beta(k)t}$  函数随着时间  $t$  和迭代次数  $k$  同时进行变化。最后，在 NOILC 和 POILC 方面，由于其迭代学习更新律是通过二次型函数求导所得，所以在 NOILC 和 POILC 中的增益也是变增益，并且这种变增益一般是随着迭代次数进行变化的<sup>[71-73]</sup>。

### 1.3 论文的主要工作及章节安排

学者 Moore 在 [33] 的基础上，对具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在 1 范数和 2 范数意义下的单调收敛性这一定理作出了证明<sup>[16]</sup>，遗憾的是由于其证明技术存在缺陷，所得结论实际无法成立。也就是说迄今为止，具有指数衰减增益的 P-型学习律能够改善系统瞬态跟踪性能这一结论都是基于仿真实验得出，缺乏严格的理论推导。因此本文将对这一问题进行深入的研究，同时探索变增益迭代学习更新律与系统瞬态跟踪性能的作用机理。

本文各章节的内容安排如下：

第一章：绪论。本章首先介绍了迭代学习控制算法的基本流程，之后将迭代学习控制与传统控制作比较，总结了迭代学习控制的一些特点，随后指出在迭代学习控制中存在的一个关键问题，即系统的单调收敛性，并说明了保证系统单调收敛性的研究意义。最后，对本文的主要研究内容和章节安排进行了详细阐述。

第二章：两类变增益 SISO 定常迭代学习控制系统收敛性分析。针对单输入单输出离散定常系统，本章节首先指出在具有指数衰减增益的 P-型学习律相关文献中存在问题，并对文献中的结论重新进行了推导，结果证明具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数，2 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。其次，由于该更新律确实改善了系统的瞬态性能，本章节将分析系统输入跟踪误差在该更新律下的收敛特性。再次，本章节提出了一种具有指数递增增益的 P-型学习律，并分别研究了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在该更新律下的收敛特性。在章节

的末尾，通过数值仿真实验验证了本章所得结论的有效性。

第三章：两类变增益 SISO 时变迭代学习控制系统收敛性分析。针对单输入单输出离散时变系统，本章节首先分析了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在经典 P-型学习律下的收敛特性。其次，本章节分别研究了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在具有指数衰减增益的 P-型学习律下的收敛特性。再次，本章节分析了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在具有指数递增增益的 P-型学习律下的收敛特性。在章节的末尾，通过数值仿真实验验证了本章所得结论的有效性。

第四章：两类变增益 MIMO 定常迭代学习控制系统收敛性分析。针对多输入多输出离散定常系统，本章节首先分析了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在常增益 P-型学习律下的收敛特性。其次，本章节研究了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在具有指数衰减增益的 P-型学习律下的收敛特性。再次，本章节分析了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在具有指数递增增益的 P-型学习律下的收敛特性。在第二章和第三章中，本文分析了系统输出跟踪误差和系统输入跟踪误差在 1 范数、2 范数、无穷范数意义下的收敛特性，而由于多输入多输出系统的输出跟踪误差和输入跟踪误差在 2 范数意义下的处理情况比单输入单输出系统更加复杂，本文尚未得出合适的处理方法，所以本章将主要对多输入多输出系统的输出跟踪误差和输入跟踪误差在 1 范数以及无穷范数意义下的收敛特性进行研究。在章节的末尾，通过数值仿真实验验证了本章所得结论的有效性。

第五章：总结与展望。对本文的内容做出总结，同时指出本文工作中的不足之处并规划下一步的研究方向。

下图为本文的研究思路框架图。

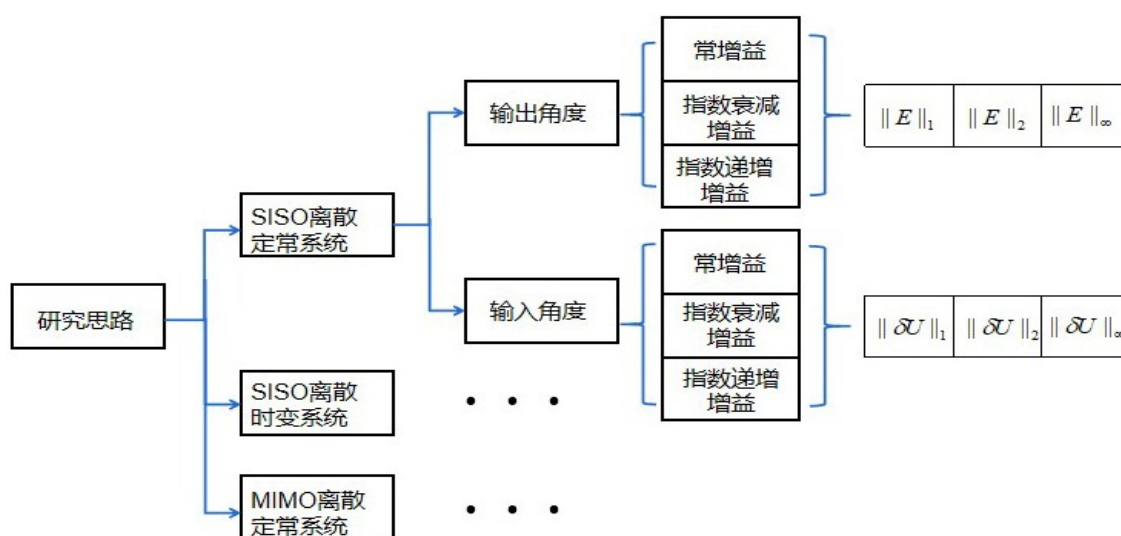


图 1.2 本文研究思路框架示意图



## 第二章 两类变增益 SISO 定常迭代学习控制系统收敛性分析

首先, 针对单输入单输出离散时间定常系统, 已经有文献得到了系统输出序列在 P-型迭代学习更新律下单调收敛的充分条件<sup>[52]</sup>, 而本章节通过研究得到了系统输出序列在 P-型迭代学习更新律下单调收敛的充要条件。其次, 文献 [16] 指出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在 1 范数和 2 范数意义下的单调收敛性, 并且通过仿真实验验证了相应的结论。而本章节发现文献 [16] 的证明方法中存在技术缺陷, 其推出的结论实际无法成立。

此外, 虽然文献 [16] 中的结论无法成立, 但是其使用到的方法在仿真实验中确实表示良好, 为了解决这一矛盾, 本章节从输入角度进行分析, 研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后, 虽然具有指数衰减增益的 P-型学习律可以改善系统输出跟踪误差的瞬态性能, 但是否具有变增益迭代学习律可以改善系统输出跟踪误差的瞬态性能尚未有明确结论, 而本章节通过研究设计了一种具有指数递增增益的 P-型学习律。经过分析后得出, 具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。

### 2.1 问题描述

考虑如下的 SISO 离散定常系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \mathbf{A}x_k(t) + Bu_k(t), & t \in \mathcal{S}^- \\ y_k(t) = Cx_k(t), & t \in \mathcal{S}^+ \\ x_k(0) = x^0, & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2-1)$$

其中集合  $\mathcal{S}^- = \{0, 1, \dots, T-1\}$ ,  $\mathcal{S}^+ = \{1, 2, \dots, T\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$ 。另外  $t$  表示时间,  $k$  表示迭代次数,  $T$  表示每次实验系统的运行时间长度,  $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$  表示系统状态,  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  表示系统输入,  $y_k(t) \in \mathbb{R}$  表示系统输出。 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示系统矩阵,  $B \in \mathbb{R}^n$  表示输入矩阵,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  表示输出矩阵。 $x_k(0) = x^0 (k \in \mathbb{N})$  表示系统 (2-1) 在每次实验时具有相同的初始状态  $x^0$ 。

针对 SISO 离散时间定常系统 (2-1), 考虑如下的 P-型学习律:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta [y_d(t+1) - y_k(t+1)] \quad t \in \mathcal{S}^- \quad (2-2)$$

其中,  $\eta$  是学习增益,  $y_d(t) (t \in \mathcal{S}^+)$  是针对系统 (2-1) 给定的期望轨迹。

系统 (2-1) 结合 P-型迭代学习更新律构成了迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2)。迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2) 的控制任务是设计学习增益  $\eta$  使得对任意给定的初始输入都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) (t \in \mathcal{S}^+)$ 。显而易见, 上述控制目标可行的必要条件是给定的期望轨线  $y_d(t)$  在整个有限时间段内是可实现的, 即至少存在一个系统输入  $u_d(t) (t \in \mathcal{S}^-)$  和一个系统状态  $x_d(t) (t \in \mathcal{S}^+)$  满足理想状态和输出方程 (2-3)。

$$\begin{cases} x_d(t+1) = \mathbf{A}x_d(t) + Bu_d(t) \\ y_d(t) = Cx_d(t) \\ x_d(0) = x^0 \end{cases} \quad (2-3)$$

关于系统 (2-1) 期望轨线的可实现性有如下引理<sup>[74]</sup>:

**引理 1** 系统 (2-1) 的任给的理想轨线可实现的充要条件是输入输出耦合参数不为 0, 即  $CB \neq 0$ 。

关于迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2), 文献 [33] 指出即使输出跟踪误差在  $\lambda$  范数意义下是单调收敛的, 在无穷范数或是  $\sup$  范数意义下仍有可能出现超调现象。而向量的无穷范数表示向量中所有元素绝对值的最大值, 向量的 1 范数表示向量中所有元素的绝对值之和, 向量的 2 范数表示所有元素的平方和再开方。在实际应用中, 以上三种范数更具有参考价值, 因此本文着重研究系统在这三种范数意义下的单调收敛性。以下给出向量 1、2、无穷范数的详细定义以及矩阵 1、2、无穷范数的详细定义。

设

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2p} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{q1} & m_{q2} & m_{q3} & \cdots & m_{qp} \end{bmatrix}。$$

那么向量  $V$  的 1 范数、无穷范数、2 范数定义如下:

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^q |v_i|, \|V\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq q} |v_i|, \|V\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^q v_i^2}。$$

矩阵  $M$  的 1 范数、无穷范数、2 范数定义如下:

$$\|\mathbf{M}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^q |m_{ij}|, \|\mathbf{M}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=1}^p |m_{ij}|, \|\mathbf{M}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{M}^\top \mathbf{M})}。$$

令

$$U_d = [u_d(0), u_d(1), \cdots, u_d(T-1)]^\top,$$

$$U_k = [u_k(0), u_k(1), \cdots, u_k(T-1)]^\top,$$

$$Y_d = [y_d(1), y_d(2), \cdots, y_d(T)]^\top,$$



$$Y_k = [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(T)]^\top,$$

$$G = [CA \quad CA^2, \dots, CA^T]^\top.$$

系统 (2-1) 和公式 (2-3) 分别可以写为如下的提升形式:

$$Y_k = \mathbf{H}U_k + Gx^0 \quad (2-4)$$

$$Y_d = \mathbf{H}U_d + Gx^0 \quad (2-5)$$

其中,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_T & h_{T-1} & h_{T-2} & \cdots & h_1 \end{bmatrix}$$

在  $\mathbf{H}$  矩阵中,  $h_i = CA^{i-1}B (i = 1, 2, \dots, T)$  为系统的 Markov 参数。

公式 (2-2) 可以写为如下的提升形式:

$$U_{k+1} = U_k + \mathbf{\Gamma}_0(Y_d - Y_k) \quad (2-6)$$

其中,  $\mathbf{\Gamma}_0 = \eta \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  表示  $T$  阶单位矩阵。

系统第  $k$  次迭代运行时输出偏差和输入偏差的定义如下:

$$E_k = Y_d - Y_k \quad (2-7)$$

$$\delta U_k = U_d - U_k \quad (2-8)$$

在上面两个式子中,  $Y_d$  和  $U_d$  分别表示给定的期望输出和对应的期望输入, 这两个信号不会随着迭代次数变化, 因此系统第  $k+1$  次迭代运行时输出偏差和输入偏差的定义如下:

$$E_{k+1} = Y_d - Y_{k+1} \quad (2-9)$$

$$\delta U_{k+1} = U_d - U_{k+1} \quad (2-10)$$

将公式 (2-9) 减去公式 (2-7) 可以得到:

$$E_{k+1} - E_k = \mathbf{H}U_k - \mathbf{H}U_{k+1} \quad (2-11)$$

再联立公式 (2-11) 和公式 (2-6) 可得:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0)E_k \quad (2-12)$$

其中,

$$\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_3 & -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta h_T & -\eta h_{T-1} & -\eta h_{T-2} & \cdots & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

公式 (2-12) 说明了系统第  $k+1$  次运行时的输出偏差和第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系, 类似的利用公式 (2-5) 和 (2-8) 也可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差和第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{H}) \delta U_k \quad (2-14)$$

由公式 (2-12) 可以看出, 要让系统的输出偏差收敛, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的所有特征值都必须位于单位圆内。而矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  是一个下三角 toeplitz 矩阵, 它的特征值全部位于主对角线且都为  $1 - \eta h_1$ , 因此迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2) 的输出偏差收敛的充要条件是  $|1 - \eta h_1| < 1^{[52]}$ 。

在得到系统 (2-1)-(2-2) 输出偏差的收敛条件之后, 现在对系统输出跟踪误差的单调收敛性进行说明。文献 [16] 指出系统输出跟踪误差的  $i$  范数单调收敛的充分条件是  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_i < 1$ , 其中  $i = 1, 2, \infty$ 。由公式 (2-12) 可以看出这一条件保证了系统输出跟踪误差的范数在迭代过程中严格单调减小, 即  $\|E_{k+1}\|_i < \|E_k\|_i$ 。文献 [15] 利用该定理对系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性做出进一步分析。文献 [15] 指出如果系统的 Markov 参数满足  $|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么一定存在  $\eta$  使得系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $0 < \eta h_1 \leq 1$ ; 如果系统的 Markov 参数满足  $|h_1| < \frac{2}{|\eta|} - \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么也一定存在  $\eta$  使得系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $1 < \eta h_1 < 2$ 。

以 1 范数为例, 对文献 [15] 中的两条结论进行说明。首先要想保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 需要使得  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 < 1$  成立。其次观察矩阵 (2-13) 可以发现,  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1$  一定等于矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  第一列元素的绝对值之和。

所以, 如果系统的 Markov 参数满足  $|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$  并且选择的学习增益  $\eta$  满足  $0 < \eta h_1 \leq 1$ , 那么可以得到:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 &= |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= 1 - |\eta| |h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= 1 + |\eta| \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) < 1 \end{aligned} \quad (2-15)$$

如果系统的 Markov 参数满足  $|h_1| < \frac{2}{|\eta|} - \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 并且选择的增益  $\eta$  满足  $1 < \eta h_1 < 2$ , 那么可以得到:

$$\begin{aligned} \|I - H\Gamma_0\|_1 &= |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= |\eta| |h_1| - 1 + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= |\eta| \left( \sum_{j=2}^T |h_j| + |h_1| \right) - 1 < 1 \end{aligned} \quad (2-16)$$

公式 (2-15) 和 (2-16) 对文献 [15] 中的结论进行了简要证明, 即如果系统的 Markov 参数满足一定条件, 只要选择合适的增益  $\eta$  使得  $\|I - H\Gamma_0\|_1 < 1$ , 那么就一定可以使系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。需要注意的是, 在文献 [15] 中  $\|I - H\Gamma_0\|_i < 1$  仅是系统输出跟踪误差单调收敛的充分条件, 而本文给出了系统输出跟踪误差单调收敛的充要条件, 定理如下:

**定理 2.1** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2), 其中  $CB \neq 0$ , 则有如下结论成立:

- a) 对任给的理想轨线  $y_d(t)$  及任给的系统初始输入  $u_1(t)$ , 系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ ;
- b) 对任给的理想轨线  $y_d(t)$  及任给的系统初始输入  $u_1(t)$ , 系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|I - H\Gamma_0\|_\infty \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ ;
- c) 对任给的理想轨线  $y_d(t)$  及任给的系统初始输入  $u_1(t)$ , 系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|I - H\Gamma_0\|_2 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

**证明:**

首先对系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0 的情况进行证明。

充分性:

首先由  $|1 - \eta h_1| < 1$  条件可以得出对于任给的理想轨线及初始输入, 当系统迭代运行到一定次数时, 系统的输出偏差一定会收敛于零向量。再由公式 (2-12) 可以推出当  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  成立时, 系统输出偏差的 1 范数在收敛过程中一定是单调收敛的。当  $|1 - \eta h_1| < 1$  和  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  同时成立时, 便可以保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。

必要性:

要证明 a) 命题的必要性, 需要证明如果系统输出跟踪误差单调收敛, 那么一定有  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。本文采用反证法, 即证明该命题的逆否命题, 该命题的逆否命题为如果不满足  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ , 那么系统输出跟踪误差一定不会单调收敛, 而不满足  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$  这一条件可以

分为三种情况。

1)  $\|I - H\Gamma_0\|_1 > 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

2)  $\|I - H\Gamma_0\|_1 \leq 1$  且  $|1 - \eta h_1| \geq 1$ 。

3)  $\|I - H\Gamma_0\|_1 > 1$  且  $|1 - \eta h_1| \geq 1$ 。

之前已经介绍了，系统输出跟踪误差收敛的充要条件是  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。而在第二种情况和第三种情况里，都包含了  $|1 - \eta h_1| \geq 1$  这一条件，因此第二种情况和第三种情况一定无法保证系统输出偏差收敛，更加无法保证系统输出跟踪误差单调收敛。要证明 a) 命题的必要性，只需要证明在第一种情况下，系统输出跟踪误差无法实现单调收敛即可。如果系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛，那么对于任意的初始输入  $u_1(t)$ ，都应该有  $\|E_k\|_1 \geq \|E_{k+1}\|_1$  且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_k\|_1 = 0$ 。然而在  $\|I - H\Gamma_0\|_1 > 1$  条件下，假设初始输入为  $u_1(t)$ ，相应的输出信号为  $y_1(t)$ ，且  $y_1(t)$  满足以下条件：

$$\begin{cases} y_1(t) = y_d(t), & t = 2, 3, \dots, T \\ y_1(t) = y_d(t) - 1, & t = 1 \end{cases} \quad (2-17)$$

由公式 (2-17) 可得， $\|E_1\|_1 = 1$  并且  $\|E_2\|_1 = \|(I - H\Gamma_0)E_1\|_1 > 1$ ，即  $\|E_2\|_1 > \|E_1\|_1$ ，违背了  $\|E_k\|_1 \geq \|E_{k+1}\|_1$  这一定义。所以  $\|I - H\Gamma_0\|_1 > 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$  条件无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛，证毕。

对于 b)、c) 命题，同理可证。另外，还可以推理出系统输入跟踪误差单调收敛的充要条件为  $\|I - \Gamma_0 H\|_i > 1$  且  $|1 - \eta h_1| < 1$ ，其中  $i = 1, 2, \infty$ 。

在介绍完系统输出跟踪误差在 1 范数、2 范数、无穷范数意义下单调收敛的充要条件之后，本文通过分析给出了系统输出跟踪误差在 1 范数意义下无法实现单调收敛的条件，定理如下：

**定理 2.2** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-2)，其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ ，那么仅通过调节参数  $\eta$  并不能保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明：**

由定理 2.1 可知当  $|1 - \eta h_1| \geq 1$  时，无法保证系统输出跟踪误差 1 范数意义下单调收敛。因此要证明原命题，只需要证明在  $|1 - \eta h_1| < 1$  和  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下， $\|I - H\Gamma_0\|_1 > 1$  成立即可。

对于条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  可以分为两种情况， $0 < \eta h_1 \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 < 2$ 。

当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  时，

$$\begin{aligned} \|I - H\Gamma_0\|_1 &= |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= 1 - \eta h_1 + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \end{aligned}$$

$$= 1 + |\eta| \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) > 1 \quad (2-18)$$

当  $1 < \eta h_1 < 2$  时,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 &= |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= |\eta| \left( \sum_{j=2}^T |h_j| + |h_1| \right) - 1 \\ &= |\eta| |h_1| \left( \sum_{j=2}^T \frac{|h_j|}{|h_1|} + 1 \right) - 1 > 1 \end{aligned} \quad (2-19)$$

公式 (2-18) 和 (2-19) 说明, 系统参数在满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  的条件下, 无论如何调节  $\eta$ , 都会有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 > 1$ , 而由  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 > 1$  推出系统输出跟踪误差无法在 1 范数意义下单调收敛的论证已经在上文阐述, 这里不再重复说明。

另外, 因为  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 = \|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_\infty$ , 所以在  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下, 常增益 P-型学习律同样不能保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

至此, 本文介绍了系统 (2-1) 使用常增益 P-型学习律的情况, 并得出在  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下常增益 P-型学习律并不能够保证系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛于 0。文献 [16] 指出将常增益改为指数衰减增益  $\eta e^{-\alpha t}$  可以改善系统瞬态跟踪性能, 并进行了仿真实验对其结论加以验证。但是由于文献 [16] 中的证明方法存在技术缺陷, 导致 [16] 中所得结论是否成立有待进一步论证。本章节现在就 [16] 中证明方法存在的技术缺陷进行说明。

文献 [16] 使用的增益为时变增益  $\eta e^{-\alpha t} (\alpha > 0)$ , 相应的迭代学习更新律为:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta e^{-\alpha t} e_k(t+1) \quad t \in \mathcal{S}^- \quad (2-20)$$

更新律 (2-20) 可以写为如下提升形式:

$$U_{k+1} = U_k + \mathbf{\Gamma}_1 E_k \quad (2-21)$$

其中,  $\mathbf{\Gamma}_1 = \eta \text{diag}(1, e^{-\alpha}, e^{-2\alpha}, \dots, e^{-(T-1)\alpha})$ 。

在文献 [16] 中作者指出, 针对系统 (2-1), 如果使用 (2-20) 迭代学习更新律, 那么系统输出跟踪误差在 1 范数和 2 范数意义下是可以实现单调收敛的。为了证明上述命题, 作者引入了  $\bar{e}_k(t)$ , 其中  $\bar{e}_k(t) = e^{-\alpha(t-1)} e_k(t)$ 。作者想要通过证明  $\bar{e}_k(t)$  单调收敛, 从而间接证明  $e_k(t)$  的单调收敛性。

通过计算, 作者在文献 [16] 中最后得到以下不等式:

$$|\bar{e}_{k+1}(1)| \leq \rho_1 |\bar{e}_k(1)| \quad (2-22)$$

$$|\bar{e}_{k+1}(2)| \leq \rho_2 |\bar{e}_k(2)| + e^{-\alpha} |h_2| |\bar{e}_k(1)| \quad (2-23)$$

$$|\bar{e}_{k+1}(3)| \leq \rho_3 |\bar{e}_k(3)| + e^{-2\alpha} |h_3| |\bar{e}_k(1)| + e^{-2\alpha} |h_2| |\bar{e}_k(2)| \quad (2-24)$$

⋮

其中,  $\rho_1 = |1 - \eta h_1|$ ,  $\rho_2 = |1 - e^{-\alpha} \eta h_1|$ ,  $\rho_3 = |1 - e^{-2\alpha} \eta h_1|$ 。对于公式 (2-22), 只要  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ , 那么对于任意的  $\alpha$ , 都有  $|\bar{e}_{k+1}(1)| \leq |\bar{e}_k(1)|$ 。但是对于公式 (2-23), 作者解释道, 因为  $\bar{e}_k(1)$  和  $h_2$  有界, 所以  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha} |h_2| |\bar{e}_k(1)| = 0$ , 又因为  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |1 - e^{-\alpha} \eta h_1| = 1$ , 所以有  $|\bar{e}_{k+1}(2)| \leq |\bar{e}_k(2)|$ , 即证明了输出跟踪误差在第 2 时刻总是满足单调收敛的, 然后按照这样的方法, 一直对第 3 时刻, 第 4 时刻,  $\dots$  进行类似的处理, 最终可以得到输出跟踪误差在整个系统运行时间内都是单调收敛的。如果  $\bar{e}_k(t)$  与  $\alpha$  无关, 那么上述证明就是正确的。但本文发现, 由于  $\bar{e}_k(t) = e^{-\alpha(t-1)} e_k(t)$ ,  $\bar{e}_k(t)$  并不是与  $\alpha$  无关的, 因此  $|\bar{e}_{k+1}(2)| \leq |\bar{e}_k(2)|$  是不成立的, 进一步对于之后的时刻 3, 4,  $\dots, T$  都是不成立的。

因为作者的证明过程中存在纰漏, 所以作者得出的结论是否成立还有待商榷。但是从仿真实验中可以观察到, 具有指数衰减增益的 P-型学习律确实对改善系统瞬态性能有所帮助, 所以在下一小节中, 本文将会对具有指数衰减增益的 P-型学习律作进一步的分析。

## 2.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性

上一小节指出了文献 [16] 中存在的技术缺陷, 本小节首先将对文献 [16] 的结论重新进行推理, 并证明原有的结论无法成立。其次, 由于观察到具有指数衰减增益的 P-型学习律在仿真实验中表现较好, 为了研究该变增益迭代学习更新律的作用机理, 本小节将会分析系统输入跟踪误差在该学习律下的收敛特性。

### 2.2.1 输出偏差的收敛特性

系统 (2-1) 结合具有指数衰减增益的 P-型学习律 (2-20) 构成了迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20)。针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 利用公式 (2-4) 和 (2-21) 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输出偏差和第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1) E_k \quad (2-25)$$

其中,

$$\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ -\eta h_3 & -\eta h_2 e^{-\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-2\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta h_T & -\eta h_{T-1} e^{-\alpha} & -\eta h_{T-2} e^{-2\alpha} & \dots & 1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

在分析迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20) 输出跟踪误差的单调收敛性之前, 首先对系统输出跟踪误差的收敛性作简单分析。为了使系统输出跟踪误差收敛, 需要保证矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{T}_1$  的所有特征值位于单位圆内, 即  $|1 - \eta h_1 e^{-\omega\alpha}| < 1$ , 其中  $0 \leq \omega \leq T-1$ 。另外, 由于  $|1 - \eta h_1| < 1$  可以推出  $0 < \eta h_1 < 2$ , 再加上  $0 < e^{-\omega\alpha} \leq 1 (\alpha \neq 0)$  就可以得到  $0 < \eta h_1 e^{-\omega\alpha} < 2$ , 即  $|1 - \eta h_1 e^{-\omega\alpha}| < 1$ 。所以由以上分析可以总结得出, 迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20) 输出跟踪误差收敛的充要条件是  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

通过对比迭代学习更新律 (2-2) 和 (2-20) 可以发现, 如果令  $\alpha = 0$ , 那么更新律 (2-20) 就会退化为 (2-2)。因此如果系统采用常增益 P-型学习律 (2-2) 就可以保证系统单调收敛的话, 那么采用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (2-20) 一定也可以。本节研究具有指数衰减增益的 P-型学习律主要是为了解决在常增益 P-型学习律下系统无法实现单调收敛的问题。定理 2.2 证明了系统 (2-1) 在满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下, 使用常增益 P-型学习律 (2-2) 无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛, 因此本节将主要针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20) 的输出跟踪误差和输入跟踪误差在  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下的收敛特性进行研究。

通过对系统 (2-1) 采用 (2-20) 更新律的情况进行分析, 本节说明了具有指数衰减增益的 P-型更新律并不能保证系统输出跟踪误差在 1 范数和 2 范数意义下的单调收敛性, 推翻了文献 [16] 中的结论, 另外, 也说明了具有指数衰减增益的 P-型更新律并不能保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。

本文通篇用  $L_i^A$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  列元素绝对值之和,  $R_i^A$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行元素绝对值之和, 以下是本节得出的结论。

**定理 2.3** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

已知只有当  $|1 - \eta h_1| < 1$  时, 系统输出跟踪误差才会收敛。因此, 要证明该定理, 只需要证明在  $|1 - \eta h_1| < 1$  和  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件下, 通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法使得系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛即可。

$|1 - \eta h_1| < 1$  可以分为两种情况,  $0 < \eta h_1 \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 < 2$ 。

当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  时, 对于  $L_1^{I-H\mathbf{T}_1}$  有:

$$L_1^{I-H\mathbf{T}_1} = |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{i=2}^T |h_i| > 1 - \eta h_1 + |\eta| |h_1| = 1 \quad (2-27)$$

当  $1 < \eta h_1 < 2$  时, 对于  $L_1^{I-H\mathbf{T}_1}$  有:

$$L_1^{I-H\Gamma_1} = |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{i=2}^T |h_i| > \eta h_1 > 1 \quad (2-28)$$

由公式 (2-27) 和 (2-28) 可以看出, 无论如何调节  $\eta$  和  $\alpha$  都有  $L_1^{I-H\Gamma_1} > 1$ , 又因为  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_1\|_1 \geq L_1^{I-H\Gamma_1}$ , 所以有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_1\|_1 > 1$ . 之前已经介绍了如果  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_0\|_1 > 1$ , 那么系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差并不一定能够实现单调收敛, 所以本命题成立, 证毕。

**定理 2.4** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ . 如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

只有当  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$  时, 系统输出跟踪误差才会收敛. 而由条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  和  $\alpha > 0$  可以得到  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| < 1$ , 进一步计算可得  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$ , 现在将  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  分为两种情况,  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$ .

当  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  时, 对于  $R_T^{I-H\Gamma_1}$  有:

$$\begin{aligned} R_T^{I-H\Gamma_1} &= |1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| + |\eta| \left( \sum_{i=2}^T |h_{T-i+2}| e^{-(i-2)\alpha} \right) \\ &\geq 1 + |\eta| \left( \sum_{i=2}^T |h_{T-i+2}| e^{-(i-2)\alpha} - |h_1| e^{-(T-1)\alpha} \right) \\ &\geq 1 + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{i=2}^T |h_{T-i+2}| - |h_1| \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-29)$$

当  $1 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  时, 对于  $R_T^{I-H\Gamma_1}$  有:

$$\begin{aligned} R_T^{I-H\Gamma_1} &= |1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| + |\eta| \left( \sum_{i=2}^T |h_{T-i+2}| e^{-(i-2)\alpha} \right) \\ &= \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + |\eta| \left( \sum_{i=2}^T |h_{T-i+2}| e^{-(i-2)\alpha} \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-30)$$

由公式 (2-29) 和 (2-30) 可以看出, 无论如何调节  $\eta$  和  $\alpha$  都有  $R_T^{I-H\Gamma_1} > 1$ , 又因为  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_1\|_\infty \geq R_T^{I-H\Gamma_1}$ , 所以有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_1\|_\infty > 1$ . 由此可得如果系统 (2-1) 满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么即使采用具有指数衰减增益的 P-型学习律, 依旧不能保证输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 证毕。

接下来, 本节将通过给出一个具体的系统来说明, 如果系统使用具有指数衰减增益的 P-型学习律, 那么仅在  $|1 - \eta h_1| < 1$  条件下, 无法判断系统输出跟踪误差的 2 范数是否单调收敛。



令  $T = 2, h_1 = 1, h_2 = 2, \eta = 1.5$ , 由上述条件可得  $|1 - \eta h_1| = 0.5 < 1$ , 满足系统输出跟踪误差收敛的条件, 然后有  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1-\eta h_1 & 0 \\ -\eta h_2 & 1-\eta h_1 e^{-\alpha} \end{bmatrix}$ , 由矩阵 2 范数的定义, 可得下式:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1)^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1) = \begin{bmatrix} 9.25 & -3(1 - 1.5e^{-\alpha}) \\ -3(1 - 1.5e^{-\alpha}) & (1 - 1.5e^{-\alpha})^2 \end{bmatrix}$$

利用盖尔圆定理可得, 对于任意的  $\alpha$ ,  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1)^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1)$  的谱半径都一定大于 6.25, 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1\|_2 > 2.5$ , 这表示无论如何调节  $\alpha$ , 都无法保证系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

### 2.2.2 输入偏差的收敛特性

上一小节说明了具有指数衰减增益的 P-型学习律并不能够保证系统输出跟踪误差在 1 范数, 2 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 进一步证实文献 [16] 中的证明技术存在缺陷。如之前所述, 在文献 [16] 中的仿真实验中, 具有指数衰减增益的 P-型学习律的确对改善系统瞬态性能有所帮助, 由于文献 [16] 是从输出角度进行研究, 本节将会从输入角度进行研究, 即研究系统的输入跟踪误差在 1 范数, 2 范数以及无穷范数意义下的收敛特性。

针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 利用公式 (2-4) 和 (2-21) 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差和第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}) \delta U_k \quad (2-31)$$

其中,

$$\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_2 e^{-\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_3 e^{-2\alpha} & -\eta h_2 e^{-2\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-2\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta h_T e^{-(T-1)\alpha} & -\eta h_{T-1} e^{-(T-1)\alpha} & -\eta h_{T-2} e^{-(T-1)\alpha} & \cdots & 1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

同样在分析系统输入跟踪误差的单调收敛性之前首先对系统输入跟踪误差的收敛性作简单分析。为了使系统输入跟踪误差收敛, 需要保证矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}$  的所有特征值位于单位圆内。通过观察可以发现, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}$  和矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_1$  的对角元素相同, 所以可得  $|1 - \eta h_1| < 1$  也是系统输入跟踪误差收敛的充要条件。

很显然  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$ , 再加上定理 2.2 可以得到, 如果系统 (2-1) 使用常增益 P-型学习律 (2-2) 并且满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对于任意的  $\eta$  都无法使得系统输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛。但是本节接下来会说明即使系统的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 只要选择 (2-20) 迭代学习更新律进行控制, 那么就可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 同

时 (2-20) 迭代学习更新律还可以拓宽系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛的条件, 以下是本节得出的定理。

**定理 2.5** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ 。对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

**证明:**

首先  $|1 - \eta h_1| < 1$  保证了输入跟踪误差的收敛性, 其次观察矩阵 (2-32) 可以发现, 仅由条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  并不能判断矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}$  的哪一列元素的绝对值之和最大, 为了让  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}\|_1 \leq 1$ , 需要保证:

$$L_{\omega}^{I-\Gamma_1 H} \leq 1 \quad 1 \leq \omega \leq T \quad (2-33)$$

经过计算有以下等式:

$$\begin{aligned} L_1^{I-\Gamma_1 H} &= |1 - \eta h_1| + |\eta h_2 e^{-\alpha}| + |\eta h_3 e^{-2\alpha}| + \cdots + |\eta h_T e^{-(T-1)\alpha}| \\ &= |1 - \eta h_1| + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j e^{-(j-1)\alpha}| \end{aligned} \quad (2-34)$$

$$L_i^{I-\Gamma_1 H} = |1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha}| + |\eta| \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j e^{-(i+j-2)\alpha}| \quad i = 2, 3, \dots, T-1 \quad (2-35)$$

$$L_T^{I-\Gamma_1 H} = |1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| \quad (2-36)$$

得到以上等式后, 接下来需要对  $|1 - \eta h_1| < 1$  分情况讨论, 同时由于  $|h_1|$  和  $\sum_{j=2}^T |h_j|$  的大小关系也不确定, 因此也需要分类讨论, 以下是四种分类讨论的结果。

1) 当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  且  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 在这种情况下, 只需要令  $\alpha = 0$ , 变增益迭代学习更新律就会退化为常增益迭代学习更新律, 相应的 (2-32) 就会变为 (2-13), 由文献 [15] 可知一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 其中  $\alpha = 0$ 。

2) 当  $1 < \eta h_1 < 2$  且  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$  时,

$$L_1^{I-\Gamma_1 H} = |\eta h_1| - 1 + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j e^{-(j-1)\alpha}| \quad (2-37)$$

可以证明一定存在  $\alpha_0$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| e^{-(j-1)\alpha_0} = 0 \quad (2-38)$$

因此当  $\alpha \geq \alpha_0$  时, 再加上  $1 < \eta h_1 < 2$  条件, 便可得  $L_1^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。

同时一定存在  $\alpha_1$  使得下式成立:

$$1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha_1} \geq 0 \quad (2-39)$$

当  $\alpha \geq \alpha_1$  时,

$$\begin{aligned} L_i^{I-\Gamma_1 H} &< 1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha} + |\eta| \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j| e^{-(i-1)\alpha} \\ &< 1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha} + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| e^{-(i-1)\alpha} \\ &= 1 + |\eta| e^{-(i-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) \leq 1 \end{aligned} \quad (2-40)$$

对于  $L_T^{I-\Gamma_1 H}$ , 仅由条件  $1 < \eta h_1 < 2$  就可以得出对于任意的  $\alpha$  都有  $L_T^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。

所以, 当  $1 < \eta h_1 < 2$  且  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 其中  $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$ 。

3) 当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  且  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 对于  $L_1^{I-\Gamma_1 H}$ , 当  $\alpha \geq \alpha_0$  时一定有  $L_1^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。对于  $L_T^{I-\Gamma_1 H}$ , 无论如何选择  $\alpha (\alpha \neq 0)$  总会有  $L_T^{I-\Gamma_1 H} < 1$ 。而对于  $L_i^{I-\Gamma_1 H}$  有:

$$\begin{aligned} L_i^{I-\Gamma_1 H} &= |1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha}| + |\eta| e^{-(i-1)\alpha} \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j| e^{-(j-1)\alpha} \\ &= 1 - |\eta h_1| e^{-(i-1)\alpha} + |\eta| e^{-(i-1)\alpha} \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j| e^{-(j-1)\alpha} \\ &= 1 + \Delta_1 \end{aligned} \quad (2-41)$$

其中  $\Delta_1 = |\eta| e^{-(i-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j| e^{-(j-1)\alpha} - |h_1| \right)$ 。

可以证明, 存在  $\alpha_2$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j| e^{-(j-1)\alpha_2} - |h_1| \leq 0 \quad (2-42)$$

当  $\alpha \geq \alpha_2$  时, 可以得到  $L_i^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。

所以, 当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  且  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 其中  $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \alpha_2\}$ 。

4) 当  $1 < \eta h_1 < 2$  且  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 经过上述分析之后容易得出  $L_1^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$  和  $L_T^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。而对于  $L_i^{I-\Gamma_1 H}$ , 可以证明一定存在  $\alpha_3$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow \infty} 1 - |\eta| |h_1| e^{-(i-1)\alpha_3} > 0 \quad (2-43)$$

因此在这种情况下, 只要  $\alpha \geq \alpha_3$ ,  $L_i^{I-\Gamma_1 H}$  就可以被写为 (2-41), 然后继续按照情况 3) 分析就可以得到  $L_i^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ 。

综合以上四种情况可得, 对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 总是可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使  $L_\omega^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$  成立, 继而推出  $\|I - \Gamma_1 H\|_1 \leq 1$ , 再加上  $|1 - \eta h_1| < 1$  这个条件可以得出, 一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0, 证毕。

由定理 2.5 可以得出, 采用指数衰减增益的 P-型学习新律确实能够改善系统输入跟踪误差的瞬态性能。如果使用常增益 P-型学习律, 为了保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 需要系统满足  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  或者  $|h_1| < \frac{2}{|\eta|} - \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 而使用具有指数衰减增益的 P-型学习新律的系统则无需满足上述条件, 只需要选择合适的参数  $\eta$  和  $\alpha$  就可以保证输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 其中  $\alpha \geq \max\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 。

**定理 2.6** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

**证明:**

同样将  $|1 - \eta h_1| < 1$  分为  $0 < \eta h_1 \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 < 2$  两种情况。但是在  $0 < \eta h_1 \leq 1$  的情况下, 使用常增益 P-型学习律就可以保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律一定也可以。本条定理的证明重点是在  $1 < \eta h_1 < 2$  条件下, 仍然可以找到合适的  $\eta$  和  $\alpha$  使系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

观察矩阵 (2-32) 可以发现, 仅由条件  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  无法确定  $I - \Gamma_1 H$  哪一行元素的绝对值之和最大, 为了让  $\|I - \Gamma_1 H\|_\infty \leq 1$ , 需要保证:

$$R_\omega^{I-\Gamma_1 H} \leq 1 \quad 1 \leq \omega \leq T \quad (2-44)$$

经过计算有以下等式:

$$R_1^{I-\Gamma_1 H} = |1 - \eta h_1| \quad (2-45)$$

$$R_i^{I-\Gamma_1 H} = |1 - \eta h_1 e^{-(i-1)\alpha}| + \sum_{j=2}^i |\eta h_j e^{-(i-1)\alpha}| \quad i = 2, 3, 4, \dots, T \quad (2-46)$$

显然对于任意的  $\eta$  和  $\alpha$  都有  $R_1^{I-\Gamma_1 H} < 1$ 。而当  $\alpha \geq \alpha_1$  时,  $R_i^{I-\Gamma_1 H} = 1 + |\eta| e^{-(i-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^i |h_j| - |h_1| \right)$ , 再加上  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  条件, 便可以得到  $R_i^{I-\Gamma_1 H} \leq 1$ , 进而推出  $\|I - \Gamma_1 H\|_\infty \leq 1$ , 证毕。

由定理 2.6 可以得出, 具有指数衰减增益的 P-型学习律拓宽了系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛时可选参数  $\eta$  的范围。当系统使用常增益 P-型学习律

时, 要想保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 需要使  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  和  $0 < \eta h_1 \leq 1$  同时成立, 而使用具有指数衰减增益的 P-型学习律之后, 在  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  和  $|1 - \eta h_1| < 1$  条件下仍然可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

除了在定理 2.6 中得出的结论, 本文还得出对于迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0。

要证明此定理, 只需要证明对于任意的  $\eta$  和  $\alpha$  都有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}\|_\infty > 1$  成立。又因为  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}\|_\infty \geq R_\omega^{I-\Gamma_1 H} (1 \leq \omega \leq T)$ , 所以只需要找到  $\omega$  使得  $R_\omega^{I-\Gamma_1 H} > 1$  即可。

由于当  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| \geq 1$  时, 对任给的理想轨线和初始输入无法保证系统输入跟踪误差收敛于零向量。因此只需要考虑  $|1 - \eta h_1| < 1$  的情况。之前已经得出由条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  和  $\alpha > 0$  可以得到  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| < 1$ , 现将  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| < 1$  条件分情况讨论。

当  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} R_T^{I-\Gamma_1 H} &= 1 - |\eta| |h_1| e^{-(T-1)\alpha} + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= 1 + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-47)$$

当  $1 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} R_T^{I-\Gamma_1 H} &= |\eta| |h_1| e^{-(T-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=2}^T |\eta h_j e^{-(T-1)\alpha}| \\ &= |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| + |h_1| \right) - 1 > 1 \end{aligned} \quad (2-48)$$

由 (2-47) 和 (2-48) 可以得到  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}\|_\infty > 1$  总是成立的, 从而证明当系统 (2-1) 的 Markov 参数不满足  $|h_1| \geq \sum_{j=1}^T |h_j|$  时, 不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0。

**定理 2.7** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $2|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么可以通过  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入在 2 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

首先, 由  $2|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$  可以得出  $h_1 \neq 0$ , 所以一定存在  $\eta$  使得  $\eta h_1 = 1$ 。接下来就只需要证明在上述条件下, 存在一个正数  $\alpha$  使得矩阵  $(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H})$  的最大特征值小于 1 即可。

令  $\Phi_{I-\Gamma_1 H} = [\varphi_{i,j}] = (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})$ , 则

$$\Phi_{I-\Gamma_1 H} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \varphi_{1T} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \varphi_{2T} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots & \varphi_{3T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{T1} & \varphi_{T2} & \varphi_{T3} & \cdots & \varphi_{TT} \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

其中,

$$\varphi_{11} = \eta^2 \sum_{j=1}^T h_j^2 e^{-2(j-1)\alpha} \quad (2-50)$$

$$\varphi_{ii} = 1 + a_1 e^{-\alpha} + a_2 e^{-2\alpha} + a_3 e^{-3\alpha} + \cdots + a_{2T-2} e^{-2(T-1)\alpha} \quad i = 2, 3, 4 \cdots T \quad (2-51)$$

$$\varphi_{ij} = b_1 e^{-\alpha} + b_2 e^{-2\alpha} + b_3 e^{-3\alpha} + \cdots + b_{2T-2} e^{-2(T-1)\alpha} \quad i \neq j \quad (2-52)$$

在公式 (2-51) 和 (2-52) 中,  $a_i \in \mathbb{R}$  且  $b_j \in \mathbb{R}$ 。

利用盖尔圆定理有:

$$|\lambda - \varphi_{11}| \leq \sum_{j=2}^T |\varphi_{1j}| \quad (2-53)$$

$$|\lambda - \varphi_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^T |\varphi_{ij}| \quad (2-54)$$

其中,  $\lambda$  表示矩阵  $(\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})$  的特征值。

去掉绝对值, 公式 (2-53) 和 (2-54) 可以被重写为:

$$\varphi_{11} - \sum_{j=2}^T |\varphi_{1j}| \leq \lambda_1 \leq \varphi_{11} + \sum_{j=2}^T |\varphi_{1j}| \quad (2-55)$$

$$\varphi_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^T |\varphi_{ij}| \leq \lambda_i \leq \varphi_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^T |\varphi_{ij}| \quad (2-56)$$

由公式 (2-55) 和 (2-56) 可得, 只要让矩阵  $(\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})$  所有特征值的上界都小于 1, 那么就可以得出  $\|(\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H})\|_2 < 1$ 。

对于  $\lambda_1$  的上界, 有以下不等式:

$$\varphi_{11} + \sum_{j=2}^T |\varphi_{1j}| \leq \sum_{j=2}^T |h_j| |\eta| e^{-(j-1)\alpha} + \sum_{j=2}^T j \eta^2 h_j^2 e^{-2(j-1)\alpha} \quad (2-57)$$

因为:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \eta^2 \sum_{j=2}^T j h_j^2 e^{-2(j-1)\alpha} + |\eta| \sum_{j=2}^T |h_j| e^{-(j-1)\alpha} \right) = 0 \quad (2-58)$$

再联立 (2-55) 便可以得出, 当  $\alpha$  取得一个很大的值时, 有  $\lambda_1 \leq 0^+ < 1$ 。

对于  $\lambda_i$  ( $i = 2, 3, \dots, T-2$ ) 的上界, 令

$$\begin{aligned} \psi_i = & 1 - \left( 2|\eta||h_1|e^{-(i-1)\alpha} - \sum_{j=2}^i |h_j||\eta|e^{-(i-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j||\eta|e^{-(i+j-2)\alpha} + \sum_{j=i}^T jh^2e^{-2(j-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-59)$$

其中  $h = \max_{1 \leq j \leq T} \left| \frac{h_j}{h_1} \right|$ 。

由 (2-59) 可得:

$$\begin{aligned} \psi_i < & 1 - \left( 2|\eta||h_1|e^{-(i-1)\alpha} - \sum_{j=2}^T |h_j||\eta|e^{-(i-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j||\eta|e^{-(i+j-2)\alpha} + \sum_{j=i}^T jh^2e^{-2(j-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-60)$$

显然下面两式是成立的:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j||\eta|e^{-(i+j-2)\alpha} + \sum_{j=i}^T jh^2e^{-2(j-1)\alpha} = 0 \quad (2-61)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=2}^{T+1-i} |h_j||\eta|e^{-(i+j-2)\alpha} + \sum_{j=i}^T jh^2e^{-2(j-1)\alpha}}{2|\eta||h_1|e^{-(i-1)\alpha} - \sum_{j=2}^T |h_j||\eta|e^{-(i-1)\alpha}} = 0 \quad (2-62)$$

联立公式 (2-60)~(2-62), 再加上条件  $2|h_1| > \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 便可以得到  $\psi_i < 1$ , 最后得出  $\lambda_i \leq \psi_i < 1$  ( $i = 2, 3, \dots, T-2$ )。

对于  $\lambda_{T-1}$  的上界, 令

$$\begin{aligned} \psi_{T-1} = & 1 - \left( 2|\eta||h_1|e^{-(T-2)\alpha} - \sum_{j=2}^{T-1} |h_j||\eta|e^{-(T-2)\alpha} \right) \\ & + |\eta||h_2|e^{-(T-1)\alpha} + (T-1)h^2e^{-2(T-2)\alpha} + Th^2e^{-2(T-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-63)$$

进一步推理可得:

$$\begin{aligned} \psi_{T-1} < & 1 - |\eta| \left( 2|h_1|e^{-(T-2)\alpha} - \sum_{j=2}^T |h_j|e^{-(T-2)\alpha} \right) \\ & + |\eta||h_2|e^{-(T-1)\alpha} + (T-1)h^2e^{-2(T-2)\alpha} + Th^2e^{-2(T-1)\alpha} \\ = & 1 - |\eta|e^{-(T-2)\alpha} \left( 2|h_1| - \sum_{j=2}^T |h_j| \right) \\ & + |\eta||h_2|e^{-(T-1)\alpha} + (T-1)h^2e^{-2(T-2)\alpha} + Th^2e^{-2(T-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-64)$$

利用

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\eta| h_2 e^{-(T-1)\alpha} + (T-1)h^2 e^{-2(T-2)\alpha} + Th^2 e^{-2(T-1)\alpha} = 0 \quad (2-65)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{|\eta||h_2|e^{-(T-1)\alpha} + (T-1)h^2 e^{-2(T-2)\alpha} + Th^2 e^{-2(T-1)\alpha}}{2|\eta||h_1|e^{-(T-2)\alpha} + \sum_{j=2}^T |h_j||\eta|e^{-(T-2)\alpha}} = 0 \quad (2-66)$$

和条件  $2|h_1| > \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 可以得到  $\psi_{T-1} < 1$ , 进一步有  $\lambda_{T-1} \leq \psi_{T-1} < 1$ 。

对于  $\lambda_T$  的上界, 令

$$\begin{aligned} \psi_T &= 1 - \left( 2|\eta||h_1|e^{-(T-1)\alpha} - \sum_{j=2}^T |h_j||\eta|e^{-(T-1)\alpha} \right) + Th^2 e^{-2(T-1)\alpha} \\ &= 1 - |\eta|e^{-(T-1)\alpha} \left( 2|h_1| - \sum_{j=2}^T |h_j| \right) + Th^2 e^{-2(T-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-67)$$

利用

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Th^2 e^{-2(T-1)\alpha} = 0 \quad (2-68)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{Th^2 e^{-2(T-1)\alpha}}{2|\eta||h_1|e^{-(T-1)\alpha} - \sum_{j=2}^T |h_j||\eta|e^{-(T-1)\alpha}} = 0 \quad (2-69)$$

和条件  $2|h_1| > \sum_{j=2}^T |h_j|$  可以得到  $\psi_T < 1$ , 进而得出  $\lambda_T < 1$ 。

综上可以得出, 如果离散定常系统 (2-1) 使用 (2-20) 迭代学习更新律进行控制并且系统的 Markov 参数满足  $2|h_1| > \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  保证  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{H}\|_2 < 1$ , 即系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0, 证毕。

### 2.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性

虽然具有指数衰减增益的 P-型学习律可以改善系统输入跟踪误差的瞬态性能, 但仍然无法改善系统输出跟踪误差的瞬态性能。基于此, 本文想要研究是否存在可以改善系统输出跟踪误差瞬态性能的变增益迭代学习律, 本节将会把变增益迭代学习律 (2-20) 中的时变函数  $e^{-\alpha t}$  转变为  $e^{-\alpha(T-t-1)}$ , 并再一次分析输入跟踪误差, 输出跟踪误差在 1 范数, 2 范数以及无穷范数意义下的收敛特性。

转换改变时变增益之后, 迭代学习更新律 (2-20) 变为:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta e^{-\alpha(T-t-1)} e_k(t+1) \quad t \in \mathcal{S}^- \quad (2-70)$$

利用  $\mathbf{\Gamma}_2$  表示对角矩阵  $\eta \text{diag}(e^{-(T-1)\alpha}, e^{-(T-2)\alpha}, \dots, e^{-\alpha}, 1)$ , 公式 (2-70) 可以写为如下提升形式:

$$U_{k+1} = U_k + \mathbf{\Gamma}_2 E_k \quad (2-71)$$



### 2.3.1 输出偏差的收敛特性

系统 (2-1) 和更新律 (2-70) 构成了迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输出偏差和第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_2)E_k \quad (2-72)$$

其中,

$$\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_2 e^{-(T-1)\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-(T-2)\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_3 e^{-(T-1)\alpha} & -\eta h_2 e^{-(T-2)\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-(T-3)\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta h_T e^{-(T-1)\alpha} & -\eta h_{T-1} e^{-(T-2)\alpha} & -\eta h_{T-2} e^{-(T-3)\alpha} & \cdots & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \quad (2-73)$$

以下是本节针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70) 推理得出相关结论。

**定理 2.8** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

观察 (2-73) 可以发现, 如果  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| \geq 1$  并且系统的初始输入不是期望输入, 那么系统输出跟踪误差一定不会趋于 0。因此要证明定理 2.8, 只需要证明在满足  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| < 1$  和  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  两个条件下,  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_2\|_1 > 1$  即可。而由  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| < 1$  可以推得  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| < 1$ , 现在对  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| < 1$  分情况讨论。

当  $0 < \eta h_1 e^{(T-1)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} L_1^{I-H\Gamma_2} &= 1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= 1 + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-74)$$

当  $1 < \eta h_1 e^{(T-1)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} L_1^{I-H\Gamma_2} &= \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \sum_{j=2}^T |h_j| \\ &= |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| + |h_1| \right) - 1 > 1 \end{aligned} \quad (2-75)$$

由以上分析可得, 在  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  条件下, 不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 证毕。

**定理 2.9** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 其中  $CB \neq 0$ 。那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。

**证明:**

显然当  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$  时, 系统输出跟踪误差一定是收敛的, 接下来只需证明  $\|I - H\Gamma_2\|_\infty \leq 1$  即可。但是对于矩阵 (2-73), 仅由条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  无法确定哪一行元素的绝对值之和是最大的, 因此为了证明  $\|I - H\Gamma_2\|_\infty \leq 1$ , 需要证明对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $R_\omega^{I-H\Gamma_2} \leq 1$ 。

对于  $R_1^{I-H\Gamma_2}$ , 当  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$  时, 显然有  $1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$ 。

之前已经得到, 由  $|1 - \eta h_1| < 1$  可以推出  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha}| < 1$ , 而  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha}| < 1$  可以分为  $0 < \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} < 2$  两种情况。

对于  $R_i^{I-H\Gamma_2} (2 \leq i \leq T)$ , 当  $\eta$  满足  $0 < \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} \leq 1$  时,

$$R_i^{I-H\Gamma_2} = 1 - \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} + \sum_{j=2}^{i-1} |\eta h_{i-j+1}| e^{-(T-j)\alpha} \quad (2-76)$$

利用

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{i-1} |\eta h_{i-j+1}| e^{-(T-j)\alpha} = 0 \quad (2-77)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=2}^{i-1} |\eta h_{i-j+1}| e^{-(T-j)\alpha}}{\eta h_1 e^{-(T-i)\alpha}} = 0 \quad (2-78)$$

可以得到, 当  $\alpha$  趋于一个较大的值时, 公式 (2-76) 相当于 1 加上一个非正数, 因此有  $R_i^{I-H\Gamma_2} \leq 1$ 。

当  $\eta$  满足  $1 < \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} < 2$  时, 显然一定存在一个  $\alpha$  使得  $0 < \eta h_1 e^{-(T-i)\alpha} \leq 1$ , 然后就可以继续按照公式 (2-76) 推理, 从而得到  $R_i^{I-H\Gamma_2} \leq 1$ , 证毕。

**定理 2.10** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $2|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出在 2 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:** 同定理 2.7 一样, 为了证明系统输出偏差的 2 范数单调收敛, 需要证明  $\|I - H\Gamma_2\|_2 < 1$ , 即矩阵  $(I - H\Gamma_2)^\top (I - H\Gamma_2)$  的所有特征值都小于 1。

令  $\Phi_{I-H\Gamma_2} = (I - H\Gamma_2)^\top (I - H\Gamma_2)$ ,  $\Phi_{I-H\Gamma_2}$  的具体形式如同 (2-49), 接下来将使用盖尔圆定理确定矩阵  $(I - H\Gamma_2)^\top (I - H\Gamma_2)$  的每一个特征值所在的区间。

通过计算, 有以下不等式成立:

$$R_1^\Phi \leq 1 - \left( 2 - \sum_{j=2}^{T-1} \left| \frac{h_j}{h_1} \right| \right) e^{-(T-1)\alpha} + \frac{Th^2 e^{-T\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \quad (2-79)$$

$$R_i^\Phi \leq 1 - \left( 2 - \sum_{j=2}^{T-i} \left| \frac{h_j}{h_1} \right| \right) e^{-(T-i)\alpha} + \frac{(Th^2 + h)e^{-(T-i+1)\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \quad i = 2, \dots, T-2 \quad (2-80)$$

$$R_{T-1}^\Phi \leq 1 - 2e^{-\alpha} + \frac{(2h^2 + h)e^{-2\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \quad (2-81)$$

在上面三式中,  $h = \max_{1 \leq j \leq T} \left| \frac{h_j}{h_1} \right|$ , 并且可以得出一定存在  $\alpha$  使得  $R_i^\Phi < 1$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, T-1$ 。对于  $R_T^\Phi$ , 只需要选择  $\eta = \frac{1}{h_1}$  就可以使得  $R_T^\Phi = 0$ 。所以, 本定理说明了通过选择  $\eta$  和  $\alpha$  可以使得矩阵  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_2)^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_2)$  每一行元素的绝对值之和都小于 1。最后使用盖尔圆定理  $\lambda_i \leq R_i^\Phi$ , 便可以证明矩阵  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_2)^\top (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_2)$  的所有特征值都小于 1, 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_2\|_2 < 1$ , 证毕。

本节针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 研究得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。另外, 如果系统的 Markov 参数满足  $2|h_1| > \sum_{j=1}^T |h_j|$ , 那么就一定可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

### 2.3.2 输入偏差的收敛特性

本节将针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 研究系统输入跟踪误差的收敛特性。首先针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70) 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差和第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}) \delta U_k \quad (2-82)$$

其中,

$$\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_2 e^{-(T-2)\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-(T-2)\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta h_3 e^{-(T-3)\alpha} & -\eta h_2 e^{-(T-3)\alpha} & 1 - \eta h_1 e^{-(T-3)\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta h_T & -\eta h_{T-1} & -\eta h_{T-2} & \cdots & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \quad (2-83)$$

其次, 以下是本节针对迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70) 得出的与系统输入跟踪误差收敛特性相关的定理。

**定理 2.11** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那

么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

同之前的分析一样, 只有当  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| \leq 1$  时, 系统输入跟踪误差才会收敛于 0。而由  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| \leq 1$  可以推得  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| \leq 1$ , 将  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| \leq 1$  分为  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  两种情况。

当  $0 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} L_1^{I-\Gamma_2 H} &= |1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| e^{-(T-j)\alpha} \\ &\geq 1 - |\eta| |h_1| e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| e^{-(T-1)\alpha} \\ &= 1 + |\eta| e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-84)$$

当  $1 < \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} L_1^{I-\Gamma_2 H} &= \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| e^{-(T-j)\alpha} \\ &\geq \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| e^{-(T-1)\alpha} \end{aligned} \quad (2-85)$$

公式 (2-85) 的结果为一个大于 1 的整数加上一个非负数, 最后结果肯定是大于 1 的。

由以上分析可以得到, 当  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 证毕。

在定理 2.5 中指出, 如果系统使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (2-20), 那么一定可以通过选择合适的  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。即只要  $\eta$  满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ , 那么一定存在  $\alpha$  使得  $\|I - \Gamma_1 H\|_1 \leq 1$  成立。然而如果系统使用具有指数递增增益的 P-型学习律 (2-70), 那么仅有  $|1 - \eta h_1| < 1$ , 并不能保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。本文举出两个例子进行说明。

**例 2.1** 令  $T = 2, \eta = 1, h_1 = 1.1, h_2 = 0.5$ , 则:

$$I - \Gamma_2 H = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.1e^{-\alpha} & 0 \\ -0.5 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (2-86)$$

对于 (2-86), 一定存在  $\alpha$  使得  $|1 - 1.1e^{-\alpha}| < 0.5$ , 即  $\|I - \Gamma_2 H\|_1 \leq 1$ 。

**例 2.2** 令  $T = 2, \eta = 1, h_1 = 1.1, h_2 = 1.01$ , 则:

$$I - \Gamma_2 H = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.1e^{-\alpha} & 0 \\ -1.01 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

显然在这种假设下, 对于任意的  $\alpha$  都有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}\|_1 > 1$ 。

从以上两个例子可以看出, 具有指数递增增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 从侧面验证了定理 2.11 的正确性。

**定理 2.12** 考虑由系统 (2-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (2-1)-(2-70), 其中  $CB \neq 0$ 。如果系统 (2-1) 的 Markov 参数满足  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

在定理 2.8 中, 主要针对矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}$  的第一列进行分析, 并且由  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| \leq 1$  推出了  $|1 - \eta h_1 e^{-(T-1)\alpha}| \leq 1$ 。现在对矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}$  的最后一行进行分析, 由  $\max_{1 \leq t \leq T} |1 - \eta h_1 e^{-(T-t)\alpha}| \leq 1$  可以推出  $|1 - \eta h_1| \leq 1$ 。将  $|1 - \eta h_1| \leq 1$  分为  $0 < \eta h_1 \leq 1$  和  $1 < \eta h_1 < 2$  两种情况。

当  $0 < \eta h_1 \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} R_T^{I-\Gamma_2 H} &= |1 - \eta h_1| + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| \\ &= 1 + |\eta| \left( \sum_{j=2}^T |h_j| - |h_1| \right) > 1 \end{aligned} \quad (2-88)$$

当  $1 < \eta h_1 < 2$  时,

$$\begin{aligned} R_T^{I-\Gamma_2 H} &= |1 - \eta h_1| + \sum_{j=2}^T |\eta h_j| \\ &= \eta h_1 - 1 + \sum_{j=2}^T |h_j| > 1 \end{aligned} \quad (2-89)$$

由于  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}\|_\infty \geq R_T^{I-\Gamma_2 H}$ , 而  $R_T^{I-\Gamma_2 H}$  在满足  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  的条件下肯定是大于 1 的, 所以  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}\|_\infty > 1$ , 证毕。

分析完输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性之后, 现在对系统使用 (2-70) 迭代学习更新律之后, 输入跟踪误差在 2 范数意义下的单调收敛性进行讨论。本节通过两个具体例子说明了, 仅在条件下  $|1 - \eta h_1| \leq 1$  下, 无法判定是否存在  $\eta$  和  $\alpha$  使  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}\|_2 < 1$ 。

**例 2.3** 令  $T = 2, \eta = 0.5, h_1 = 2.2, h_2 = 0.1$ , 显然有  $|1 - \eta h_1| = 0.1 < 1$ , 即系统输入跟踪误差在此条件下一定是收敛的。另外通过简单计算可以得到:

$$\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.1e^{-\alpha} & 0 \\ -0.05 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (2-90)$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H})^\top (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & -\eta h_2 \\ 0 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 1.1e^{-\alpha})^2 + 0.0025 & 0.005 \\ 0.005 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (2-91)$$

对于 (2-91), 当  $\alpha$  趋于 0 时, 显然有  $\|I - \Gamma_2 H\|_2 < 1$ 。

**例 2.4** 令  $T = 2, \eta = 1.5, h_1 = 1.2, h_2 = 1$ , 显然在此条件下, 有  $|1 - \eta h_1| = 0.5 < 1$ , 系统输出跟踪误差也一定是收敛的, 并且:

$$I - \Gamma_2 H = \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.8e^{-\alpha} & 0 \\ -1.5 & -0.8 \end{bmatrix} \quad (2-92)$$

$$\begin{aligned} (I - \Gamma_2 H)^\top (I - \Gamma_2 H) &= \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & -\eta h_2 \\ 0 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \eta h_1 e^{-\alpha} & 0 \\ -\eta h_2 & 1 - \eta h_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - 1.8e^{-\alpha})^2 + 2.25 & 1.2 \\ 1.2 & 0.64 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-93)$$

显然对于任意的  $\alpha$  都有  $\|I - \Gamma_2 H\|_2 > 1$ 。

从以上两个例子可以看出, 具有指数递增增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

## 2.4 仿真与分析

在本节中, 首先将给出一些具体的系统作为实验对象并对这些系统作出简单分析, 然后对这些系统使用不同的迭代学习更新律, 最后记录系统在每一次迭代运行时的输出跟踪误差和输入跟踪误差, 并观察误差值是否随着迭代次数的增加最后单调收敛于 0。除非特别说明, 实验中采用的期望轨迹的表达式如下:

$$y_d(t) = \begin{cases} \frac{2t}{T}, & t \in \{1, 2, \dots, \frac{T}{2}\} \\ \frac{2(T-t)}{T}, & t \in \{\frac{T}{2} + 1, \frac{T}{2} + 2, \dots, T\} \end{cases} \quad (2-94)$$

选择  $T = 30$ , 则期望轨迹的波形如图 2.1 所示。

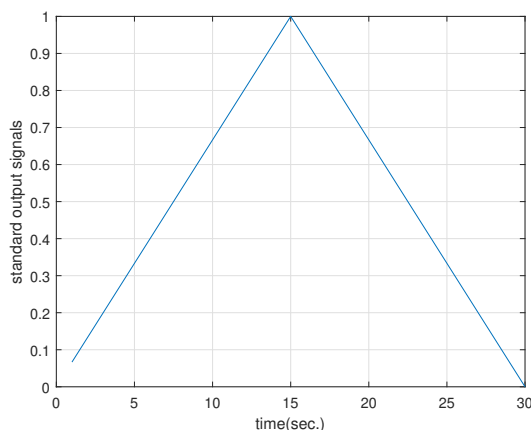


图 2.1 SISO 离散系统的期望轨迹示意图

本节主要针对两个系统进行仿真实验，系统的传递函数分别如下：

$$H_1(z) = \frac{1.1z - 0.242}{z^2 - 0.74z + 0.1368} \quad (2-95)$$

$$H_2(z) = \frac{1.1z - 0.8}{z^2 + 0.1z - 0.3} \quad (2-96)$$

通过计算可以得出，系统 (2-95) 的 Markov 参数条件为  $h_1 = 1.1$ ,  $\sum_{j=2}^T |h_j| = 1.0623$ ；系统 (2-96) 的 Markov 参数条件为  $h_1 = 1.1$ ,  $\sum_{j=2}^T |h_j| = 2.0677$ 。如果令  $\eta = 1$  的话，显然系统 (2-95) 满足  $1 < \eta h_1 < 2$  和  $h_1 \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$ ；而系统 (2-96) 满足  $1 < \eta h_1 < 2$  和  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$ 。

针对系统 (2-96)，首先使用 (2-2) 迭代学习更新律，可以得到系统输出跟踪误差随迭代次数增加变化的曲线图，如图 2.2 所示。

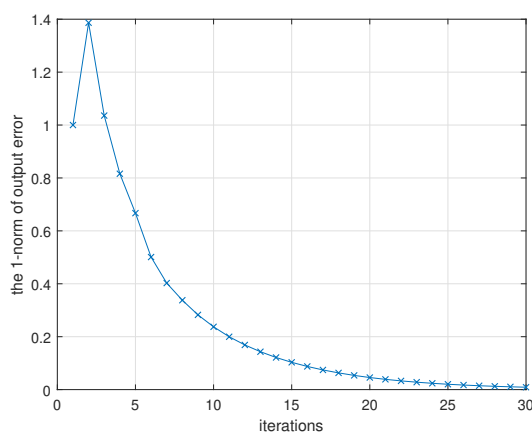


图 2.2 系统 (2-96) 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数

从图 2.2 可以看出，系统输出跟踪误差在最后收敛到 0 之前，出现了超调现象，即常增益 P-型学习律无法保证系统 (2-96) 的输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛，验证了本节中的定理 2.2。

然后对系统 (2-96) 采用 (2-20) 迭代学习更新律，可以得到随着迭代次数增加，系统输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数变化的曲线，如图 2.3 所示。

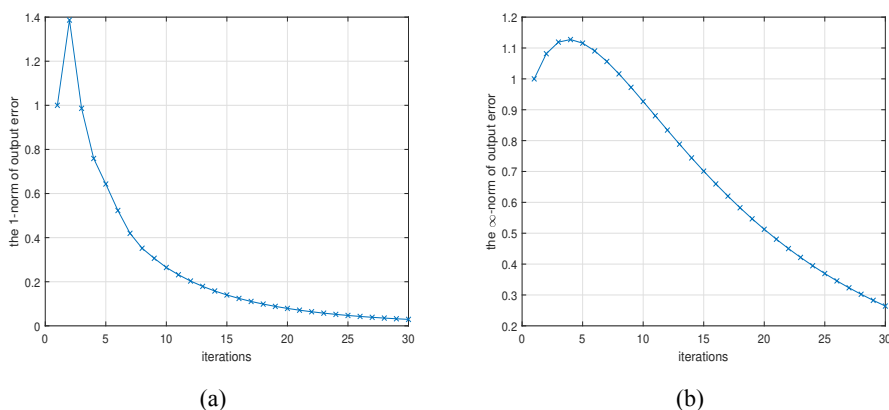


图 2.3 系统 (2-96) 采用 (2-20) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

在图 2.3 中, (a) 图为输出跟踪误差的 1 范数, (b) 图为输出跟踪误差的无穷范数。从图中可以看出, 系统输出跟踪误差的 1 范数和无穷范数在迭代过程中都出现了超调, 即 (2-20) 更新律无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛, 从而验证了本节中的定理 2.3, 定理 2.4。

分别对系统 (2-95) 和 (2-96) 采用 (2-20) 更新律, 所得的输入跟踪误差 1 范数如图 2.4 所示。其中, (a) 图为系统 (2-95) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数; (b) 图为系统 (2-96) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数。

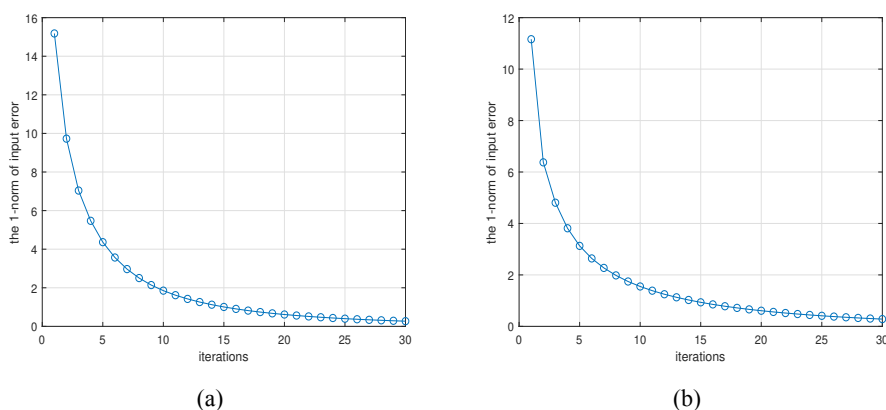


图 2.4 (2-2) 更新律分别应用于系统 (2-95)(2-96) 之后, 输入跟踪误差的 1 范数

由之前的分析可以得出系统 (2-95) 满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$  条件, 系统 (2-96) 满足  $|h_1| < \sum_{j=2}^T |h_j|$  条件。而本次实验中更新律的参数为  $\alpha = 0.065$ ,  $\eta = 0.4$ , 通过计算可以得出系统 (2-95) 和系统 (2-96) 都满足  $|1 - \eta h_1| < 1$ 。所以从结果图中可以看到, 系统 (2-95) 和系统 (2-96) 的输入跟踪误差都可以实现在 1 范数意义下单调收敛于 0, 从而验证了本节中的定理 2.5。

对系统 (2-95) 应用 (2-20) 迭代学习更新律之后, 系统输入跟踪误差的无穷范数如图 2.5 所示。

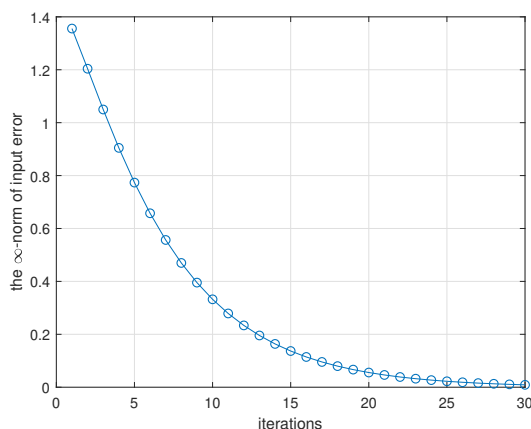


图 2.5 系统 (2-95) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数

本次实验中更新律的参数为  $\alpha = 0.065$ ,  $\eta = 1$ , 之前已经说明, 如果系统采用



(2-2) 更新律, 并且参数满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么只需要使  $\eta$  满足  $0 < \eta h_1 \leq 1$  即可保证输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。但系统 (2-95) 的参数为  $h_1 = 1.1$ , 并不满足  $0 < \eta h_1 \leq 1$ , 而是满足  $1 < \eta h_1 < 2$ 。尽管如此, 从实验结果中仍然可以看到输入跟踪误差在无穷范数意义下实现了单调收敛, 从而验证了本节中的定理 2.6。

对系统 (2-96) 应用 (2-20) 迭代学习更新律之后, 系统输入跟踪误差的 2 范数和无穷范数如图 2.6 所示, 其中 (a) 图表示系统输入跟踪误差的 2 范数曲线图, (b) 图表示系统输入跟踪误差的无穷范数曲线图。

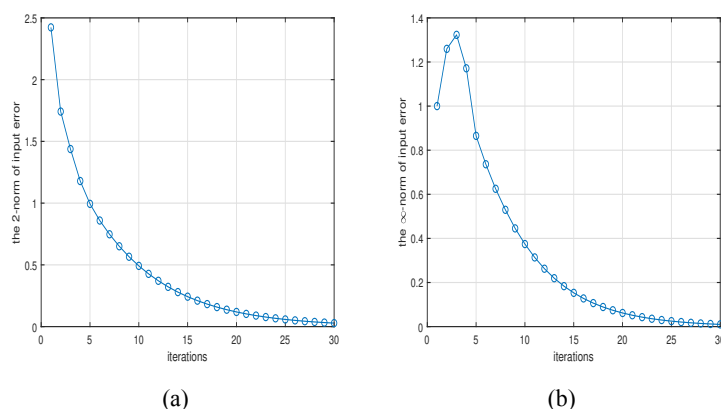


图 2.6 系统 (2-96) 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 2 范数以无穷范数

系统 (2-96) 的参数为  $h_1 = 1.1$ ,  $\sum_{j=2}^T |h_j| = 2.0677$ , 虽然不满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 但满足  $2|h_1| > \sum_{j=2}^T |h_j|$ 。根据定理 2.7, 可以找到存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统 (2-96) 的输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛, (a) 图验证了定理 2.7 的结论。从 (b) 图中可以看出当系统不满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$  时, 具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下实现单调收敛。

以上实验验证了本节中定理 2.2-定理 2.7 的结论, 接下来要验证定理 2.8-定理 2.12 中的结论, 使用的迭代学习更新律为 (2-70)。

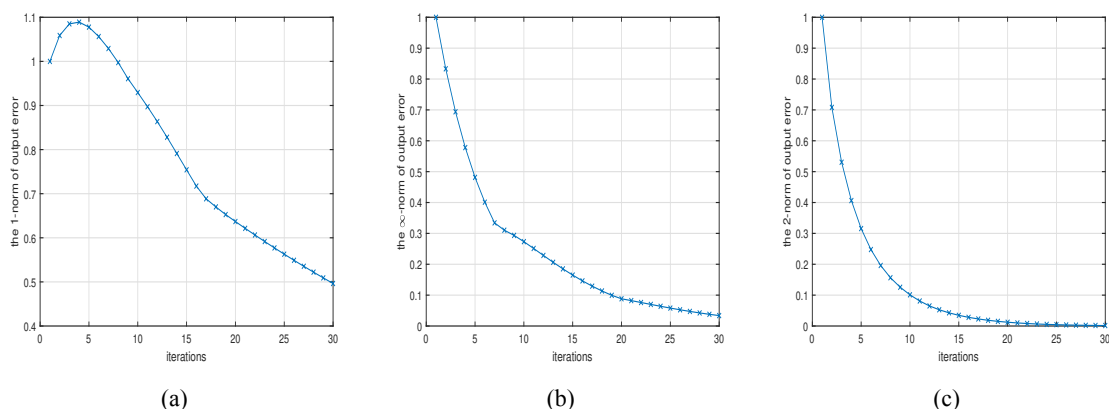


图 2.7 系统 (2-96) 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数、无穷范数、2 范数

如之前所述, 如果系统的 Markov 统参数满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 那么一定可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使系统输出跟踪误差在 1 范数、2 范数和无穷范数意义下单调收敛。由于系

统 (2-96) 并不满足  $|h_1| \geq \sum_{j=2}^T |h_j|$ , 为了验证定理 2.8-定理 2.10, 本次实验选择系统 (2-96) 作为实验对象。图 (2.7) 为系统 (2-96) 采用 (2-70) 迭代学习更新律之后, 系统输出跟踪误差的 1 范数、无穷范数和 2 范数曲线图。其中 (a)(b)(c) 分别对应着系统输出跟踪误差的 1 范数、无穷范数和 2 范数, 所示结果分别验证了本节中定理 2.8, 定理 2.9, 定理 2.10。

下图为系统 (2-96) 采用 (2-70) 迭代学习更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数曲线图。

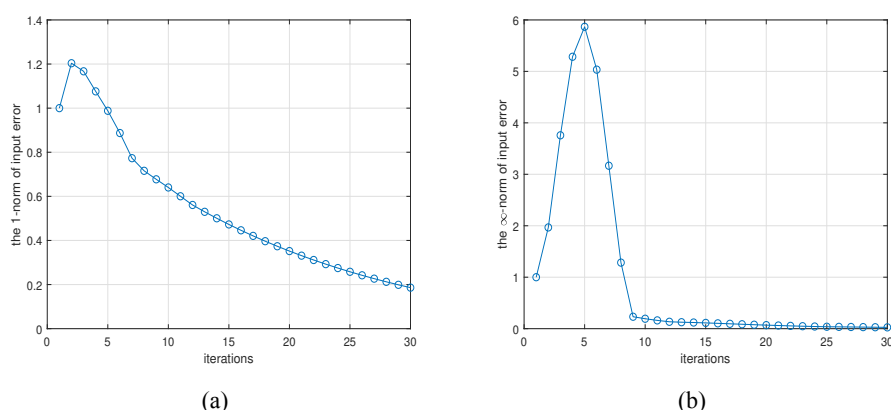


图 2.8 系统 (2-96) 采用 (2-70) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

在图 2.8 中, (a)(b) 分别对应着系统输入跟踪误差的 1 范数, 无穷范数。从实验结果可以看出, 系统输入的 1 范数和无穷范数在最后收敛到 0 之前都出现了超调, 即 (2-70) 更新律无法保证系统输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 验证了本节中的定理 2.11, 定理 2.12。

## 2.5 小结

针对 SISO 离散定常系统, 本章节首先对系统输出跟踪误差单调收敛的充分条件进行了研究, 经过进一步研究本章得出了系统输出跟踪误差以及输入跟踪误差单调收敛的充要条件。随后本章节指出了文献 [16] 中的证明方法存在技术缺陷, 通过对原有结论的重新推理, 本章得出具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数、2 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。但由于该更新律确实在仿真实验中对改善系统瞬态性能有所帮助, 所以本文对系统输入跟踪误差的收敛特性进行了分析, 通过研究得出, 具有指数衰减增益的 P-型学习律可以改善系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。接着本文提出了一种具有指数递增增益的 P-型学习律, 通过研究得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收

敛性，但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及输入跟踪误差在 1 范数、2 范数和无穷范数意义下的单调收敛性，同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后，通过数值仿真验证了本章所得结论的有效性。为了更清楚地描述本章所做工作，将本章节所得结论用以下表格进行总结，在以下表格中“-”表示针对相应条件尚未得出相关结论。

表 2.1 SISO 离散定常系统采用常增益 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	① $ h_1  \geq \sum_{j=2}^T  h_j $ 且 $0 < \eta h_1 \leq 1$ 或② $ h_1  < \frac{2}{ \eta } - \sum_{j=2}^T  h_j $ 且 $1 < \eta h_1 < 2$					
不可以满足 单调收敛的条件	$ h_1  < \sum_{j=2}^T  h_j $					

表 2.2 SISO 离散定常系统采用具有指数衰减增益的 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	同表2.1			$ 1 - \eta h_1  < 1$	$ h_1  \geq \sum_{j=2}^T  h_j $	$2 h_1  > \sum_{j=2}^T  h_j $
不可以满足 单调收敛的条件	$ h_1  < \sum_{j=2}^T  h_j $	-	-	-	$ h_1  < \sum_{j=2}^T  h_j $	-

表 2.3 SISO 离散定常系统采用具有指数递增增益的 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	-	$ 1 - \eta h_1  < 1$	$2 h_1  > \sum_{j=2}^T  h_j $	-	-	-
不可以满足 单调收敛的条件	$ h_1  < \sum_{j=2}^T  h_j $	-	-	$ h_1  < \sum_{j=2}^T  h_j $	-	-



## 第三章 两类变增益 SISO 时变迭代学习控制系统收敛性分析

针对 SISO 时变迭代学习控制系统, 已经有许多不同方面的研究。一些学者研究了系统初始状态无法保持一致的问题, 文献 [75] 通过提出一种自适应迭代学习更新律实现了有限区间内的完美跟踪, 文献 [76, 77] 提出了迭代学习投影和迭代学习最小二乘辨识算法, 这些算法可用于估计时变系统中随时间变化的未知参数。文献 [78] 针对具有不同试验长度的离散线性时变系统, 设计了一种最优迭代学习控制方案, 基于最优学习增益, 系统实际跟踪误差将收敛到零。相对于其他方面的研究, 关于 SISO 时变迭代学习控制系统单调收敛性问题的研究文献相对有限, 本章将对 SISO 离散时变系统的单调收敛性进行研究。

在第二章节的研究中, 针对 SISO 离散定常系统, 本文得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件; 具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。而本章节将要研究针对 SISO 离散时变系统, 上述两种变增益更新律是否能够同样起到改善系统瞬态性能的作用。

同第二章节的研究思路一样, 本章节首先将经典 P-型学习律应用于 SISO 离散时变系统并分析输出跟踪误差和输入跟踪误差的收敛特性, 然后将经典 P-型学习律更换为具有指数衰减增益的 P-型学习律, 再次分析系统输出跟踪误差和输入跟踪误差的收敛特性, 得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后对 SISO 离散时变系统应用具有指数递增增益的 P-型学习律并进行研究, 经过研究得出, 具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证离散时变系统的输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。

另外, 本文指出对于 SISO 离散时变系统的分析要比对 SISO 离散定常系统更加棘手, 对于定常系统只需要处理分析一个时刻的信息, 而对于时变系统则需要对系统每一个时刻的信息进行处理分析。

### 3.1 问题描述

考虑如下的 SISO 离散时变系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = A(t)x_k(t) + B(t)u_k(t), & t \in \mathcal{S}^- \\ y_k(t) = C(t)x_k(t), & t \in \mathcal{S}^+ \end{cases} \quad (3-1)$$

其中,  $\mathcal{S}^+$  和  $\mathcal{S}^-$  等符号定义同第二章一样, 不同的是  $\mathbf{A}(t), B(t), C(t)$ , 它们表示系统矩阵, 输入矩阵和输出矩阵等系统信息会随着时间而变化。

利用向量  $G_t$ , 系统 (3-1) 可以写为如下提升形式:

$$Y_k = \mathbf{H}_t U_k + G_t x^0 \quad (3-2)$$

其中,

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} C(1)B(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C(2)\mathbf{A}(1)B(0) & C(2)B(1) & 0 & \cdots & 0 \\ C(3)\mathbf{A}(2)\mathbf{A}(1)B(0) & C(3)\mathbf{A}(2)B(1) & C(3)B(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(T)\prod_{i=1}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(0) & C(T)\prod_{i=2}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(1) & C(T)\prod_{i=3}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(2) & \cdots & C(T)B(T-1) \end{bmatrix},$$

$$G_t = [C(1)\mathbf{A}(0), C(2)\mathbf{A}(1)\mathbf{A}(0), \cdots, C(T)\prod_{i=0}^{T-1}\mathbf{A}(i)]^\top.$$

针对 SISO 离散时间时变系统 (3-1), 考虑如下的 P-型学习律:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \eta_t [y_d(t+1) - y_k(t+1)] \quad t \in \mathcal{S}^- \quad (3-3)$$

其中,  $\eta_t = \eta \cdot \text{sgn}(C(t)B(t-1))$  表示学习增益,  $\text{sgn}(\cdot)$  的定义如下:

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z \geq 0 \\ -1, & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

由 SISO 离散定常系统中的结论推理可以得出, 如果系统 (3-1) 使用 (3-3) 更新律, 那么系统输出跟踪误差和输入跟踪误差收敛的充要条件是对于任意的  $t(1 \leq t \leq T)$  都有  $|1 - \eta_t C(t)B(t-1)| < 1$ , 即  $\eta_t$  满足  $0 < \eta_t C(t)B(t-1) < 2$ 。为了方便表述, 假设在本章节中 SISO 离散时变系统的所有参数都为正数, 即矩阵  $\mathbf{A}(t)$  以及向量  $B(t)$  和  $C(t)$  的所有元素都为正数。在这种假设下, 增益  $\eta_t$  就可以写为  $\eta(\eta > 0)$ , 相应的迭代学习更新律 (3-3) 就可以转化为 (2-2)。

系统 (3-1) 结合迭代学习更新律 (2-2) 构成了迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 利用公式 (3-2) 和 (2-5) 可以得到有关迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2) 输出偏差和输入偏差的两个公式:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_0) E_k \quad (3-4)$$

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{H}_t) \delta U_k \quad (3-5)$$

其中  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{H}_t =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta & 0 & \cdots & 0 \\ -C(3)\mathbf{A}(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta & -C(3)\mathbf{A}(2)B(1)\eta & 1 - C(3)B(2)\eta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C(T)\prod_{i=1}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(0)\eta & -C(T)\prod_{i=2}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(1)\eta & -C(T)\prod_{i=3}^{T-1}\mathbf{A}(i)B(2)\eta & \cdots & 1 - C(T)B(T-1)\eta \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

在研究迭代学习控制系统 (3-1)-(2.2) 的单调收敛性之前, 首先对系统的收敛性进行说明。第二章已经讲述了如果离散定常系统采用常增益 P-型学习律, 那么系统输出跟踪误差收敛的充要条件是  $|1 - \eta h_1| < 1$ , 这一条件表示矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的所有特征值都位于单位圆内。相应的对于时变系统, 如果想要让系统的实际输出最后收敛于期望输出,  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  的特征值也应该都位于单位圆内。需要注意的是矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的对角线元素相等且都为  $1 - \eta h_1$ , 系统输出跟踪误差达到收敛只需要满足  $|1 - \eta h_1| < 1$  即可。而对于时变系统, 对角线上每一个元素都不相等, 因此系统输出跟踪误差收敛需要满足  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  (其中  $1 \leq \omega \leq T$ ), 显然这一条件是时变系统输出跟踪误差在经典 P-型学习律下收敛的充要条件, 又因为  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0\mathbf{H}_t$ , 所以该条件也是迭代学习控制系统 (3-1)-(2.2) 的输入跟踪误差收敛的充要条件。

同时针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 其中  $CB \neq 0$ 。本文给出了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在 1 范数、2 范数、无穷范数意义下单调收敛的充要条件: 对任给的理想轨线  $y_d(t)$  及任给的系统初始输入  $u_1(t)$ , 系统输出跟踪误差在  $i$  范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0\|_i \leq 1$  且  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  ( $1 \leq \omega \leq T$ ); 系统输入跟踪误差在  $i$  范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0\mathbf{H}_t\|_i \leq 1$  且  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  ( $1 \leq \omega \leq T$ ), 其中  $i = 1, 2, \infty$ 。具体证明方式同定理 2.1 一样, 本章不再进行论证。

本文接下来将介绍如何证明迭代学习控制系统 (3-1)-(2.2) 的输出跟踪误差和输入跟踪误差在三种范数意义下单调收敛。

对于 SISO 离散定常系统, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的 1 范数和无穷范数可以清楚地得到, 即矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的 1 范数等于矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  第一列元素的绝对值之和, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  的无穷范数等于矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0$  最后一行元素的绝对值之和, 并且有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_1 = \|\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{\Gamma}_0\|_\infty$ 。但是对于时变系统, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  并没有这样的规律, 如果想要让  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0\|_1 \leq 1$ , 需要让矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  每一列元素的绝对值之和小于等于 1, 即对于任意的  $\omega$  ( $1 \leq \omega \leq T$ ), 都有  $L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$ ; 如果想要让  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0\|_\infty \leq 1$ , 需要让矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  每一行元素的绝对值之和小于等于 1, 即对于任意的  $\omega$  ( $1 \leq \omega \leq T$ ), 都有  $R_\omega^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$ 。

通过计算可以得出, 矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  的第  $\omega$  列元素绝对值之和为:

$$L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} = |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)\eta \quad (3-7)$$

矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\mathbf{\Gamma}_0$  的第  $\omega$  行元素绝对值之和为:

$$R_\omega^{I-H_t\Gamma_0} = \begin{cases} 1 - C(1)B(0)\eta, & \omega = 1 \\ |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)\eta, & \omega \neq 1 \end{cases} \quad (3-8)$$

观察 (3-8) 可以发现, 当  $\omega = 1$  时, 只要系统是收敛的,  $R_1^{I-H_t\Gamma_0}$  就一定是小于 1 的, 因此在之后的分析中, 对  $R_1^{I-H_t\Gamma_0}$  不再作分析, 以下是本节得出的相关结论。

**定理 3.1** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  使得系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta \leq 1$ 。

**证明:**

由公式 (3-4) 可知, 要证明本定理, 只需要证明在  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta \leq 1$  条件下,  $\|I - H_t\Gamma_0\|_1 \leq 1$  成立即可。

当  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta \leq 1$  时, 由公式 (3-7) 可得:

$$\begin{aligned} L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} &= 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)\eta \\ &= 1 + \eta \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1) - C(\omega)B(\omega - 1) \right) \end{aligned} \quad (3-9)$$

显然当  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$  时, 公式 (3-9) 的结果为 1 与一个非正数之和, 因此一定有  $L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$ 。由于公式中的  $\omega$  满足  $1 \leq \omega \leq T$ , 继而可得  $\|I - H_t\Gamma_0\|_1 \leq 1$  一定成立, 证毕。

**定理 3.2** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \leq \frac{2}{\eta} - \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  使得系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $1 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta < 2$ 。

**证明:**

同定理 3.1 一样, 要证明本定理, 需要证明在  $1 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta < 2$  条件下,  $\|I - H_t\Gamma_0\|_1 \leq 1$  成立。

当  $1 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta < 2$  时, 由公式 (3-7) 可得:

$$\begin{aligned} L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} &= C(\omega)B(\omega - 1)\eta - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=2}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)\eta \\ &= \eta \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1) + C(\omega)B(\omega - 1) \right) - 1 \end{aligned} \quad (3-10)$$

由公式 (3-10) 可知, 当  $C(\omega)B(\omega - 1) \leq \frac{2}{\eta} - \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$  时,  $L_\omega^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$  成立, 由于  $\omega$  满足  $1 \leq \omega \leq T$ , 所以可得  $\|I - H_t\Gamma_0\|_1 \leq 1$ , 证毕。



**定理 3.3** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$  这一条件, 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

当  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| \geq 1$  时, 对任给的理想轨线和初始输入, 无法保证系统输出跟踪误差收敛于零向量, 所以只需考虑  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  的情况, 将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  分为  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$  和  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$  两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$  时, 由公式 (3-9) 可知,  $L_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} = 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta$ 。当系统参数不满足定理 3.3 中所提条件时, 即如果存在一个  $\omega_0 (1 \leq \omega_0 \leq T)$  使得  $C(\omega_0)B(\omega_0-1) < \sum_{j=\omega_0+1}^T C(j) \prod_{i=\omega_0}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega_0-1)$ , 那么由公式 (3-7) 可以得出  $L_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_0} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_1 > 1$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$  时, 由公式 (3-10) 可知  $L_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} = C(\omega)B(\omega-1)\eta - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta$ , 将  $\omega_0$  代入 (3-10) 之后, 显然有  $L_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_0} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_1 > 1$ , 证毕。

在第二章节中, 由于针对的系统是离散定常系统, 所以有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_0\|_1 = \|\mathbf{I} - \mathbf{H}\Gamma_0\|_{\infty}$ 。但是本章节研究的系统是离散时变系统, 很明显  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_1 \neq \|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty}$ , 因此本节接下来需要对输出跟踪误差在无穷范数意义下的收敛特性进行分析。

**定理 3.4** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  使得系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$ 。

**证明:**

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$  时, 由公式 (3-7) 可得:

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} &= 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta \\ &= 1 + \eta \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) - C(\omega)B(\omega-1) \right) \end{aligned} \quad (3-11)$$

显然如果  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$ , 进而有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty} \leq 1$ , 证毕。

**定理 3.5** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega(2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) < \frac{2}{\eta} \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  使得系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$ 。

**证明:**

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$  时, 由公式 (3-7) 可得:

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} &= C(\omega)B(\omega-1)\eta - 1 + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta \\ &= \eta \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) + C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1 \end{aligned} \quad (3-12)$$

显然如果  $C(\omega)B(\omega-1) < \frac{2}{\eta} \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$  都有  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} \leq 1$ , 进而有  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty} \leq 1$ , 证毕。

**定理 3.6** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-2) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega(2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$  这一条件, 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  无法保证系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

同定理 3.3 一样, 要证明此命题, 只需考虑  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  的情况, 现将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  分为  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$  和  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$  两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$  时, 由公式 (3-7) 可得  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} = 1 + \eta \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) - C(\omega)B(\omega-1) \right)$ 。当系统参数不满足定理 3.6 中所提条件时, 即如果存在一个  $\omega_0(1 \leq \omega_0 \leq T)$  使得  $C(\omega_0)B(\omega_0-1) < \sum_{j=0}^{\omega_0-2} C(\omega_0) \prod_{i=1}^{\omega_0-j-1} \mathbf{A}(\omega_0-i)B(j)$ , 那么可以得出  $R_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_0} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty} > 1$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$  时, 由公式 (3-7) 可得  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_0} = \eta \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) + C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1$ 。由于  $\sum_{j=0}^{\omega_0-2} C(\omega_0) \prod_{i=1}^{\omega_0-j-1} \mathbf{A}(\omega_0-i)B(j) > C(\omega_0)B(\omega_0-1) > 1$ , 所以有  $R_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_0} > 1$ , 继而推出  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty} > 1$ , 证毕。

得到输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的收敛特性之后, 利用  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_2^2 \leq \|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_1 \times \|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_0\|_{\infty}$  可以得到, 只要系统参数同时满足定理 3.1 和定理 3.4 或者同时满足定理 3.2 和定理 3.5 中所述条件, 那就可以使得输出跟踪误差在 1 范

数和无穷范数意义下同时单调收敛, 继而使输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

从输出角度分析完成之后, 接下来从输入角度进行分析。但由于  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_0 \mathbf{H}_t$ , 所以以上得出的关于输出跟踪误差单调收敛性的结论同样适用于输入跟踪误差。

## 3.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性

上节中提到, 针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 如果系统参数不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$  这一条件, 那么输出跟踪误差和输入跟踪误差无法在 1 范数意义下单调收敛, 如果系统参数不满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$  这一条件, 那么系统输出偏和输入跟踪误差无法在无穷范数意义下实现单调收敛。而本节将会探索如果将经典 P-型学习律换为具有指数衰减增益的 P-型学习律后, 系统输出跟踪误差或输入跟踪误差的瞬态跟踪性能是否能够有所改善。

### 3.2.1 输出偏差的收敛特性

系统 (3-1) 结合迭代学习更新律 (2-20) 构成了迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 利用公式 (3-2) 和  $\mathbf{\Gamma}_1$  矩阵可以得到迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20) 第  $k+1$  次运行时的输出偏差和第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系:

$$\mathbf{E}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_1) \mathbf{E}_k \quad (3-13)$$

其中,  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_1 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta & 0 & \cdots & 0 \\ -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C(T)\prod_{i=1}^{T-1} \mathbf{A}(i)B(0)\eta & -C(T)\prod_{i=2}^{T-1} \mathbf{A}(i)B(1)\eta e^{-\alpha} & \cdots & 1 - C(T)B(T-1)\eta e^{-(T-1)\alpha} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

已知  $|1 - C(i)B(i-1)\eta| < 1$  (其中  $1 \leq i \leq T$ ) 是系统使用经典 P-型学习律后输出跟踪误差收敛的充要条件, 去掉绝对值之后可以得到  $0 < C(i)B(i-1)\eta < 2$ 。又因为  $0 < e^{-\alpha t} \leq 1$ , 可以得到  $0 < C(i)B(i-1)\eta e^{-\alpha t} < 2$ , 即  $|1 - C(i)B(i-1)\eta e^{-\alpha t}| < 1$ , 该条件可以保证矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_1$  的所有特征值都位于单位圆内。也就是说对于一个时变系统, 如果采用经典 P-型学习律时学习增益  $\eta$  可以保证系统的实际输出收敛于期望输出, 那么使用具有指数衰减增益的 P-型学习律之后, 学习增益  $\eta$  依然可以保证系统收敛。同时因为矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \mathbf{\Gamma}_1$  的第一行绝对值之和为  $|1 - C(1)B(0)\eta|$ , 显然当系统收敛时,  $|1 - C(1)B(0)\eta| < 1$  一定成立, 因此在之后的分析中, 对  $R_1^{I - H_t \Gamma_1}$  不再进行讨论。

接下来将对系统输出跟踪误差的收敛特性进行分析, 由 (3-14) 可以得到, 矩阵

$\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_1$  的第  $\omega$  列元素绝对值之和为:

$$L_{\omega}^{I-H_t \Gamma_1} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}| + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \quad (3-15)$$

矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_1$  的第  $\omega$  行元素绝对值之和为:

$$R_{\omega}^{I-H_t \Gamma_1} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j)\eta e^{-j\alpha} \quad (3-16)$$

利用公式 (3-15) 和 (3-16), 本节得出了以下定理。

**定理 3.7** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

首先  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-\alpha t}| < 1$  保证了系统输出收敛, 现在将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}|$  分为两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \leq 1$  时, 由 (3-15) 可得:

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{I-H_t \Gamma_1} &= 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \\ &= 1 + \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1) - C(\omega)B(\omega-1) \right) \end{aligned} \quad (3-17)$$

显然如果存在  $\omega_0$  使得  $C(\omega_0)B(\omega_0-1) < \sum_{j=\omega_0+1}^T C(j) \prod_{i=\omega_0}^{j-1} A(i)B(\omega_0-1)$ , 那么一定有  $L_{\omega_0}^{I-H_t \Gamma_1} > 1$ , 所以  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_1\|_1 > 1$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{I-H_t \Gamma_1} &= C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \\ &= \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1) + C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1 \end{aligned} \quad (3-18)$$

显然当  $\omega = \omega_0$  时, 有  $\sum_{j=\omega_0+1}^T C(j) \prod_{i=\omega_0}^{j-1} A(i)B(\omega_0-1)\eta e^{-(\omega_0-1)\alpha} > C(\omega_0)B(\omega_0-1)\eta e^{-(\omega_0-1)\alpha} > 1$ , 继而一定有  $L_{\omega_0}^{I-H_t \Gamma_1} > 1$ ,  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_1\|_1 > 1$ , 证毕。

**定理 3.8** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$  都有

$C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

同定理 3.7 一样, 将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}|$  分为两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \leq 1$  时, 由 (3-16) 可得:

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_1} &= 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta e^{-j\alpha} \\ &\geq 1 + \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) - C(\omega)B(\omega-1) \right) \end{aligned} \quad (3-19)$$

显然如果存在  $\omega_0$  使得  $C(\omega_0)B(\omega_0-1) < \sum_{j=0}^{\omega_0-2} C(\omega_0) \prod_{i=1}^{\omega_0-j-1} \mathbf{A}(\omega_0-i)B(j)$ , 那么由 (3-19) 可得  $R_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_1} > 1$ , 继而得出  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_1\|_{\infty} > 1$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} < 2$  时, 由 (3-16) 可得:

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_1} &= C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta e^{-j\alpha} \\ &\geq \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) - C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1 \end{aligned} \quad (3-20)$$

当  $\omega = \omega_0$  时, 可以得到  $\sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-j\alpha} > C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} > 1$ , 将  $\omega_0$  代入 (3-20) 之后便得出  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_1} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_1\|_{\infty} > 1$ , 证毕。

由定理 3.7 和定理 3.8 可得, 在系统参数不满足对于任意的  $\omega(2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$  这一条件下, 采用具有指数衰减增益的 P-型学习律依旧不能保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性; 在系统参数不满足对于任意的  $\omega(2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$  这一条件下, 采用具有指数衰减增益的 P-型学习律依旧不能保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。

现在对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20) 的输出跟踪误差在 2 范数意义下的单调收敛性进行讨论。在第二章中本文指出仅有条件  $|1 - \eta h_1| < 1$  无法保证迭代学习控制系统 (2-1)-(2-20) 的输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛, 而本节通过具体样例也指出仅有  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  条件并不能够保证迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20) 的输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

假设公式 (3-2) 中的  $H_t$  矩阵是一个二阶矩阵, 形式如下:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} C(1)B(0) & 0 \\ C(2)A(1)B(0) & C(2)B(1) \end{bmatrix}$$

那么  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1)^\top(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1) =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta & -C(2)A(1)B(0)\eta \\ 0 & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta & 0 \\ -C(2)A(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

进一步计算可以得到  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1)^\top(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1) =$

$$\begin{bmatrix} (1 - C(1)B(0)\eta)^2 + (C(2)A(1)B(0)\eta)^2 & (1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha})(-C(2)A(1)B(0)\eta) \\ (1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha})(-C(2)A(1)B(0)\eta) & (1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha})^2 \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

假设  $\eta = 0.9$ , 并且有

$$\mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C(1) = [0 \quad 1]。$$

$$\mathbf{A}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C(2) = [0 \quad 1]。$$

将上面参数带入 (3-22) 式可得,  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1)^\top(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1) =$

$$\begin{bmatrix} (1 - 0.9)^2 + (1.8)^2 & (1 - 0.9e^{-\alpha}) \times (-1.8) \\ (1 - 0.9e^{-\alpha}) \times (-1.8) & (1 - 0.9e^{-\alpha})^2 \end{bmatrix}$$

利用盖尔圆定理, 可知  $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1)^\top(\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1)$  矩阵的最大特征值一定大于 3.07 ( $|\lambda - 3.25| \leq 0.18$ ), 进一步推得  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1$  矩阵的谱半径一定大于 1, 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_2\mathbf{\Gamma}_1\|_2 > 1$ 。

以上是针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 从输出角度进行分析所得的所有结论。本文接下来将从输入角度进行分析, 即研究输入跟踪误差在 1 范数, 无穷范数, 2 范数意义下的单调收敛性。

### 3.2.2 输入偏差的收敛特性

针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 通过计算可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差与第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{H}_t)\delta U_k \quad (3-23)$$

其中,  $\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{H}_t =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta & 0 & \cdots & 0 \\ -C(2)A(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C(T)\prod_{i=1}^{T-1} A(i)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} & -C(T)\prod_{i=3}^{T-1} A(i)B(1)\eta e^{-(T-1)\alpha} & \cdots & 1 - C(T)B(T-1)\eta e^{-(T-1)\alpha} \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

首先可以观察到矩阵 (3-14) 和矩阵 (3-24) 的对角元素一样, 所以  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  (其中  $1 \leq \omega \leq T$ ) 也是系统输入跟踪误差收敛的充要条件。接着由 (3-24) 可以

得到, 矩阵  $\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t$  的第  $\omega$  列元素绝对值之和为:

$$L_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}| + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-(j-1)\alpha} \quad (3-25)$$

第  $\omega$  行元素绝对值之和为:

$$R_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \quad (3-26)$$

利用公式 (3-24)~(3-26), 本节从输入角度进行分析得出以下定理。

**定理 3.9** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  使得系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$ 。

**证明:**

若要证明此定理, 只需证明如果系统参数满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$ , 并且  $L_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t} \leq 1$  成立即可。

之前已经证明过, 由  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  可推得  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-j\alpha}| < 1$ 。之前的分析方法是将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}|$  分为两种情况, 然后分情况进行讨论。但现在并不需要这么这样做。这是因为对任意的  $\omega (\omega \neq 1)$ , 总是存在一个  $\alpha_4$  使得下式成立:

$$1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha_4} \geq 0 \quad (3-27)$$

因此当  $\alpha \geq \alpha_4$  时, (3-25) 式总是可以写为:

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t} &= 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-(j-1)\alpha} \\ &= 1 + \eta \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)e^{-(j-1)\alpha} - C(\omega)B(\omega-1)e^{-(\omega-1)\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3-28)$$

由于在公式 (3-28) 中  $j > \omega$ , 所以一定存在  $\alpha_5$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_5 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)e^{-(j-1)\alpha_5} - C(\omega)B(\omega-1)e^{-(\omega-1)\alpha_5} \right) \leq 0 \quad \omega \neq 1 \quad (3-29)$$

利用 (3-28) 和 (3-29) 可以得出, 当  $\omega$  满足  $2 \leq \omega \leq T$  时, 总是存在  $\eta$  和  $\alpha (\alpha \geq \max(\alpha_4, \alpha_5))$  使得  $L_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t} \leq 1$ 。而当  $\omega = 1$  时,  $L_1^{I-\Gamma_1 H_t} = |1 - C(1)B(0)\eta| + \sum_{j=2}^T C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0)\eta e^{-(j-1)\alpha}$ 。

显然存在  $\alpha_6$  使得下式成立。

$$\lim_{\alpha_6 \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^T C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i) B(0) e^{-(j-1)\alpha_6} = 0 \quad (3-30)$$

再加上条件  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$ , 便可以得出当  $\alpha \geq \alpha_6$  时,  $L_1^{I-\Gamma_1 H_t} \leq 1$ 。

综上, 当系统参数满足对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$  都有  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  时, 一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\alpha \geq \max(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ , 证毕。

**定理 3.10** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega(2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$ 。

**证明:**

首先由  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  可推得  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{(\omega-1)\alpha}| < 1$ 。其次同定理 3.9 类似, 当  $\alpha \geq \alpha_4$  且  $\omega \neq 1$  时, (3-26) 式可写为:

$$\begin{aligned} R_\omega^{I-\Gamma_1 H_t} &= 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \\ &= 1 + \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j) - C(\omega)B(\omega - 1) \right) \leq 1 \end{aligned} \quad (3-31)$$

当  $\omega = 1$  时,  $R_1^{I-\Gamma_1 H_t} = |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta|$ , 显然有  $R_1^{I-\Gamma_1 H_t} \leq 1$ 。

综上所述, 对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $R_\omega^{I-\Gamma_1 H_t} \leq 1$ , 所以有  $\|I - \Gamma_1 H_t\|_\infty \leq 1$ , 证毕。

除了在定理 3.10 得出的结论, 本文还得出对于迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)$  这一条件, 那么不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

因为当  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| \geq 1$  时, 对任给的理想轨线和初始输入, 无法保证系统输入跟踪误差收敛于零向量, 所以只需要证明在  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1$  条件下, 不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛即可。

利用公式 (3-26) 可得, 当  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \leq 1$  时,

$$R_\omega^{I-\Gamma_1 H_t} = 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)\eta e^{-(\omega-1)\alpha}$$



$$= 1 + \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) - C(\omega)B(\omega-1) \right) > 1 \quad (3-32)$$

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-\Gamma H_t} &= C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \\ &= \eta e^{-(\omega-1)\alpha} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j) + C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1 > 1 \end{aligned} \quad (3-33)$$

因为系统参数不满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 所以无论如何调节  $\eta$  和  $\alpha$ ,  $R_{\omega}^{I-\Gamma H_t}$  总是大于 1, 继而有  $\|\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t\|_{\infty} > 1$ , 证毕。

由定理 3.10 可以得出, 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律可以拓宽系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛时增益  $\eta$  的可选范围。针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-2), 要想保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 需要保证对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$  且  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$ , 而针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 在  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$  和  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| \leq 1$  条件下仍然可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

此外由定理 3.10 还可以得出, 如果系统参数不满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ , 那么使用具有指数衰减增益的 P-型学习律仍然无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。

最后本章节对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20) 在 2 范数意义下的收敛特性进行了研究, 并得出以下定理。

**定理 3.11** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-20) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-20), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega (2 \leq \omega \leq T)$  都有  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=1}^{\omega-1} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} \mathbf{A}(\omega-i)B(j-1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入在 2 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

同在离散定常系统的分析方法一样, 要证明系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0, 需要证明矩阵  $\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t$  的每一个特征值都小于 1, 即  $\|\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t\|_2 < 1$ 。

首先令  $\Phi_{I-\Gamma_1 H_t} = (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t)^{\top} (\mathbf{I} - \Gamma_1 \mathbf{H}_t)$ , 因为  $\Phi_{I-\Gamma_1 H_t}$  是  $T \times T$  维非奇异矩阵, 所以  $\Phi_{I-\Gamma_1 H_t}$  一共有  $T$  个特征值  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ 。接下来利用盖尔圆定理对矩阵

$\Phi_{I-\Gamma_1 H_t}$  的每一个特征进行分析, 从而求得每一个特征值所处区间, 即

$$|\lambda - \varphi_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^T |\varphi_{ij}| \quad (3-34)$$

最后由公式 (3-34) 可以进一步推得  $\lambda \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^T |\varphi_{ij}| + \varphi_{ii}$ 。如果可以证明矩阵  $(I - \Gamma_1 H_t)^\top (I - \Gamma_1 H_t)$  的每一个特征值都小于 1, 那么就可以保证  $I - \Gamma_1 H_t$  的每一个特征值小于 1, 继而保证存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0。

对矩阵  $\Phi_{I-\Gamma_1 H_t}$  的每一行使用盖尔圆定理, 可以得到矩阵  $\Phi_{I-\Gamma_1 H_t}$  的特征值满足以下不等式:

$$\lambda_1 \leq (1 - C(1)B(0)\eta)^2 + f_1^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) \quad (3-35)$$

$$\lambda_\omega \leq (1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha})^2 + f_\omega^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) \quad \omega = 2, 3, \dots, T-2 \quad (3-36)$$

$$\lambda_{T-1} \leq (1 - C(T-1)B(T-2)\eta e^{-(T-2)\alpha})^2 + f_{T-1}^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) \quad (3-37)$$

$$\lambda_T \leq (1 - C(T)B(T-1)\eta e^{-(T-1)\alpha})^2 + f_T^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) \quad (3-38)$$

其中,  $f_1^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha), f_\omega^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha), f_{T-1}^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha), f_T^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha)$  表达式如下:

$$\begin{aligned} f_1^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i)B(0)C(j)B(j-1)\eta^2 e^{-2(j-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i)B(0)\eta e^{-(j-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=2}^T \left[ \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i)B(0) \right)^2 \eta^2 e^{-2(j-1)\alpha} \right] \\ & + \sum_{j=3}^T \left[ C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i)B(0) \left( \sum_{m=1}^{j-2} C(j) \prod_{n=m+1}^{j-1} A(n)B(m) \right) \eta^2 e^{-2(j-1)\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} f_\omega^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=0}^{\omega-2} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j)C(\omega)B(\omega-1)\eta^2 e^{-2(\omega-1)\alpha} \right) \\ & - \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)C(j)B(j-1)\eta^2 e^{-2(j-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(j-1)\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=\omega+1}^T \left[ \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega-1) \right)^2 \eta^2 e^{-2(j-1)\alpha} \right] \\
 & + \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( \sum_{i=\omega+1}^T (func_1(i, j)) \right) + \sum_{j=\omega+2}^T func_2(i, j) \quad (3-40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{T-1}^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) = & -C(T) \mathbf{A}(T-1) B(T-2) C(T) B(T-1) \eta^2 e^{-2(T-1)\alpha} \\
 & - \sum_{j=0}^{T-3} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-2-j} \mathbf{A}(T-i-1) B(j) C(T-1) B(T-2) \eta^2 e^{-2(T-2)\alpha} \right) \\
 & + \sum_{j=1}^{T-2} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-j-1} \mathbf{A}(T-1-i) B(j-1) \eta e^{-(T-2)\alpha} \right) \\
 & + C(T) \mathbf{A}(T-1) B(T-2) \eta e^{-(T-1)\alpha} \\
 & + (C(T) \mathbf{A}(T-1) B(T-2))^2 \eta^2 e^{-2(T-1)\alpha} \\
 & + \sum_{j=1}^{T-2} \left[ C(T) \mathbf{A}(T-1) B(T-2) \left( C(T) \prod_{n=j}^{T-1} \mathbf{A}(n) B(j-1) \right) \eta^2 e^{-2(T-1)\alpha} \right] \quad (3-41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_T^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=0}^{T-2} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-1-j} \mathbf{A}(T-i) B(j) C(T) B(T-1) \eta^2 e^{-2(T-1)\alpha} \right) \\
 & + \sum_{j=1}^{T-1} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-j} \mathbf{A}(T-i) B(j-1) \eta e^{-(T-1)\alpha} \right) \quad (3-42)
 \end{aligned}$$

在 (3-40) 中,

$$\begin{aligned}
 func_1(i, j) &= \left( C(i) \prod_{m=\omega}^{i-1} \mathbf{A}(m) B(\omega-1) \right) \left( C(i) \prod_{n=j}^{i-1} \mathbf{A}(n) B(j-1) \right) \eta^2 e^{-2(i-1)\alpha} \\
 func_2(i, j) &= \left[ C(j) \prod_{m=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(m) B(\omega-1) \left( \sum_{i=\omega}^{j-2} C(j) \prod_{n=i+1}^{j-1} \mathbf{A}(n) B(i) \right) \right] \eta^2 e^{-2(j-1)\alpha}
 \end{aligned}$$

因为在  $f_1^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha)$  中每一项都含有  $e^{-\alpha}$  并且当  $\alpha$  趋于一个较大的值时一定有  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha} = 0$ 。所以对于  $\lambda_1$  来说, 只需选择  $\eta = \frac{1}{C(1)B(0)}$  和一个较大的  $\alpha_7$ , 就可使得  $\lambda_1 < 1$ , 其中  $\alpha_7$  满足:

$$\lim_{\alpha_7 \rightarrow \infty} f_1^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha_7) = 0 \quad (3-43)$$

其次观察到在 (3-40) 式中,  $i, j$  总是大于等于  $\omega$ , 因此一定存在一个  $\alpha_8$ , 使得下式成立。

$$\lim_{\alpha_8 \rightarrow \infty} f_{\omega}^{I-\Gamma_1 H_t}(\eta, \alpha_8) = \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} \mathbf{A}(\omega-i) B(j-1) \eta e^{-(\omega-1)\alpha_8} \right) \quad (3-44)$$

对于  $\lambda_\omega$  来说, 当  $\alpha \geq \alpha_8$  时, (3-36) 式可以被写为:

$$\lambda_\omega \leq 1 + \left( C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \right)^2 - 2C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \right) \quad \omega = 2, 3, \dots, T-2 \quad (3-45)$$

又因为

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{(C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha})^2}{\sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} - 2C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(\omega-1)\alpha} \right)} = 0 \quad (3-46)$$

所以当系统满足  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1) \right)$  且  $\alpha > \alpha_8$  条件时, 有  $\lambda_\omega < 1$ 。

同理对于  $\lambda_{T-1}$  有:

$$\lambda_{T-1} \leq 1 + \left( C(T-1)B(T-2)\eta e^{-(T-2)\alpha} \right)^2 - 2C(T-1)B(T-2)\eta e^{-(T-2)\alpha} + \sum_{j=1}^{T-2} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-j-1} A(T-1-i)B(j-1)\eta e^{-(T-2)\alpha} \right) \quad (3-47)$$

当系统满足  $2C(T-1)B(T-2) > \sum_{j=1}^{T-2} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-j-1} A(T-1-i)B(j-1) \right)$  且  $\alpha \geq \alpha_8$  时,  $\lambda_{T-1} < 1$ 。

最后, 对于  $\lambda_T$  有:

$$\lambda_T \leq 1 + \left( C(T)B(T-1)\eta e^{-(T-1)\alpha} \right)^2 - 2C(T)B(T-1)\eta e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{j=1}^{T-1} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-j} A(T-i)B(j-1)\eta e^{-(T-1)\alpha} \right) \quad (3-48)$$

当系统满足  $2C(T)B(T-1) > \sum_{j=1}^{T-1} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-j} A(T-i)B(j-1) \right)$  且  $\alpha \geq \alpha_8$  时,  $\lambda_T < 1$ 。

综上所述, 只要系统参数满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=1}^{\omega-1} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1)$  这一条件, 那么一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\alpha \geq \max(\alpha_7, \alpha_8)$ , 证毕。

### 3.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性

上一节指出, 具有指数衰减增益的 P-型学习律虽然可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 但依旧无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。所以本节将尝试使用具有指数递增增益的 P-型学习律去改善系统输出跟踪误差的瞬态性能。

### 3.3.1 输出偏差的收敛特性

系统 (3-1) 结合迭代学习更新律 (2-70) 构成了迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 利用公式 (3-2) 和  $\Gamma_2$  矩阵可以得到有关迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70) 输出偏差的公式:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_2) E_k \quad (3-49)$$

其中,  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ -C(2)A(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-(T-2)\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C(T)\prod_{i=1}^{T-1} A(i)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} & -C(T)\prod_{i=2}^{T-1} A(i)B(1)\eta e^{-(T-2)\alpha} & \cdots & 1 - C(T)B(T-1)\eta \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

在分析迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70) 的单调收敛性之前, 依旧是先对系统的收敛性进行说明。由于  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_2$  是一个下三角矩阵, 所以系统输出跟踪误差收敛的充要条件是对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| < 1$ 。同时可以发现当系统输出跟踪误差收敛时, 一定有  $1 - C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} < 1$ , 因此在之后的分析中, 对  $R_1^{I-H_t\Gamma_2}$  不作分析。接着由矩阵 (3-50) 可以得到矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_2$  第  $\omega$  列元素的绝对值之和为:

$$L_\omega^{I-H_t\Gamma_2} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \quad (3-51)$$

第  $\omega$  行元素的绝对值之和为:

$$R_\omega^{I-H_t\Gamma_2} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j)\eta e^{-(T-j-1)\alpha} \quad (3-52)$$

利用公式 (3-51)(3-52), 本节从输出角度进行分析得到以下定理。

**定理 3.12** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)$  这一条件, 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

根据公式 (3-51), 将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}|$  分为了两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \leq 1$  时,

$$L_\omega^{I-H_t\Gamma_2} = 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}$$

$$= 1 + \eta e^{-(T-\omega)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega-1) - C(\omega) B(\omega-1) \right) \quad (3-53)$$

显然如果存在  $\omega_0$  使得  $C(\omega_0)B(\omega_0-1) < \sum_{j=\omega_0+1}^T C(j) \prod_{i=\omega_0}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega_0-1)$ , 那么一定会有  $L_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_2} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_2\|_1 > 1$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{I-H_t\Gamma_2} &= C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega-1) \eta e^{-(T-\omega)\alpha} \\ &= \eta e^{-(T-\omega)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega-1) + C(\omega)B(\omega-1) \right) - 1 \end{aligned} \quad (3-54)$$

同样可以得出如果存在  $\omega_0$  使得  $\sum_{j=\omega_0+1}^T C(j) \prod_{i=\omega_0}^{j-1} \mathbf{A}(i) B(\omega_0-1) > C(\omega_0)B(\omega_0-1)$ , 那么一定有  $L_{\omega_0}^{I-H_t\Gamma_2} > 1$ , 即  $\|\mathbf{I} - \mathbf{H}_t\Gamma_2\|_1 > 1$ , 证毕。

**定理 3.13** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| \leq 1$ 。

**证明:**

根据公式 (3-52), 将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}|$  分为两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_2} &= 1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i) B(j) \eta e^{-(T-j-1)\alpha} \\ &= 1 + \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i) B(j) \eta e^{-(T-j-1)\alpha} - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3-55)$$

对于公式 (3-55), 显然当  $\omega \neq T$  时存在  $\alpha_9$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_9 \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i) B(j) \eta e^{-(T-j-1)\alpha_9} - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha_9} \right) \leq 0 \quad (3-56)$$

因此当  $\alpha \geq \alpha_9$  时, 有  $R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_2} \leq 1$ , 其中  $\omega \neq T$ 。

当  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} < 2$  时,

$$R_{\omega}^{I-H_t\Gamma_2} = |1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i) B(j) \eta e^{-(T-j-1)\alpha}$$

$$\leq |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \quad (3-57)$$

同样可以证明对于任意的  $\omega (\omega \neq T)$ , 都存在一个  $\alpha_{10}$  使得下式成立:

$$1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha_{10}} \geq 0 \quad (3-58)$$

当  $\alpha \geq \alpha_{10}$  时, 公式 (3-57) 就变成了 (3-55), 然后就可以按照  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \leq 1$  的情况继续分析了。

由于在上述论述中有  $\omega \neq T$  的限制, 现在对  $\omega = T$  的情况进行说明。

根据 (3-52) 可以得出  $R_T^{I-H_t\Gamma_2} = |1 - C(T)B(T-1)\eta| + \sum_{j=0}^{T-2} C(T) \prod_{i=1}^{T-j-1} A(T-i)B(j)\eta e^{-(T-j-1)\alpha}$ , 并且可以证明存在  $\alpha_{11}$  使得下式成立:

$$\lim_{\alpha_{11} \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{T-2} C(T) \prod_{i=1}^{T-j-1} A(T-i)B(j)\eta e^{-(T-j-1)\alpha_{11}} = 0 \quad (3-59)$$

那么只要当  $\alpha \geq \alpha_{11}$  时, 一定会有  $R_T^{I-H_t\Gamma_2} \leq 1$ 。

综上, 当系统参数满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$ , 都有  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| \leq 1$  时, 那么一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\alpha \geq \max(\alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11})$ 。

以上研究了系统输出跟踪误差在 1 范数以及无穷范数意义下的收敛特性, 接下来将研究系统输出跟踪误差在 2 范数意义下的单调收敛性。

**定理 3.14** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $2C(\omega)B(\omega - 1) > \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  使得输出在 2 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

首先令  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2} = (I - H_t\Gamma_2)^\top (I - H_t\Gamma_2)$ , 其次, 利用盖尔圆定理对矩阵  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2}$  的每一个特征值进行分析, 如果可以使得矩阵  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2}$  的每一个特征值都小于 1, 那么就可以保证  $I - H_t\Gamma_2$  的每一个特征值小于 1, 继而保证存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛于 0。

通过分析可以得到关于矩阵  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2}$  特征值的不等式:

$$\lambda_1 \leq (1 - C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha})^2 + f_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-60)$$

$$\lambda_\omega \leq (1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha})^2 + f_\omega^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad \omega = 2, 3, \dots, T-2 \quad (3-61)$$

$$\lambda_{T-1} \leq (1 - C(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha})^2 + f_{T-1}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-62)$$

$$\lambda_T \leq (1 - C(T)B(T-1)\eta)^2 + f_T^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-63)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0)C(j)B(j-1)\eta^2 e^{-(T-1)\alpha} e^{-(T-j)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} \right) + \sum_{j=2}^T \left[ \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0) \right)^2 \eta^2 e^{-2(T-1)\alpha} \right] \\ & + \sum_{j=3}^T \left[ C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0) \left( \sum_{m=1}^{j-2} C(j) \prod_{n=m+1}^{j-1} \mathbf{A}(n)B(m) e^{-(T-m-1)\alpha} \right) \eta^2 e^{-(T-1)\alpha} \right] \end{aligned} \quad (3-64)$$

$$\begin{aligned} f_{\omega}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=0}^{\omega-2} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)C(\omega)B(\omega-1)\eta^2 e^{-(T-\omega)\alpha} e^{-(T-j-1)\alpha} \right) \\ & - \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)C(j)B(j-1)\eta^2 e^{-(T-j)\alpha} e^{-(T-\omega)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{\omega-1} \left( C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} \mathbf{A}(\omega-i)B(j-1)\eta e^{-(T-j)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=\omega+1}^T \left[ \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1) \right)^2 \eta^2 e^{-2(T-\omega)\alpha} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\omega-1} \sum_{i=\omega+1}^T func_3(i, j) + \sum_{j=\omega+2}^T func_4(i, j) \end{aligned} \quad (3-65)$$

$$\begin{aligned} f_{T-1}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) = & - func_5(i, j) - C(T)\mathbf{A}(T-1)B(T-2)C(T)B(T-1)\eta^2 e^{-\alpha} \\ & + \sum_{j=1}^{T-2} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-j-1} \mathbf{A}(T-1-i)B(j-1)\eta e^{-(T-j)\alpha} \right) \\ & + C(T)\mathbf{A}(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha} \\ & + (C(T)\mathbf{A}(T-1)B(T-2))^2 \eta^2 e^{-2\alpha} + \sum_{j=1}^{T-2} func_6(j) \end{aligned} \quad (3-66)$$

$$\begin{aligned} f_T^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) = & - \sum_{j=0}^{T-2} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-1-j} \mathbf{A}(T-i)B(j)C(T)B(T-1)\eta^2 e^{-(T-j-1)\alpha} \right) \\ & + \sum_{j=1}^{T-1} \left( C(T) \prod_{i=1}^{T-j} \mathbf{A}(T-i)B(j-1)\eta e^{-j\alpha} \right) \end{aligned} \quad (3-67)$$



在公式 (3-65) 中,

$$\begin{aligned}
 func_3(i, j) &= \\
 &\left( C(i) \prod_{m=\omega}^{i-1} A(m) B(\omega - 1) \right) \left( C(i) \prod_{n=j}^{i-1} A(n) B(j - 1) \right) \eta^2 e^{-(T-\omega)\alpha} e^{-(T-j)\alpha} \\
 func_4(i, j) &= \\
 &\left[ C(j) \prod_{m=\omega}^{j-1} A(m) B(\omega - 1) \left( \sum_{i=\omega}^{j-2} C(j) \prod_{n=i+1}^{j-1} A(n) B(i) e^{-(T-i-1)\alpha} \right) \right] \eta^2 e^{-(T-\omega)\alpha}
 \end{aligned}$$

在公式 (3-66) 中,

$$\begin{aligned}
 func_5(i, j) &= \\
 &\sum_{j=0}^{T-3} \left( C(T-1) \prod_{i=1}^{T-2-j} A(T-i-1) B(j) C(T-1) B(T-2) \eta^2 e^{-(T-j-1)\alpha} e^{-\alpha} \right) \\
 func_6(j) &= \left[ C(T) A(T-1) B(T-2) \left( C(T) \prod_{n=j}^{T-1} A(n) B(j-1) \right) \eta^2 e^{-(T-j)\alpha} e^{-\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

用  $g_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $g_\omega^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $g_{T-1}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $g_T^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$  分别表示  $f_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $f_\omega^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $f_{T-1}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ ,  $f_T^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$  中的正项和, 所以有  $g_i^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \geq f_i^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha)$ 。再次利用公式 (3-60)~(3-63), 可以得到:

$$\lambda_1 \leq (1 - C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha})^2 + g_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-68)$$

$$\lambda_\omega \leq (1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha})^2 + g_\omega^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad \omega = 2, 3, \dots, T-2 \quad (3-69)$$

$$\lambda_{T-1} \leq (1 - C(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha})^2 + g_{T-1}^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-70)$$

$$\lambda_T \leq (1 - C(T)B(T-1)\eta)^2 + g_T^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha) \quad (3-71)$$

对于  $\lambda_1$ , 根据公式 (3-68) 可以证明存在一个  $\alpha_{12}$  使得公式 (3-72) 成立。

$$\lim_{\alpha_{12} \rightarrow \infty} g_1^{I-H_t\Gamma_2}(\eta, \alpha_{12}) = \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i) B(0) \eta e^{-(T-1)\alpha_{12}} \right) \quad (3-72)$$

又因为

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{(C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha})^2}{\sum_{j=2}^T (C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i) B(0) \eta e^{-(T-1)\alpha})} = 0 \quad (3-73)$$

可以得出当  $\alpha$  取到足够大时, (3-68) 可以写为:

$$\lambda_1 \leq 1 - 2C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} A(i) B(0) \eta e^{-(T-1)\alpha} \right) \quad (3-74)$$

显然当  $2C(1)B(0) > \sum_{j=2}^T \left( C(j) \prod_{i=1}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(0) \right)$  时,  $\lambda_1 < 1$  成立。

对于  $\lambda_\omega, \lambda_{T-1}$ , 同  $\lambda_1$  的处理方式一样。当  $\alpha$  取到足够大时, 公式 (3-69) 和 (3-70) 可以写为:

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &\leq 1 + \left( C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right)^2 - 2C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \\ &\quad + \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right) \quad \omega = 2, 3, \dots, T-2 \end{aligned} \quad (3-75)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{T-1} &\leq 1 + \left( C(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha} \right)^2 - 2C(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha} \\ &\quad + C(T)\mathbf{A}(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3-76)$$

又因为:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\left( C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right)^2}{\sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \right)} = 0 \quad (3-77)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\left( C(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha} \right)^2}{C(T)\mathbf{A}(T-1)B(T-2)\eta e^{-\alpha}} = 0 \quad (3-78)$$

所以联立公式 (3-75)~(3-78) 可以得出, 当  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=\omega+1}^T \left( C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1) \right)$  时,  $\lambda_\omega < 1$  成立, 其中  $2 \leq \omega \leq T-1$ 。

对于  $\lambda_T$ , 只需要选择  $\eta = \frac{1}{C(T)B(T-1)}$ , 就可使得矩阵  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2}$  的最后一行元素绝对值之和为 0, 即证明了  $\lambda_T < 1$ 。

综上, 本定理分别针对矩阵  $\Phi_{I-H_t\Gamma_2}$  的每一个特征值的上界都进行了分析, 最后得出通过选择合适的增益  $\eta$  和  $\alpha$ , 可以保证系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛, 证毕。

### 3.3.2 输入偏差的收敛特性

针对迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 通过计算可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差与第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t) \delta U_k \quad (3-79)$$

其中,  $\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t =$

$$\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-(T-1)\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta e^{-(T-2)\alpha} & 1 - C(2)B(1)\eta e^{-(T-2)\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C(T)\prod_{i=1}^{T-1} \mathbf{A}(i)B(0)\eta & -C(T)\prod_{i=2}^{T-1} \mathbf{A}(i)B(1)\eta & \cdots & 1 - C(T)B(T-1)\eta \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

由于矩阵  $\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t$  和矩阵  $\mathbf{I} - \mathbf{H}_t \Gamma_2$  都为下三角矩阵, 且主对角元素一样, 所以迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70) 输入跟踪误差收敛的充要条件同样是  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| < 1$ , 其中  $1 \leq \omega \leq T$ 。

利用公式 (3-80) 可以得到矩阵  $\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t$  的第  $\omega$  列元素的绝对值之和为:

$$L_{\omega}^{\mathbf{I}-\Gamma_2 \mathbf{H}_t} = |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-j)\alpha} \quad (3-81)$$

第  $\omega$  行元素的绝对值之和为:

$$R_{\omega}^{\mathbf{I}-\Gamma_2 \mathbf{H}_t} = |1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \quad (3-82)$$

以下为本节针对 (3-1)-(2-70) 系统从输入角度进行研究得出的相关结论。

**定理 3.15** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

由 (3-80) 得出了系统输入跟踪误差收敛的充要条件是对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}| < 1$ , 然后再根据公式 (3-81) 将  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}|$  分为了两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{\mathbf{I}-\Gamma_2 \mathbf{H}_t} &= 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-j)\alpha} \\ &\geq 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \\ &= 1 + \eta e^{-(T-\omega)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1) - C(\omega)B(\omega - 1) \right) \geq 1 \end{aligned} \quad (3-83)$$

当  $1 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} < 2$  时,

$$\begin{aligned} L_{\omega}^{\mathbf{I}-\Gamma_2 \mathbf{H}_t} &= C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-j)\alpha} \\ &\geq C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} - 1 + \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \end{aligned} \quad (3-84)$$

显然公式 (3-84) 的最终结果为一个大于 1 的整数再加上一个非负数, 所以  $\|I - \Gamma_2 H_t\|_1$  一定是大于 1 的。

综上可得, 如果系统参数不满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)$ , 那么不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0, 证毕。

由定理 3.9 可以得出, 如果时变系统采用 (2-20) 迭代学习更新律, 只要保证系统输入跟踪误差收敛就一定可以找到  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。但是如果系统使用迭代学习更新律 (2-70), 那么仅由条件  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  并不能够保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 接下来给出两个具体样例进行说明。

**例 3.1** 令  $T = 2$ ,  $\eta = 1$ , 并且有如下系统信息:

$$C(2) = C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, A(1) = A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}。$$

将上述参数带入公式 (3-80) 可得:

$$I - \Gamma_2 H_t = \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & 0 \\ -C(2)A(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1.1e^{-\alpha} & 0 \\ -0.55 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

显然上述系统参数满足  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$ , 并且一定存在  $\alpha$  使得  $\|I - \Gamma_2 H_t\|_1 \leq 1$  成立。

**例 3.2** 令  $T = 2$ ,  $\eta = 1$ , 并且有如下系统信息:

$$C(2) = C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, A(1) = A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}。$$

将上述参数带入公式 (3-80) 可得:

$$I - \Gamma_2 H_t = \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & 0 \\ -C(2)A(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\alpha} & 0 \\ -1 & -0.1 \end{bmatrix} \quad (3-86)$$

虽然上述系统参数满足  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$ , 但是在这种条件下对于任意的  $\alpha$ , 都无法使得  $\|I - \Gamma_2 H_t\|_1 \leq 1$ 。

从以上两个例子同样可以看出, 具有指数递增增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。

**定理 3.16** 考虑由系统 (3-1) 和迭代学习更新律 (2-70) 构成的迭代学习控制系统 (3-1)-(2-70), 如果系统 (3-1) 的 Markov 参数不满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\eta$  和  $\alpha$  无法保证系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

根据公式 (3-82) 将  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha}|$  分为两种情况。

当  $0 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \leq 1$  时,

$$\begin{aligned} R_{\omega}^{I-\Gamma_2 H_t} &= 1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega - i)B(j)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \\ &= 1 + \eta e^{-(T-\omega)\alpha} \left( \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1) - C(\omega)B(\omega - 1) \right) > 1 \end{aligned} \quad (3-87)$$

当  $1 < C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} < 2$  时,

$$R_{\omega}^{I-\Gamma_2 H_t} = C(\omega)B(\omega - 1)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} - 1 + \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega - i)B(j)\eta e^{-(T-\omega)\alpha} \quad (3-88)$$

由于  $\sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1) > C(\omega)B(\omega - 1)$ , 显然 (3-88) 的结果是大于 1 的。综上可得, 如果系统参数不满足  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega - 1)$ , 那么不一定存在  $\eta$  和  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0, 证毕。

最后对输入跟踪误差在 2 范数意义下的单调收敛性进行分析, 本节指出, 针对离散时变系统, 仅有条件  $|1 - C(\omega)B(\omega - 1)\eta| < 1 (1 \leq \omega \leq T)$  并不能够判断系统输入跟踪误差在 2 范数意义下是否单调收敛。本文通过给出以下两个具体样例进行说明。

**例 3.3** 令  $T = 2$ ,  $\eta = 0.5$ , 并且有如下系统信息:

$$C(2) = C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.2 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

将上述参数带入公式 (3-80) 和  $(\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)^\top (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)$  之后可以得到:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)^\top (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t) = \\ &\begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta \\ 0 & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & 0 \\ -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - 1.1e^{-\alpha})^2 + 0.0121 & -0.055 \\ -0.055 & 0.025 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-89)$$

显然在这种条件下一定存在  $\alpha$  使得  $\|\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t\|_2 \leq 1$  成立, 例如  $\alpha = 2$  时, 由盖尔圆定理可得  $\lambda_1 \leq 0.28$  和  $\lambda_2 \leq 0.69$ 。

**例 3.4** 令  $T = 2$ ,  $\eta = 1.5$ , 并且有如下系统信息:

$$C(2) = C(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

将上述参数带入公式 (3-80) 和  $(\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)^\top (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)$  之后可以得到:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)^\top (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t) = \\
& \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta \\ 0 & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - C(1)B(0)\eta e^{-\alpha} & 0 \\ -C(2)\mathbf{A}(1)B(0)\eta & 1 - C(2)B(1)\eta \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} (1 - 1.8e^{-\alpha})^2 + 3.24 & 0.9 \\ 0.9 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (3-90)
\end{aligned}$$

显然在这种条件对于任意的  $\alpha$ ,  $(\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)^\top (\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t)$  的最大特征值都会大于等于 1.1, 进一步可得  $\|\mathbf{I} - \Gamma_2 \mathbf{H}_t\|_2 \geq 1$ 。

从以上两个例子可以看出, 具有指数递增增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛。

### 3.4 仿真与分析

在本节中, 首先将给出一些具体的系统, 然后对这些系统分别应用三种迭代学习更新律进行实验, 最后根据实验结果来依次验证本章节中证明的定理。其中定理 3.1~定理 3.6 和经典 P-型学习律 (2-2) 有关, 定理 3.7~定理 3.11 和具有指数衰减增益的 P-型学习律 (2-20) 有关, 定理 3.12~定理 3.16 和具有指数递增增益的 P-型学习律 (2-70) 有关。

本章节针对的系统为单输入单输出离散时变系统, 为了更加方便验证系统参数满足的条件, 本节实验不再给出系统传递函数, 而是给出了系统的状态空间表达式。

首先给出如下三个系统,

系统 3.1:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 30, \\
& B(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} & 0 \leq t \leq 14 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} & 15 \leq t \leq 29 \end{cases}, C(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \end{bmatrix} & 1 \leq t \leq 15 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix} & 16 \leq t \leq 30 \end{cases}。
\end{aligned}$$

系统 3.2:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 30, \\
& B(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} & 0 \leq t \leq 14 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 15 \leq t \leq 29 \end{cases}, C(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} & 1 \leq t \leq 15 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix} & 16 \leq t \leq 30 \end{cases}。
\end{aligned}$$

系统 3.3:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 30,$$

$$B(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} & 0 \leq t \leq 14 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} & 15 \leq t \leq 29 \end{cases}, C(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \end{bmatrix} & 1 \leq t \leq 15 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix} & 16 \leq t \leq 30 \end{cases}.$$

通过计算可以得出, 对于系统 3.1, 只要选择增益  $\eta = 1.2$ , 那么系统参数就可以满足以下三个条件:

$$1) \quad C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1), \text{ 其中 } 1 \leq \omega \leq T, \quad (3-91)$$

$$2) \quad C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j), \text{ 其中 } 2 \leq \omega \leq T, \quad (3-92)$$

$$3) \quad 0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1, \text{ 其中 } 1 \leq \omega \leq T. \quad (3-93)$$

对系统 3.1 使用经典 P-型学习律进行仿真实验, 可以得到系统输出跟踪误差的 1 范数和无穷范数曲线图, 如图 3.1 所示。

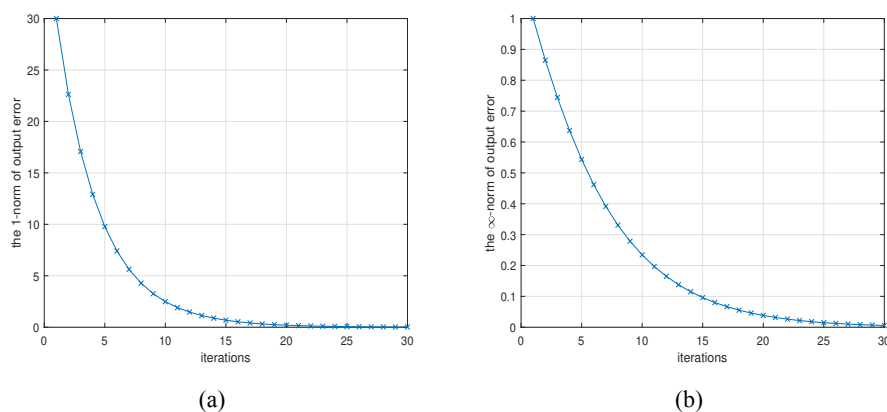


图 3.1 系统 3.1 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

在图 3.1 中, (a) 图为系统输出跟踪误差的 1 范数曲线图, (b) 图为系统输出跟踪误差的无穷范数曲线图。本次实验的实验结果分别验证了本节中定理 3.1 和定理 3.4, 即只要系统参数满足一定条件, 使用经典 P-型学习律就可以使系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下都实现单调收敛。

对于系统 3.2, 通过计算可以得出, 只要选择增益  $\eta = 0.8$ , 那么系统参数可以满足以下三个条件:

$$1) \quad C(\omega)B(\omega-1) \leq \frac{2}{\eta} - \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1), \text{ 其中 } 1 \leq \omega \leq T, \quad (3-94)$$

$$2) \quad C(\omega)B(\omega-1) < \frac{2}{\eta} - \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j), \text{ 其中 } 2 \leq \omega \leq T, \quad (3-95)$$

$$3) \quad 1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2, \text{ 其中 } 1 \leq \omega \leq T. \quad (3-96)$$

对系统 3.2 使用经典 P-型学习律进行仿真实验, 可以得到系统 2 的输出跟踪误差 1 范数和无穷范数曲线图, 如图 3.2 所示。实验结果显示系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下可以实现单调收敛, 从而验证了本节中定理 3.2 和定理 3.5。

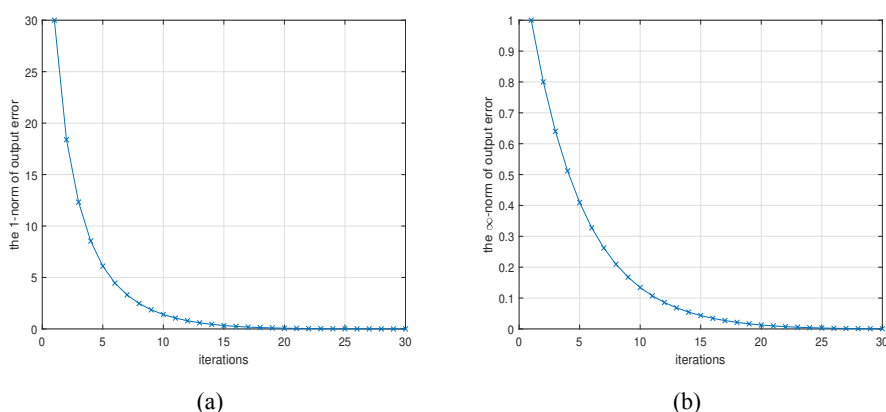


图 3.2 系统 3.2 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

针对系统 3.3, 通过计算可以发现系统 3.3 的参数条件既不满足 (3-91) 也不满足 (3-94)。根据定理 3.3 和定理 3.6 推断, 如果系统 3.3 使用 (2-2) 经典 P-型学习律, 那么不一定存在  $\eta$  使得系统输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下单调收敛, 实验结果如图 3.3 所示。

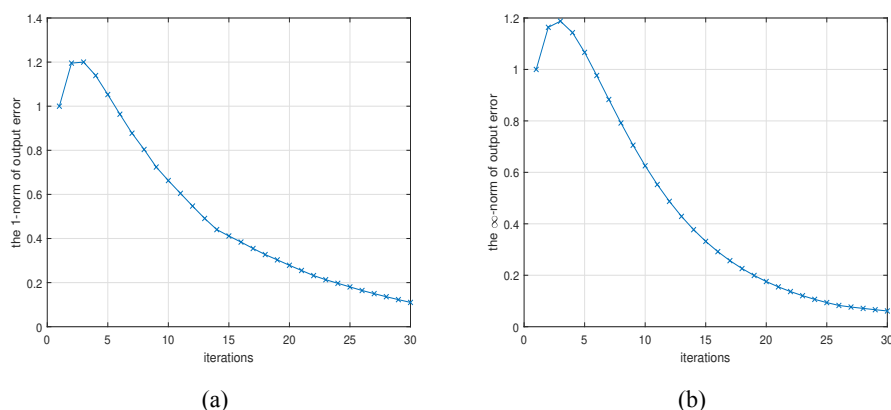


图 3.3 系统 3.3 采用 (2-2) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

在图 3.3 中, (a) 图为系统输出跟踪误差的 1 范数曲线图, (b) 图为系统输出跟踪误差的无穷范数曲线图。从两幅图可以看出, 系统输出跟踪误差的 1 范数和无穷范数在最后收敛到 0 之前都出现了超调。从而验证了本节中定理 3.3 和定理 3.6。



在以上仿真实验中,使用的迭代学习更新律都为经典 P-型学习律,在接下来的实验中,将主要分析具有指数衰减增益的 P-型学习律对系统单调收敛性的影响。

对系统 3.3 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律进行仿真实验,仿真结果如图 3.4 所示,其中 (a) 为输出跟踪误差的 1 范数曲线图, (b) 为输出跟踪误差的无穷范数曲线图。从图中可以看出系统输出跟踪误差的 1 范数和无穷范数在收敛之前都出现了超调,即无法实现单调收敛,从而验证了本节中的定理 3.7 和定理 3.8。

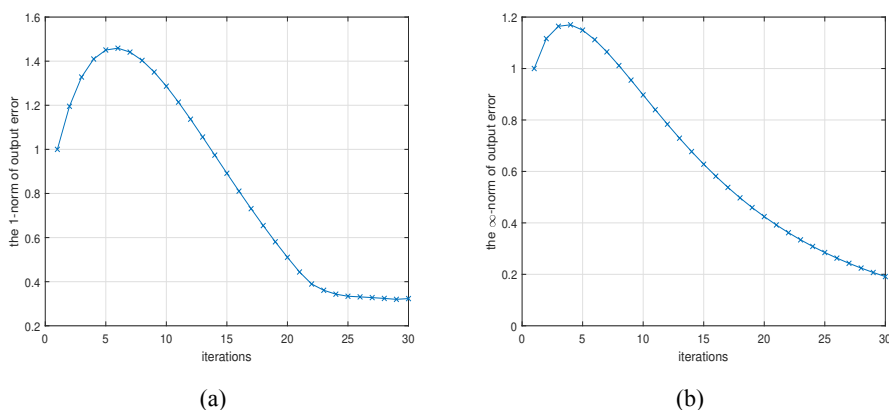


图 3.4 系统 3.3 采用 (2-20) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

根据定理 3.1 和  $I - H_t \Gamma_0 = I - \Gamma_0 H_t$  可以得到,如果系统满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega-1)$ , 那么使用经典 P-型学习律就可以使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0, 其中  $\eta$  满足  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$ 。为了验证定理 3.9, 本次实验针对的系统应尽量不满足上述条件, 所以本次实验选择系统 3.3 作为实验对象, 实验结果如图 3.5 所示。

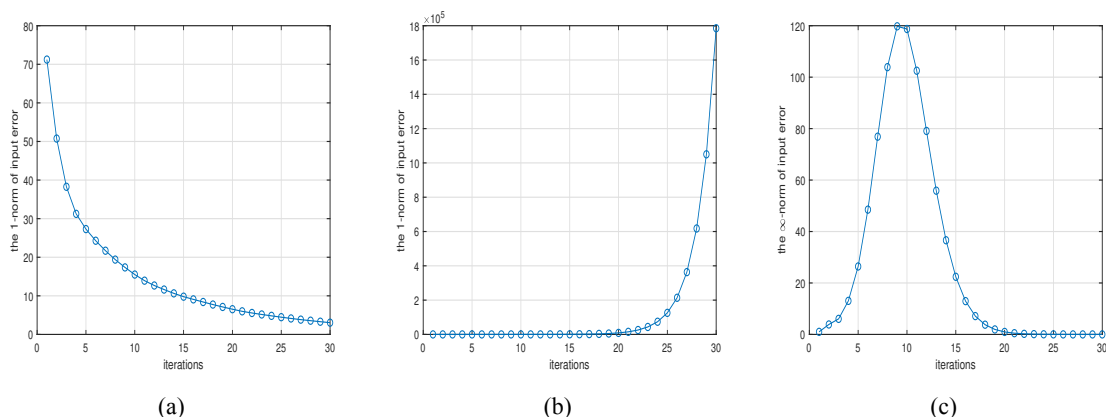


图 3.5 系统 3.3 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

在图 3.5 中, (a) 图为在系统满足  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  条件下得到的输入跟踪误差的 1 范数曲线图, 实验中所设参数为  $\eta = 0.8, \alpha = 0.065$ , 从结果图可以看出输入跟踪误差在 1 范数意义下实现了单调收敛。 (b) 图为在系统不满足  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$  条件下得到的输入跟踪误差的 1 范数曲线图, 实验中所设参数为  $\eta = 15, \alpha = 100$ , 从结果图可以看出, 由于系统输入跟踪误差是发散的, 无论如何调节  $\alpha$  都无法使得

输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛,从而证明了定理 3.9。(c) 图为系统输入跟踪误差的无穷范数曲线图,从图中可以看出,系统输入跟踪误差在收敛到 0 之前出现了超调,从而证明具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性。

对系统 3.1 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律进行仿真实验,实验结果如图 3.6 所示。

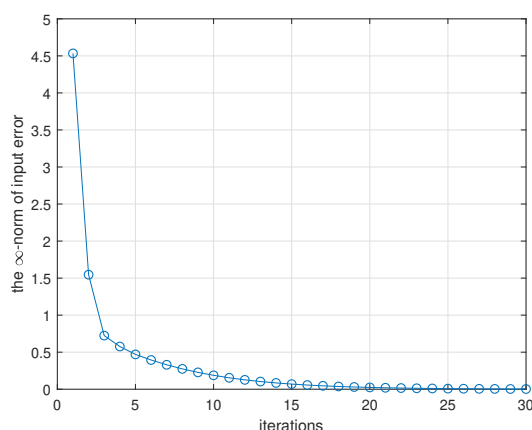


图 3.6 系统 3.1 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数

要验证定理 3.10,只需要验证如果系统满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j)$  并且  $\eta$  满足  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$ , 存在  $\alpha$  使得输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0 即可。本次实验所设参数为  $\eta = 10, \alpha = 0.065$ , 满足系统单调收敛要求的条件。从图 3.6 可以看出系统输入跟踪误差确实实现了在无穷范数意义下单调收敛,从而验证了定理 3.10。

由于  $\|\Omega\|_1 \|\Omega_\infty\| \geq \|\Omega\|_2^2$ , 又根据定理 3.9 和定理 3.10 可以得出, 如果系统满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega-i)B(j)$ , 那么系统输入跟踪误差的 2 范数总是可以实现单调收敛性的。而要验证定理 3.11, 需要让系统不满足上述条件, 但同时又需要满足  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=1}^{\omega-1} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} A(\omega-i)B(j-1)$  条件。由于上述系统都不具备该条件, 因此给出一个新的系统。

系统 3.4:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 30,$$

$$B(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix} & 0 \leq t \leq 14 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 15 \leq t \leq 29 \end{cases}, C(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} & 1 \leq t \leq 15 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \end{bmatrix} & 16 \leq t \leq 30 \end{cases}.$$

对系统 3.4 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律, 实验所设参数为  $\eta = 0.8, \alpha = 0.075$ , 实验结果如图 3.7 所示。从结果图中可以看出, 系统输入跟踪误差的 2 范数确实可以实现单调收敛, 从而证明了定理 3.11。

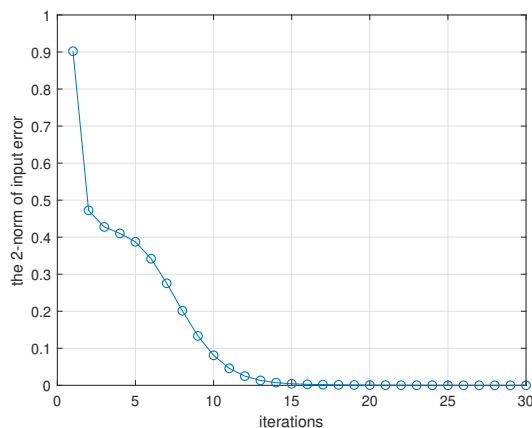


图 3.7 系统 3.4 采用 (2-20) 更新律之后输入跟踪误差的 2 范数

要验证定理 3.12, 需要系统不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq T)$  都有  $C(\omega)B(\omega - 1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C(j) \prod_{i=\omega}^{j-1} A(i)B(\omega - 1)$  这一条件, 显然系统 3.3 不满足该条件。所以本次实验选择系统 3.3 作为实验对象, 得到的实验结果如图 3.8 所示。

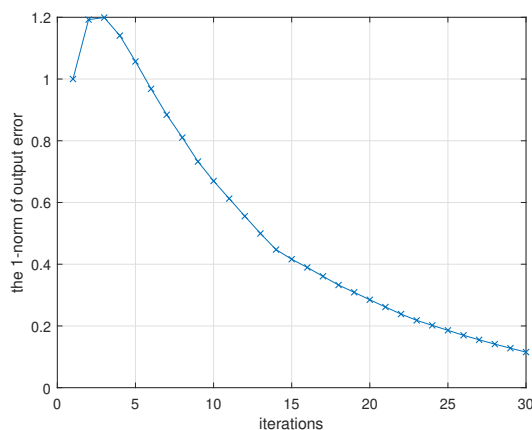


图 3.8 系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 1 范数

根据定理 3.4, 如果系统满足  $|C(\omega)B(\omega - 1)| \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} |C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j-1} A(\omega - i)B(j)|$ , 具有指数递增增益的 P-型学习律 (2-70) 一定可以使得系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0。为了验证定理 3.13, 需要让系统不满足定理 3.4 中所提条件, 所以本次实验选择系统 3.3 作为实验对象, 实验结果如图 3.9 所示。其中, (a) 图的实验结果是在设定参数  $\eta = 0.9, \alpha = 0.337$  条件下得到的, 由于  $\alpha$  数值设置太大, 尽管系统迭代了 90 次输出跟踪误差的无穷范数仍然没有收敛到 0, 但输出跟踪误差一直在单调减少, 直至减小到了 0.9992。而 (b) 图实验结果是在  $\eta = 0.9, \alpha = 0.27$  条件下得到的, 由于  $\alpha$  没有足够大, 所以出现了超调。

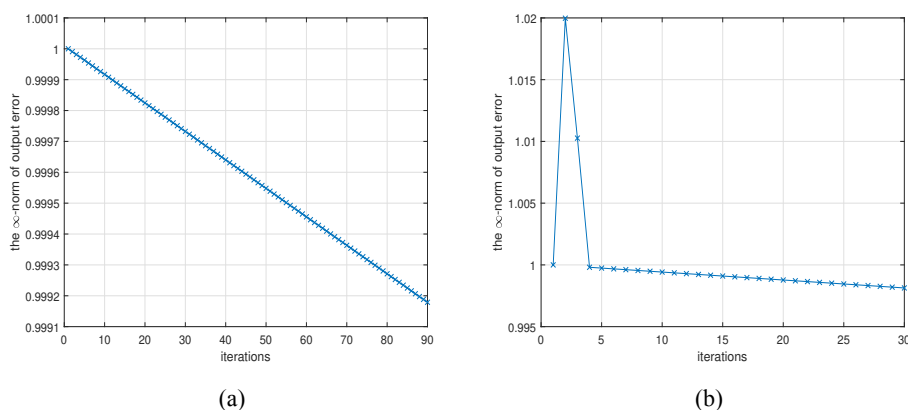


图 3.9 系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的无穷范数

接下来对系统 3.4 使用具有指数递增增益的 P-型学习律进行实验, 所得实验结果如图 3.10 所示。在本次实验中, 设置参数为  $\eta = 0.9, \alpha = 0.125$ , 由于系统收敛速度较慢, 所以本次实验迭代次数为 90 次。从结果图中可以看出, 通过选择  $\eta$  和  $\alpha$  可以使得系统输出跟踪误差在 2 范数意义下实现单调收敛, 从而验证了定理 3.14。

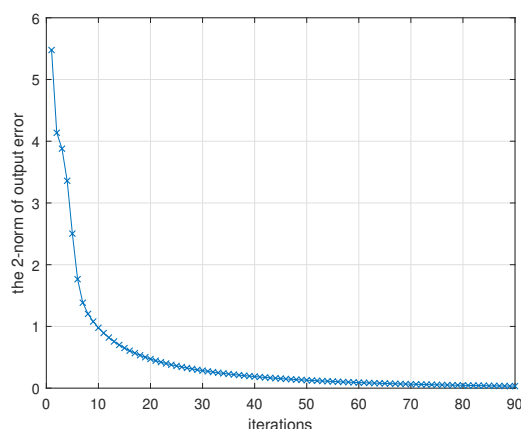


图 3.10 系统 3.4 采用 (2-70) 更新律之后输出跟踪误差的 2 范数

因为系统 3.3 既满足定理 3.15 中的条件, 也满足定理 3.16 中的条件, 所以最后对定理 3.15 和定理 3.16 同时进行验证。

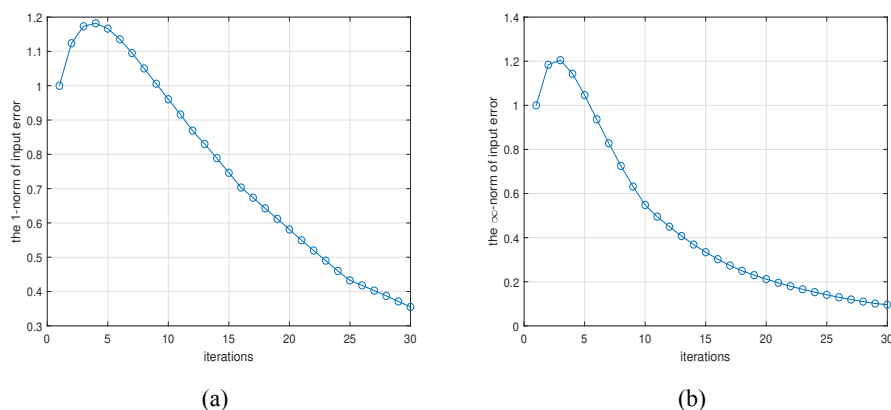


图 3.11 系统 3.3 采用 (2-70) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数以及无穷范数

对系统 3.3 使用 (2-70) 迭代学习更新律后, 得到实验结果如图 3.11 所示。其中, (a) 图为系统输入跟踪误差的 1 范数曲线图, (b) 图为系统输入跟踪误差的无穷范数曲线图。很显然, 输入跟踪误差的 1 范数和无穷范数在收敛过程中都出现了超调现象, 无法实现单调收敛, 从而证明了定理 3.15 和定理 3.16。

### 3.5 小结

针对 SISO 离散时变系统, 本章节首先给出了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差单调收敛的充要条件, 并对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在经典 P-型学习律下的收敛特性进行了分析。其次, 本章对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在具有指数衰减增益的 P-型学习律下的收敛特性进行了研究。研究得出, 具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下以及输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。再次, 对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在具有指数递增增益的 P-型学习律下的收敛特性进行了研究。研究得出, 具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。最后, 通过数值仿真验证了本章所得结论的有效性。将本章节所得出的结论用以下表格进行总结, 表格中“-”表示针对相应条件尚未得出相关结论。

首先给出如下条件:

- ① 满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C_j \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$ 。
- ②  $0 < C(\omega)B(\omega-1)\eta \leq 1$ 。
- ③  $C(\omega)B(\omega-1) \leq \frac{2}{\eta} - \sum_{j=\omega+1}^T C_j \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$ 。
- ④  $1 < C(\omega)B(\omega-1)\eta < 2$ 。
- ⑤ 满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C_\omega \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ 。
- ⑥  $C(\omega)B(\omega-1) \leq \frac{2}{\eta} \sum_{j=0}^{\omega-2} C_\omega \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ 。
- ⑦ 不满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=\omega+1}^T C_j \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$ 。
- ⑧ 不满足  $C(\omega)B(\omega-1) \geq \sum_{j=0}^{\omega-2} C_\omega \prod_{i=1}^{\omega-j-1} \mathbf{A}(\omega-i)B(j)$ 。
- ⑨  $|1 - C(\omega)B(\omega-1)\eta| < 1$ 。
- ⑩  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=1}^{\omega-1} C(\omega) \prod_{i=1}^{\omega-j} \mathbf{A}(\omega-i)B(j-1)$ 。
- ⑪  $2C(\omega)B(\omega-1) > \sum_{j=\omega+1}^T C_j \prod_{i=\omega}^{j-1} \mathbf{A}(i)B(\omega-1)$ 。

然后给出本章结论总结:

表 3.1 SISO 离散时变系统采用经典 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	① ② 或 ③ ④	② ⑤ 或 ④ ⑥	-	① ② 或 ③ ④	② ⑤ 或 ④ ⑥	-
不可以满足 单调收敛的条件	⑦	⑧	-	⑦	⑧	-

表 3.2 SISO 离散时变系统采用具有指数衰减增益的 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	-			⑨	⑤ ⑨	⑩
不可以满足 单调收敛的条件	⑦	⑧	-	-	-	-

表 3.3 SISO 离散时变系统采用具有指数递增增益的 P-型学习律所得结论

范数 分类	$\ E_k\ _1$	$\ E_k\ _\infty$	$\ E_k\ _2$	$\ \delta U_k\ _1$	$\ \delta U_k\ _\infty$	$\ \delta U_k\ _2$
可以满足 单调收敛的条件	-	⑨	⑪	-		
不可以满足 单调收敛的条件	⑦	-	-	⑦	-	-

## 第四章 两类变增益 MIMO 定常迭代学习控制系统收敛性分析

针对 MIMO 离散定常迭代学习控制系统, 文献 [79] 研究了 MIMO 迭代学习控制系统的可实现性与输出耦合矩阵 (Input Output Couple Matrix, IOCM) 之间的关系, 文献 [80, 81] 使用了自适应迭代学习控制的方法去改善系统的瞬态性能, 但是这种方法并没有本章提到的变增益迭代学习控制方法简单。

在本章节中, 将主要研究之前提到的两种变增益迭代学习更新律对多输入多输出离散定常系统瞬态性能的影响。与单输入单输出系统不同, 将迭代学习控制方法应用于多输入多输出系统时, 需要额外考虑输入输出耦合矩阵 IOCM, 输入矩阵以及输出矩阵的秩。本章节首先给出了在  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p < q$  的条件下系统输出跟踪误差收敛的证明方法和在  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q < p$  的条件下系统输入跟踪误差收敛的证明方法。然后通过对具有指数衰减增益的 P-型学习律进行研究, 本文得出该学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。最后通过对具有指数递增增益的 P-型学习律进行研究, 本文得出该学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。

### 4.1 问题描述

考虑如下的 MIMO 离散定常系统:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \mathbf{A}x_k(t) + \mathbf{B}u_k(t), & t \in \mathcal{S}^- \\ y_k(t) = \mathbf{C}x_k(t), & t \in \mathcal{S}^+ \end{cases} \quad (4-1)$$

其中,  $\mathcal{S}^+$  和  $\mathcal{S}^-$  符号定义同第二章一样,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示 MIMO 系统的系统矩阵,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  表示 MIMO 系统的输出矩阵,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  表示 MIMO 系统的输入矩阵,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  表示 MIMO 系统的系统状态,  $u_k \in \mathbb{R}^p$  表示 MIMO 系统的输入信号,  $y_k \in \mathbb{R}^q$  表示 MIMO 系统的输出信号。

针对多输入多输出系统 (4-1), 考虑如下的 P-型学习律:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \boldsymbol{\eta}_M e_k(t+1) \quad (4-2)$$

其中  $e_k(t+1)$  表示 MIMO 系统的输出偏差,  $\boldsymbol{\eta}_M \in \mathbb{R}^{p \times q}$  表示增益矩阵, 并且有如下形式:

$$\boldsymbol{\eta}_M = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{bmatrix}_{p \times q} \quad (4-3)$$

令

$$\begin{aligned} U_d &= [u_d(0)^\top, u_d(1)^\top, \dots, u_d(T-1)^\top]^\top, \\ U_k &= [u_k(0)^\top, u_k(1)^\top, \dots, u_k(T-1)^\top]^\top, \\ Y_d &= [y_d(1)^\top, y_d(2)^\top, \dots, y_d(T)^\top]^\top, \\ Y_k &= [y_k(1)^\top, y_k(2)^\top, \dots, y_k(T)^\top]^\top. \end{aligned}$$

需要注意的是, 在上面引入的 *supervector* 中,  $u_d(t)$  表示第  $t$  时刻的期望输入, 与单输入单输出系统中的期望输入不同, 单输入单输出系统中的  $u_d(t)$  表示的是一个具体的数值, 而多输入多输出系统中的  $u_d(t)$  表示的是一个向量。

系统 (4-1) 可以写为如下提升形式:

$$Y_k = \mathbf{H}_M U_k \quad (4-4)$$

其中,

$$\mathbf{H}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{0}_{q \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times p} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{0}_{q \times p} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times p} \\ \mathbf{CA}^2 \mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{T-1} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{T-2} \mathbf{B} & \mathbf{CA}^{T-3} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{bmatrix}_{qT \times pT} \quad (4-5)$$

在  $\mathbf{H}_M$  矩阵中,  $\mathbf{CB}, \mathbf{CAB}, \mathbf{CA}^2 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{CA}^{T-1} \mathbf{B}$  矩阵都为  $q \times p$  矩阵,  $\mathbf{0}_{q \times p}$  表示  $q \times p$  维零矩阵。

迭代学习更新律 (4-2) 可以写为如下提升形式:

$$U_{k+1} = U_k + \mathbf{\Gamma}_0 E_k \quad (4-6)$$

其中,  $\mathbf{\Gamma}_0 = \text{diag}\{\eta_M, \eta_M, \dots, \eta_M\}$ , 并且有  $\mathbf{\Gamma}_0 \in \mathbb{R}^{pT \times qT}$ 。

结合系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-2) 构成了迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2), 利用公式 (4-4) 和 (4-6) 可以得到有关迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2) 输出偏差的公式:

$$E_{k+1} = (\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0) E_k \quad (4-7)$$

其中,  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0 =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_q - \mathbf{CB} \eta_M & \mathbf{0}_q & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \\ -\mathbf{CAB} \eta_M & \mathbf{I}_q - \mathbf{CB} \eta_M & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \\ -\mathbf{CA}^2 \mathbf{B} \eta_M & -\mathbf{CAB} \eta_M & \mathbf{I}_q - \mathbf{CB} \eta_M & \cdots & \mathbf{0}_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{CA}^{T-1} \mathbf{B} \eta_M & -\mathbf{CA}^{T-2} \mathbf{B} & -\mathbf{CA}^{T-3} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{I}_q - \mathbf{CB} \eta_M \end{bmatrix}_{qT \times qT} \quad (4-8)$$



接下来设  $CA^x B$  有以下通式:

$$CA^x B = \begin{bmatrix} h_{11}^x & h_{12}^x & h_{13}^x & \cdots & h_{1p}^x \\ h_{21}^x & h_{22}^x & h_{23}^x & \cdots & h_{2p}^x \\ h_{31}^x & h_{32}^x & h_{33}^x & \cdots & h_{3p}^x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{q1}^x & h_{q2}^x & h_{q3}^x & \cdots & h_{qp}^x \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

利用公式 (4-3) 和公式 (4-9) 可以得到:

$$CA^x B \eta_M = \begin{bmatrix} \varphi_{11}^x & \varphi_{12}^x & \varphi_{13}^x & \cdots & \varphi_{1q}^x \\ \varphi_{21}^x & \varphi_{22}^x & \varphi_{23}^x & \cdots & \varphi_{2q}^x \\ \varphi_{31}^x & \varphi_{32}^x & \varphi_{33}^x & \cdots & \varphi_{3q}^x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{q1}^x & \varphi_{q2}^x & \varphi_{q3}^x & \cdots & \varphi_{qq}^x \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

其中,

$$\varphi_{mn}^x = \sum_{i=1}^p h_{mi}^x \eta_{in} \quad (4-11)$$

将 (4-10) 带入公式 (4-8) 可以得到  $I_{qT} - H_M \Gamma_0 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \varphi_{11}^0 & -\varphi_{12}^0 & \cdots & -\varphi_{1q}^0 & & & \\ -\varphi_{21}^0 & 1 - \varphi_{22}^0 & \cdots & -\varphi_{2q}^0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ -\varphi_{q1}^0 & -\varphi_{q2}^0 & \cdots & 1 - \varphi_{qq}^0 & & & \\ \hline & & & & 0_q & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_q \\ \hline -\varphi_{11}^1 & -\varphi_{12}^1 & \cdots & -\varphi_{1q}^1 & & & \\ -\varphi_{21}^1 & -\varphi_{22}^1 & \cdots & -\varphi_{2q}^1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ -\varphi_{q1}^1 & -\varphi_{q2}^1 & \cdots & -\varphi_{qq}^1 & & & \\ \hline & & & & 0_q & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_q \\ \hline -\varphi_{11}^{T-1} & -\varphi_{12}^{T-1} & \cdots & -\varphi_{1q}^{T-1} & & & \\ -\varphi_{21}^{T-1} & -\varphi_{22}^{T-1} & \cdots & -\varphi_{2q}^{T-1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ -\varphi_{q1}^{T-1} & -\varphi_{q2}^{T-1} & \cdots & -\varphi_{qq}^{T-1} & & & \\ \hline & & & & 0_q & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_q \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

在接下来的分析中, 由于输入矩阵维度  $p$  和输出矩阵维度  $q$  的大小关系不确定, 所以需要分情况进行讨论。

当  $\text{rank}(CB) = q \leq p$  时, 由单输入单输出系统中的结论推理可以得出迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2) 输出跟踪误差收敛的充要条件是  $\rho(I_{qT} - H_M \Gamma_0) < 1$ , 又因为矩阵  $I_{qT} - H_M \Gamma_0$  的特征值与  $I_q - CB \eta_M$  的特征值一样, 所以系统输出跟踪误差收敛的充要条件即为  $\rho(I_q - CB \eta_M) < 1$ 。

接着本文给出迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2) 输出跟踪误差单调收敛的充要条件: 对任给的理想轨线  $y_d(t)$  及任给的系统初始输入  $u_1(t)$ , 系统输出跟踪误差在  $i$  范数意义下单调收敛于 0 的充要条件是  $\|I_{qT} - H_M \Gamma_0\|_i \leq 1$  且  $\rho(I_q - CB \eta_M) < 1$ , 其中  $i = 1, 2, \infty$ 。

在本章节中, 用  $L_{x,\omega}^{I_{qT}-H_M\Gamma_0}$  表示矩阵  $I_{qT} - H_M\Gamma_0$  的第  $x$  列分块矩阵中, 第  $\omega$  列元素的绝对值之和, 用  $R_{x,\omega}^{I_{qT}-H_M\Gamma_0}$  表示矩阵  $I_{qT} - H_M\Gamma_0$  的第  $x$  行分块矩阵中, 第  $\omega$  行元素的绝对值之和, 继而有如下两式:

$$L_{x,\omega}^{I_{qT}-H_M\Gamma_0} = |1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-x} \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^i| \quad (4-13)$$

$$R_{x,\omega}^{I_{qT}-H_M\Gamma_0} = |1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i| \quad (4-14)$$

另外通过观察矩阵  $I_{qT} - H_M\Gamma_0$  可以发现, 矩阵  $I_{qT} - H_M\Gamma_0$  的 1 范数一定是前  $q$  列中某一列元素的绝对值之和, 无穷范数一定是最后  $q$  行中某一行元素的绝对值之和。所以由公式 (4-13)(4-14) 可得, 对于迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2), 输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛的充要条件是对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq q)$ , 都有  $|1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^i| \leq 1$  并且  $\eta_M$  满足  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$ ; 在无穷范数意义下单调收敛的充要条件是对于任意的  $\omega(1 \leq \omega \leq q)$ , 都有  $|1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i| \leq 1$  并且  $\eta_M$  满足  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$ 。

当  $\text{rank}(CB) = p < q$  时, 因为  $\text{rank}(CB\eta_M) \leq \min\{\text{rank}(CB), \text{rank}(\eta_M)\} \leq p$ , 显然不存在  $\eta_M$  使得  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$  成立, 即无法直接得出系统输出收敛。本章节提供了一种间接的方法<sup>[74]</sup> 来证明系统在满足  $\text{rank}(CB) = p < q$  条件时, 通过调节  $\eta_M$  增益矩阵可以使系统输出收敛于期望输出。

**定理 4.1** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-2) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2), 如果系统 (4-1) 的参数满足  $\text{rank}(CB) = p < q$ , 那么对任意给定的可实现理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta_M$  使得系统输出收敛于期望输出, 其中  $\eta_M$  满足  $\rho(I_p - \eta_M CB) < 1$ 。

**证明:**

针对 MIMO 系统 (4-1), 采用 (4-2) 迭代学习更新律, 可以证明一定存在一个矩阵  $Q_1$  使得下式成立。

$$\eta_M Q_1 = [I_p \quad 0_{p \times (q-p)}] \quad (4-15)$$

其中,  $I_p$  是一个  $p$  维的单位矩阵,  $0_{p \times (q-p)}$  是一个  $p \times (q-p)$  维的零矩阵。

接下来令  $\bar{y}_k(t) = Q_1^{-1} y_k(t)$ ,  $\bar{y}_d(t) = Q_1^{-1} y_d(t)$ , 系统 (4-1) 则可以被写为:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t) \\ \bar{y}_k^1(t) = \overline{Q_1^{-1} C} x_k(t) \\ \bar{y}_k^2(t) = \widetilde{Q_1^{-1} C} x_k(t) \end{cases} \quad (4-16)$$

其中,

$$\bar{y}_k(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_k^1(t) \\ \bar{y}_k^2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \\ \widetilde{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \end{bmatrix}. \quad (4-17)$$

并且有  $\bar{y}_k^1(t) \in \mathbb{R}^p, \bar{y}_k^2(t) \in \mathbb{R}^{q-p}, \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \widetilde{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{(q-p) \times n}$ 。

同样的, 在  $\bar{y}_d(t) = \begin{bmatrix} \bar{y}_d^1(t) \\ \bar{y}_d^2(t) \end{bmatrix}$  中也有  $\bar{y}_d^1(t) \in \mathbb{R}^p, \bar{y}_d^2(t) \in \mathbb{R}^{q-p}$ 。利用这些定义, 迭代学习更新律 (4-2) 可以被写为:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + [\bar{y}_d^1(t+1) - \bar{y}_k^1(t+1)] \quad (4-18)$$

由公式 (4-15)(4-17) 可以得出:

$$\eta_M \mathbf{C} \mathbf{B} = \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \mathbf{B} \quad (4-19)$$

进一步如果有  $\rho(\mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C} \mathbf{B}) < 1$ , 那么便可以推出  $\rho(\mathbf{I}_p - \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \mathbf{B}) < 1$ 。

令

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0}_{n \times q} & \mathbf{0}_{n \times q} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times q} \\ \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{0}_{n \times q} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times q} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{T-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{T-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{T-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \bar{Y}_k^1 = \begin{bmatrix} \bar{y}_k^1(1) \\ \bar{y}_k^1(2) \\ \vdots \\ \bar{y}_k^1(T) \end{bmatrix}, \bar{Y}_k^2 = \begin{bmatrix} \bar{y}_k^2(1) \\ \bar{y}_k^2(2) \\ \vdots \\ \bar{y}_k^2(T) \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathcal{H}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \bar{\mathbf{H}}_2 & \bar{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \bar{\mathbf{H}}_3 & \bar{\mathbf{H}}_2 & \bar{\mathbf{H}}_1 & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{H}}_T & \bar{\mathbf{H}}_{T-1} & \bar{\mathbf{H}}_{T-2} & \cdots & \bar{\mathbf{H}}_1 \end{bmatrix}, \bar{Y}_d^1 = \begin{bmatrix} \bar{y}_d^1(1) \\ \bar{y}_d^1(2) \\ \vdots \\ \bar{y}_d^1(T) \end{bmatrix}, \bar{Y}_d^2 = \begin{bmatrix} \bar{y}_d^2(1) \\ \bar{y}_d^2(2) \\ \vdots \\ \bar{y}_d^2(T) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Tr}_1 &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} & & & & \\ & \widetilde{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} & & & \\ & & \widetilde{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \widetilde{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}} \end{bmatrix}_{(q-p)T \times nT}. \end{aligned}$$

其中,  $\bar{\mathbf{H}}_1 = \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}}\mathbf{B}, \bar{\mathbf{H}}_2 = \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}}\mathbf{A}\mathbf{B}, \cdots, \bar{\mathbf{H}}_T = \overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}}\mathbf{A}^{T-1}\mathbf{B}$ 。

那么由 (4-16) 式便可以得到:

$$\mathbf{X}_k = \hat{\mathcal{H}}\mathbf{U}_k \quad (4-20)$$

$$\bar{Y}_k^1 = \bar{\mathcal{H}}\mathbf{U}_k \quad (4-21)$$

$$\bar{Y}_k^2 = \mathbf{Tr}_1 \hat{\mathcal{H}}(\bar{\mathcal{H}})^{-1} \bar{Y}_k^1 \quad (4-22)$$

由公式 (4-18)(4-21) 可以得到:

$$\bar{Y}_d^1 - \bar{Y}_{k+1}^1 = (\mathbf{I}_{pT} - \bar{\mathbf{H}})(\bar{Y}_d^1 - \bar{Y}_k^1) \quad (4-23)$$

$$U_{k+1} = U_k + (\bar{Y}_d^1 - \bar{Y}_k^1) \quad (4-24)$$

因为有 (4-19), 所以  $\bar{\mathbf{H}}$  的特征值和  $\overline{\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}}$  的特征值一样, 进一步推出如果有  $\rho(\mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C}\mathbf{B}) < 1$ , 那么便可以得到  $\rho(\mathbf{I}_{pT} - \bar{\mathbf{H}}) < 1$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{Y}_k^1 = \bar{Y}_d^1$ . 又因为 (4-22), 所以有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{Y}_k^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}\mathbf{r}_1 \hat{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{Y}_d^1 = \bar{Y}_d^2$ , 综上可以得出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}_k(t) = \bar{y}_d(t) \quad (4-25)$$

最后由  $y_k(t) = \mathbf{Q}_1 \bar{y}_k(t)$ ,  $y_d(t) = \mathbf{Q}_1 \bar{y}_d(t)$  可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) \quad (4-26)$$

由公式 (4-26) 可以证明, 系统输出最后收敛于期望输出, 证毕。

至此, 本节介绍了当  $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{B}) = q \leq p$  时 MIMO 系统 (4-1) 可以单调收敛的充要条件, 以及当  $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{B}) = p < q$  时输出跟踪误差收敛的证明方法。根据定理 4.1 中公式 (4-23) 可知, 当  $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{B}) = p < q$  时, 只能够判断输出偏差  $\bar{Y}_d^1 - \bar{Y}_k^1$  是否单调收敛, 无法对  $\bar{Y}_d^2 - \bar{Y}_k^2$  进行判断, 所以在之后的收敛特性分析中, 仅对  $\text{rank}(\mathbf{C}\mathbf{B}) = q \leq p$  的情况进行说明。

现在从输入角度对迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2) 的收敛特性进行研究, 首先利用公式 (4-4) 和 (4-6) 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的的输入偏差和第  $k$  次运行时的的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I}_{pT} - \Gamma_0 \mathbf{H}_M) \delta U_k \quad (4-27)$$

其中,  $\mathbf{I}_{pT} - \Gamma_0 \mathbf{H}_M =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{0}_p & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C}\mathbf{B} & \mathbf{0}_p & \cdots & \mathbf{0}_p \\ -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0}_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}^{T-1}\mathbf{B} & -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}^{T-2}\mathbf{B} & -\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}^{T-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{I}_p - \eta_M \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{pT \times pT} \quad (4-28)$$

利用 (4-3) 和 (4-9) 可以得出:

$$\eta_M \mathbf{C}\mathbf{A}^x \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{11}^x & \bar{\varphi}_{12}^x & \bar{\varphi}_{13}^x & \cdots & \bar{\varphi}_{1p}^x \\ \bar{\varphi}_{21}^x & \bar{\varphi}_{22}^x & \bar{\varphi}_{23}^x & \cdots & \bar{\varphi}_{2p}^x \\ \bar{\varphi}_{31}^x & \bar{\varphi}_{32}^x & \bar{\varphi}_{33}^x & \cdots & \bar{\varphi}_{3p}^x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\varphi}_{p1}^x & \bar{\varphi}_{p2}^x & \bar{\varphi}_{p3}^x & \cdots & \bar{\varphi}_{pp}^x \end{bmatrix} \quad (4-29)$$



$\sum_{j=1, j \neq \omega}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i| \leq 1$  并且  $\eta_M$  满足  $\rho(I_p - \eta_M CB) < 1$ 。至于系统输入跟踪误差的 2 范数, 当输入跟踪误差的 1 范数和无穷范数同时收敛时, 那么便可以得出系统输入跟踪误差的 2 范数收敛。

当  $\text{rank}(CB) = p < q$  时, 根据论文 [79] 可知, 在此条件下系统的期望输出不一定是可以实现的, 即不一定能够找到输入使得对应的系统输出跟踪期望输出, 因此本文针对此种情况不作分析。

当  $\text{rank}(CB) = q < p$ , 因为有  $\text{rank}(\eta_M CB) \leq \min\{\text{rank}(CB), \text{rank}(\eta_M)\} \leq q$ , 显然不存在  $\eta_M$  使得  $\rho(I_p - \eta_M CB) < 1$  成立。针对此种情况, 本文采用间接的方法证明了存在  $\eta_M$  增益矩阵使得系统输入收敛于期望输入。

**定理 4.2** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-2) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2), 如果系统 (4-1) 参数满足  $\text{rank}(CB) = q < p$ , 那么对任意给定的可实现理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\eta_M$  使得系统输入收敛于期望输入, 其中  $\eta_M$  满足  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$ 。

**证明:**

首先可以证明一定存在一个矩阵  $Q_2$  使得下式成立。

$$Q_2 \eta_M = \begin{bmatrix} I_q \\ \mathbf{0}_{(p-q) \times q} \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

其中,  $I_q$  是一个  $q$  维的单位矩阵,  $\mathbf{0}_{(p-q) \times q}$  是一个  $(p-q) \times q$  维的零矩阵。

接着如果令  $\tilde{u}_k(t) = Q_2 u_k(t)$ , 则系统 (4-1) 可以写为:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + \overline{BQ_2^{-1}} \tilde{u}_k^1(t) + \widetilde{BQ_2^{-1}} \tilde{u}_k^2(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) \end{cases} \quad (4-35)$$

其中,

$$BQ_2^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{BQ_2^{-1}} & \widetilde{BQ_2^{-1}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_k(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_k^1(t) \\ \tilde{u}_k^2(t) \end{bmatrix}. \quad (4-36)$$

并且有  $\overline{BQ_2^{-1}} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\widetilde{BQ_2^{-1}} \in \mathbb{R}^{n \times (p-q)}$ ,  $\tilde{u}_k^1(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $\tilde{u}_k^2(t) \in \mathbb{R}^{(p-q)}$ 。

相应的, 迭代学习更新律 (4-2) 可以写为

$$\tilde{u}_{k+1}^1(t) = \tilde{u}_k^1(t) + [y_d(t+1) - y_k(t+1)] \quad (4-37)$$

$$\tilde{u}_{k+1}^2(t) = \tilde{u}_k^2(t) \quad (4-38)$$

由公式 (4-35)、(4-37)、(4-38) 可以看出, 在利用输入变换技术之后, 原来的迭代学习更新律 (4-2) 可以看作是由两部分组成的, 一部分是  $q$  维的输入, 这部分输入会随着迭代次数增加不断从输出偏差中进行学习, 继而不断调整自己, 另一部分则是  $p-q$  维的输入, 这部分输入不会随着系统迭代运行来改善自己的输入, 而是与初始

输入保持一致。所以  $\widetilde{\mathbf{BQ}_2^{-1}}\tilde{u}_k^2(t)$  可以看作是一个关于迭代次数的常量  $f(t)$ 。基于以上分析, (4-35) 式可以被写为:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \mathbf{A}x_k(t) + \overline{\mathbf{BQ}_2^{-1}}\tilde{u}_k^1(t) + f(t) \\ y_k(t) = \mathbf{C}x_k(t) \end{cases} \quad (4-39)$$

由公式 (4-34) 和 (4-36) 可得:

$$\mathbf{CB}\eta_M = \overline{\mathbf{CBQ}_2^{-1}} \quad (4-40)$$

进一步如果有  $\rho(\mathbf{I}_q - \mathbf{CB}\eta_M) < 1$ , 那么可以推出  $\rho(\mathbf{I}_q - \overline{\mathbf{CBQ}_2^{-1}}) < 1$ 。

令

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{q \times n} & \mathbf{0}_{q \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times n} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{C} & \mathbf{0}_{q \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times n} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CA} & \mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0}_{q \times n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{T-1} & \mathbf{CA}^{T-2} & \mathbf{CA}^{T-3} & \cdots & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{U}}_k^1 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_k^1(0) \\ \tilde{u}_k^1(1) \\ \vdots \\ \tilde{u}_k^1(T-1) \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{U}}_d^1 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_d^1(0) \\ \tilde{u}_d^1(1) \\ \vdots \\ \tilde{u}_d^1(T-1) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{0}_q & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \\ \tilde{\mathbf{H}}_2 & \tilde{\mathbf{H}}_1 & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \\ \tilde{\mathbf{H}}_3 & \tilde{\mathbf{H}}_2 & \tilde{\mathbf{H}}_1 & \cdots & \mathbf{0}_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}_T & \tilde{\mathbf{H}}_{T-1} & \tilde{\mathbf{H}}_{T-2} & \cdots & \tilde{\mathbf{H}}_1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(T-1) \end{bmatrix}。$$

其中,  $\tilde{\mathbf{H}}_1 = \overline{\mathbf{CBQ}_2^{-1}}, \tilde{\mathbf{H}}_2 = \overline{\mathbf{CABQ}_2^{-1}}, \dots, \tilde{\mathbf{H}}_T = \overline{\mathbf{CA}^{T-1}\mathbf{BQ}_2^{-1}}$ 。

那么由 (4-39) 式可以得到:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^1 = \tilde{\mathbf{U}}_k^1 + [\mathbf{Y}_d - \mathbf{Y}_k] \quad (4-41)$$

$$\mathbf{Y}_k = \tilde{\mathcal{H}}\mathbf{U}_k + \mathcal{D}F \quad (4-42)$$

$$\mathbf{Y}_d = \tilde{\mathcal{H}}\mathbf{U}_d + \mathcal{D}F \quad (4-43)$$

由公式 (4-42) 和 (4-43) 可以得到:

$$\tilde{\mathbf{U}}_d^1 - \tilde{\mathbf{U}}_{k+1}^1 = [\mathbf{I}_{qT} - \tilde{\mathcal{H}}] (\tilde{\mathbf{U}}_d^1 - \tilde{\mathbf{U}}_k^1) \quad (4-44)$$

因为由 (4-40), 所以  $\tilde{\mathcal{H}}$  的特征值和  $\overline{\mathbf{CBQ}_2^{-1}}$  的特征值一样, 进一步推出如果有  $\rho(\mathbf{I}_q - \mathbf{CB}\eta_M) < 1$ , 那么便可以得到  $\rho(\mathbf{I}_{qT} - \tilde{\mathcal{H}}) < 1$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{U}}_k^1 = \tilde{\mathbf{U}}_d^1$ 。迭代学习控制的最终任务是要使得系统实际输出跟踪期望输出, 虽然这里只得到了  $\tilde{\mathbf{U}}_k^1$  最后收敛于了  $\tilde{\mathbf{U}}_d^1$ , 但是利用公式 (4-42) 可以得到:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Y}_k = \tilde{\mathcal{H}}\mathbf{U}_d + \mathcal{D}F = \mathbf{Y}_d \quad (4-45)$$

即仅由  $\tilde{U}_k^1$  的收敛性就可得出实际输出  $Y_k$  的收敛性，证毕。

综上所述，在从输入角度对系统的收敛特性进行分析时，研究得出当  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p < q$  时，系统可能对于期望输出无法实现；当  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q < p$  时，仅可以获得部分输入的收敛性。因此在之后对输入跟踪误差收敛特性的分析中，将主要对  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q = p$  的情况进行说明。

## 4.2 具有指数衰减增益的 P-型学习律收敛特性

在本节中，将分析 MIMO 离散定常系统应用具有指数衰减增益的 P-型学习律之后，输出跟踪误差、输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。

### 4.2.1 输出偏差的收敛特性

针对 MIMO 系统 (4-1)，具有指数衰减增益的 P-型学习律为：

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma_1(t)e_k(t+1) \quad (4-46)$$

其中  $\gamma_1(t) = \eta_M e^{-\alpha t}$ ，用提升形式可以表示为：

$$U_{k+1} = U_k + \Gamma_1 E_k \quad (4-47)$$

其中  $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{pT \times qT}$ ，并且具有以下形式：

$$\left[ \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{p \times q} & e^{-\alpha} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times q} & e^{-(T-1)\alpha} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} \end{array} \right] \quad (4-48)$$

系统 (4-1) 结合迭代学习更新律 (4-46) 构成了迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46)。当系统 (4-1) 参数满足  $\text{rang}k(\mathbf{CB}) = q \leq p$  时，由公式 (4-4) 和 (4-47) 可以得到迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46) 第  $k+1$  次运行时的输出偏差和第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系：

$$E_{k+1} = (\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \Gamma_1) E_k \quad (4-49)$$

利用 (4-6) 和 (4-10)，令

$$\varphi_{ij}^x e^{-\alpha t} = \theta_{ij}^{xt} \quad (4-50)$$



则可以得到,  $I_{qT} - H_M \Gamma_1 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \theta_{11}^{00} & -\theta_{12}^{00} & \cdots & -\theta_{1q}^{00} & & & & \\ -\theta_{21}^{00} & 1 - \theta_{22}^{00} & \cdots & -\theta_{2q}^{00} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{q1}^{00} & -\theta_{q2}^{00} & \cdots & 1 - \theta_{qq}^{00} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{11}^{10} & -\theta_{12}^{10} & \cdots & -\theta_{1q}^{10} & & & & \\ -\theta_{21}^{10} & -\theta_{22}^{10} & \cdots & -\theta_{2q}^{10} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{q1}^{10} & -\theta_{q2}^{10} & \cdots & -\theta_{qq}^{10} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{11}^{(T-1)0} & -\theta_{12}^{(T-1)0} & \cdots & -\theta_{1q}^{(T-1)0} & & & & \\ -\theta_{21}^{(T-1)0} & -\theta_{22}^{(T-1)0} & \cdots & -\theta_{2q}^{(T-1)0} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{q1}^{(T-1)0} & -\theta_{q2}^{(T-1)0} & \cdots & -\theta_{qq}^{(T-1)0} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{11}^{(T-2)1} & -\theta_{12}^{(T-2)1} & \cdots & -\theta_{1q}^{(T-2)1} & & & & \\ -\theta_{21}^{(T-2)1} & -\theta_{22}^{(T-2)1} & \cdots & -\theta_{2q}^{(T-2)1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{q1}^{(T-2)1} & -\theta_{q2}^{(T-2)1} & \cdots & -\theta_{qq}^{(T-2)1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{11}^{0(T-1)} & -\theta_{12}^{0(T-1)} & \cdots & -\theta_{1q}^{0(T-1)} & & & & \\ -\theta_{21}^{0(T-1)} & -\theta_{22}^{0(T-1)} & \cdots & -\theta_{2q}^{0(T-1)} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\theta_{q1}^{0(T-1)} & -\theta_{q2}^{0(T-1)} & \cdots & -\theta_{qq}^{0(T-1)} & & & & \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

首先根据 (4-51) 给出如下定理: 如果系统 (4-1) 采用常增益 P-型学习律 (4-2), 并且  $\eta_M$  参数可以保证系统输出收敛, 那么系统在使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (4-46) 之后, 系统输出也可以是收敛的。

**证明:**

要证明上述命题, 只需要证明由  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$  可以推出  $\rho(I_q - CB\eta_M e^{-\alpha t}) < 1$  即可, 证明过程如下:

由矩阵 (4-10) 可以得到

$$I_q - CB\eta_M = \begin{bmatrix} 1 - \varphi_{11}^0 & -\varphi_{12}^0 & \cdots & -\varphi_{1q}^0 \\ -\varphi_{21}^0 & 1 - \varphi_{22}^0 & \cdots & -\varphi_{2q}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{q1}^0 & -\varphi_{q2}^0 & \cdots & 1 - \varphi_{qq}^0 \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

由盖尔圆定理可得, 矩阵  $I_q - CB\eta_M$  的特征值应满足如下不等式:

$$|\lambda_i - (1 - \varphi_{ii}^0)| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| \quad (4-53)$$

为了使  $\rho(I_q - CB\eta_M) < 1$  成立, 需要对  $\eta$  进行设置使得以下不等式成立:

$$\lambda_i \leq 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| - \varphi_{ii}^0 < 1 \quad (4-54)$$

由公式 (4-54) 可以得出  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| < \varphi_{ii}^0$ 。

又因为

$$I_q - CB\eta_M e^{-\alpha t} = \begin{bmatrix} 1 - \varphi_{11}^0 e^{-\alpha t} & -\varphi_{12}^0 e^{-\alpha t} & \cdots & -\varphi_{1q}^0 e^{-\alpha t} \\ -\varphi_{21}^0 e^{-\alpha t} & 1 - \varphi_{22}^0 e^{-\alpha t} & \cdots & -\varphi_{2q}^0 e^{-\alpha t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varphi_{q1}^0 e^{-\alpha t} & -\varphi_{q2}^0 e^{-\alpha t} & \cdots & 1 - \varphi_{qq}^0 e^{-\alpha t} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

对矩阵  $\mathbf{I}_q - \mathbf{CB}\eta_M e^{-\alpha t}$  同样使用盖尔圆定理之后, 有:

$$|\lambda_i - (1 - \varphi_{ii}^0 e^{-\alpha t})| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0 e^{-\alpha t}| \quad (4-56)$$

因为已经得出  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| < \varphi_{ii}^0$ , 将 (4-56) 去掉绝对值符号之后, 可以得到:

$$\begin{aligned} \lambda_i &< 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| e^{-\alpha t} - \varphi_{ii}^0 e^{-\alpha t} \\ &= 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |\varphi_{ij}^0| - \varphi_{ii}^0 \right) e^{-\alpha t} < 1 \end{aligned} \quad (4-57)$$

以上论证过程说明了, 对于一个 MIMO 系统, 如果使用常增益 P-型学习律可以使得系统输出收敛, 即存在增益  $\eta_M$  使得矩阵  $\mathbf{I}_q - \mathbf{CB}\eta_M$  的所有特征值都小于 1, 那么在保持  $\eta_M$  不变的情况下, 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律时也可以使系统输出收敛, 证毕。

接下来考虑矩阵 (4-51) 的 1 范数, 显然当  $t = 0$  时  $e^{-\alpha t} = 1$ , 所以有  $\varphi_{ij}^x = \theta_{ij}^{x0}$ , 即矩阵 (4-12) 和矩阵 (4-51) 的前  $q$  列元素是一样的。之前已经得到, 要让矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0$  的 1 范数小于等于 1, 需要让矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0$  的前  $q$  列元素满足条件  $|1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\varphi_{j\omega}^i| \leq 1$ , 其中  $1 \leq \omega \leq q$ 。但是对于矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_1$  来说, 仅有上述条件并不能够保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 因为矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_1$  的前  $q$  列元素绝对值之和并不一定大于后面  $qT - q$  列元素绝对值之和, 要让矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0$  的 1 范数小于等于 1, 需要使矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_1$  的每一列元素绝对值之和小于等于 1。所以最后得出的结论是, 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (4-46) 并不能保证系统 (4-1) 的输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛于 0。

然后分析系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的收敛特性, 如之前所述, 矩阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_0$  的无穷范数一定是最后  $q$  行中某一行元素的绝对值之和, 所以迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2) 输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛的充要条件是对任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq q)$ , 都有  $|1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\varphi_{\omega j}^i| \leq 1$  且  $\rho(\mathbf{I}_q - \mathbf{CB}\eta_M) < 1$ 。如果系统 (4-1) 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (4-46), 并且  $\eta_M$  参数满足上述条件, 那么只需要让  $\alpha = 0$  即可使得迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46) 的输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。所以本节的研究重点应该是如果  $\eta_M$  参数不满足对于任意的  $\omega (1 \leq \omega \leq q)$ , 都有  $|1 - \varphi_{\omega\omega}^0| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\varphi_{\omega j}^i| \leq 1$ , 使用变增益更新律 (4-46) 是否仍然能够保证输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛于 0, 以下为本节得出的结论。

**定理 4.3** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-46) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q \leq p$ 。如果  $\boldsymbol{\eta}_M$  参数满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\alpha$  无法保证系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

显然矩阵阵  $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \mathbf{\Gamma}_1$  是一个由  $T \times T$  个分块矩阵组成的矩阵, 为了分析它的无穷范数, 不失一般性的, 选择第  $x$  行分块矩阵进行研究, 其中  $1 \leq x \leq T$ 。

所以有:

$$R_{x,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_1} = \begin{cases} |1 - \theta_{\omega\omega}^{00}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{00}|, & x = 1 \\ |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(x-1)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(x-1)}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(x-i)(i-1)}|, & 2 \leq x \leq T \end{cases} \quad (4-58)$$

在上式中,  $\theta_{ij}^{xt} = \varphi_{ij}^x e^{-\alpha t}$ 。

根据公式 (4-58), 当  $x = T$  时,

$$R_{T,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_1} = |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(T-i)(i-1)}| \quad (4-59)$$

接下来对  $|1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)}|$  进行分情况讨论:

当  $1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} \geq 0$  时,

$$\begin{aligned} R_{T,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_1} &= 1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(T-i)(i-1)}| \\ &> 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(T-i)(T-1)}| \right) - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} \\ &= 1 + e^{-(T-1)\alpha} \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i| - \varphi_{\omega\omega}^0 \right) > 1 \end{aligned} \quad (4-60)$$

当  $1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} < 0$  时,

$$\begin{aligned} R_{T,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_1} &= \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} - 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(T-i)(i-1)}| \\ &> \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{(T-i)(T-1)}| \right) + \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)} - 1 > 1 \end{aligned} \quad (4-61)$$

由上述两种情况可以得出, 如果系统使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (4-46), 并且  $\eta_M$  参数满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i|$ , 那么系统输出跟踪误差的无穷范数无法实现单调收敛, 证毕。

## 4.2.2 输入偏差的收敛特性

本节将针对迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46) 从输入角度进行分析, 当系统参数满足  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p = q$  时, 利用公式 (4-4) 和 (4-47) 可以推出系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差与第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I}_{pT} - \Gamma_1 \mathbf{H}_M) \delta U_k \quad (4-62)$$

利用  $\bar{\theta}_{ij}^{xt} = \bar{\varphi}_{ij}^x e^{-\alpha t}$ , 可以得到  $\mathbf{I}_{pT} - \Gamma_1 \mathbf{H}_M =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p - \Theta^{00} & \mathbf{0}_q & \cdots & \mathbf{0}_q \\ -\Theta^{11} & \mathbf{I}_p - \Theta^{01} & \cdots & \mathbf{0}_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Theta^{(T-1)(T-1)} & -\Theta^{(T-2)(T-1)} & \cdots & \mathbf{I}_p - \Theta^{0(T-1)} \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

其中,

$$\Theta^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_{11}^{ij} & \bar{\theta}_{12}^{ij} & \cdots & \bar{\theta}_{1q}^{ij} \\ \bar{\theta}_{21}^{ij} & \bar{\theta}_{22}^{ij} & \cdots & \bar{\theta}_{2q}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\theta}_{q1}^{ij} & \bar{\theta}_{q2}^{ij} & \cdots & \bar{\theta}_{qq}^{ij} \end{bmatrix} \quad (4-64)$$

针对迭代学习控制系统 (4-1)-(4-2), 如果  $\eta_M$  满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1, j \neq \omega}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^i|$ , 那么系统输入跟踪误差一定无法在 1 范数意义下单调收敛。而本节内容指出, 如果系统 (4-1) 使用迭代学习更新律 (4-46), 即使  $\eta_M$  满足上述条件, 依然可以通过调节  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 以下为本节得出的定理。

**定理 4.4** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-46) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p = q$ 。如果  $\eta_M$  参数满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \geq \sum_{j=1, j \neq \omega}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\alpha$  使得系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

根据公式 (4-63) 和 (4-64) 可以得出:

$$L_{x,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} = \begin{cases} |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(x-1)}| + \sum_{i=1}^{T-x} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{(i)(i+x-1)}|, & x \neq T \\ |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-1)}|, & x = T \end{cases} \quad (4-65)$$

当  $1 \leq x \leq T-1$  时, 可以证明存在一个很大的  $\alpha$  使得下面两式成立:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(x-1)}| = 0 \quad (4-66)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{T-x} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{(i)(i+x-1)}|}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(x-1)}|} = 0 \quad (4-67)$$

再根据 (4-66) 和 (4-67) 可以推出, 当  $\alpha$  趋于一个很大的值时,  $L_{x,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} = |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(x-1)}|$ , 同时又因为总是存在  $\alpha$  使得  $1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)} \geq 0$ , 所以当  $\alpha$  趋于很大的值时, 有:

$$\begin{aligned} L_{x,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} &= 1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(x-1)}| \\ &= 1 - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 e^{-(x-1)\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0 e^{-(x-1)\alpha}| \\ &= 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(x-1)\alpha} \leq 1 \end{aligned} \quad (4-68)$$

当  $x = T$  时,  $L_{T,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M}$  的形式同公式 (4-68) 的最后形式是一样的, 因此当  $\eta_M$  满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0|$  时, 只需要设置  $\alpha$  使得  $1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)} \geq 0$  成立即可使系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 证毕。

由之前的分析可以得出, 如果系统使用常增益 P-型学习律, 需要使  $\eta_M$  参数满足

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| \text{ 且 } 0 \leq \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \leq 1, & x = 1 \\ \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^i| \text{ 且 } 0 \leq \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \leq 1, & 2 \leq x \leq T \end{cases} \quad (4-69)$$

条件, 才可以使系统输入跟踪误差的无穷范数单调收敛。但是本文指出如果系统使用具有指数衰减增益的 P-型学习律 (4-46) 的话, 可以将 (4-69) 第二个条件中的  $0 \leq \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \leq 1$  扩展为  $0 \leq \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < 2$ , 即 (4-46) 更新律相比较 (4-2) 更新律, 拓宽了系统输入跟踪误差在无穷范数意义下实现单调收敛时  $\eta_M$  参数的可选范围。但 (4-46) 更新律并不能够保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下实现单调收敛, 以下是关于输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性的结论。

**定理 4.5** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-46) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-46), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p = q$ 。如果  $\eta_M$  参数满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^i|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\alpha$  无法保证系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明：**

根据公式 (4-63)(4-64) 可以得出：

$$R_{x,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} = \begin{cases} |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{00}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{00}|, & x = 1 \\ |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(x-1)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{0(x-1)}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{(i)(x-1)}|, & 2 \leq x \leq T \end{cases} \quad (4-70)$$

根据公式 (4-70)，当  $x = T$  且  $1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} \geq 0$  时有：

$$\begin{aligned} R_{T,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} &= 1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{(i)(T-1)}| \\ &= 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{(i)(T-1)}| - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} \right) \\ &= 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^{(i)}| - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} > 1 \end{aligned} \quad (4-71)$$

当  $x = T$  且  $1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} < 0$  时有：

$$\begin{aligned} R_{T,\omega}^{I-\Gamma_1 H_M} &= \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{(i)(T-1)}| - 1 \\ &= \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{(i)(T-1)}| \right) + \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)} - 1 > 1 \end{aligned} \quad (4-72)$$

由公式 (4-71) 和 (4-72) 可以看出，如果系统使用具有指数衰减增益的 P-型学习律，并且  $\eta_M$  参数满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$ ，那么系统输出跟踪误差不一定能够在无穷范数意义下单调收敛。

### 4.3 具有指数递增增益的 P-型学习律收敛特性

本节将会研究具有指数递增增益的 P-型学习律对系统瞬态性能的影响。通过分析，本节得出，相比较常增益 P-型学习律，具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性，但是仍然无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。

#### 4.3.1 输出偏差的收敛特性

首先给出针对 MIMO 系统的具有指数递增增益的 P-型学习律：

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \gamma_2(t) e_k(t+1) \quad (4-73)$$

其中  $\gamma_2(t) = \eta_M e^{-(T-t-1)\alpha}$ ，用提升形式可以表示为：

$$U_{k+1} = U_k + \Gamma_2 E_k \quad (4-74)$$

其中  $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{pT \times qT}$ ，并且具有以下形式：

$$\begin{bmatrix} e^{-(T-1)\alpha} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{p \times q} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \mathbf{0}_{p \times q} & e^{-(T-2)\alpha} \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times q} & \cdots & \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \cdots & \eta_{1q} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \cdots & \eta_{2q} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \cdots & \eta_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{p1} & \eta_{p2} & \eta_{p3} & \cdots & \eta_{pq} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4-75)$$

其次，系统 (4-1) 结合迭代学习更新律 (4-73) 构成了迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73)。当系统 (4-1) 的参数满足  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q \leq p$  时，由公式 (4-4) 和 (4-75) 可以得到迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73) 第  $k+1$  次运行时的输出偏差与第  $k$  次运行时的输出偏差之间的关系：

$$E_{k+1} = (\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \Gamma_2) E_k \quad (4-76)$$

其中， $\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \Gamma_2 =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \theta_{11}^{0(T-1)} & -\theta_{12}^{0(T-1)} & \cdots & -\theta_{1q}^{0(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{21}^{0(T-1)} & 1 - \theta_{22}^{0(T-1)} & \cdots & -\theta_{2q}^{0(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{q1}^{0(T-1)} & -\theta_{q2}^{0(T-1)} & \cdots & 1 - \theta_{qq}^{0(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{11}^{1(T-1)} & -\theta_{12}^{1(T-1)} & \cdots & -\theta_{1q}^{1(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{21}^{1(T-1)} & -\theta_{22}^{1(T-1)} & \cdots & -\theta_{2q}^{1(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{q1}^{1(T-1)} & -\theta_{q2}^{1(T-1)} & \cdots & -\theta_{qq}^{1(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{11}^{(T-1)(T-1)} & -\theta_{12}^{(T-1)(T-1)} & \cdots & -\theta_{1q}^{(T-1)(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{21}^{(T-1)(T-1)} & -\theta_{22}^{(T-1)(T-1)} & \cdots & -\theta_{2q}^{(T-1)(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{q1}^{(T-1)(T-1)} & -\theta_{q2}^{(T-1)(T-1)} & \cdots & -\theta_{qq}^{(T-1)(T-1)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{11}^{(T-2)(T-2)} & -\theta_{12}^{(T-2)(T-2)} & \cdots & -\theta_{1q}^{(T-2)(T-2)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{21}^{(T-2)(T-2)} & -\theta_{22}^{(T-2)(T-2)} & \cdots & -\theta_{2q}^{(T-2)(T-2)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{q1}^{(T-2)(T-2)} & -\theta_{q2}^{(T-2)(T-2)} & \cdots & -\theta_{qq}^{(T-2)(T-2)} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{11}^{00} & -\theta_{12}^{00} & \cdots & -\theta_{1q}^{00} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{21}^{00} & -\theta_{22}^{00} & \cdots & -\theta_{2q}^{00} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\theta_{q1}^{00} & -\theta_{q2}^{00} & \cdots & -\theta_{qq}^{00} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4-77)$$

根据矩阵 (4-77) 可以得出

$$L_{x,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_2} = \begin{cases} |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{j\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{i=1}^{T-x} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{j\omega}^{i(T-x)}|, & 1 \leq x \leq T-1 \\ |1 - \theta_{\omega\omega}^{00}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{j\omega}^{00}|, & x = T \end{cases} \quad (4-78)$$

$$R_{x,\omega}^{I_{qT} - H_M \Gamma_2} = \begin{cases} |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{j\omega}^{0(T-1)}|, & x = 1 \\ |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{j\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{i(T-x+i)}|, & 2 \leq x \leq T \end{cases} \quad (4-79)$$

根据公式 (4-78) 和 (4-79), 本节得出如下定理。

**定理 4.6** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-73) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q \leq p$ 。如果  $\boldsymbol{\eta}_M$  参数满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\alpha$  无法保证系统输出在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

当  $x = 1$  且  $0 < \theta_{\omega\omega}^0 \leq 1$  时, 根据 (4-78) 有:

$$\begin{aligned} L_{1,\omega}^{I_q T - H_M \Gamma_2} &= 1 - \varphi_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i e^{-(T-1)\alpha}| \\ &= 1 + \left( \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i| - \varphi_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} > 1 \end{aligned} \quad (4-80)$$

当  $x = 1$  且  $1 < \theta_{\omega\omega}^0 < 2$  时, 根据 (4-78) 有:

$$\begin{aligned} L_{1,\omega}^{I_q T - H_M \Gamma_2} &= \varphi_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i e^{-(T-1)\alpha}| \\ &= \left( \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i| - \varphi_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} - 1 > 1 \end{aligned} \quad (4-81)$$

显然在此条件下有  $\|\mathbf{I}_{qT} - \mathbf{H}_M \Gamma_2\|_1 > 1$ 。由矩阵 (4-12) 易得, 如果系统 (4-1) 采用常增益 P-型学习律并且  $\boldsymbol{\eta}_M$  满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^i|$ , 那么系统输出跟踪误差在 1 范数意义下无法实现单调收敛。而本命题证明了在  $\boldsymbol{\eta}_M$  满足相同条件下, 使用 (4-73) 变增益更新律仍然无法实现输出跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛, 证毕。

**定理 4.7** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-73) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q \leq p$ 。如果  $\boldsymbol{\eta}_M$  参数满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 > \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\varphi_{j\omega}^0|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 可以通过调节  $\alpha$  使得系统输出在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

首先可以证明一定存在  $\alpha$  使得  $|1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-x)}| \geq 0$ 。

其次对于  $x = 1$ , 有:

$$R_{1,\omega}^{I_q T - H_M \Gamma_2} = |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{j=1, j \neq \omega}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-1)}|$$



$$\begin{aligned}
&= 1 - \varphi_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0 e^{-(T-1)\alpha}| \\
&= 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| - \varphi_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} < 1
\end{aligned} \tag{4-82}$$

对于  $2 \leq x \leq T$ , 有:

$$\begin{aligned}
R_{x,\omega}^{I_q T - H_M \Gamma_2} &= |1 - \theta_{\omega\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\theta_{\omega j}^{0(T-x)}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\theta_{\omega j}^{i(T-x+i)}| \\
&= 1 - \varphi_{\omega\omega}^0 e^{-(T-x)\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0 e^{-(T-x)\alpha}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i e^{-(T-x+i)\alpha}|
\end{aligned} \tag{4-83}$$

接着可以证明存在  $\alpha$  使得下面两式成立。

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i e^{-(T-x+i)\alpha}| = 0 \tag{4-84}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i e^{-(T-x+i)\alpha}|}{-\varphi_{\omega\omega}^0 e^{-(T-x)\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0 e^{-(T-x)\alpha}|} = 0 \tag{4-85}$$

所以当  $\alpha$  趋于一个较大的值时, 有:

$$R_{x,\omega}^{I_q T - H_M \Gamma_2} = 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| - \varphi_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-x)\alpha} < 1 \tag{4-86}$$

由以上内容可以得出, 如果系统 (4-1) 使用常增益 P-型学习律, 为了使系统输出跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 需要让  $\eta_M$  满足  $0 < \varphi_{\omega\omega}^0 \leq 1$  且  $\varphi_{\omega\omega}^0 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{\omega j}^i|$ 。但是通过定理 4.7 可以得出, 如果迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73) 使用具有指数递增增益的 P-型学习律 (4-73), 只需要  $\eta_M$  满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\varphi_{\omega j}^0|$  即可。

### 4.3.2 输入偏差的收敛特性

针对迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73), 当  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q = p$  时, 由公式 (4-4) 和 (4-75) 可以得到系统第  $k+1$  次运行时的输入偏差与第  $k$  次运行时的输入偏差之间的关系:

$$\delta U_{k+1} = (\mathbf{I}_{pT} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}_M) \delta U_k \tag{4-87}$$

其中,  $I_{pT} - \Gamma_2 H_M =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \bar{\theta}_{11}^{0(T-1)} & -\bar{\theta}_{12}^{0(T-1)} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{0(T-1)} & & & & \\ -\bar{\theta}_{21}^{0(T-1)} & 1 - \bar{\theta}_{22}^{0(T-1)} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{0(T-1)} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ -\bar{\theta}_{p1}^{0(T-1)} & -\bar{\theta}_{p2}^{0(T-1)} & \dots & 1 - \bar{\theta}_{pp}^{0(T-1)} & & & & \\ -\bar{\theta}_{11}^{1(T-2)} & -\bar{\theta}_{12}^{1(T-2)} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{1(T-2)} & 1 - \bar{\theta}_{11}^{0(T-2)} & -\bar{\theta}_{12}^{0(T-2)} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{0(T-2)} \\ -\bar{\theta}_{21}^{1(T-2)} & -\bar{\theta}_{22}^{1(T-2)} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{1(T-2)} & -\bar{\theta}_{21}^{0(T-2)} & 1 - \bar{\theta}_{22}^{0(T-2)} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{0(T-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_{p1}^{1(T-2)} & -\bar{\theta}_{p2}^{1(T-2)} & \dots & -\bar{\theta}_{pp}^{1(T-2)} & -\bar{\theta}_{p1}^{0(T-2)} & -\bar{\theta}_{p2}^{0(T-2)} & \dots & 1 - \bar{\theta}_{pp}^{0(T-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_{11}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{12}^{(T-1)0} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{11}^{(T-2)0} & -\bar{\theta}_{12}^{(T-2)0} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{(T-2)0} \\ -\bar{\theta}_{21}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{22}^{(T-1)0} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{21}^{(T-2)0} & -\bar{\theta}_{22}^{(T-2)0} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{(T-2)0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_{p1}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{p2}^{(T-1)0} & \dots & -\bar{\theta}_{pp}^{(T-1)0} & -\bar{\theta}_{p1}^{(T-2)0} & -\bar{\theta}_{p2}^{(T-2)0} & \dots & -\bar{\theta}_{pp}^{(T-2)0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_{11}^{00} & -\bar{\theta}_{12}^{00} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{00} & 1 - \bar{\theta}_{11}^{00} & -\bar{\theta}_{12}^{00} & \dots & -\bar{\theta}_{1p}^{00} \\ -\bar{\theta}_{21}^{00} & -\bar{\theta}_{22}^{00} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{00} & -\bar{\theta}_{21}^{00} & 1 - \bar{\theta}_{22}^{00} & \dots & -\bar{\theta}_{2p}^{00} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\theta}_{p1}^{00} & -\bar{\theta}_{p2}^{00} & \dots & -\bar{\theta}_{pp}^{00} & -\bar{\theta}_{p1}^{00} & -\bar{\theta}_{p2}^{00} & \dots & 1 - \bar{\theta}_{pp}^{00} \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

根据矩阵 (4-88) 可以得出:

$$L_{x,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} = \begin{cases} |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{i=1}^{T-x} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{i(T-x-i)}|, & x \neq T \\ |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{00}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{00}|, & x = T \end{cases} \quad (4-89)$$

$$R_{x,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} = \begin{cases} |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{0(T-1)}| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{0(T-1)}|, & x = 1 \\ |1 - \bar{\theta}_{\omega\omega}^{(T-x)}| + \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{j\omega}^{0(T-x)}| + \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\theta}_{\omega j}^{i(T-x)}|, & 2 \leq x \leq T \end{cases} \quad (4-90)$$

根据公式 (4-89) 和 (4-90), 本节得出如下定理。

**定理 4.8** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-73) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p = q$ 。如果  $\eta_M$  参数满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^i|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\alpha$  无法保证系统输入在 1 范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

当  $x = 1$  且  $0 < \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} \leq 1$  时, 根据 (4-89) 有:

$$\begin{aligned} L_{1,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} &= 1 - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^i e^{-(T-1-i)\alpha}| \\ &> 1 + \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^i| - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} > 1 \end{aligned} \quad (4-91)$$

当  $x = 1$  且  $1 < \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} < 2$  时, 根据 (4-89) 有:

$$L_{1,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} = \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha} - 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^0 e^{-(T-1)\alpha}| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^i e^{-(T-i-1)\alpha}|$$

$$> \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^i| - \bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 \right) e^{-(T-1)\alpha} - 1 > 1 \quad (4-92)$$

显然由 (4-91)(4-92) 可以得出  $\|\mathbf{I}_{pT} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}_M\|_1 > 1$ 。本命题说明了  $\eta_M$  在满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\bar{\varphi}_{j\omega}^i|$  条件下, 无论使用常增益 P-型学习律还是使用具有指数递增增益的 P-型学习律 (4-73), 都无法使输入跟踪误差在 1 范数意义下实现单调收敛, 证毕。

**定理 4.9** 考虑由系统 (4-1) 和迭代学习更新律 (4-73) 构成的迭代学习控制系统 (4-1)-(4-73), 其中  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = p = q$ 。如果  $\eta_M$  参数满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$ , 那么对任意给定的理想轨迹及任意给定的初始系统输入, 仅通过调节  $\alpha$  无法保证系统输入在无穷范数意义下的跟踪误差单调收敛于 0。

**证明:**

显然由公式 (4-33) 可知, 如果系统 (4-1) 使用常增益 P-型学习律, 当  $\eta_M$  满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$  时, 总是有  $R_{T,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_0 H_M} > 1$ 。

同时观察到, 矩阵 (4-31) 和矩阵 (4-88) 的最后一行分块矩阵其实是一样的。为了使  $\|\mathbf{I}_{pT} - \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{H}_M\|_\infty < 1$ , 不仅需要让  $R_{T,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} < 1$ , 而且需要  $R_{x,\omega}^{I_{pT}-\Gamma_2 H_M} < 1$ , 其中  $1 \leq x \leq T-1$ 。

综上所述,  $\eta_M$  在满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \omega}}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$  条件下, 无论使用常增益 P-型学习律还是使用具有指数递增增益的 P-型学习律 (4-73), 都无法使输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛, 证毕。

## 4.4 仿真与分析

本节中将针对一些具体系统, 分别验证三种迭代学习更新律对 MIMO 系统瞬态性能的影响。由于无法得到  $\mathbf{CB}\eta_M$  和  $\eta_M \mathbf{CB}$  矩阵的一般式, 所以本节的仿真实验都是在设定好  $\eta_M$  的前提下, 通过调节  $\alpha$  进行的。

首先给出如下系统:

系统 4.1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}。$$

通过计算可以得到, 系统 4.1 的输入维度  $p$  和输出维度  $q$  都为 2,  $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}$ , 并且  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = 2$ , 为了验证本章节从输出角度得出的结论, 首先需要系统满足  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q \leq p$ , 为了验证从输入角度得出的结论中, 首先需要系统满足  $\text{rank}(\mathbf{CB}) = q = p$ , 显然系统 4.1 同时满足上述条件。

本章节设置的期望输出维度为 2, 期望输出如图 4.1 所示。

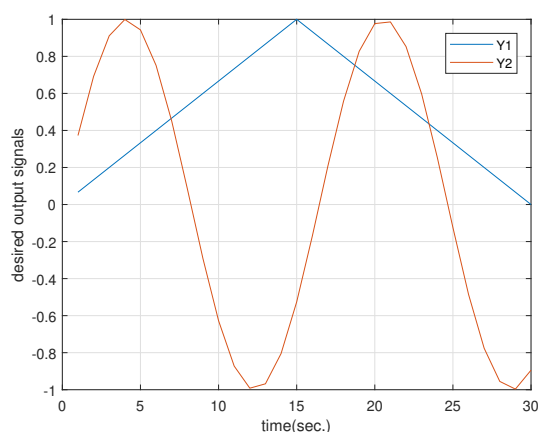


图 4.1 MIMO 离散系统的期望轨迹示意图

在给定期望输出和具体系统之后，可以计算出系统 4.1 针对期望输出的标准输入，如图 4.2 所示。

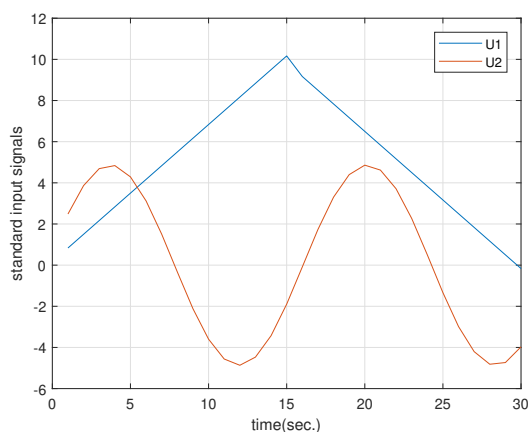


图 4.2 MIMO 离散系统的期望输入示意图

接下来分析系统的输出跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性，本次实验将针对系统 4.1 分别使用三种迭代学习更新律，然后分别记录在三种更新律下系统输出跟踪误差的 1 范数随迭代次数增加变化的曲线，得到结果如图 4.3 所示。

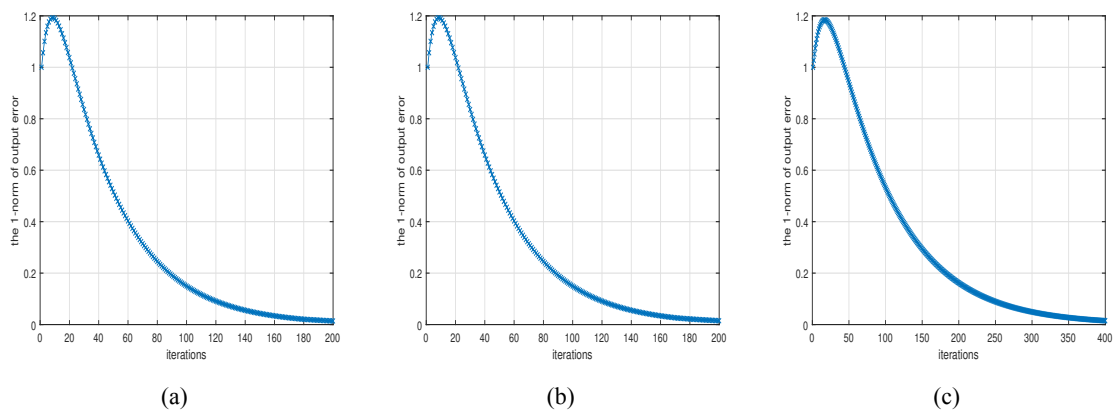


图 4.3 系统 4.1 采用三种更新律之后输出跟踪误差的 1 范数

在图 4.3 中, (a)(b)(c) 三个子图从左到右分别对应着系统采用常增益 P-型学习律, 具有指数衰减增益的 P-型学习律和具有指数递增增益的 P-型学习律之后, 系统输出跟踪误差的 1 范数示意图。本次实验选择的增益矩阵为:

$$\eta_M = \begin{bmatrix} 0.709 & 0.276 \\ 0.755 & 0.68 \end{bmatrix}$$

通过计算可以得到  $CB\eta_M = \begin{bmatrix} 0.05672 & 0.02208 \\ 0.11325 & 0.10200 \end{bmatrix}$ , 显然有  $0.05672 < 0.11325$ , 不满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 > \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^i|$ 。从图 4.3 中可以看出, 虽然输出跟踪误差的 1 范数在三种更新律下最后都收敛到了 0, 但是在收敛过程都中出现了超调, 从而验证了本节中的结论。另外可以看到在采用具有指数递增增益得 P-型学习律实验中, 迭代次数达到 400 附近输出跟踪误差的 1 范数才会收敛到 0, 而其余两种更新律在 200 次附近就可以收敛到 0, 这说明了本文研究的两种时变增益可能会减慢系统的收敛速度。

然后对系统输出跟踪误差的无穷范数进行实验, 选择增益矩阵为:

$$\eta_M = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2.5 & 4.66667 \end{bmatrix}$$

图 4.4 为系统 (4-1) 采用三种更新律后, 输出跟踪误差的无穷范数随迭代次数增长变化的曲线图。其中, (a)(b)(c) 三个子图中使用到的学习律从左到右依次为常增益 P-型学习律, 具有指数衰减增益的 P-型学习律和具有指数递增增益的 P-型学习律。

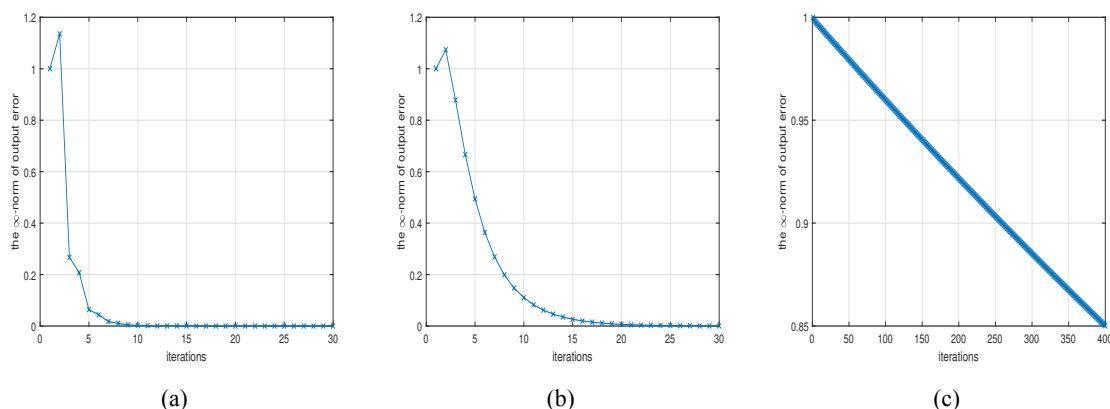


图 4.4 系统 4.1 采用三种更新律之后输出跟踪误差的无穷范数

在本次实验中, 通过计算可以得到  $CB\eta_M = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.16 \\ 0.375 & 0.7 \end{bmatrix}$ , 虽然  $\eta_M$  增益矩阵不满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^i|$ , 即不满足在常增益 P-型学习律和具有指数衰减增益的 P-型学习律下单调收敛的条件。但是根据定理 4.7, 如果系统 4.1 使用该  $\eta_M$  增益, 首先有  $\varphi_{11}^0 = 0.8, \varphi_{22}^0 = 0.7$ , 即满足  $0 < \varphi_{\omega\omega}^0 \leq 1$ , 其次有  $0.8 > 0.375, 0.7 > 0.16$ , 即满足  $\varphi_{\omega\omega}^0 > \sum_{j=1}^q |\varphi_{j\omega}^0|$ , 所以系统输出的无穷范数在具有指数衰递增增益 P-型学习律下可以实现单调收敛。本次实验选择的  $\alpha = 0.3$ , 可以看到在 (c) 图中, 由于  $\alpha$  参数设置太大, 在迭代次数达到 400 次时输出跟踪误差仍然没有收敛到 0, 而 (b) 图同

样使用时变增益, 在迭代 30 次时已经收敛到 0, 但是在第 2 次迭代时就出现了超调。以上实验分别验证了本节中的定理 4.3, 定理 4.7。

接下来分析系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的收敛特性。下图为系统采用常增益 P-型学习律和具有指数衰减增益的 P-型学习律之后输入跟踪误差的 1 范数随迭代次数变化的曲线图, (a)(b) 图对应的更新律从左到右依次为常增益 P-型学习律和具有指数衰减增益的 P-型学习律。

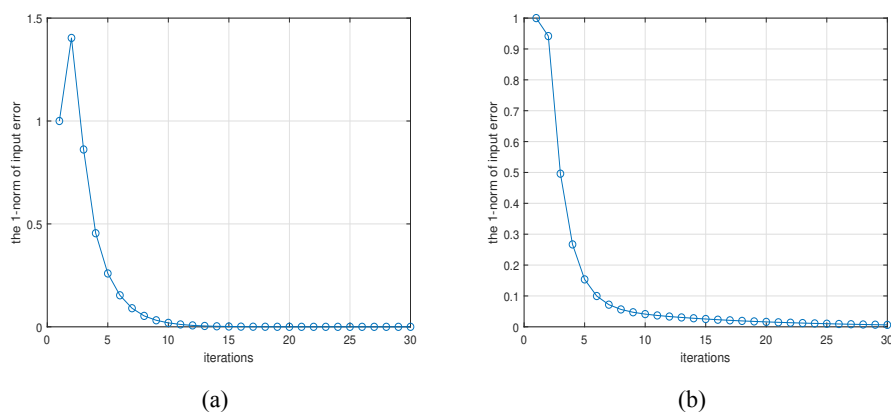


图 4.5 系统 4.1 分别采用 (4-2) 更新律和 (4-46) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数

在本次实验中, 选择的增益矩阵为

$$\eta_M = \begin{bmatrix} 10 & 3.75000 \\ 1.33333 & 4.66667 \end{bmatrix}$$

通过计算可以得到  $\eta_M CB = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5625 \\ 0.10667 & 0.7 \end{bmatrix}$ , 因为  $\eta_M$  增益矩阵不满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^i|$ , 即不满足在常增益下单调收敛的条件, 所以在 (a) 图中出现了超调。但是根据定理 4.4, 有  $0.8 > 0.375, 0.7 > 0.16$ , 即满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 > \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{j\omega}^0|$  条件, 所以在 (b) 图中系统输出跟踪误差的 1 范数实现了单调收敛, 验证了本节中的定理 4.4。

为了检验具有指数递增增益的 P-型学习律是否能够改善系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的瞬态跟踪性能, 本次实验选择了两个  $\alpha$  进行, 得到结果如图 4.6 所示。

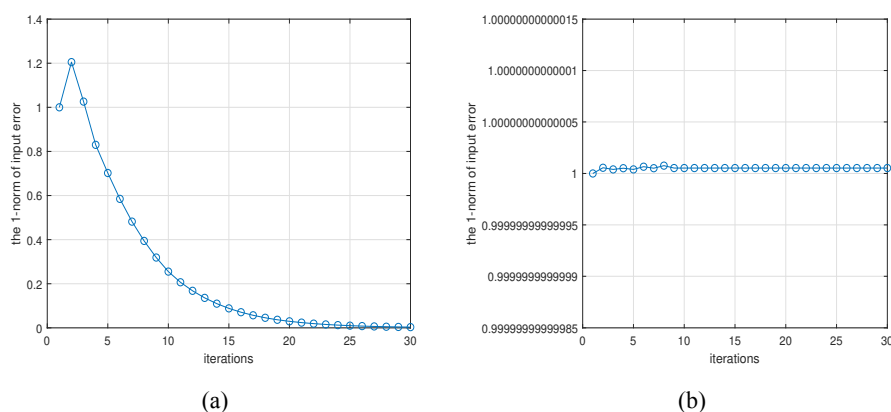


图 4.6 系统 4.1 采用 (4-73) 更新律之后输入跟踪误差的 1 范数

在图 4.6 中, (a) 图为  $\alpha = 0.3$  时系统输入跟踪误差 1 范数的变化曲线图, (b) 图为  $\alpha = 1.625$  时系统输入跟踪误差 1 范数的变化曲线图, 通过对比两次实验结果可以得出, 如果系统使用具有指数递增增益的 P-型学习律并且  $\eta_M$  满足定理 4.8 中的条件, 那么仅通过调节  $\alpha$  无法使得系统输入跟踪误差在 1 范数意义下单调收敛。

最后对系统输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性做实验, 本次实验选择的增益矩阵为:

$$\eta_M = \begin{bmatrix} 18.75 & 0.66667 \\ 2.5 & 9.33333 \end{bmatrix}$$

本次实验结果如图 4.7 所示。(a) 图为系统 (4-1) 使用常增益 P-型学习律所得结果, (b) 图为系统 (4-1) 使用具有指数衰减增益的 P-型学习律所得结果。

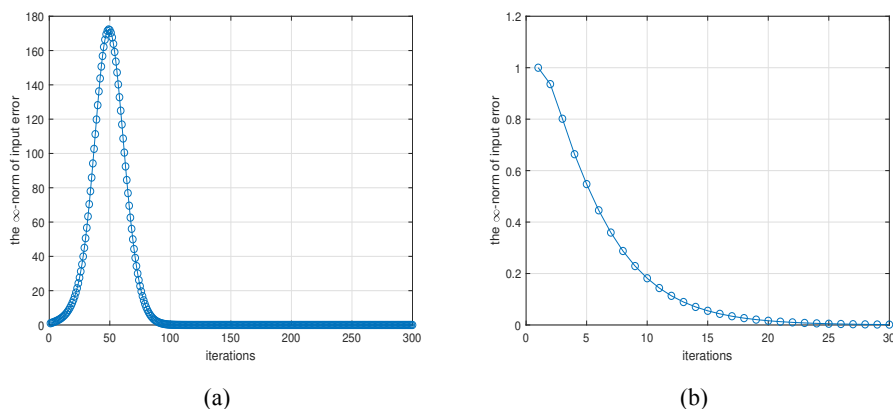


图 4.7 系统 4.1 采用 (4-2) 更新律和 (4-46) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数

通过计算可以得到  $\eta_M CB = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.1 \\ 0.2 & 1.4 \end{bmatrix}$ , 虽然有  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 > \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$ , 但是  $\varphi_{11}^0 = 1.5, \varphi_{22}^0 = 1.4$ , 不满足  $0 < \theta_{\omega\omega}^{00} \leq 1$ , 如果使用常增益 P-型学习律, 那么系统输入跟踪误差的无穷范数不一定会单调收敛, 但是如果使用具有指数衰减增益的 P-型学习律, 就可以通过调节  $\alpha$  使得系统输入跟踪误差的无穷范数单调收敛, 从而说明具有指数衰减增益的 P-型学习律可以拓宽系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛的条件。

根据定理 4.5 和定理 4.9, 如果  $\eta_M$  满足  $\bar{\varphi}_{\omega\omega}^0 < \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^0| + \sum_{i=1}^{T-1} \sum_{j=1}^p |\bar{\varphi}_{\omega j}^i|$ , 那么使用具有指数衰减增益的 P-型学习律和具有指数递增增益的 P-型学习律无法使得系统输入跟踪误差在无穷范数意义下单调收敛。本次实验选择增益矩阵为:

$$\eta_M = \begin{bmatrix} 4 & 1.85 \\ 2.33333 & 1.66667 \end{bmatrix}$$

通过计算可以得到  $\eta_M = CB \begin{bmatrix} 0.32 & 0.2775 \\ 0.18667 & 0.25 \end{bmatrix}$ , 显然该条件不满足单调收敛性的条件, 实验结果如图 4.8 所示, 其中 (a) 图为系统使用具有指数衰减增益 P-型学习律之后的实验结果图, (b) 图为系统使用具有指数递增增益 P-型学习律之后的实验结果图。从图中可以看到系统在迭代了 60 次之后, 两次实验中的输入跟踪误差的无穷范数都

收敛到了 0，但是无论如何选择  $\alpha$ ，在收敛过程中总会出现超调，从而验证了本节中的定理 4.5 和定理 4.9。

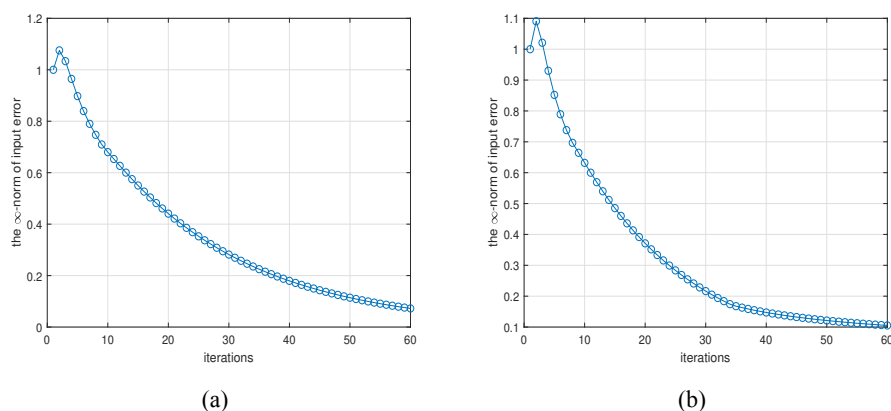


图 4.8 系统 4.1 采用 (4-46) 更新律和 (4-73) 更新律之后输入跟踪误差的无穷范数

## 4.5 小结

针对 MIMO 离散定常系统，本章节首先对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在常增益 P-型学习律下的收敛特性进行了分析。其次，对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在具有指数衰减增益的 P-型学习律下的收敛特性进行了研究。研究得出，具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性，但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下以及输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。再次，对系统输出跟踪误差和输入跟踪误差在具有指数递增增益的 P-型学习律下的收敛特性进行了研究。研究得出，具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性，但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。最后，通过数值仿真验证了本章所得结论的有效性。本节没有对输出跟踪误差和输入跟踪误差在 2 范数意义下的单调收敛性进行分析，这将作为以后的工作内容。



## 第五章 总结与展望

### 5.1 论文总结

迭代学习控制是为重复控制系统量身定制的一种智能控制方法，具有如下优点：1) 迭代学习更新律的设计仅需要系统的输入输出数据及少量的系统动力学信息；2) 迭代学习控制过程收敛速度快；3) 可以在整个有限时间区间上实现对给定理想轨迹的完全跟踪。基于上述优点，迭代学习控制方法在很多领域都有广泛的应用，例如在机械臂和光刻机等领域。

在现实场景中应用迭代学习控制时，一个不容忽视的问题就是系统输出会出现超调。如果该问题未能解决，则无法安全地将迭代学习控制方法应用到实际工作中，因为超调的出现极有可能对现实中的设备造成不可恢复的损坏。到目前为止，已经有很多学者对这一问题提出了解决方案，其中采用变增益迭代学习更新律被认为是一种有效避免超调现象产生的方法。本文通过推理计算，发现之前与变增益迭代学习更新律相关的文献中存在技术缺陷，虽然其结论是否成立有待进一步论证，但是其中使用到的方法确实在仿真实验中对改善系统瞬态跟踪性能有所帮助。针对这一发现，本文开始了变增益迭代学习更新律对系统单调收敛性影响的研究。本文的主要内容及结论如下：

1) 针对 SISO 离散定常系统，本文首先对已有文献中得出的系统输出跟踪误差单调收敛的充分条件进行了完善，并提出了系统输出跟踪误差和输入跟踪误差单调收敛的充要条件。然后指出具有指数衰减增益的 P-型学习律无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数、2 范数以及无穷范数意义的下单调收敛性，否定了已有文献中的结论。鉴于该迭代学习更新律确实在仿真实验中表现良好，本文还分析了在使用具有指数衰减增益的 P-型学习律之后，系统输入跟踪误差在三种范数意义下的收敛特性，研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性，但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性，同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。另外，除了原文中提到的时变增益  $e^{-\alpha t}$ ，本文还引出了另一种时变增益  $e^{-(T-t-1)\alpha}$ ，并设计了一种具有指数递增增益的 P-型学习律。在应用具有指数递增增益的 P-型学习律后，同样从输入和输出两个角度对系统的瞬态跟踪性能进行了分析，总结得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性，但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性以及系统输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性，同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下

单调收敛的充分条件。

2) 针对 SISO 离散时变系统, 本文首先对其使用了经典 P-型学习律, 并分别研究了系统输入跟踪误差和输出跟踪误差在三种范数意义下的收敛特性。其次, 本文对系统使用了具有指数衰减增益的 P-型学习律, 通过研究得出具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下以及输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输入跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。再次, 本文对系统使用了具有指数递增增益的 P-型学习律, 通过研究得出具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及系统输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性, 同时还得出系统输出跟踪误差在 2 范数意义下单调收敛的充分条件。

3) 针对 MIMO 离散定常系统, 本文首先对其使用了常增益 P-型学习律, 并分别研究了系统输入跟踪误差和输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的收敛特性。其次, 本文对系统使用了具有指数衰减增益的 P-型学习律, 通过研究得出当系统输入输出耦合矩阵满足  $\text{rank}(CB) = q \leq p$  时, 具有指数衰减增益的 P-型学习律可以保证系统输入跟踪误差在 1 范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输入跟踪误差在无穷范数意义下以及输出跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。再次, 本文对系统使用了具有指数递增增益的 P-型学习律, 通过研究得出当系统输入输出耦合矩阵满足  $\text{rank}(CB) = q = p$  时, 具有指数递增增益的 P-型学习律可以保证系统输出跟踪误差在无穷范数意义下的单调收敛性, 但无法保证系统输出跟踪误差在 1 范数意义下以及输入跟踪误差在 1 范数和无穷范数意义下的单调收敛性。

## 5.2 研究展望

本文通过详细的理论推导, 举例分析以及仿真实验验证了变增益迭代学习更新律确实能够改善系统的瞬态跟踪性能, 但是此方法仍然有需要改进之处:

1. 原有的文献和本文的仿真实验都表明了,  $e^{-\alpha t}$  因子的引入相当于将原本的常增益数值变小, 因此无论是从输出角度还是从输入角度进行研究, 系统收敛的速度都有明显的减慢。虽然变增益迭代学习更新律可以改善系统的瞬态跟踪性能, 但是系统收敛速度在实际应用中也是非常重要的。未来考虑在保证系统输出跟踪误差和输入跟踪误差单调收敛的同时, 加快系统收敛速度。

2. 在原有文献中, 作者提出为了能够保证系统单调收敛性, 使用的时变函数必须为单调递减的。但是在本文中使用的第二种时变函数  $e^{-(T-t-1)\alpha}$  却是单调递增的, 因此对于时变函数的选择, 未来应该有更加充分的考虑。

## 参考文献

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning[J]. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123–140.
- [2] 李仁俊, 韩正之. 迭代学习控制综述 [J]. 控制与决策, 2005, 20(9): 961–966.
- [3] LONGMAN R W. Iterative learning control and repetitive control for engineering practice[J]. International Journal of Control, 2000, 73(10): 930–954.
- [4] MENG D, ZHANG J Y. Deterministic convergence for learning control systems over iteration-dependent tracking intervals[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 29(8): 3885–3892.
- [5] SHEN D, XU J X. Adaptive learning control for nonlinear systems with randomly varying iteration lengths[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 30(4): 1119–1132.
- [6] MANDRA S, GALKOWSKI K, ROGERS E, et al. Performance-enhanced robust iterative learning control with experimental application to PMSM position tracking[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 27(4): 1813–1819.
- [7] STEINHAUSER A, SWEVERS J. An efficient iterative learning approach to time-optimal path tracking for industrial robots[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018, 14(11): 5200–5207.
- [8] FREEMAN C T. Robust ILC design with application to stroke rehabilitation[J]. Automatica, 2017, 81(26): 270–278.
- [9] 张凡, 孟德元, 惠宇. 面向超机动飞行的迭代学习控制研究综述 [J]. 空天技术, 2022, 45(6): 12–23.
- [10] ERRACHIDI, HMAMED A. Stability and robust stabilization of 2-D continuous systems in Roesser model based on GKYP lemma[J]. International Journal of Power Electronics and Drive Systems (IJPEDS), 2017, 8(3): 990–1001.
- [11] AHN H S, CHEN Y Q, MOORE K L. Iterative learning control: Brief survey and categorization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), 2007, 37(6): 1099–1121.
- [12] XU J X. A survey on iterative learning control for nonlinear systems[J]. International Journal of Control, 2011, 84(7): 1275–1294.
- [13] BRISTOW D A, THARAYIL M, ALLEYNE A G. A survey of iterative learning control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2006, 26(3): 96–114.
- [14] XU J X, XU J, LEE T H. Iterative learning control for systems with input deadzone[J]. IEEE Trans-

- actions on Automatic Control, 2005, 50(9): 1455–1459.
- [15] MOORE K L. An observation about monotonic convergence in discrete-time, P-type iterative learning control[C] // Proceeding of the 2001 IEEE International Symposium on Intelligent Control. 2001: 45–49.
- [16] MOORE K L, CHEN Y Q, BAHL V. Monotonically convergent iterative learning control for linear discrete-time systems[J]. Automatica, 2005, 41(9): 1529–1537.
- [17] WEI Y S, LI X D. PID and EPID types of iterative learning control based on evolutionary algorithm[C] // Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. 2014: 8889–8894.
- [18] SHOU J X, PI D Y, WANG W H. Sufficient conditions for the convergence of open-closed-loop PID-type iterative learning control for nonlinear time-varying systems[C] // 2003 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. 2003: 2557–2562.
- [19] XIAO T F, LI X D. PID-type iterative learning control for 2-D Roesser model[C] // 2017 IEEE 6th Data Driven Control and Learning Systems (DDCLS). 2017: 400–404.
- [20] MADADY A. PID type iterative learning control with optimal gains[J]. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2008, 6(2): 194–203.
- [21] MADADY A. An extended PID type iterative learning control[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2013, 11(3): 470–481.
- [22] MEMON F, SHAO C. An optimal approach to online tuning method for PID type iterative learning control[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2020, 18(8): 1926–1935.
- [23] BIEN Z, HUH K M. Higher-order iterative learning control algorithm[C] // IEE Proceedings of Control Theory and Applications. 1989: 105–112.
- [24] WANG H, DONG J, WANG Y. High-Order Feedback Iterative Learning Control Algorithm with Forgetting Factor[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(21): 1–7.
- [25] LI G J. High-order iterative learning control for nonlinear systems[C] // 2017 IEEE 6th Data Driven Control and Learning Systems (DDCLS). 2017: 191–196.
- [26] 逢勃, 邵诚. 高阶参数优化迭代学习控制算法 [J]. 控制理论与应用, 2015(4): 144–150.
- [27] BI H B, YANG M X, CHEN J Q. Feedback-aided PID-type iterative learning control against initial state error[C] // 2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS). 2018: 899–902.
- [28] CHEN M J, ZHANG Y J, SU J H. Iterative learning control for singular system with an arbitrary initial state[C] // 2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS). 2018: 141–144.
- [29] TIAN Y, WANG Y J, LIU H, et al. Variable gain iterative learning control with initial error correction[C] // 2019 IEEE International Conference on Smart Internet of Things (SmartIoT). 2019:

- 412–416.
- [30] 孙明轩. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法 [J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 251–262.
- [31] MENG D Y, MOORE K L. Contraction mapping-based robust convergence of iterative learning control with uncertain, locally Lipschitz nonlinearity[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 50(2): 442–454.
- [32] MENG D Y, JIA Y M, DU J P, et al. Robust discrete-time iterative learning control for nonlinear systems with varying initial state shifts[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2626–2631.
- [33] LEE H S, BIEN Z. A note on convergence property of iterative learning controller with respect to sup norm[J]. Automatica, 1997, 33(8): 1591–1593.
- [34] BRISTOW D A, ALLEYNE A G. Monotonic convergence of iterative learning control for uncertain systems using a time-varying q-filter[C] // Proceedings of the 2005 American Control Conference. 2005: 171–177.
- [35] LI Z F, HU Y M. Monotonically convergent feedback-forward iterative learning control for linear discrete-time systems[C] // The 26th Chinese Control and Decision Conference (2014 CCDC). 2014: 3693–3697.
- [36] MADADY A, REZA A, HAMID R. Adaptive pi type iterative learning control[C] // 2010 5th IEEE International Conference Intelligent Systems. 2010: 37–42.
- [37] SUN H, ALLEYNE A G. A cross-coupled non-lifted norm optimal iterative learning control approach with application to a multi-axis robotic testbed[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 2046–2051.
- [38] PENG C, SUN L, ZHANG W, et al. Optimization-based constrained iterative learning control with application to building temperature control systems[C] // 2016 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). 2016: 709–715.
- [39] OWENS D H, FENG K. Parameter optimization in iterative learning control[J]. International Journal of Control, 2003, 76(11): 1059–1069.
- [40] KASE W. A design of parameter optimal iterative learning control for linear discrete-time systems[C] // Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Circuits, Systems, Signal and Telecommunications. 2011: 22–27.
- [41] SONGJUN M. Parameter optimal iterative learning control with application to a robot arm[J]. Universal Journal of Control and Automation, 2015, 3(2): 28–32.
- [42] OWENS D H. Iterative learning control-convergence using high gain feedback[C] // Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control. 1992: 2545–2546.
- [43] LUCIBELLO P. On the role of high-gain feedback in P-type learning control of robot arms[J]. IEEE

- Transactions on Robotics and Automation, 1996, 12(4): 602–605.
- [44] PARK K H, BIEN Z. Intervalized iterative learning control for monotonic convergence in the sense of sup-norm[J]. International Journal of Control, 2005, 78(15): 1218–1227.
- [45] 董辉, 黄文嘉, 李林鑫. 变增益反馈 D 型迭代学习控制系统分析与仿真 [J]. 浙江工业大学学报, 2014, 42(2): 214–218.
- [46] 皮道映, 孙优贤. 离散非线性系统开闭环 P 型迭代学习控制律及其收敛性 [J]. 控制理论与应用, 1997, 14(2): 57–161.
- [47] CHEN Y Q, MOORE K L. An optimal design of PD-type iterative learning control with monotonic convergence[C] // Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control. 2002: 55–60.
- [48] REZA ALIKHANI H R, MADADY A. Monotonic convergence conditions in PD type iterative learning control[C] // 2011 19th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2011: 189–194.
- [49] CHEN Y Q, MOORE K L. PI-type iterative learning control revisited[C] // Proceedings of the 2002 American Control Conference. 2002: 2138–2143.
- [50] CHEN Y Q, MOORE K L. On  $D^\alpha$ -type iterative learning control[C] // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. 2001: 4451–4456.
- [51] MADADY A, REZA A, HAMID R. A guaranteed monotonically convergent iterative learning control[J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(5): 1299–1316.
- [52] MOORE K L. Multi-loop control approach to designing iterative learning controllers[C] // Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control. 1998: 666–671.
- [53] JAYAWARDHANA R N, GHOSH B K. Observer based iterative learning controller design for MIMO systems in discrete time[C] // 2018 Annual American Control Conference (ACC). 2018: 6402–6408.
- [54] MOORE K L, CHEN Y Q, BAHL V. Feedback controller design to ensure monotonic convergence in discrete-time, P-type iterative learning control[C] // 2002 Asian Control Conference. 2002: 440–445.
- [55] LIU J, ZHANG Y M, RUAN X E. Iterative learning control for a class of uncertain nonlinear systems with current state feedback[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(10): 1889–1901.
- [56] SEBASTIAN G, TAN Y, OETOMO D, et al. Design of feedback gain in feedback-based iterative learning control[C] // 2017 11th Asian Control Conference (ASCC). 2017: 875–880.
- [57] CHEN Y Q, GONG Z M, WEN C Y. Analysis of a high-order iterative learning control algorithm for uncertain nonlinear systems with state delays[J]. Automatica, 1998, 34(3): 345–353.
- [58] CHEN Y Q, WEN C Y, XU J X, et al. High-order iterative learning identification of projectile's

- aerodynamic drag coefficient curve from radar measured velocity data[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1998, 6(4): 563–570.
- [59] MOORE K L, CHEN Y Q. On monotonic convergence of high order iterative learning update laws[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2002, 35(1): 19–24.
- [60] MOORE K L, CHEN Y Q. A separative high-order framework for monotonic convergent iterative learning controller design[C] // Proceedings of the 2003 American Control Conference. 2003: 3644–3649.
- [61] RUAN X E, BIEN Z Z, WANG Q. Convergence properties of iterative learning control processes in the sense of the Lebesgue-P norm[J]. Asian Journal of Control, 2012, 14(4): 1095–1107.
- [62] OWENS D, HATONEN J, DALEY S. Robust monotone gradient-based discrete-time iterative learning control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal, 2009, 19(6): 634–661.
- [63] BIEN Z, XU J. Iterative learning control: analysis, design, integration and applications[M]. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2012.
- [64] PARK K H, BIEN Z. A study on iterative learning control with adjustment of learning interval for monotone convergence in the sense of sup-norm[J]. Asian Journal of Control, 2002, 4(1): 111–118.
- [65] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence[J]. IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 1996, 143(2): 217–224.
- [66] CHU B, OWENS D H. Accelerated norm-optimal iterative learning control algorithms using successive projection[J]. International Journal of Control, 2009, 82(8): 1469–1484.
- [67] DAI X S, ZHANG H, WU Q Q, et al. Closed loop variable gain ILC for a class of nonlinear parabolic distributed parameter systems with moving boundaries[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2021, 7(9): 1–15.
- [68] LI Y F, AN A M, WANG J L, et al. Iterative Learning Control of Exponential Variable Gain Based on Initial State Learning for Upper Limb Rehabilitation Robot[C] // 2019 Chinese Automation Congress (CAC). 2019: 4947–4952.
- [69] WANG J, YU C C, LIU Y, et al. Variable gain feedback  $PD^\alpha$ -type iterative learning control for fractional nonlinear systems with time-delay[J]. IEEE Access, 2019, 7: 90106–90114.
- [70] GAN Y Z, ZENG Q S. Variable Gain Iterative Learning Control with Forgetting Factor[C] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018: 2082–2087.
- [71] RUAN X E, LIU Y. Monotone convergence rate of norm-optimal-gain-arguable iterative learning control for LDTI systems[J]. Asian Journal of Control, 2022, 24(2): 920–941.
- [72] ZHANG T, YAN H Y, JIA D P, et al. An Accelerated Iterative Learning Control Approach for X-Y

- precision plane motion stage[C] //2021 6th International Conference on Automation, Control and Robotics Engineering (CACRE). 2021 : 62–67.
- [73] LI X H, RUAN X E. Monotonic convergence and robustness of higher-order gain-adaptive iterative learning control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(10): 3960–3981.
- [74] LIU J, JIA C Q. Direct and Indirect Technique Routes of Convergence Analysis for Discrete-time Iterative Learning Control[C] //2022 IEEE 11th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS). 2022 : 899–903.
- [75] CHI R H, HOU Z S, SUI S L. Discrete-time Adaptive Iterative Learning from Different Tracking Tasks with Variable Initial Conditions[C] //2007 Chinese Control Conference. 2007 : 791–795.
- [76] SUN M X, HE X X. Iterative learning identification and control of discrete time-varying systems[C] //2007 Chinese Control Conference. 2007 : 520–524.
- [77] SUN M X, LIU X B, HE H G. Adaptive iterative learning control for SISO discrete time-varying systems[C] //2012 12th International Conference on Control Automation Robotics and Vision (ICARCV). 2012 : 58–63.
- [78] LIU C, RUAN X E, AN S Z. Optimal iterative learning control for discrete linear time-varying systems with varying trial lengths[C] //2021 IEEE 10th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS). 2021 : 589–594.
- [79] LIU J, RUAN X E, ZHENG Y S. Iterative learning control for discrete-time systems with full learnability[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 33(2): 629–643.
- [80] LIU C Y, RUAN X E. Markov parameters identification and adaptive iterative learning control for linear discrete-time MIMO systems with higher-order relative degree[J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(2): 1226–1251.
- [81] LIU C Y, RUAN X E. Input output driven gain adaptive iterative learning control for linear discrete-time-invariant systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(17): 8551–8568.
- [82] DONKERS T, VAN DE WIJDEVEN J, BOSGRA O. Robustness against model uncertainties of norm optimal iterative learning control[C] //2008 American Control Conference. 2008 : 4561–4566.
- [83] HARTE T, HATONEN J, OWENS D. Discrete-time inverse model-based iterative learning control: stability, monotonicity and robustness[J]. International Journal of Control, 2005, 78(8): 577–586.
- [84] GE X Y, STEIN J L, ERSAL T. Frequency-domain analysis of robust monotonic convergence of norm-optimal iterative learning control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 26(2): 637–651.



- [85] OWENS D H, CHU B, SONGJUN M. Parameter-optimal iterative learning control using polynomial representations of the inverse plant[J]. International Journal of Control, 2012, 85(5) : 533 – 544.
- [86] YOVCHEV K. Finding the optimal parameters for robotic manipulator applications of the bounded error algorithm for iterative learning control[J]. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 47(4): 3 – 11.
- [87] LIU Y, RUAN X E, LI X H. Optimized iterative learning control for linear discrete-time-invariant systems[J]. IEEE Access, 2019, 7 : 75378 – 75388.
- [88] UCHIYAMA M. Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial[J]. Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, 1978, 14(6) : 706 – 712.



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

地址：西安市太白南路2号

邮编：710071

网址：[www.xidian.edu.cn](http://www.xidian.edu.cn)