



华南理工大学  
South China University of Technology

# 硕士学位论文

## 具有约束的不确定机械臂任务空间 轨迹跟踪控制研究

作者姓名	万福玺
学科专业	控制科学与工程
指导教师	吴玉香 教授
所在学院	自动化科学与工程学院
论文提交日期	2022 年 04 月

# **Research on task space tracking control of uncertain robot manipulator with constraints**

A Dissertation Submitted for the Degree of Master

**Candidate: Wan Fuxi**

**Supervisor: Prof. Wu Yuxiang**

South China University of Technology  
Guangzhou, China

分类号：TP242

学校代号：10561

学 号：201920116459

华南理工大学硕士学位论文

# 具有约束的不确定机械臂任务空间 轨迹跟踪控制研究

作者姓名：万福玺

指导教师姓名、职称：吴玉香（教授）

申请学位级别：工学硕士

学科专业名称：控制科学与工程

研究方向：机械臂控制

论文提交日期：2022 年 04 月 26 日

论文答辩日期：2022 年 05 月 31 日

学位授予单位：华南理工大学

学位授予日期：2022 年 06 月 30 日

答辩委员会成员：

主席： \_\_\_\_\_ 文玉良 \_\_\_\_\_

委员： \_\_\_\_\_ 罗飞 \_\_\_\_\_ 吴玉香 \_\_\_\_\_ 王敏 \_\_\_\_\_ 肖兵 \_\_\_\_\_

## 摘 要

机械臂相比人力,具有高精度、高效率等优点,可代替人类在恶劣环境下作业,因此被广泛应用在医疗、工业制造、航空航天、国防军事、家政服务等领域。机械臂的非线性、耦合性等特性,给机械臂的轨迹跟踪控制带来了困难和挑战。此外,在实际工程应用中,机械臂还会受外界干扰、各种约束条件以及模型不确定性的影响。本文以反步法为基础,结合非线性状态依赖函数(nonlinear state-dependent function, NSDF)、障碍李雅普诺夫函数(barrier Lyapunov function, BLF)、不确定项与干扰估计器(uncertainty and disturbance estimator, UDE)、指数观测器、径向基(Radial Basis Function, RBF)神经网络、命令滤波器等,分别对刚性机械臂和柔性关节机械臂任务空间轨迹跟踪控制进行研究。全文的主要研究内容如下:

1. 考虑输入饱和与时变输出约束,针对受外界扰动、具有动力学不确定性的刚性机械臂,提出了基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制算法。通过 UDE 来估计动力学不确定项和未知外界干扰,并在反步法设计中结合动态辅助系统和 NSDF 分别来处理输入饱和与时变输出约束,设计了基于 UDE 的轨迹跟踪控制器。其中, UDE 的设计仅需要知道目标对象的带宽,这使得所设计控制算法更加容易实现和调整。通过 Lyapunov 稳定性分析,证明了闭环系统所有信号都是一致最终有界(uniformly ultimately bounded, UUB)的,轨迹跟踪误差最终收敛到零的小邻域内,且系统输入和系统输出都保持在给定的约束范围内。最后,以两连杆刚性机械臂为例,通过对比仿真实验验证了所提控制算法的有效性和优越性。

2. 考虑输入饱和与时变输出约束,针对受外界扰动、具有动力学不确定性的刚性机械臂,提出了基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制算法。构造单一辅助变量与 BLF 来分别解决输入饱和与输出约束问题,并结合 UDE 以及预设收敛时间控制理论,设计了基于 UDE 的预设收敛时间轨迹跟踪控制器。通过 Lyapunov 稳定性分析,证明了闭环系统所有信号都在预设收敛时间内收敛且有界,输入饱和与输出约束都没有被违背。最后,以两连杆刚性机械臂为例,通过对比仿真实验验证了所提控制算法的有效性和优越性。

3. 考虑输入饱和与时变输出约束,针对具有动力学和运动学不确定性的柔性关节机械臂,提出了自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制方案。引进命令滤波器并设计了滤波误差补偿系统,解决了反步法中对虚拟控制律反复求导带来的“计算爆炸”问题。分

别采用 RBF 神经网络和指数观测器来逼近动力学不确定项与运动学不确定项，结合 NSDF、辅助变量，设计了自适应神经网络轨迹跟踪控制器，并给出了稳定性分析。在所设计的方案中，仅需更新神经网络权值的模，在一定程度上减轻了计算负担。最后以两连杆柔性关节机械臂为对象，通过对比仿真实验验证了所提控制方案的有效性和优越性。

**关键词：**不确定机械臂；约束；不确定项与干扰估计器；反步法；任务空间

## Abstract

Compared with manpower, robot manipulators have the advantages of high precision and high efficiency, and can replace human work in dangerous environment. Therefore, they are widely used in medical treatment, industrial manufacturing, aerospace, national defense, domestic service and so on. The non-linear and coupling characteristics of robot manipulators bring difficulties and challenges to its tracking control. In practical engineering applications, robot manipulators are not only restricted by various constraints but also affected by the model uncertainties and external disturbance. In this thesis, based on backstepping, nonlinear state-dependent function (NSDF), barrier Lyapunov function (BLF), uncertainty and disturbance estimator (UDE), exponential observer, radial basis function (RBF) neural network and command filter, the task space tracking control of rigid manipulator and flexible-joint manipulator are studied, respectively. The main research contents are as follows:

1. Considering the input saturation and time-varying output constraints, an UDE-based task space tracking control method is proposed for robot manipulators with dynamic uncertainties and external disturbance. UDE is used to estimate the dynamic uncertainties and external disturbance. In the design of backstepping, dynamic auxiliary system and NSDF are designed to deal with the input saturation and time-varying output constraints, then an UDE-based tracking controller is designed. The design of UDE only needs to know the bandwidth of plant object, which makes the designed control algorithm easier to implement and tune. Through Lyapunov stability analysis, it is proved that all signals in the closed-loop system are uniformly ultimately bounded (UUB), the tracking error converges to a small neighborhood, and the system input and output remain within the given constraints. Finally, the comparative simulation results of a two-link robot manipulator are utilized to validate the effectiveness and superiority of the proposed control method.

2. Considering the input saturation and time-varying output constraints, an UDE-based task space predefined-time tracking control method is proposed for robot manipulators with dynamic uncertainties and external disturbance. An auxiliary variable and BLF are used to solve input saturation and output constraints, and an UDE-based predefined-time tracking controller is designed combining UDE and the predefined-time control theory. Through Lyapunov stability analysis, it is proved that all signals in the closed-loop system are bounded and converge within the settling-time, and the input saturation and output constraints are not violated. Finally, the comparative simulation results of a two-link robot manipulator are utilized to validate the effectiveness and superiority of the proposed control algorithm.

3. Considering the input saturation and time-varying output constraints, an adaptive neural task space tracking control strategy is proposed for flexible-joint robot manipulators with dynamic and kinematic uncertainties. The command filter and filtering error compensation system are introduced to deal with the “explosion of complexity” problem caused by the repeat derivate in backstepping. RBF neural network and exponential observer are utilized to approximate the dynamic and kinematic uncertainties, respectively. Combined with NSDF and auxiliary variable, an adaptive neural tracking controller is designed, and the stability analysis is also given. In the design strategy, neural network only needs to update the norm of weight, which greatly reduces the computation burden. Finally, the comparative simulation results of a two-link flexible-joint robot manipulator are utilized to validate the effectiveness and superiority of the proposed control strategy.

**Keywords:** Uncertain robot manipulator; constraint; uncertainty and disturbance estimator; backstepping; task space

# 目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 课题研究背景及意义.....	1
1.2 机械臂研究现状.....	2
1.2.1 机械臂国内外研究现状.....	2
1.2.2 机械臂轨迹跟踪控制策略研究现状.....	4
1.3 本文的研究内容与组织结构 .....	8
第二章 预备知识 .....	11
2.1 引言.....	11
2.2 机械臂的数学模型.....	11
2.2.1 刚性机械臂模型.....	11
2.2.2 柔性关节机械臂模型.....	12
2.3 RBF 神经网络 .....	13
2.4 系统稳定性理论.....	14
2.4.1 Lyapunov 稳定性理论.....	14
2.4.2 BLF .....	15
2.5 本章小结.....	15
第三章 基于 UDE 的刚性机械臂任务空间跟踪控制 .....	16
3.1 引言.....	16
3.2 问题描述及相关引理.....	16
3.3 控制器设计及稳定性分析 .....	17
3.3.1 基于 UDE 的轨迹跟踪控制器设计 .....	17
3.3.2 稳定性分析.....	20
3.4 数值仿真与分析.....	24
3.4.1 仿真对象及参数设置.....	24
3.4.2 仿真结果与分析.....	26
3.5 本章小结.....	28
第四章 基于 UDE 的刚性机械臂预设收敛时间任务空间跟踪控制 ..	29
4.1 引言.....	29
4.2 问题描述及相关引理.....	29
4.3 控制器设计及稳定性分析 .....	31
4.3.1 基于 UDE 的预设收敛时间轨迹跟踪控制器设计 .....	31
4.3.2 稳定性分析.....	33
4.4 数值仿真与分析.....	38
4.4.1 仿真对象及参数设置.....	38



4.4.2 仿真结果与分析.....	38
4.5 本章小结.....	41
第五章 柔性关节机械臂自适应神经网络任务空间跟踪控制 .....	42
5.1 引言.....	42
5.2 问题描述.....	42
5.3 控制器设计及稳定性分析 .....	43
5.3.1 自适应神经网络轨迹跟踪器设计.....	43
5.3.2 稳定性分析.....	46
5.4 数值仿真与分析.....	52
5.4.1 仿真对象及参数设置.....	52
5.4.2 仿真结果与分析.....	53
5.5 本章小结.....	56
总结与展望.....	57
参考文献.....	59

# 第一章 绪论

## 1.1 课题研究背景及意义

在工业化、自动化、智能化的时代浪潮下，机械臂始终扮演着举足轻重的角色，是社会生产力必不可少的一部分。机械臂的基本功能是代替人力完成搬运、抓取、打磨、焊接、组装等动作，具有高精度、高效率等优点。随着机械臂控制技术的逐渐成熟，机械臂已经被广泛应用于工业生产、医疗、军事、航空航天等领域<sup>[1-5]</sup>，给社会带来了巨大的经济效益。如图 1-1 (a)所示的搬运机械臂，它可以通过更换不同类型的末端执行器来完成对不同形态的货物的搬运工作。如图 1-1 (b)所示的喷涂机械臂主要被应用在汽车、建材、电器等行业，它能够重复的、高精度的对工件表面进行喷涂。如图 1-1 (c)所示的空间机械臂是航天航空事业密不可分的一部分，它通常被用来代替航天员完成空间站维修、在轨组装等工作，也可以用来辅助航天员完成其他作业。如图 1-1 (d)所示的放疗医用机械臂，它可以精确的将患者摆放到设定位置，便于放射治疗，并配备了监测系统，可以根据肿瘤照射区域和放射流束的位置来进行摆位调整。

轨迹跟踪是机械臂控制技术中应用最广泛的一种，是机械臂高效完成各种任务的基础，前文所列举的搬运机械臂、喷涂机械臂、空间机械臂及放疗医用机械臂也都需要使用该技术来完成工作。因此，对机械臂的轨迹跟踪控制课题进行深入研究是十分重要的，这不仅能够促进机械臂领域的技术发展，还能进一步推动社会生产力的发展。然而，机械臂作为一类高度非线性、强耦合的复杂系统，对其设计轨迹跟踪控制器并非易事。同时，在实际的工作场景中，还存在着外界干扰以及模型不确定性等问题，这些问题如果不加以解决就会对轨迹跟踪控制效果带来较大的负面影响，甚至会导致系统不稳定。此外，机械臂还会受到执行机构的限制，衍生出输入饱和问题，从而导致轨迹跟踪效果较差。不仅如此，执行机构长时间处于极限状态，还容易出现各类故障且使用寿命会大大缩短，进一步导致经济成本上涨。同时，考虑到操作人员的人身安全以及工作任务的需求，轨迹跟踪控制器的设计往往需要将机械臂的输出约束在预先划分的区域内，即输出约束问题。为了获得良好的控制效果，在设计机械臂轨迹跟踪控制器时，以上问题都是需要考虑并解决的。

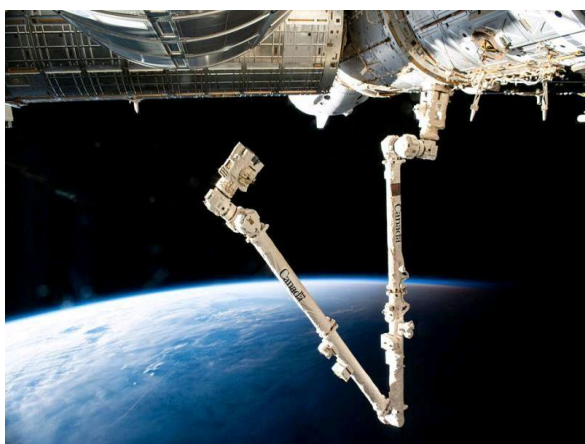
因此，本文在考虑输入饱和、输出约束的情况下，以具有不确定性的刚性、柔性关节机械臂为对象，在理论和仿真层面对任务空间轨迹跟踪控制进行研究，为机械臂在实际工程应用提供一些想法与思路。



a) 搬运机械臂



b) 喷涂机械臂



c) 空间机械臂



d) 放疗医用机械臂

图 1-1 机械臂的应用

## 1.2 机械臂研究现状

### 1.2.1 机械臂国内外研究现状

1942 年，美国作家 Isaac Asimov 在他的著作《I, ROBOT》中提出了著名的“机器人三定律”，然而，此时世界上并没有实际意义上的机器人。直到 1959 年，世界上第一台工业机器人 Unimate 横空出世，宣告着机器人正式从科幻书籍中走向了现实，其发明者 Joseph Engelberger 也被人们誉为“机器人之父”。之后，世界各国都开始增加在机器人领域的投入，并取得了众多成果。1962 年，美国 AMF 公司发明了世界上第一台圆柱坐标型工业机械臂 Verstran，并将其应用在汽车生产线上。1969 年，美国 Unimation 公司生产的点焊机械臂首次投入使用，大大的提高的车身焊接的效率。同年，Unimation 公司与日本川崎重工公司合作，成功研发了日本的第一台工业机械臂“Kawasaki-Unimate2000”。此时，所研发的机器人都是示教再现型的，通过示教存储程序和运动信息，在工作时读取存储的信息，实现示教动作的复现，对外界的环境没有任何感知能力。

为了使机械臂更加智能,能够获取外界环境的信息,1973年,日本日立公司将动态视觉传感器安装在机械臂上,开发了世界上第一台拥有动态视觉的工业机械臂。该机器人能够识别出螺栓的位置,完成对螺栓的作业。1974年,川崎重工公司开发了世界上首个带精密插入控制功能的机械臂“Hi-T-Hand”,该机械臂安装了力反馈系统,可以插入微米级机械器件。同年,随着计算机技术的迅猛发展,世界上第一台与小型计算机结合的工业机械臂“The Tomorrow Tool”由美国的学者 Richard Hohn 开发而出,从此开启了机械臂的新时代。1975年,Olivetti 公司开发了世界上第一台直角坐标型机械臂“SIGMA”,并应用在器件组装领域。1978年,美国 Unimation 公司推出了世界首台可编程通用装配机械臂,直到现在,这款机械臂仍然还在投入使用。1978年,日本山梨大学的 Hiroshi Makino 发明了选择顺应性装配机械臂,主要用于货物的装配工作。1979年,日本研制出第一台电机驱动的点焊机械臂,开创了电力驱动机械臂的先河,从此液压驱动机械臂时代宣告结束。1992年,瑞典 Demarex 公司将其第一台应用于包装的三角洲机械臂出售,目前该类机械臂被广泛应用在医疗、制药等领域。上述的机械臂大多装有传感器,具备感知外界环境、获取外界信息的能力,相比最早的示教机械臂,虽然性能有了巨大的提升,但是在复杂的环境下的工作效果依然不太理想。

随着人工智能热潮的到来,机械臂的发展也趋向于智能化。2010年,日本 FANUC 公司研发的学习控制机械臂“R-2000iB”,只需要操作人员启动机械臂程序,就可以自动循环学习,在保持工作轨迹稳定的同时,提高作业速度。然而,此类机械臂,只是通过不断的训练学习,来提高工作的效率和质量。如何使机械臂能够自我学习、成长,达到人类只需要分配任务,机械臂就能够自主选择优良的方法来完成的任务的阶段,将是未来机械臂研究的重点方向。

我国有关机器人的研究工作起步较晚。随着“七五”计划与“863”计划的实施,针对机械臂的研究才逐渐的发展起来,我国各大高校和研究院所也开始了对机械臂的研究,例如:哈尔滨工业大学、上海交通大学、中科院沈阳自动化所、北京机械工业自动化所等。1987年,我国自行研发出第一台点焊机械臂——华宇-I型点焊机械臂。目前,在研究人员的不懈努力下,我国已经研制出了点焊、弧焊、搬运、喷漆、装配等工业机械臂,基本上满足了自动化工业生产的需求。同时,随着航天事业的发展,我国对空间机械臂也投入了大量的研究力量,目前相关技术已经达到了世界领先水平。

随着科技的发展,机械臂在不断的更新换代,从第一代的示教再现型机械臂,到结合各类传感器,升级为具备环境感知能力的机械臂,再到现在的智能机械臂,每一代机

械臂都给当时的社会带来了巨大的便利。在这一过程中，也涌现了许多知名的机器人制造公司，例如美国的 Unimation、德国的 KUKA、日本的川崎重工、瑞典的 Demareux、意大利的 COMAU 等。同时，随着机械臂硬件与结构的发展，机械臂的控制技术也在不断的改进。

## 1.2.2 机械臂轨迹跟踪控制策略研究现状

### 1. 常见的机械臂轨迹跟踪控制方法

针对机械臂的控制有多种形式，如点对点控制、轨迹跟踪控制与力/位控制等。随着现代工业的迅猛发展，机械臂要执行的任务也越来越复杂，高精度的轨迹跟踪控制已逐渐成为控制领域中非常重要的研究课题之一。机械臂作为典型的非线性系统，很多控制方法都可以应用在其轨迹跟踪控制上，例如比例-积分-微分控制方法（proportional-integral-derivative, PID）<sup>[6-9]</sup>、反步法控制<sup>[10-13]</sup>、滑模变结构控制<sup>[14-17]</sup>、鲁棒控制方法<sup>[18-21]</sup>、自适应控制方法<sup>[22-26]</sup>、智能控制方法<sup>[27-31]</sup>等。

#### (1) PID 控制

PID 控制是一种主流的反馈控制算法，在实际应用中，大部分系统采用的都是 PID 控制。PID 控制可以分为三个环节：比例环节、积分环节以及微分环节。在机械臂的轨迹跟踪控制中，这三个环节对控制性能的影响不同，比例环节主要影响系统的响应速度，积分环节主要用来消除系统的稳态误差，微分环节则主要影响系统的动态响应速度。文献[8]针对机械臂存在已知上界的不确定项与未知上界的不确定项的两种情况，设计了两种新的自适应 PID 控制器，保证了机械臂关节位置和速度的跟踪误差渐近收敛到零。

#### (2) 反步法控制

反步法是一种经典的非线性控制方法，被广泛使用在各类非线性系统的控制中。反步法首先将复杂的系统分解为一个个子系统，然后针对每个子系统设计虚拟控制律来保证前面的子系统稳定，逐步反推，最终完成对整个系统的控制律设计。文献[11]针对  $n$  连杆刚性机械臂，首先利用机械臂关节的位置误差和速度误差设计滑模面，然后基于反步法理论逐步设计控制器，最终提出了一种基于反步法的自适应滑模轨迹跟踪控制方案。然而，当系统的阶次过高时，会导致所设计的虚拟控制律需要多次求导，产生“计算爆炸”问题。因此，命令滤波器通常与反步法结合使用来解决这一问题。文献[13]针对  $n$  连杆柔性关节机械臂的轨迹跟踪控制进行了研究，通过引入命令滤波器解决了反步法中存在的“计算爆炸”问题，并提出了一种基于反步法的自适应模糊有限时间控制方案。

#### (3) 滑模变结构控制

针对机械臂的轨迹跟踪控制问题,滑模变结构控制首先需要根据机械臂的模型表达式来设计一个滑模面,然后在根据该滑模面设计控制律使得系统的状态轨迹在滑模面上运动,最终实现对预设轨迹的跟踪。文献[14]考虑到空间机械臂由地面装调到空间应用过程中重力环境发生变化的问题,采用滑模控制器对空间机械臂进行轨迹跟踪控制,提出了一种新的基于趋近律的滑模控制方法,并基于 Lyapunov 理论证明了闭环系统的渐近稳定性,仿真结果表明该方法能够很好地完成不同重力环境下机械臂的轨迹跟踪控制任务,并具有较强的鲁棒性。滑模变结构控制的优点是对未知系统动态具有鲁棒性,当滑模切换增益大于未知项上限时,可达到鲁棒稳定。但是在实际的工程中,未知项的上界是未知的,如果选择较大的切换增益的话又会导致系统在滑模面附近振荡。为了解决这一问题,针对机械臂系统,文献[17]设计了一种变指数趋近律滑模控制律,能够有效的抑制抖振。

#### (4) 鲁棒跟踪控制

鲁棒跟踪控制的目标是设计合适的鲁棒控制律使得闭环系统在存在结构化不确定性、非结构化不确定性的情况下依然保持跟踪性能。在机械臂的轨迹跟踪控制中,结构化不确定性往往考虑的是模型参数的不确定性,非结构不确定性则大多是未知的外界干扰。主要的鲁棒控制理论有: Kharitonov 区间理论、 $H_\infty$ 控制理论、结构奇异值理论( $\mu$ 理论)等。文献[19]在考虑机械臂参数不确定性的情况下,提出了基于线性矩阵不等式的鲁棒控制策略,该策略基于由两个控制环组成的计算转矩方案,内环利用反馈线性化将非线性机械臂动力学线性化,外环则是基于 PD 控制器跟踪目标轨迹,且该控制器对不确定参数和忽略动力学特性具有鲁棒性。最后,将该鲁棒控制技术应用于二自由度平面机械臂上,数值结果表明,鲁棒控制策略在跟踪精度、干扰抑制和参数不确定性方面具有良好的动态性能。

#### (5) 自适应控制

自适应控制方法主要是利用未知参数的线性关系,采用自适应算法在线估计系统的动态特性,根据在线的估计值不断修改控制律使其能够跟随系统变化而变化。该方法对系统模型要求较低,并能较好的应对未建模扰动及外界扰动,鲁棒性好。文献[22]针对受外部干扰、具有模型不确定性的机械臂,基于滑模控制理论,研究了一种自适应模糊逻辑控制方案,该方案采用自适应模糊逻辑系统来估计不确定项,并采用滤波误差信号来弥补逼近误差,从而提高系统的鲁棒性能,最后利用 Lyapunov 稳定性理论证明了跟踪误差渐近收敛于零。文献[24]针对具有未知时变时滞的不确定两关节机械臂,采用神

经网络逼近系统未知项,设计神经网络权值自适应律,提出了一种自适应神经网络轨迹跟踪控制算法,并基于 Lyapunov 稳定性分析证明了闭环系统所有信号都是半全局 UUB 的。

## (6) 智能控制

智能控制是一种基于知识规则和学习推理的自动控制技术,无需人工干预,可以独立驱动智能机实现预期控制目标,主要用于具有不确定数学模型、高度非线性的复杂对象。常见的智能控制方法有神经网络控制、模糊控制、学习控制、专家控制和遗传算法、粒子群寻优算法等。文献[27]针对包含未知非线性函数和驱动器饱和的单杆机械臂系统,利用模糊逻辑系统逼近未知非线性函数,提出了一种自适应模糊状态反馈控制方法,保证了闭环系统所有信号有界。文献[28]研究了具有未知死区的机械臂轨迹跟踪控制问题,为了解决机械臂的不确定性和未知死区效应,引入自适应神经网络控制,分别设计两个 RBF 神经网络,一个用来处理死区效应,另一个用来对机械臂未知动力学进行估计,最后以两关节刚性机械臂为对象,通过数值仿真和实验验证了所提控制方法的有效性。文献[30]针对具有不确定性和未知外界扰动的机械臂,设计了一种基于神经网络的自适应观测器来估计连杆的速度,并基于该观测器提出了一种基于神经网络的滑模自适应输出反馈控制算法。文献[31]针对不确定机械臂轨迹跟踪控制问题,采用模糊逻辑对机械臂动力学中的不确定项进行补偿,提出了一种模糊逻辑控制策略,并通过仿真结果验证了所提控制策略的有效性。

上述每种控制方法都有自己的优缺点和适用场景,因此,在针对复杂的机械臂系统进行控制方案设计时,只使用单一的控制方法往往无法达到满意的控制效果,而是需要根据实际工程环境以及任务需求,选择多种合适的控制方法,并将这些方法融合,最终设计出满意的控制器。在实际的机械臂工作环境中,很多因素会影响到实际的控制效果,例如输入饱和、输出约束、模型不确定性、外界未知干扰等。为了获得良好的控制性能,就需要针对这些因素设计相应的控制算法。

### (1) 输入饱和与输出约束

机械臂在运行过程中可能会受到执行机构的物理限制,从而会出现输入饱和问题。当执行机构长期处在极限状态时,会使得其使用寿命和安全性下降,机械臂作业的经济成本也随之提高。为了解决输入饱和问题,文献[32]首次将实际输入与理想输入的差值作为输入信号,针对非线性系统建立了稳定的辅助系统,通过有界的辅助变量对控制器进行动态补偿调节,提出了辅助系统控制方法。辅助系统简单有效且易于实现,在被提

出之后就受到了广泛的应用<sup>[33-36]</sup>。文献[35]在所提出的机械臂轨迹跟踪控制方案中,设计了一个辅助系统,有效的抑制了输入饱和效应,并通过仿真和实物实验验证了控制方案的有效性。文献[37]则通过引入双曲正切函数来处理输入饱和。

考虑到人机交互的安全以及机械臂作业环境的限制,往往需要对机械臂的末端执行器运动范围进行约束。目前,BLF 是应用最广泛的处理输出约束的方法,因为该方法不仅不需要对系统求解,还很容易与其他非线性控制方法结合,十分灵活。BLF 最早在 2005 年由 Ngo 提出<sup>[38]</sup>,其原理是通过设计满足误差趋近约束边界时函数值趋近无穷的性质 Lyapunov 函数,来保证约束条件得到满足。在机械臂的轨迹跟踪控制领域中,BLF 是一种常见的解决系统输出约束问题的控制方法<sup>[39-42]</sup>。文献[39]针对受对称常输出约束的刚性机械臂,利用对数形 BLF 保证关节约束不被违反,并通过仿真验证了所提的神经网络轨迹跟踪控制方案的可行性与优越性。但是上述对称 BLF 只能解决对称时变的输出约束,针对非对称的时变输出约束,Tee 等人提出了一种非对称的 BLF<sup>[41]</sup>。无论是对称还是非对称的 BLF,在结合反步法使用时,都需要虚拟控制律满足可行性条件。为了移除可行性条件,文献[43]针对全状态约束下的严格反馈线性系统,构造了 NSDF 来解决约束问题,并通过仿真验证了该方法的有效性。文献[44]针对存在位置和速度约束的不确定机械臂,构造了一种新的映射函数,消除了对约束边界的限制,提出了一种基于神经网络的自适应控制策略。

## (2) 模型不确定性与未知外界干扰

受到测量工具或测量环境的限制,机械臂的测量参数往往和实际参数有一定偏差,这直接导致了所建机械臂数学模型与实际模型之间存在模型误差,从而影响到机械臂的控制效果。前文所述的智能控制方法,如神经网络控制、模糊控制等,都是常见的处理系统模型不确定项的方法。此外,机械臂有时还会受到外界各类噪声的干扰而导致系统控制性能下降。目前,大部分控制方案都是选择构建扰动观测器来处理外界干扰<sup>[45-50]</sup>。文献[47]研究了机械臂在外部干扰下的轨迹跟踪问题,提出了一种基于干扰观测器的控制器,实现了对外界干扰的估计与补偿。文献[49]针对一类具有外部扰动的非线性系统,通过将扩张状态观测器与滑模相结合,提出了一种基于滑模扰动观测器的轨迹跟踪控制器,并应用在了机械臂上,验证了所提控制器的有效性。文献[51]针对不确定线性时不变系统,首次提出 UDE 来实现对模型不确定项和未知外界干扰的估计。相比于神经网络、模糊系统,UDE 的设计更为简洁且仅需目标对象的带宽。

## 2. 机械臂任务空间轨迹跟踪控制方法



一般情况下,机械臂的期望轨迹都设置在任务空间。因此,相比于在关节空间中设计轨迹跟踪控制器,在任务空间设计控制器可直接实现对期望轨迹的跟踪,而无需通过逆运动学将任务空间轨迹转化为对应的关节角轨迹。目前,在任务空间中实现机械臂轨迹跟踪控制的方法主要有两种,一种是利用雅可比矩阵的伪逆<sup>[52-54]</sup>,另一种是利用运动回归矩阵<sup>[55-58]</sup>。文献[52]针对机械臂轨迹跟踪控制提出了一种节点数最优、计算量最小的自适应神经网络控制方法,避免了神经网络过拟合和欠拟合问题,实现了精确的轨迹跟踪,并利用 Lyapunov 理论给出了系统稳定性和收敛性的数学证明。文献[53]针对不确定机械臂设计了一种重复学习控制器,实现了对周期性期望轨迹的渐近跟踪,并通过 Lyapunov 理论证明了闭环系统的稳定性。文献[52,53]只考虑了系统的动力学不确定项,忽略了系统的运动学不确定项。文献[54]针对具有不确定运动学和动力学的机械臂,设计了一种基于时延估计器的任务空间轨迹跟踪控制器。利用运动回归矩阵的方法是通过将机械臂系统的数学模型写成回归矩阵的形式,分离出机械臂系统中的未知参数,进一步使用自适应技术进行逼近。这种设计方法需要已知的机械臂的回归矩阵,然而,随着机械臂关节数的增多,回归矩阵的表达式会变得越来越复杂,想要获得准确的回归矩阵往往需要大量的计算。文献[56]针对运动学和动力学不确定的机械臂,提出了一种自适应任务空间控制器,通过引入滤波器避免了任务空间速度和关节加速度的测量。文献[58]提出了一种空间机械臂自适应任务空间轨迹跟踪控制器,该控制器考虑了模型不确定性和具有未知界的外部干扰。文献[59]利用奇异摄动法对柔性关节机械臂进行降阶,将关节空间下的动力学方程转化为任务空间下的动力学方程,设计了神经网络自适应跟踪控制器。

### 1.3 本文的研究内容与组织结构

本文主要研究了具有约束的不确定机械臂任务空间轨迹跟踪控制问题,以 UDE、预设收敛时间控制、RBF 神经网络为基础,结合反步法、BLF、NSDF、指数观测器、Lyapunov 稳定性理论等方法,在考虑输入饱和与输出约束的情况下,针对不确定刚性、柔性关节机械臂设计了任务空间轨迹跟踪控制器。本文依据广东省科技计划项目:工业机器人智能控制器的研发与产业化。论文的结构如图 1-2 所示。

本文的组织结构如下:

第一章 绪论:介绍了课题的研究背景及意义,对机械臂的轨迹跟踪控制的研究现状进行了概述,最后介绍了本文的主要研究内容和组织结构。

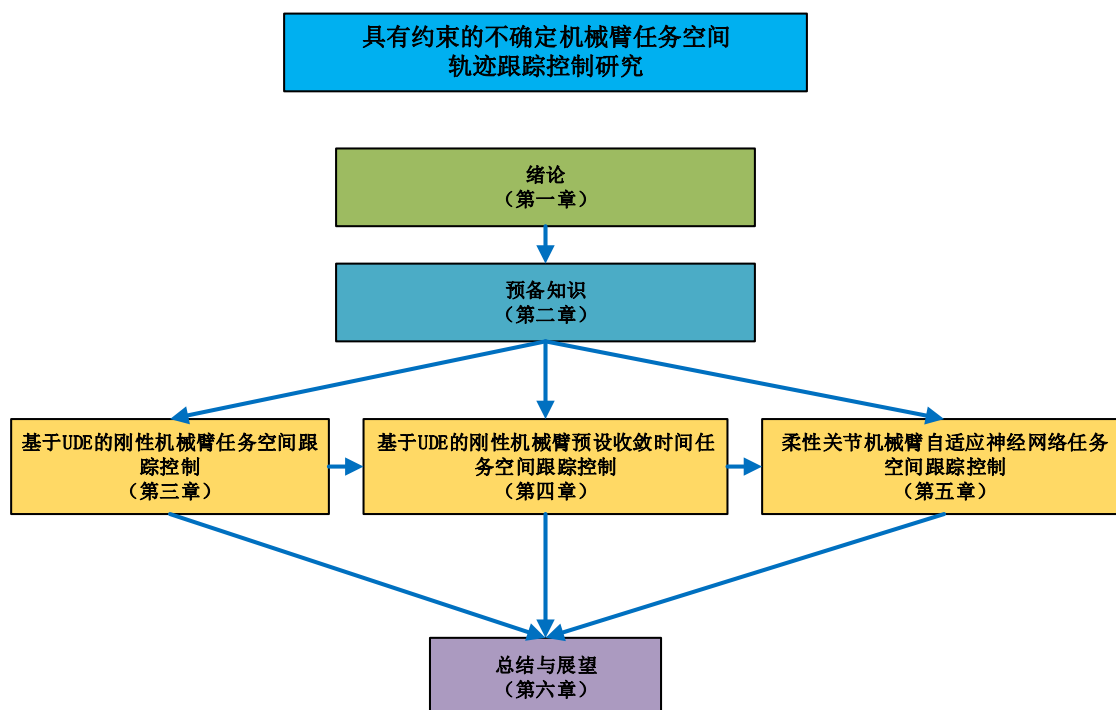


图 1-2 论文组织结构图

第二章 预备知识：介绍了刚性机械臂与柔性关节机械臂的数学模型，然后给出本文后续会使用到的 RBF 神经网络逼近相关的理论知识，然后介绍了 Lyapunov 稳定性理论与 BLF，为后续控制方案的设计与稳定性分析奠定基础。

第三章 基于 UDE 的刚性机械臂任务空间跟踪控制：针对受外界干扰的不确定刚性机械臂的任务空间轨迹跟踪控制问题，在考虑输入饱和与输出约束的情况下，使用 UDE 估计模型不确定项与未知外界干扰，并结合反步法设计基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制器。输入饱和与输出约束分别通过设计辅助系统和 NSDF 来解决。最后通过对比仿真实验，验证了所提出控制方案的优越性和有效性。

第四章 基于 UDE 的刚性机械臂预设收敛时间任务空间跟踪控制：针对受外界干扰的不确定刚性机械臂的预设收敛时间任务空间跟踪控制问题，在考虑输入饱和与输出约束的情况下，基于预设收敛时间控制，结合反步法与 UDE，设计了基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制器，保证了轨迹跟踪误差在预设收敛时间内收敛。辅助变量、BLF 以及 UDE 分别被设计来解决输入饱和、输出约束、模型不确定项与未知外界干扰。最后通过对比仿真实验，验证了所设计的控制器的有效性与优越性。

第五章 柔性关节机械臂自适应神经网络任务空间跟踪控制：针对不确定柔性关节机械臂的任务空间跟踪控制问题，在考虑输入饱和与输出约束的情况下，基于 RBF 神经网络逼近理论，设计了一种自适应神经网络轨迹跟踪控制器。柔性关节机械臂动力学

模型的不确定项通过 RBF 神经网络进行逼近且只需要自适应更新神经网络权值的模，运动学不确定项则通过指数观测器进行估计，输入饱和与输出约束分别通过辅助变量和 NSDF 来解决。此外，还引入了二阶命令滤波器解决使用反步时存在的“计算爆炸”问题，引入误差补偿系统消除滤波误差带来的影响。最后通过对比仿真实验验证所提出控制方案的有效性和优越性。

最后，对本文当前的研究工作和结果进行总结，并对未来的研究方向进行展望。

## 第二章 预备知识

### 2.1 引言

为了便于展开后续章节对不确定机械臂任务空间轨迹跟踪控制问题的研究，本章主要介绍了一些相关的预备知识。首先，给出了刚性机械臂和柔性关节机械臂的数学模型及其相关性质，然后给出了 RBF 神经网络的定义，最后介绍了 Lyapunov 稳定性理论和 BLF。

### 2.2 机械臂的数学模型

#### 2.2.1 刚性机械臂模型

本文所研究的  $n$  连杆不确定刚性机械臂动力学模型如下<sup>[60]</sup>：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = U(\tau) + \tau_d \quad (2-1)$$

其中， $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$  分别表示机械臂的关节位置，关节运动速度以及关节运动加速度， $M(q) \in R^n$  表示正定对称的惯性矩阵， $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  表示科氏力和向心力矩阵， $G(q) \in R^n$  表示重力项， $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T \in R^n$  是需要设计的输入力矩， $U(\tau) \in R^n$  表示系统实际输入， $\tau_d \in R^n$  为未知外界扰动，矩阵  $M(q), C(q), G(q)$  分别由两部分组成：

$$M(q) = M_0(q) + \Delta M(q), C(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}), G(q) = G_0(q) + \Delta G(q) \quad (2-2)$$

其中， $M_0(q), C_0(q, \dot{q}), G_0(q)$  为模型已知项， $\Delta M(q), \Delta C(q, \dot{q}), \Delta G(q)$  为模型不确定项。

根据机械臂的运动学理论，机械臂的末端执行器位置与机械臂各关节角有如下关系：

$$x = h(q) \quad (2-3)$$

其中， $x \in R^m$  为机械臂末端执行器的位置， $m$  代表机械臂的任务空间自由度。 $h(\cdot)$  表示机械臂的正运动学。对公式(2-3)进行求导，得到：

$$\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial q} \dot{q} = J(q) \dot{q} \quad (2-4)$$

其中， $\dot{x} \in R^m$  为机械臂末端执行器的运动速度， $J(q) \in R^{m \times n}$  为雅克比矩阵。

根据公式(2-4)，将刚性机械臂关节空间内的动力学模型(2-1)转换到任务空间，得到：

$$M_x(x)\ddot{x} + C_x(x, \dot{x})\dot{x} + G_x(x) = J^{+T}(q)U(\tau) + D_x \quad (2-5)$$

其中， $\ddot{x} \in R^m$  为机械臂末端执行器的运动加速度， $J^{+T}(q)$  为雅可比矩阵的伪逆的转置，式中各个矩阵的形式如下：

$$\begin{aligned} M_x(x) &= J^{+T}(q)M_0(q)J^+(q), \quad G_x(x) = J^{+T}(q)G_0(q) \\ C_x(x, \dot{x}) &= J^{+T}(q)(C_0(q, \dot{q}) - M_0(q)J^+(q)\dot{J}(q))J^+(q) \\ D_x &= J^{+T}(q)(\tau_d - \Delta M(q)\ddot{q} - \Delta C(q, \dot{q})\dot{q} - \Delta G(q)) \end{aligned} \quad (2-6)$$

在任务空间下，刚性机械臂的动力学模型具有如下性质：

**性质 2.1**  $M_x(x)$  是一个正定对称的矩阵。

**性质 2.2**  $\dot{M}_x(x) - 2C_x(x, \dot{x})$  是一个斜对称矩阵。

为了使公式的描述更加简洁，后续章节将把  $M_x(x), C_x(x, \dot{x}), G_x(x)$  简写为  $M_x, C_x, G_x$ 。

### 2.2.2 柔性关节机械臂模型

本文所研究的  $n$  连杆不确定柔性关节机械臂的模型如下<sup>[61]</sup>：

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K(q_m - q) \\ A\ddot{q}_m + B\dot{q}_m + K(q_m - q) = U(\tau) \\ \dot{x} = J(q)\dot{q} \end{cases} \quad (2-7)$$

其中， $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$  分别代表机械臂的关节位置，关节运动速度以及关节运动加速度， $q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m \in R^n$  分别表示执行机构的位置，驱动器速度以及驱动器加速度， $M(q) \in R^n$  表示正定对称的惯性矩阵， $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  表示科氏力和向心力矩阵， $G(q) \in R^n$  表示重力项， $A \in R^{n \times n}$  表示执行器惯性矩阵， $B \in R^{n \times n}$  执行器阻尼矩阵， $K \in R^{n \times n}$  表示联合刚度矩阵。 $J(q) \in R^{m \times n}$  表示雅可比矩阵， $x, \dot{x}$  分别表示机械臂末端执行器的位置与速度， $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T \in R^n$  是需要设计的输入力矩， $U(\tau) = [U(\tau_1), \dots, U(\tau_n)]^T \in R^n$  为系统实际输入， $m$  代表机械臂的任务空间自由度，矩阵  $M(q), C(q, \dot{q}), G(q), A, B, K, J(q)$  分别由两部分组成：

$$\begin{aligned} M(q) &= M_0(q) + \Delta M(q), \quad C(q, \dot{q}) = C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}), \quad G(q) = G_0(q) + \Delta G(q) \\ A &= A_0 + \Delta A, \quad B = B_0 + \Delta B, \quad K = K_0 + \Delta K, \quad J(q) = J_0(q) + \Delta J(q) \end{aligned} \quad (2-8)$$

对于上述的柔性机械臂的模型，具有如下性质：

**性质 2.3**  $M(q)$  是一个正定对称的矩阵。

**性质 2.4**  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  是一个斜对称矩阵。

为使公式更加简洁，后续将  $M_0(q), C_0(q, \dot{q}), G_0(q), J(q), \Delta M(q), \Delta C(q, \dot{q}), \Delta G(q)$  简写为  $M_0, C_0, G_0, J, \Delta M, \Delta C, \Delta G$ 。

## 2.3 RBF 神经网络

RBF 神经网络具有良好的非线性拟合能力，是一种常见的近似非线性函数的算法，被广泛的应用在机械臂的控制器设计中，用来拟合系统不确定项。RBF 神经网络的结构如图 2-1 所示，共分为三层：输入层、隐藏层、输出层。

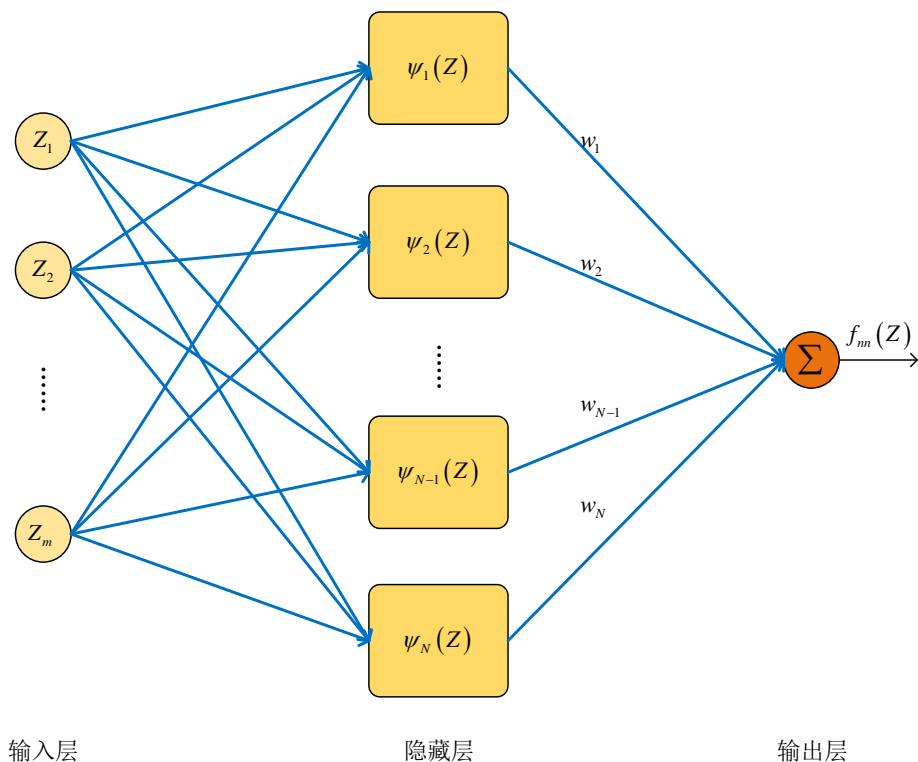


图 2-1 RBF 神经网络结构图

神经网络的输出  $f_m(Z)$  形式如下：

$$f_m(Z) = W^T \psi(Z) \quad (2-9)$$

其中， $W = [w_1, \dots, w_N]^T \in R^N$  为权重向量， $N > 1$  为神经网络的节点数， $Z \in \Omega_Z \subset R^m$  为神经网络的输入向量， $\psi(Z) = [\psi_1(Z), \dots, \psi_N(Z)]^T$  为基函数向量。本文选取基函数为高斯函数，其数学形式如下：

$$\psi_i(Z) = \exp\left(-\frac{(Z - \lambda_i)^T (Z - \lambda_i)}{2v_i^2}\right), i = 1, \dots, N \quad (2-10)$$

在实际的使用中，选择足够多的神经节点数、合适的感受域中心以及宽度，RBF 神经网络能够逼近任意一个定义在紧集  $\Omega_Z \subset R^n$  上的未知连续非线性函数  $f(Z)$ ，即：

$$f(Z) = W^{*T} \psi(Z) + \delta \quad (2-11)$$

其中， $W^*$  代表未知最优权重向量， $\delta$  代表神经网络拟合误差。 $W^*$  和  $\delta$  满足如下规则：

$$W^* := \arg \min_{W \in R^N} \left\{ \sup_{Z \in \Omega_z} |f(Z) - W^T \psi(Z)| \right\} \quad (2-12)$$

$$\|\delta\| \leq \zeta \quad (2-13)$$

其中,  $\zeta$  为一个小的正的常数。

## 2.4 系统稳定性理论

### 2.4.1 Lyapunov 稳定性理论

本节首先介绍非自治与自治系统的概念, 然后针对所定义的系统介绍对应的稳定性概念。

**定义 2.1 (自治系统与非自治系统)**<sup>[62]</sup> 通常一个非线性动力学模型可用以下的非线性微分方程描述:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), t > t_0, x(t_0) = x_0, x \in R^n \quad (2-14)$$

其中,  $x(t)$  表示系统的状态变量,  $f \in R^n$  是非线性矢量函数,  $x(t_0)$  是状态变量的初始值,  $t_0$  表示初始时刻。式(2-14)是显含时间  $t$  的非自治系统, 如果式(2-14)不显含时间  $t$ , 那么式(2-14)就是自治系统。

**定义 2.2 (稳定)**<sup>[62]</sup> 设系统的初始状态  $x_0$  位于以平衡状态  $x_e$  为球心, 半径为  $\varepsilon$  的闭球域  $S(\varepsilon)$  内, 即

$$\|x_0 - x_e\| \leq \varepsilon, t \geq t_0 \quad (2-15)$$

若系统由初始状态  $x_0$  出发的系统自由响应  $x(t; x_0, t_0)$  在  $t \rightarrow \infty$  的过程中都位于以平衡状态  $x_e$  为球心, 半径为  $\delta$  的闭球域  $S(\delta)$  内, 即

$$\|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \delta, t \geq t_0 \quad (2-16)$$

则称系统具有 Lyapunov 意义下的稳定性。若实数  $\varepsilon$  的大小与  $t_0$  无关, 则称 Lyapunov 意义下的一致稳定。

**定义 2.3 (渐近稳定)**<sup>[62]</sup> 在 Lyapunov 意义下的稳定的基础上, 从球域  $S(\varepsilon)$  出发的任意解  $x(t; x_0, t_0)$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 不仅不会超出球域  $S(\delta)$ , 而且最终收敛于平衡状态  $x_e$  或其邻域, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; x_0, t_0) - x_e\| \rightarrow 0 \quad (2-17)$$

则称系统是平衡状态  $x_e$  渐近稳定的。同样, 若实数  $\varepsilon$  的大小与  $t_0$  无关, 则称 Lyapunov

意义下的一致渐近稳定。

**定义 2.4 (大范围渐近稳定)**<sup>[62]</sup> 如果系统在任意初始条件下的解为  $x(t; x_0, t_0)$ ，当  $t \rightarrow \infty$  时，最终收敛于平衡状态  $x_e$  或其邻域，则称系统是关于  $x_e$  大范围渐近稳定的，或称全局渐近稳定的。

**定义 2.5 (一致有界)**<sup>[63]</sup> 系统在任意初始条件下的解为  $x(t; x_0, t_0)$ ，若对于某个  $\delta > 0$ ，存在一个正常数  $d(\delta) < \infty$ ，当  $t > t_0$  时都有：

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < d(\delta) \quad (2-18)$$

则称系统是一致有界的，其中  $d$  可能与  $\delta$  有关，与  $t_0$  一定无关。

**定义 2.6 (UUB)**<sup>[63]</sup> 系统在任意初始条件下的解为  $x(t; x_0, t_0)$ ，若对于某个包含原点的集合  $\Omega \subset R^n$ ，存在一个非负的常数  $T(x_0, \Omega) < \infty$ ，当  $t \geq t_0 + T$  时都有：

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow x(t) \in \Omega \quad (2-19)$$

则称系统是 UUB 的，且  $\Omega$  一定与  $t_0$  无关，但可能与  $x_0$  有关。

## 2.4.2 BLF

障碍函数是用来避免变量超出给定范围的方法，与 Lyapunov 函数结合构成了 BLF。在机械臂轨迹跟踪控制领域，BLF 往往被用来解决约束问题，例如输出约束、状态约束等。不同于普通的 Lyapunov 函数，当所约束的变量趋近于约束边界时，BLF 的值会趋于无穷。因此，确保约束变量在约束范围内的问题实质上等价于确保 BLF 有界的问题。此外，在使用 BLF 时，需要被约束变量的初始值在约束范围内。

**定义 2.7**<sup>[41]</sup> 对于定义在包含原点的开集合  $D$  的系统  $\dot{x} = f(x)$ ，如果存在一个正定连续且在  $D$  的每个点都有连续的一阶偏微分的标量函数  $V(x)$  满足：当  $x$  趋近于  $D$  的边界时，对于某个常数  $b \geq 0$ ，沿着系统  $\dot{x} = f(x)$  的解以及初始值  $x(0) \in D$ ，都有  $V(x) \rightarrow \infty$  以及  $V(x(t)) \leq b, \forall t \geq 0$ ，那么称  $V(x)$  为 BLF。

## 2.5 本章小结

本章给出了所研究的刚性机械臂与柔性关节机械臂的数学模型以及模型相关性质，然后介绍了 RBF 神经网络、Lyapunov 稳定性理论、BLF 等知识，为后续章节中的控制方案设计奠定了理论基础。



## 第三章 基于 UDE 的刚性机械臂任务空间跟踪控制

### 3.1 引言

在实际工程中，机械臂的标称参数与实际参数之间通常存在一定的误差，进而导致机械臂系统存在不确定性，无法用数学模型来精确描述。然而，如果在控制方案的设计中忽略模型的不确定性，则可能会对机械臂的轨迹跟踪控制性能产生较大的负面影响。此外，外界复杂工作环境下的各种不可预测的干扰也会对跟踪控制性能产生不利影响。不仅如此，机械臂在运行过程中还可能会受到执行机构的限制，从而衍生出输入饱和问题。如果忽略输入饱和，执行机构则可能长时间处于极限状态，导致其使用寿命大大缩短。同时，随着人机协作场景的增多，为了保障操作人员的人身安全，需要对机械臂的活动范围进行约束，即输出约束问题。因此，在机械臂的轨迹跟踪控制中，针对上述问题进行研究是十分有意义的。

本章在考虑输入饱和与输出约束的情况下，针对受外界干扰、存在动力学不确定性的刚性机械臂，设计动态辅助系统和 NSDF 来分别解决输入饱和与输出约束，设计 UDE 估计模型不确定项与外界干扰，最终结合反步法设计了一种基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制器。

### 3.2 问题描述及相关引理

在任务空间内，本章所研究的刚性机械臂的动力学方程如式(2-5)所述，选择系统状态变量  $x_1 = x$ ， $x_2 = \dot{x}$  和系统输出  $y = x_1$ ，建立如下状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M_x^{-1} (J^{+T} U(\tau) + D_x - C_x x_2 - G_x) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3-1)$$

系统输出  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$  需要满足如下约束条件：

$$-F_{i1}(t) < y_i < F_{i2}(t), i = 1, \dots, m \quad (3-2)$$

其中， $-F_{i1}(t), F_{i2}(t)$  表示时变输出约束函数。

受到对称饱和约束的系统输入  $U(\tau) = [U(\tau_1), \dots, U(\tau_n)]^T$  具体表示如下：

$$U(\tau_i) = \begin{cases} \text{sign}(\tau_i) U_{mi}, |\tau_i| \geq U_{mi} \\ \tau_i, |\tau_i| < U_{mi} \end{cases}, i = 1, \dots, n \quad (3-3)$$

其中， $\text{sign}(\cdot)$  为标准符号函数， $U_{mi}$  为正的已知常数。

本章的控制目标为：给定光滑有界的期望轨迹  $y_d = [y_{d1}, \dots, y_{dm}]^T$ ，考虑输出约束和输入饱和，针对受外界干扰的不确定刚性机械臂系统(2-1)，设计一种基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制器，实现：(1) 系统输出  $y$  能够精确地跟踪上给定期望轨迹  $y_d$ 。(2) 系统的输入和输出始终保持在给定的约束范围内。(3) UDE 能够准确的估计模型的不确定项与未知外界干扰。(4) 闭环系统所有信号都是 UUB 的。

为了实现上述控制目标，做出以下合理假设：

**假设 3.1** 机械臂在运动过程中，不存在奇异性问题。

**假设 3.2** 约束函数  $F_{i1}(t), F_{i2}(t), i=1, \dots, m$  是正的，它们的  $k$  ( $k=0,1,2$ ) 阶导数都是有界且连续的。

**假设 3.3** 对于任意的  $F_{i1}(t), F_{i2}(t)$ ，存在正的常数  $\bar{S}_{0i}, \underline{S}_{0i}, S_{1i}, S_{2i}$ ，使得期望轨迹  $y_{di}$  及其导数满足  $y_{di} + F_{i1}(t) \geq \underline{S}_{0i}, F_{i2}(t) - y_{di} \geq \bar{S}_{0i}, |\dot{y}_{di}| < S_{1i}, |\ddot{y}_{di}| < S_{2i}, i=1, \dots, m$ 。

**注释 3.1** 假设 3.1 是机械臂任务空间轨迹跟踪控制研究中的一种常见假设条件<sup>[64-66]</sup>；假设 3.2 是使用非线性状态依赖函数解决输出约束时所需的假设条件<sup>[67-68]</sup>；假设 3.3 是研究输出约束问题时的一种常见的假设条件<sup>[69-71]</sup>。

**引理 3.1 (杨氏不等式)<sup>[72]</sup>** 对于任意的  $x, y \in R^n$  以及任意的  $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$ ，可以得到：

$$x^T y \leq \frac{\varepsilon^p}{p} \|x\|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} \|y\|^q \quad (3-4)$$

其中， $(p-1)(q-1)=1$ 。

为了使后续的公式更加简洁，将  $F_{i1}(t), F_{i2}(t)$  简写为  $F_{i1}, F_{i2}$ 。

### 3.3 控制器设计及稳定性分析

本节首先分别给出了所设计控制方案中 NSDF、UDE、辅助系统、虚拟控制律以及实际控制律的形式，然后基于 Lyapunov 理论进行稳定性分析，证明了所提控制方案的有效性。

#### 3.3.1 基于 UDE 的轨迹跟踪控制器设计

##### 1. NSDF

为了解决输出约束问题，设计两个 NSDF 向量  $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^T$  和  $\zeta_d = [\zeta_{d1}, \dots, \zeta_{dm}]^T$ ，分别表示如下：

$$\zeta_i = K \frac{y_i}{(F_{i1} + y_i)(F_{i2} - y_i)}, i = 1, \dots, m \quad (3-5)$$

$$\zeta_{di} = K \frac{y_{di}}{(F_{i1} + y_{di})(F_{i2} - y_{di})}, i = 1, \dots, m \quad (3-6)$$

其中,  $K$  是正的设计常数。

**注释 3.2** 对于任意的系统输出初始值  $y_i(0) \in [y_i(t) \in R | -F_{i1} < y_i(t) < F_{i2}]$ , 当且仅当  $y_i(t) \rightarrow -F_{i1}$  或者  $y_i(t) \rightarrow F_{i2}$  时,  $\zeta_i \rightarrow \pm\infty$ 。换言之, 在  $t \geq 0$  时, 系统输出  $y_i$  是否满足输出约束的问题转化为了  $\zeta_i$  是否有界的问题。只要  $\zeta_i$  有界,  $y_i$  就一定在给定的约束范围内。

式(3-5)与(3-6)对时间进行求导可得:

$$\dot{\zeta} = \mu_1 \dot{y} + \mu_2 \quad (3-7)$$

$$\dot{\zeta}_d = \mu_{d1} \dot{y}_d + \mu_{d2} \quad (3-8)$$

其中,  $\mu_1, \mu_2, \mu_{d1}, \mu_{d2}$  的具体表达式如下:

$$\mu_1 = \text{diag} \left( K \frac{(F_{11}F_{12} + y_1^2)}{(F_{11} + y_1)^2 (F_{12} - y_1)^2}, \dots, K \frac{(F_{m1}F_{m2} + y_m^2)}{(F_{m1} + y_m(t))^2 (F_{m2} - y_m)^2} \right) \quad (3-9)$$

$$\mu_{d1} = \text{diag} \left( K \frac{(F_{11}F_{12} + y_{d1}^2)}{(F_{11} + y_{d1})^2 (F_{12} - y_{d1})^2}, \dots, K \frac{(F_{m1}F_{m2} + y_{dm}^2)}{(F_{m1} + y_{dm})^2 (F_{m2} - y_{dm})^2} \right) \quad (3-10)$$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} -K \frac{(\dot{F}_{11}F_{12} + F_{11}\dot{F}_{12} + (\dot{F}_{12} - \dot{F}_{11})y_1)y_1}{(F_{11} + y_1)^2 (F_{12} - y_1)^2} \\ \vdots \\ -K \frac{(\dot{F}_{m1}F_{m2} + F_{m1}\dot{F}_{m2} + (\dot{F}_{m2} - \dot{F}_{m1})y_m)y_m}{(F_{m1} + y_m)^2 (F_{m2} - y_m)^2} \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

$$\mu_{d2} = \begin{pmatrix} -K \frac{(\dot{F}_{11}F_{12} + F_{11}\dot{F}_{12} + (\dot{F}_{12} - \dot{F}_{11})y_{d1})y_{d1}}{(F_{11} + y_{d1})^2 (F_{12} - y_{d1})^2} \\ \vdots \\ -K \frac{(\dot{F}_{m1}F_{m2} + F_{m1}\dot{F}_{m2} + (\dot{F}_{m2} - \dot{F}_{m1})y_{dm})y_{dm}}{(F_{m1} + y_{dm})^2 (F_{m2} - y_{dm})^2} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

## 2. UDE

根据式(3-1), 模型不确定项与干扰  $D_x$  可以通过已知的机械臂动力学模型和系统输入表示如下:

$$D_x = M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x - J^{+T} U(\tau) \quad (3-13)$$

UDE 的设计形式如下:

$$G_{ude}(s) = \text{diag} \left[ \frac{1}{T_1 s + 1}, \dots, \frac{1}{T_m s + 1} \right] \quad (3-14)$$

其中,  $T_i, i=1, \dots, m$  表示滤波器的时间常数, 且有  $G_{ude}(0) = I$ ,  $I$  为单位矩阵。

根据式(3-13)与式(3-14),  $D_x$  的估计值  $\hat{D}_x$  表示如下:

$$\hat{D}_x = \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * D_x = \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x - J^{+T} U(\tau)) \quad (3-15)$$

其中,  $*$  表示卷积运算符号,  $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$  表示拉普拉斯逆变换。

定义估计误差  $\tilde{D}_x$  如下:

$$\tilde{D}_x = D_x - \hat{D}_x \quad (3-16)$$

结合式子(3-15), 对上式进行拉式变换, 得到:

$$\tilde{D}_x(s) = D_x(s) - \hat{D}_x(s) = D_x(s)(I - G_{ude}(s)) \quad (3-17)$$

其中,  $I$  为单位矩阵。对上式进行拉式反变换, 得到:

$$\tilde{D}_x = D_x * \mathcal{L}^{-1}(I - G_{ude}(s)) \quad (3-18)$$

根据  $D_x$  的有界性, 式(3-17)及式(3-18), 可以推出估计误差  $\tilde{D}_x$  也是有界的, 表示如下:

$$\|\tilde{D}_x\| \leq \delta_1 \quad (3-19)$$

其中,  $\delta_1$  是一个正的常数,  $\|\cdot\|$  表示二范数。

### 3. 动态辅助系统

为了解决输入饱和, 设计如下辅助系统:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -c_1 \eta_1 + \mu_1 \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 = -c_2 \eta_2 - \mu_1^T \eta_1 + M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) + M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \end{cases} \quad (3-20)$$

其中,  $\eta_1, \eta_2$  为辅助变量,  $\Delta \tau = U(\tau) - \tau$ ,  $c_1, c_2$  为正的设计参数。

### 4. 控制器设计

定义误差变量  $e_1, e_2$  如下:

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - \eta_1 \\ e_2 = z_2 - \eta_2 \end{cases} \quad (3-21)$$

其中,  $z_1, z_2$  具体定义如下:

$$\begin{cases} z_1 = \zeta - \zeta_d \\ z_2 = x_2 - \alpha \end{cases} \quad (3-22)$$

其中,  $\alpha$  为虚拟控制律。

虚拟控制律  $\alpha$  设计如下:

$$\alpha = \mu_1^{-1} (-c_1 z_1 + \mu_{d1} \dot{y}_d - \mu_2 + \mu_{d2}) \quad (3-23)$$

实际控制律  $\tau$  设计如下:

$$\begin{aligned} \tau = J^T & \left( C_x x_2 + G_x + M_x \left( \dot{\alpha} - \mu_1^T z_1 - c_2 z_2 \right) - \frac{(e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} \right) \\ & - J^T \mathcal{L}^{-1} (G_{ude}(s)) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x - J^{+T} \tau) \end{aligned} \quad (3-24)$$

进一步解得:

$$\begin{aligned} \tau = J^T & \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * (C_x x_2 + G_x + M_x (\dot{\alpha} - \mu_1^T z_1 - c_2 z_2)) \right) \\ & - J^T \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} G_{ude}(s) \right) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x) \right) \\ & - J^T \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * \frac{(e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} \right) \end{aligned} \quad (3-25)$$

其中,  $r_1$  为正的设计参数。

### 3.3.2 稳定性分析

**定理 3.1:** 对如式(2-1)描述的刚性机械臂系统, 假设 3.1-3.3 成立, 设计如式(3-23)所示的虚拟控制律及如式(3-25)所示的实际控制律, 系统输出的初始值满足约束条件, 那么可以保证系统输出始终保持在给定约束范围内, 闭环系统所有信号都是 UUB 的, 且轨迹跟踪误差收敛至零的一个小邻域内。

证明:

第一步: 选择 Lyapunov 函数  $V_1(t) = \frac{1}{2} e_1^T e_1$ , 并对其进行求导, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (\dot{\zeta} - \dot{\zeta}_d - \dot{\eta}_1) = e_1^T (\mu_1 \dot{y} + \mu_2 - (\mu_{d1} \dot{y}_d + \mu_{d2}) - \dot{\eta}_1) \\ &= e_1^T (\mu_1 x_2 + \mu_2 - (\mu_{d1} \dot{y}_d + \mu_{d2}) - \dot{\eta}_1) \\ &= e_1^T (\mu_1 (e_2 + \eta_2 + \alpha) + \mu_2 - (\mu_{d1} \dot{y}_d + \mu_{d2}) - \dot{\eta}_1) \end{aligned} \quad (3-26)$$

将虚拟控制律(3-23)和辅助变量(3-20)代入式(3-26)中, 得到:

$$\dot{V}_1 = e_1^T (\mu_1 e_2 - c_1 e_1) = -c_1 e_1^T e_1 + e_2^T \mu_1^T e_1 \quad (3-27)$$

第二步：选择 Lyapunov 函数  $V_2(t) = V_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + e_2^T \dot{e}_2 \\ &= -c_1 e_1^T e_1 + e_2^T \mu_1^T e_1 + e_2^T (\dot{x}_2 - \dot{\alpha} - \dot{\eta}_2) \\ &= -c_1 e_1^T e_1 + e_2^T \mu_1^T e_1 + e_2^T (M_x^{-1} (J^{+T} U(\tau) + D_x - C_x x_2 - G_x) - \dot{\alpha} - \dot{\eta}_2) \\ &= -c_1 e_1^T e_1 + e_2^T (\mu_1^T e_1 + M_x^{-1} (J^{+T} \tau + J^{+T} \Delta \tau + D_x - C_x x_2 - G_x) - \dot{\alpha} - \dot{\eta}_2) \end{aligned} \quad (3-28)$$

根据式(3-15)及式(3-24)，将实际控制律(3-25)与辅助变量(3-20)代入式(3-28)中，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 e_1^T e_1 - c_2 e_2^T e_2 + e_2^T \left( M_x^{-1} (D_x - \hat{D}_x) - \frac{M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} \right) \\ &= -c_1 e_1^T e_1 - c_2 e_2^T e_2 + e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x - \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} \end{aligned} \quad (3-29)$$

根据杨氏不等式以及式(3-19)，将上式中的  $e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x$  放缩如下：

$$\begin{aligned} e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x &\leq \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} + \frac{r_1^2 \tilde{D}_x^T D_x}{2} \\ &\leq \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r_1^2} + \frac{r_1^2 \delta_1^2}{2} \end{aligned} \quad (3-30)$$

将上述变换代入式(3-29)中，得到：

$$\dot{V}_2 \leq -c_1 e_1^T e_1 - c_2 e_2^T e_2 + \frac{r_1^2 \delta_1^2}{2} \quad (3-31)$$

定义  $\rho = 2 \min\{c_1, c_2\}$  和  $\lambda = \frac{r_1^2 \delta_1^2}{2}$ ，式(3-31)可以进一步放缩如下：

$$\dot{V}_2 \leq -\rho V_2 + \lambda \quad (3-32)$$

对上式进行求解，得到：

$$0 \leq V_2(t) \leq \frac{\lambda}{\rho} + \left( V_2(0) - \frac{\lambda}{\rho} \right) e^{-\rho t} \quad (3-33)$$

其中， $V_2(0)$  为  $V_2(t)$  的初始值。

第三步：为了证明辅助系统的稳定性，选择 Lyapunov 函数  $V_a(t) = \frac{1}{2} \eta_1^T \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_2^T \eta_2$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_a &= \eta_1^T \dot{\eta}_1 + \eta_2^T \dot{\eta}_2 \\
 &= \eta_1^T (-c_1 \eta_1 + \mu_1 \eta_2) \\
 &\quad + \eta_2^T \left( -c_2 \eta_2 - \mu_1^T \eta_1 + M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) + M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \right) \\
 &= -c_1 \eta_1^T \eta_1 - c_2 \eta_2^T \eta_2 + \eta_2^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) + \eta_2^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau
 \end{aligned} \tag{3-34}$$

根据杨氏不等式, 将上式中的  $\eta_2^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)$  以及  $\eta_2^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau$  进行放缩变换, 如下:

$$\begin{aligned}
 &\eta_2^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) \\
 &\leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\left( M_x^{-1} \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)}{2}
 \end{aligned} \tag{3-35}$$

$$\eta_2^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\left( M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \right)^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau}{2} \tag{3-36}$$

根据柯西不等式, 对任意的矩阵  $P \in R^{m \times n}$  和向量  $Q \in R^n$ , 都有如下不等式:

$$(PQ)^T (PQ) \leq \|P\|_F^2 \|Q\|^2 \tag{3-37}$$

其中,  $\|\cdot\|_F$  表示  $F$  范数。

根据式(3-37), 将式(3-35)与式(3-36)放缩如下:

$$\begin{aligned}
 \eta_2^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) &\leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\|M_x^{-1}\|_F^2 \left\| \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right\|^2}{2} \\
 &\leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\delta_2^2 \delta_3^2}{2}
 \end{aligned} \tag{3-38}$$

$$\eta_2^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\|M_x^{-1}\|_F^2 \|J^{+T} \Delta \tau\|^2}{2} \leq \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\delta_2^2 \delta_4^2}{2} \tag{3-39}$$

其中,  $\delta_2$  为  $\|M_x^{-1}\|_F$  的上界,  $\delta_3$  为  $\left\| \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right\|$  的上界,  $\delta_4$  为  $\|J^{+T} \Delta \tau\|$  的上界。

将式(3-38)与(3-39)代入式(3-34)中, 得到:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_a &\leq -c_1 \eta_1^T \eta_1 - c_2 \eta_2^T \eta_2 + \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\delta_2^2 \delta_3^2}{2} + \frac{\eta_2^T \eta_2}{2} + \frac{\delta_2^2 \delta_4^2}{2} \\
 &= -c_1 \eta_1^T \eta_1 - (c_2 - 1) \eta_2^T \eta_2 + \frac{\delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2}
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

定义  $\rho_a = 2 \min\{c_1, c_2 - 1\}$  和  $\lambda_a = \frac{\delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2}$ , 将式(3-40)进一步放缩如下:

$$\dot{V}_a \leq -\rho_a V_a + \lambda_a \tag{3-41}$$

对上式进行求解, 得到:

$$0 \leq V_a(t) \leq \frac{\lambda_a}{\rho_a} + \left( V_a(0) - \frac{\lambda_a}{\rho_a} \right) e^{-\rho_a t} \quad (3-42)$$

其中,  $V_a(0)$  为  $V_a(t)$  的初始值。

接下来的证明分为两部分, 第一部分证明闭环系统所有信号都是 UUB 的, 且输出保持在约束范围内; 第二部分证明轨迹跟踪误差能够收敛到零的一个小邻域内。

第一部分: 将式(3-33)和式(3-42)放缩如下:

$$0 \leq V_2(t) \leq \frac{\lambda}{\rho} + V_2(0) e^{-\rho t} \quad (3-43)$$

$$0 \leq V_a(t) \leq \frac{\lambda_a}{\rho_a} + V_a(0) e^{-\rho_a t} \quad (3-44)$$

根据式(3-43), 当时间  $t \geq \max \left\{ 0, \frac{1}{\rho} \ln \left( \frac{V_2(0)\rho}{\lambda} \right) \right\}$  时,  $e_1$  和  $e_2$  将分别收敛在紧集  $\Omega_{e_1}$  和

$\Omega_{e_2}$  内, 定义如下:

$$\Omega_{e_1} := \left\{ e_1 \in R^m \left| \|e_1\| \leq 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \right. \right\}, \Omega_{e_2} := \left\{ e_2 \in R^m \left| \|e_2\| \leq 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \right. \right\} \quad (3-45)$$

同理, 根据式(3-44), 当时间  $t \geq \max \left\{ 0, \frac{1}{\rho_a} \ln \left( \frac{V_a(0)\rho_a}{\lambda_a} \right) \right\}$  时,  $\eta_1$  和  $\eta_2$  将分别收敛在

紧集  $\Omega_{\eta_1}$  和  $\Omega_{\eta_2}$  内, 定义如下:

$$\Omega_{\eta_1} := \left\{ \eta_1 \in R^m \left| \|\eta_1\| \leq 2\sqrt{\frac{\lambda_a}{\rho_a}} \right. \right\}, \Omega_{\eta_2} := \left\{ \eta_2 \in R^m \left| \|\eta_2\| \leq 2\sqrt{\frac{\lambda_a}{\rho_a}} \right. \right\} \quad (3-46)$$

根据式(3-45)与(3-46),  $e_1, e_2, \eta_1$  和  $\eta_2$  是有界的, 结合式(3-21), 进一步推出  $z_1$  和  $z_2$  也是有界的。根据假设 3.2, 3.3 和式(3-6), 可以推出  $\zeta_d$  是有界的。由于  $z_1$  和  $\zeta_d$  的有界性, 可以推出  $\zeta$  有界。根据式(3-5)和  $\zeta$  的有界性, 可以推出系统输出  $y$  也是有界的且满足输出约束。根据假设 3.2, 3.3, 结合式(3-9)、(3-10)、(3-11)、(3-12), 可以推出  $\mu_1, \mu_2, \mu_{d1}$  以及  $\mu_{d2}$  是有界的。进一步, 根据式(3-23), 可以推出虚拟控制律  $\alpha$  是有界的, 然后根据式(3-22)以及  $z_2$  的有界性, 推出  $x_2$  是有界的。最后, 根据式(3-25), 可以推出  $\tau$  是有界的。至此, 闭环系统所有信号都被证明是 UUB 的, 且系统输出一直保持在约束范围内。

第二部分: 根据式(3-5), (3-6)以及(3-22),  $z_1$  的第  $i$  项可以表示如下:



$$z_{1i} = K \frac{y_i}{(F_{i1} + y_i)(F_{i2} - y_i)} - K \frac{y_{di}}{(F_{i1} + y_{di})(F_{i2} - y_{di})} \quad (3-47)$$

定义轨迹跟踪误差  $e_3 = y - y_d = [e_{31}, \dots, e_{3m}]^T$ ，上式可以变换为：

$$\varepsilon_1 z_{1i} = K \varepsilon_2 e_{3i} \quad (3-48)$$

其中， $\varepsilon_1 = (F_{i1} + y_i)(F_{i2} - y_i)(F_{i1} + y_{di})(F_{i2} - y_{di})$ ， $\varepsilon_2 = F_{i1}F_{i2} + y_i y_{di}$ 。根据假设 3.2 与 3.3，

可以推出  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  都是正的、有界的。定义  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{K \varepsilon_2}$ ，式子(3-44)可以变换为：

$$\varepsilon z_{1i} = e_{3i} \quad (3-49)$$

对上式取绝对值，可得：

$$|e_{3i}| \leq |\varepsilon| |z_{1i}| \leq \bar{\varepsilon} |z_{1i}| \leq \bar{\varepsilon} \|z_1\| \leq \bar{\varepsilon} (\|e_1\| + \|\eta_1\|) \quad (3-50)$$

其中， $\bar{\varepsilon}$  为  $\varepsilon$  的上界。

当时间  $t \geq \max \left\{ 0, \frac{1}{\rho_1} \ln \left( \frac{V_2(0) \rho_1}{\lambda_1} \right), \frac{1}{\rho_2} \ln \left( \frac{V_a(0) \rho_2}{\lambda_2} \right) \right\}$  时，根据式(3-45)，(3-46)以及

(3-50)，轨迹跟踪误差将收敛在紧集  $\Omega_{e_{3i}}$  内，定义如下：

$$\Omega_{e_{3i}} := \left\{ e_{3i} \in R \mid \|e_{3i}\| \leq 4\bar{\varepsilon} \sqrt{\max \left\{ \frac{\lambda_1}{\rho_1}, \frac{\lambda_2}{\rho_2} \right\}} \right\} \quad (3-51)$$

至此，定理 3.1 的证明全部完毕。

### 3.4 数值仿真与分析

本节给出了仿真环境、仿真对象的物理参数和仿真实验的初始条件，然后给出对比仿真实验所使用的控制器形式、控制参数以及对应的数值仿真结果图，并对仿真结果图进行对比分析，验证本章所提出的基于 UDE 的机械臂任务空间轨迹跟踪控制算法的有效性与优越性。仿真使用的软件为 MATLAB R2017b，使用的电脑系统为 Windows 10 家庭中文版，处理器为 Intel(R) Core(TM) i5-8300H CPU @ 2.30GHz 2.30 GHz，机带 RAM 为 8.00 GB。

#### 3.4.1 仿真对象及参数设置

选择如图 3-1 所示的两连杆刚性机械臂为对象进行仿真实验，机械臂参数如表 3-1 所示。

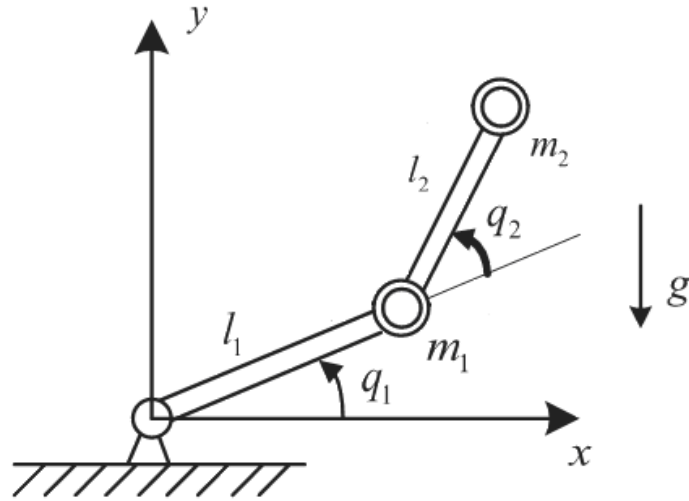


图 3-1 两连杆刚性机械臂

表 3-1 两连杆刚性机械臂参数

参数名	参数意义	参数取值	单位
$m_1$	连杆 1 的质量	2.0	Kg
$m_2$	连杆 2 的质量	0.85	Kg
$l_1$	连杆 1 的长度	0.35	M
$l_2$	连杆 2 的长度	0.31	M
$I_1$	连杆 1 的转动惯量	0.06125	Kgm <sup>2</sup>
$I_2$	连杆 2 的转动惯量	0.02042	Kgm <sup>2</sup>

所选机械臂的动力学模型如式(2-1)所示，各个矩阵形式如下<sup>[73]</sup>：

$$M_0(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, C_0(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, G_0(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

其中，矩阵中各项分别为：

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2, M_{12} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ M_{21} &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2, M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, C_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2 \sin q_2 \\ C_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2, C_{21} = m_2 l_1 l_{c2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2, C_{22} = 0 \\ G_{11} &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2), G_{21} = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (3-53)$$

其中， $l_{ci}, i=1,2$  表示连杆  $i-1$  到连杆  $i$  的质心的距离， $q_i, i=1,2$  表示连杆  $i$  的关节角。

机械臂受到的外界未知扰动为  $\tau_d = [\sin t, \sin t]^T$ ，机械臂的模型不确定项为

$\Delta M_0 = -0.1M_0, \Delta C_0 = -0.2C_0, \Delta G_0 = -0.1\Delta G_0$ ，雅克比矩阵形式如下：

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

机械臂末端执行器的位置和速度的初始值分别设置为  $x_1(0) = [0.235, 0.205]^T$  和  $x_2(0) = [0, 0]^T$ ，辅助系统的初始值设置为  $\eta_1 = \eta_2 = [0, 0]^T$ ，系统的期望参考轨迹设置为， $y_d = [0.2 \sin(\pi t), 0.2 \cos(\pi t)]^T$ ，系统的输入饱和值设置为： $U_m = [U_{m1}, U_{m2}]^T = [15, 5]^T$ 。系统的输出的时变约束设置为：

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0.21 - 0.03 \sin(\pi t), F_{12} = 0.21 + 0.03 \cos(\pi t) \\ F_{21} &= 0.21 - 0.03 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right), F_{22} = 0.21 + 0.03 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3-55)$$

### 3.4.2 仿真结果与分析

本小节以文献[74]提出的自适应神经网络控制器和文献[75]提出的滑模控制器作为对比控制器，进行对比仿真。

自适应神经网络控制器形式如下：

$$\tau_x = -\bar{M}_x \left( K_2 z_2 + L^{-1} \hat{w}^T \phi(Z) + \hat{D} - \dot{\alpha} + \mathcal{G}_1 + P_2 \mathcal{G}_2 + z_2 \|\mathcal{G}_2\|^2 \|\bar{M}_x^{-1}\|^4 \lambda_1 \hat{\Delta}_\tau + \varphi \right) \quad (3-56)$$

滑模控制器形式如下：

$$\tau = M_0 J^{-1} (\ddot{y}_d - \dot{J} \dot{q} + K_s s(t)) + C_0 \dot{q} + G_0 - \hat{d}(t) \quad (3-57)$$

其中，滑模面向量  $s$  的定义如下：

$$s = K_d (\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + K_p (y_d(t) - y(t)) \quad (3-58)$$

仿真时选取的控制参数如下表：

表 3-2 控制参数选取表

控制器	控制参数取值
本章设计的控制器	$c_1 = 40, c_2 = 100, r_1 = 1, K = 0.01, T_1 = T_2 = 0.014$
自适应神经网络控制器	$K_1 = \text{diag}[30, 30], K_2 = \text{diag}[110, 110], \Gamma_1 = \Gamma_1 = 80,$ $\delta_1 = \delta_2 = 0.001, P_1 = \text{diag}[3, 3], P_2 = \text{diag}[5, 5], \beta = 0.1,$ $\lambda_\tau = \lambda_1 = \lambda_2 = 1, L = \text{diag}[6, 6], \bar{M}_x = \text{diag}[4, 4]$
滑模控制器	$k_1 = 10, K_p = 100, K_d = 20, K_s = 1$

仿真时长 20s，对比仿真结果如下：

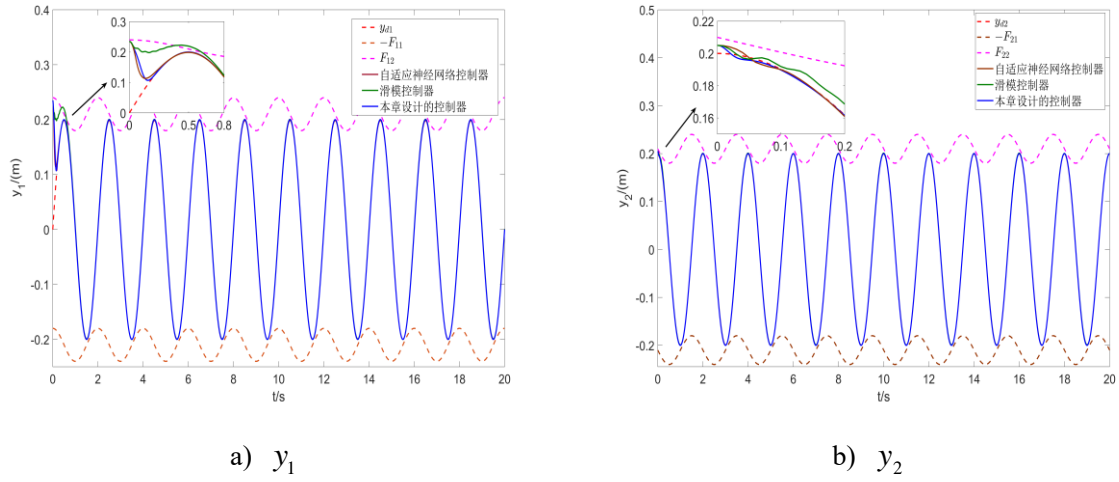


图 3-2 轨迹跟踪图

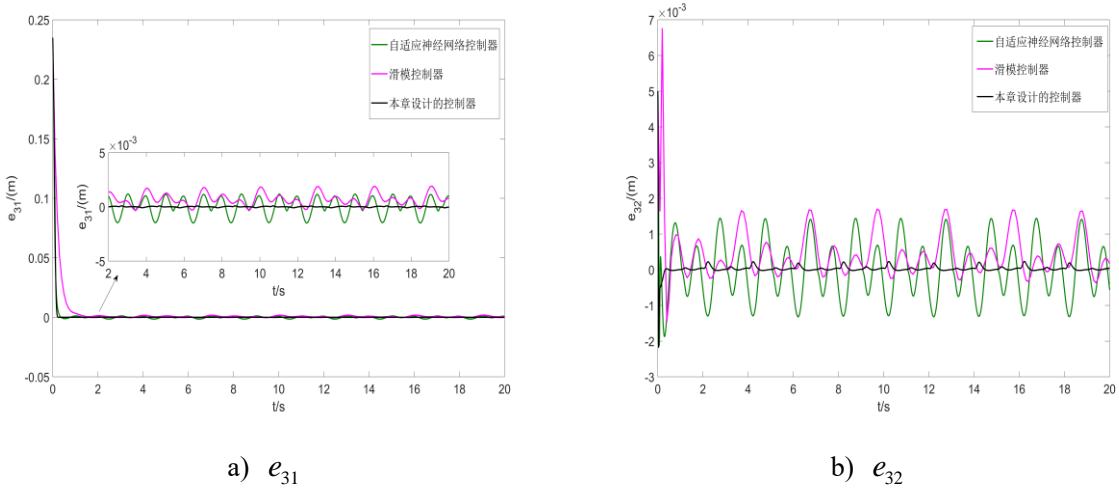


图 3-3 轨迹跟踪误差图

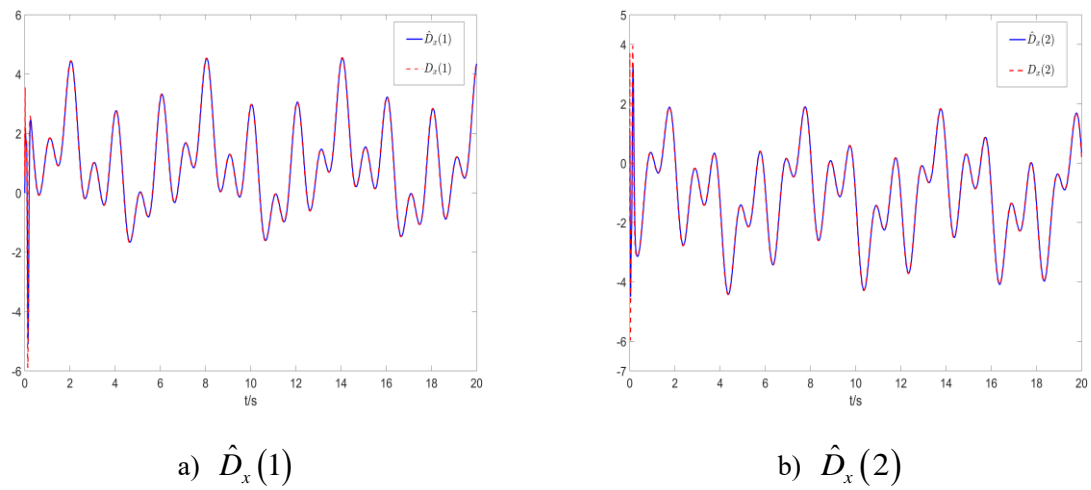


图 3-4 UDE 估计图

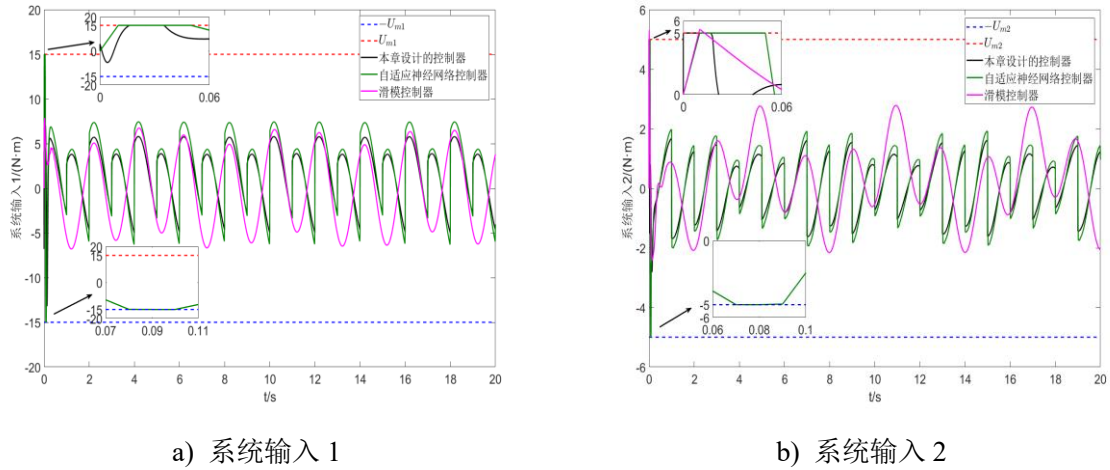


图 3-5 系统输入图

仿真如图 3-2 至图 3-5 所示。图 3-2 给出了系统输出  $y$ 、目标信号  $y_d$  以及输出约束函数  $-F_{i1}(t), F_{i2}(t), i=1,2$  的轨迹，可以看出系统输出都可以准确的跟踪上期望轨迹，且在本章设计的控制器作用下，系统输出最先跟踪上期望轨迹。另外，在滑模控制器作用下，系统输出超出了约束范围，而其他两种控制器都能保证输出在约束范围内。图 3-3 给出了跟踪误差  $e_{31}, e_{32}$  的轨迹，可以看出跟踪误差都收敛到了零的小邻域内，且在本章提出的控制器作用下的稳态跟踪误差最小。图 3-4 给出了模型不确定项与外部未知干扰  $D_x(1), D_x(2)$  及其估计值  $\hat{D}_x(1), \hat{D}_x(2)$  的轨迹，可以看出 UDE 能够准确的估计模型不确定项与干扰。图 3-5 给出了系统控制输入的轨迹，可以看出只有滑模控制器作用下的系统输入超过了饱和值，其余两种控制器作用下的系统输入都满足输入饱和。综上，对比仿真结果较好的证明了所提控制方案的有效性和优越性。

### 3.5 本章小结

本章在考虑输入饱和与输出约束的情况下，针对受未知外界扰动的不确定刚性机械臂的任务空间轨迹跟踪控制问题，提出了一种基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制方案。具体的，设计 NSDF 来解决系统的时变输出约束，设计 UDE 来估计模型不确定项和未知外界干扰，设计辅助系统处理输入饱和，最终结合反步法设计了控制器。通过 Lyapunov 稳定性分析，证明了所设计控制器能够保证闭环系统所有信号都是 UUB 的，轨迹跟踪误差收敛到一个零的小邻域内，且输入饱和与输出约束没有被违背。最后，以两连杆刚性机械臂为例，通过对比仿真实验，证明了所提出的控制方案的有效性和优越性。

## 第四章 基于 UDE 的刚性机械臂预设收敛时间任务空间跟踪控制

### 4.1 引言

在机械臂的轨迹跟踪控制领域中, 轨迹跟踪误差的收敛时间是一个十分重要的性能指标。为了使系统更快的达到稳定状态, 有限时间控制理论被提出<sup>[76]</sup>。文献[77]基于有限时间 Lyapunov 稳定性原理, 针对机械臂提出了一种鲁棒有限时间控制方法, 并以双连杆机械臂为例验证了所提方法的有效性。文献[78]针对受外部未知干扰影响的不确定机械臂, 基于模糊理论和有限时间控制理论, 提出了两种有限时间自适应控制器, 并基于 Lyapunov 稳定性理论分析, 证明了两种控制器都能够保证闭环系统有限时间稳定, 最后, 以一个两连杆机械臂为例进行仿真, 验证所提出的控制器是有效的。但是, 在有限时间控制中, 收敛时间依赖于系统的初始状态, 换言之, 系统的初始状态不同, 收敛时间也会跟着变化。为了解决这一缺陷, 固定时间控制理论被提出<sup>[79]</sup>, 系统状态的收敛时间不再依赖于系统的初始状态。文献[80]针对存在不确定动力学和有界外部扰动的机械臂全局固定时间轨迹跟踪问题, 构造了固定时间滑模面, 提出了一种无奇异的固定时间滑模控制, 并利用 Lyapunov 稳定性理论, 证明了该算法的全局固定时间稳定性, 滑动变量和跟踪误差在固定时间内收敛到原点。然而, 固定时间控制需要通过调整多个控制参数来改变收敛时间, 较为麻烦。与传统的固定时间控制策略和有限时间控制策略相比, 预设收敛时间控制可以预先明确的任意选择系统的收敛时间, 且不依赖于系统的初始状态。文献[81]针对飞行器, 设计了一种预设收敛时间控制算法, 并通过仿真验证了算法的有效性。

本章基于预设收敛时间控制理论, 在考虑输入饱和与输出约束的情况下, 针对受外界干扰、存在动力学不确定性的刚性机械臂, 结合辅助变量、BLF、UDE 以及反步法, 提出了一种基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制算法。

### 4.2 问题描述及相关引理

在任务空间内, 本章所研究的刚性机械臂的动力学方程如式(2-5)所述, 选择系统状态变量  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  和系统输出  $y = x_1$ , 建立如下状态空间表达式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M_x^{-1} \left( J^{+T} U(\tau) + D_x - C_x x_2 - G_x \right) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4-1)$$

其中，受对称饱和约束的系统输入  $U(\tau)$  的形式同第三章的式(3-3)，输出  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$  需要满足如下输出约束条件：

$$\underline{k}_{i1}(t) < y_i < \bar{k}_{i2}(t), i=1, \dots, m \quad (4-2)$$

其中， $\underline{k}_{i1}(t), \bar{k}_{i2}(t)$  表示时变输出约束函数。

本章的控制目标为：给定光滑有界的期望轨迹  $y_d = [y_{d1}, \dots, y_{dm}]^T$ ，考虑输出约束和输入饱和，针对不确定刚性机械臂系统(2-1)，设计一种基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制器，实现：(1) 系统输出  $y$  在预设收敛时间内跟踪上给定期望轨迹  $y_d$ 。(2) 系统的输入和输出始终保持在给定约束范围内。(3) UDE 能够准确的估计模型不确定项与未知外界干扰。(4) 闭环系统所有信号都在预设收敛时间内收敛。

为了实现上述控制目标，做出以下合理假设：

**假设 4.1** 机械臂在运动过程中，不存在奇异性问题。

**假设 4.2** 约束函数  $\underline{k}_{i1}(t), \bar{k}_{i2}(t), i=1, \dots, m$  是有界且连续的，它们的  $k$  ( $k=1, 2$ ) 阶导数也都是有界且连续的。

**假设 4.3** 对于任意的  $\underline{k}_{i1}(t), \bar{k}_{i2}(t)$ ，存在正的常数  $\bar{S}_{0i}, \underline{S}_{0i}, S_{1i}, S_{2i}$ ，使得期望轨迹  $y_{di}$  及其导数满足  $y_{di} - \underline{k}_{i1}(t) \geq \underline{S}_{0i}, \bar{k}_{i2}(t) - y_{di} \geq \bar{S}_{0i}, |\dot{y}_{di}| < S_{1i}, |\ddot{y}_{di}| < S_{2i}, i=1, \dots, m$ 。

**注释 4.1** 假设 4.1 是有关机械臂任务空间轨迹跟踪控制研究中的一种常见假设条件<sup>[64-66]</sup>；假设 4.2 与假设 4.3 是研究输出约束时常见的假设条件<sup>[69-71]</sup>。

**引理 4.1**<sup>[81]</sup> 针对系统  $\dot{x} = f(t, x, d)$ ，其中  $x$  是系统状态变量， $d$  是未知的有界干扰，如果存在一个连续的 Lyapunov 函数  $V(x)$  对于上述系统的任意解  $x(t, x_0)$  都满足：

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( \chi V^{1-\frac{\gamma}{2}} + \beta V^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \varepsilon \quad (4-3)$$

其中， $T_c > 0$  是预设的常数， $\gamma \in (0, 1)$ ， $\chi, \beta$  是可调参数， $0 < \varepsilon < \infty$ ，那么这个系统是预设收敛时间稳定的，收敛域如下：

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T_{pc}} x \mid V(x) \leq \min \left\{ \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \chi (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \beta (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \right\} \quad (4-4)$$

其中， $0 < \mu < 1$ ，预设收敛时间  $T_{pc} = T_c / \sqrt{\mu}$ 。

引理 4.2<sup>[82]</sup> 对任意的实数  $a > 1$ ，以下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^N y_i^a \geq N^{1-a} \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^a \quad (4-5)$$

对任意的实数  $0 < a < 1$ ，以下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^N y_i^a \geq \left( \sum_{i=1}^N y_i \right)^a \quad (4-6)$$

其中， $N$  是一个正数， $y_i > 0$ 。

为了使后续的公式更加简洁，将  $k_{i1}(t), \bar{k}_{i2}(t)$  简写为  $k_{i1}, \bar{k}_{i2}$ 。

### 4.3 控制器设计及稳定性分析

本节首先分别给出了所设计控制方案中 UDE、辅助变量、BLF 函数、虚拟控制律以及实际控制律的形式，然后基于 Lyapunov 稳定性理论进行分析，证明了所提控制方案的有效性。

在本章之后的设计中，对任意向量  $v = [v_1, \dots, v_n]^T \in R^n$  和常数  $a$ ，定义  $\text{sig}^a(v)$  如下：

$$\text{sig}^a(v) = [\text{sig}^a(v_1), \dots, \text{sig}^a(v_n)]^T = [\text{sign}(v_1)|v_1|^a, \dots, \text{sign}(v_n)|v_n|^a]^T \in R^n \quad (4-7)$$

#### 4.3.1 基于 UDE 的预设收敛时间轨迹跟踪控制器设计

##### 1. UDE

UDE 的设计形式如下：

$$G_{ude}(s) = \text{diag} \left[ \frac{1}{T_1 s + 1}, \dots, \frac{1}{T_m s + 1} \right] \quad (4-8)$$

其中， $T_i, i=1, \dots, m$  表示滤波器的时间常数。与第三章相同，使用 UDE 来估计模型不确定项与干扰  $D_x$ ，估计值表示为  $\hat{D}_x$ ：

$$\hat{D}_x = \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x - J^{+T} U(\tau)) \quad (4-9)$$

估计误差  $\tilde{D}_x = D_x - \hat{D}_x$  满足：

$$\|\tilde{D}_x\| \leq \delta_1 \quad (4-10)$$

其中， $\delta_1$  为一个正的常数。

##### 2. 辅助变量

为了在处理输入饱和的同时，保证辅助信号在预设收敛时间内收敛，根据引理 4.1，



设计了如下辅助变量  $\eta_1$  :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 = & -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1) \right) - \frac{\eta_1}{\bar{r}^2} \\ & + M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau + M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1} \left( G_{ude}(s) \right) * \left( -J^{+T} \Delta \tau \right) \right) \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中,  $\gamma_1 \in (0,1)$ ,  $p_1, p_2, \bar{r}$  表示正的设计参数,  $\Delta \tau = U(\tau) - \tau$ ,  $T_c$  表示设定的常数,  $*$  表示卷积运算,  $\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$  表示拉普拉斯逆变换,  $\chi_1 = 2^{1-\frac{\gamma_1}{2}} p_1, \beta_1 = m^{-\frac{\gamma_1}{2}} p_2 2^{1+\frac{\gamma_1}{2}}$ 。

### 3. 控制器设计

定义误差变量  $e_1, e_2$  如下:

$$\begin{cases} e_1 = z_1 \\ e_2 = z_2 - \eta_1 \end{cases} \quad (4-12)$$

其中,  $z_1, z_2$  具体定义如下:

$$\begin{cases} z_1 = y - y_d \\ z_2 = x_2 - \alpha_1 \end{cases} \quad (4-13)$$

其中,  $\alpha_1$  为虚拟控制律。

为了解决输出约束, 使用如下 BLF:

$$V_{li}(t) = \frac{z_{li}^2(t)}{(F_{i1}(t) + z_{li}(t))(F_{i2}(t) - z_{li}(t))}, i=1, \dots, m \quad (4-14)$$

其中,  $z_{li}(t)$  为  $z_1$  的第  $i$  项,  $F_{i1}(t) = y_{di} - \underline{k}_{i1} > 0$ ,  $F_{i2}(t) = \bar{k}_{i2} - y_{di} > 0$ 。与  $V_{li}(t)$  的导数相关的变量  $\varphi_{1i}, \varphi_{2i}$  的具体形式如下:

$$\varphi_{1i} = \frac{2F_{i1}F_{i2} - F_{i1}z_{li} + F_{i2}z_{li}}{((F_{i1}(t) + z_{li}(t))(F_{i2}(t) - z_{li}(t)))^2}, i=1, \dots, m \quad (4-15)$$

$$\varphi_{2i} = \frac{-\dot{F}_{i1}F_{i2} - F_{i1}\dot{F}_{i2} + (\dot{F}_{i1} - \dot{F}_{i2})z_{li}}{2F_{i1}F_{i2} - F_{i1}z_{li} + F_{i2}z_{li}}, i=1, \dots, m \quad (4-16)$$

虚拟控制律  $\alpha_1 = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}]^T$  设计如下:

$$\alpha_{1i} = -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} z_{li} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{\frac{\gamma}{2}} \right) + \dot{y}_{di} - \varphi_{2i} z_{li} - \eta_{1i}, i=1, \dots, m \quad (4-17)$$

其中,  $\gamma \in (0,1)$ ,  $r_1, r_2$  是正的设计参数,  $\chi = r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}}, \beta = 2r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}}$ ,  $\eta_{1i}$  表示辅助变量  $\eta_1$  的第  $i$  项。

实际控制律  $\tau$  设计如下:

$$\begin{aligned}
\tau = J^T & \left( C_x \dot{x}_2 + G_x - \frac{(e_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} - \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x - J^{+T} \tau) \right) \\
& + J^T M_x \left( \dot{\alpha}_1 - \mathcal{G} - \frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1+\gamma}(e_2) \right) \right) \\
& - J^T M_x \left( \frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} (p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1)) + \frac{\eta_1}{\bar{r}^2} \right)
\end{aligned} \quad (4-18)$$

进一步解得：

$$\begin{aligned}
\tau = J^T & \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * \left( M_x \dot{\alpha}_1 - M_x \mathcal{G} + C_x x_2 + G_x - \frac{(e_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} \right) \right) \\
& - J^T \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} G_{ude}(s) \right) * (M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x) \right) \\
& + J^T \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * \left( M_x \left( -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} \text{sig}^{1+\gamma}(e_2) \right) \right) \right) \right) \\
& - J^T \left( \mathcal{L}^{-1} \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * \left( M_x \left( \frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} (p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1)) + \frac{\eta_1}{\bar{r}^2} \right) \right) \right)
\end{aligned} \quad (4-19)$$

其中， $r$  为正的设计参数， $\mathcal{G}_i = \varphi_{1i} z_{1i}$ 。

### 4.3.2 稳定性分析

**定理 4.1** 对如式(2-1)描述的刚性机械臂系统，假设 4.1-4.3 成立，设计如式(4-17)所示的虚拟控制律及如式(4-19)所示的实际控制律，系统输出的初始值满足约束条件，那么可以保证系统输出始终保持在给定约束范围内，闭环系统所有信号都在预设收敛时间内收敛，且轨迹跟踪误差在预设收敛时间内收敛到零的一个小邻域内。

证明：

第一步：选择 Lyapunov 函数  $V_1(t) = \sum_{i=1}^m V_{1i}(t)$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^m \varphi_{1i} z_{1i} (\dot{z}_{1i} + \varphi_{2i} z_{1i}) \\
&= \sum_{i=1}^m \varphi_{1i} z_{1i} ((\dot{x}_{1i} - \dot{y}_{di}) + \varphi_{2i} z_{1i}) \\
&= \sum_{i=1}^m \varphi_{1i} z_{1i} ((x_{2i} - \dot{y}_{di}) + \varphi_{2i} z_{1i}) \\
&= \sum_{i=1}^m \varphi_{1i} z_{1i} (e_{2i} + \alpha_{1i} + \eta_{1i} - \dot{y}_{di} + \varphi_{2i} z_{1i})
\end{aligned} \quad (4-20)$$

其中,  $e_{2i}$  为  $e_2$  的第  $i$  项。

将虚拟控制律(4-17)代入式(4-20)中, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^m -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \varphi_{li} z_{li}^2 \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{\frac{\gamma}{2}} \right) + \mathcal{G}_i e_{2i} \\ &= \sum_{i=1}^m -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \varphi_{li} z_{li}^2 \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{\frac{\gamma}{2}} \right) + \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i e_{2i}\end{aligned}\quad (4-21)$$

将式(4-21)中  $\varphi_{li} z_{li}^2$  放缩如下:

$$\varphi_{li} z_{li}^2 = \frac{2F_{i1}F_{i2} - F_{i1}z_{li} + F_{i2}z_{li}}{((F_{i1} + z_{li})(F_{i2} - z_{li}))^2} z_{li}^2 \geq \frac{F_{i1}F_{i2} - F_{i1}z_{li} + F_{i2}z_{li} - z_{li}^2}{((F_{i1} + z_{li})(F_{i2} - z_{li}))^2} z_{li}^2 = V_{li} \quad (4-22)$$

将式(4-22)代入式(4-21)中, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq \sum_{i=1}^m -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} V_{li} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{\frac{\gamma}{2}} \right) + \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i e_{2i} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \sum_{i=1}^m \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i e_{2i}\end{aligned}\quad (4-23)$$

根据引理 4.2, 上式中  $\sum_{i=1}^m \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1+\frac{\gamma}{2}} \right)$  可放缩为:

$$\sum_{i=1}^m \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1-\frac{\gamma}{2}} \right) \geq r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m V_{li} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}}, \sum_{i=1}^m \left( r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_{li}^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) \geq r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m V_{li} \right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \quad (4-24)$$

将上式代入式(4-23)中, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &\leq -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m V_{li} \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m V_{li} \right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \sum_{i=1}^m \mathcal{G}_i e_{2i} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \mathcal{G}^T e_2\end{aligned}\quad (4-25)$$

其中,  $\mathcal{G} = [\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_m]^T$ 。

第二步: 选择 Lyapunov 函数  $V_2(t) = V_1(t) + \frac{1}{2} e_2^T e_2$ , 并对其进行求导, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + e_2^T \dot{e}_2 = \dot{V}_1 + e_2^T (\dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 - \dot{\eta}_1) \\ &= \dot{V}_1 + e_2^T (M_x^{-1} (J^{+T} \tau + J^{+T} \Delta \tau - (C_x \dot{x} + G_x) + D_x) - \dot{\alpha}_1 - \dot{\eta}_1) \\ &\leq -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) \\ &\quad + e_2^T (\mathcal{G} + M_x^{-1} (J^{+T} \tau + J^{+T} \Delta \tau - (C_x x_2 + G_x) + D_x) - \dot{\alpha}_1 - \dot{\eta}_1)\end{aligned}\quad (4-26)$$

根据式(4-9)与式(4-18), 将实际控制律(4-19)和辅助变量(4-11)代入式(4-26)中, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x - \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} \\ & - \frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} e_2^T (r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 \text{sig}^{1+\gamma}(e_2)) \end{aligned} \quad (4-27)$$

根据杨氏不等式及式(4-10), 将上式中的  $e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x$  放缩如下:

$$e_2^T M_x^{-1} \tilde{D}_x \leq \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} + \frac{r^2 \tilde{D}_x^T \tilde{D}_x}{2} \leq \frac{e_2^T M_x^{-1} (e_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \quad (4-28)$$

将式(4-28)代入式(4-27)中, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) \\ & - \frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} e_2^T (r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 \text{sig}^{1+\gamma}(e_2)) + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \end{aligned} \quad (4-29)$$

根据式(4-7)及引理 4.2, 将上式中  $e_2^T (r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 \text{sig}^{1+\gamma}(e_2))$  放缩如下:

$$\begin{aligned} e_2^T (r_1 \text{sig}^{1-\gamma}(e_2) + r_2 \text{sig}^{1+\gamma}(e_2)) &= r_1 \sum_{i=1}^m |e_{2i}|^{2-\gamma} + r_2 \sum_{i=1}^m |e_{2i}|^{2+\gamma} \\ &= r_1 \sum_{i=1}^m (e_{2i}^2)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 \sum_{i=1}^m (e_{2i}^2)^{1+\frac{\gamma}{2}} \\ &= r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{2} e_{2i}^2 \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 2^{1+\frac{\gamma}{2}} \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{2} e_{2i}^2 \right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \\ &\geq r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} e_{2i}^2 \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} e_{2i}^2 \right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \\ &= r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} (V_2 - V_1)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} (V_2 - V_1)^{1+\frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (4-30)$$

将式(4-30)代入式(4-29), 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) \\ & - \frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} (V_2 - V_1)^{1-\frac{\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} (V_2 - V_1)^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \\ & = -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \left( V_1^{1-\frac{\gamma}{2}} + (V_2 - V_1)^{1-\frac{\gamma}{2}} \right) + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{1+\frac{\gamma}{2}} \left( V_1^{1+\frac{\gamma}{2}} + (V_2 - V_1)^{1+\frac{\gamma}{2}} \right) \right) \\ & \quad + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \end{aligned} \quad (4-31)$$

根据引理 4.2, 将上式进一步放缩如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &\leq -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{\frac{1-\gamma}{2}} V_2^{\frac{1-\gamma}{2}} + r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} 2^{\frac{1+\gamma}{2}} 2^{-\frac{\gamma}{2}} V_2^{\frac{1+\gamma}{2}} \right) + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \\
 &= -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( r_1 2^{\frac{1-\gamma}{2}} V_2^{\frac{1-\gamma}{2}} + 2 r_2 m^{-\frac{\gamma}{2}} V_2^{\frac{1+\gamma}{2}} \right) + \frac{r^2 \delta_1^2}{2} \\
 &= -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( \chi V_2^{\frac{1-\gamma}{2}} + \beta V_2^{\frac{1+\gamma}{2}} \right) + \frac{r^2 \delta_1^2}{2}
 \end{aligned} \tag{4-32}$$

定义  $\varepsilon = \frac{r^2 \delta_1^2}{2}$ , 式(4-32)可进一步表示为:

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{\pi}{\gamma T_c \sqrt{\chi \beta}} \left( \chi V_2^{\frac{1-\gamma}{2}} + \beta V_2^{\frac{1+\gamma}{2}} \right) + \varepsilon \tag{4-33}$$

第三步: 选择 Lyapunov 函数  $V_a(t) = \frac{1}{2} \eta_1^T \eta_1$ , 并对其进行求导, 得到:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_a &= \eta_1^T \dot{\eta}_1 \\
 &= -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \eta_1^T \left( p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1) \right) - \frac{\eta_1^T \eta_1}{\bar{r}^2} \\
 &\quad + \eta_1^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau + \eta_1^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)
 \end{aligned} \tag{4-34}$$

根据杨氏不等式及柯西不等式, 将式(4-34)中的  $\eta_1^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)$  与  $\eta_1^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau$  进行放缩变换:

$$\begin{aligned}
 &\eta_1^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right) \\
 &\leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)^T M_x^{-1} \left( \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right)}{2}
 \end{aligned} \tag{4-35}$$

$$\leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 \|M_x^{-1}\|_F^2 \left\| \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right\|^2}{2} \leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 \delta_3^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_1^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau &\leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 \left( M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau \right)^T M_x^{-1} J^{+T} \Delta \tau}{2} \\
 &\leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 \|M_x^{-1}\|_F^2 \|J^{+T} \Delta \tau\|^2}{2} \leq \frac{\eta_1^T \eta_1}{2\bar{r}^2} + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 \delta_4^2}{2}
 \end{aligned} \tag{4-36}$$

其中,  $\delta_2$  为  $\|M_x^{-1}\|_F$  的上界,  $\delta_3$  为  $\left\| \mathcal{L}^{-1}(G_{ude}(s)) * (-J^{+T} \Delta \tau) \right\|$  的上界,  $\delta_4$  为  $\|J^{+T} \Delta \tau\|$  的上界。

将式(4-35)、(4-36)代入式(4-34)中, 得到:

$$\dot{V}_a \leq -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \eta_1^T \left( p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1) \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \quad (4-37)$$

根据引理 4.2 及式(4-7)，将上式进一步放缩得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &\leq -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \eta_1^T \left( p_1 \text{sig}^{1-\gamma_1}(\eta_1) + p_2 \text{sig}^{1+\gamma_1}(\eta_1) \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( p_1 \sum_{i=1}^m |\eta_{li}|^{2-\gamma_1} + p_2 \sum_{i=1}^m |\eta_{li}|^{2+\gamma_1} \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( 2^{1-\frac{\gamma_1}{2}} p_1 \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{2} \eta_{li}^2 \right)^{1-\frac{\gamma_1}{2}} + 2^{1+\frac{\gamma_1}{2}} p_2 \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{2} \eta_{li}^2 \right)^{1+\frac{\gamma_1}{2}} \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \quad (4-38) \\ &\leq -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( 2^{1-\frac{\gamma_1}{2}} p_1 V_a^{1-\frac{\gamma_1}{2}} + m^{-\frac{\gamma_1}{2}} p_2 2^{1+\frac{\gamma_1}{2}} V_a^{1+\frac{\gamma_1}{2}} \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \\ &= -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( \chi_1 V_a^{1-\frac{\gamma_1}{2}} + \beta_1 V_a^{1+\frac{\gamma_1}{2}} \right) + \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2} \end{aligned}$$

定义  $\varepsilon_a = \frac{\bar{r}^2 \delta_2^2 (\delta_3^2 + \delta_4^2)}{2}$ ，式(4-38)可进一步表示为：

$$\dot{V}_a \leq -\frac{\pi}{\gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}} \left( \chi_1 V_a^{1-\frac{\gamma_1}{2}} + \beta_1 V_a^{1+\frac{\gamma_1}{2}} \right) + \varepsilon_a \quad (4-39)$$

根据引理 4.1、式(4-33)及式(4-39)，可以推出  $V_{li}$ ，误差变量  $e_2$  和辅助变量  $\eta_1$  在预设收敛时间  $T_{PC} = T_c / \sqrt{\mu}$  内收敛：

$$\lim_{t \rightarrow T_{pc}} V_{li} \leq \min \left\{ \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \chi (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \beta (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\} \quad (4-40)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_{pc}} \|e_2\| \leq \sqrt{2 \min \left\{ \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \chi (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \beta (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\}} \quad (4-41)$$

$$\lim_{t \rightarrow T_{pc}} \|\eta_1\| \leq \sqrt{2 \min \left\{ \left( \frac{\varepsilon_a \gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}}{\pi \chi_1 (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2-\gamma_1}}, \left( \frac{\varepsilon_a \gamma_1 T_c \sqrt{\chi_1 \beta_1}}{\pi \beta_1 (1-\mu)} \right)^{\frac{2}{2+\gamma_1}} \right\}} \quad (4-42)$$

根据  $V_{li}$  的有界性，可以推出轨迹跟踪误差  $z_{li}$  有界，结合式(4-13)，进一步推出输出  $y_i$  有界且满足输出约束，即  $\underline{k}_{i1} < y_i < \bar{k}_{i2}$ 。根据假设 4.2、假设 4.3，可推出  $(F_{i1} + z_{li})(F_{i2} - z_{li})$

是正的且存在上界  $\lambda_1$ 。结合式(4-14)与式(4-40)，可得：

$$\lim_{t \rightarrow T_{pc}} z_{1i} \leq \sqrt{\lambda_1 \min \left\{ \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \chi (1 - \mu)} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}}, \left( \frac{\varepsilon \gamma T_c \sqrt{\chi \beta}}{\pi \beta (1 - \mu)} \right)^{\frac{2}{2+\gamma}} \right\}} \quad (4-43)$$

根据式(4-12)、(4-41)及(4-42)，可以推出  $z_2$  也在预设收敛时间内收敛。根据式(4-17)， $V_{1i}, z_{1i}, \eta_{1i}$  的收敛性以及  $\dot{y}_{di}, \varphi_{2i}$  的有界性，可以推出  $\alpha_{1i}$  有界且在预设收敛时间内收敛。根据  $\alpha_{1i}$  和  $z_2$  的收敛性，可以推出  $x_2$  有界且在预设收敛时间内收敛。根据式(4-18)，可以推出控制输入  $\tau$  是有界的。证毕。

## 4.4 数值仿真与分析

本节给出了仿真对象的物理参数和仿真实验的初始条件。然后，分别给出对比仿真实验所使用的控制器形式、控制参数以及对应的数值仿真结果图，并对仿真结果图进行对比分析，验证本章所提出的基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制方案的有效性和优越性。本节的仿真环境与第三章相同。

### 4.4.1 仿真对象及参数设置

以两关节刚性机械臂作为仿真对象，机械臂模型、参数、不确定项与干扰项设置同第三章。机械臂末端执行器的位置和速度的初始值分别设置为  $x_1(0) = [0.3, 0.5]^T$  和  $x_2(0) = [0, 0]^T$ ，辅助变量的初始值设置为  $\eta_1 = [0, 0]^T$ ，系统的期望参考轨迹设置为  $y_d = [0.3 \sin(0.5\pi t), 0.3 \cos(0.5\pi t)]^T$ ，系统输入饱和值设置为： $U_m = [U_{m1}, U_{m2}]^T = [15, 10]^T$ ，系统输出的时变约束设置为：

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0.3 \sin(0.5\pi t) - 0.01 - 0.4e^{-t}, \quad \bar{k}_{12} = 0.3 \sin(0.5\pi t) + 0.01 + 0.4e^{-t} \\ k_{21} &= 0.3 \cos(0.5\pi t) - 0.01 - 0.4e^{-t}, \quad \bar{k}_{22} = 0.3 \cos(0.5\pi t) + 0.01 + 0.4e^{-t} \end{aligned} \quad (4-44)$$

### 4.4.2 仿真结果与分析

为了验证本章设计控制器的有效性和优越性，将其参数  $T_c$  分别设置为 0.7s 和 1.2s，其余参数按照表 4-1 取值，进行仿真实验。此外，还选择如下形式的控制器作对比：

$$\begin{aligned} \tau &= J^T \mathcal{L}^{-1} \left( \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} \right) * \left( C_x x_2 + G_x + M_x (\dot{\alpha}_1 - \mathcal{G} - r_2 z_2 - p \eta_1) - \frac{(z_2^T M_x^{-1})^T}{2r^2} \right) \right) \\ &\quad - J^T \mathcal{L}^{-1} \left( \left( (I - G_{ude}(s))^{-1} G_{ude}(s) \right) * ((M_x \dot{x}_2 + C_x x_2 + G_x)) \right) \end{aligned} \quad (4-45)$$

其中，辅助变量 $\eta_1$ 的更新率如下：

$$\dot{\eta}_1 = -p\eta_1 + M_x^{-1}J^{+T}\Delta\tau + M_x^{-1}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(G_f(s)\right)*\left(-J^{+T}\Delta\tau\right)\right) \tag{4-46}$$

上述对比控制器在设计中除了没有考虑预设收敛时间控制外，其余控制方法设计与本章相同。

表 4-1 控制参数选取表

控制器	控制参数取值
本章设计的控制器	$T_1 = T_2 = 0.014, \chi = 0.07, \beta = 0.05, \chi_1 = 0.2, \beta_1 = 0.2, \gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.2, \bar{r} = \sqrt{3}/3, r = 0.5.$
对比控制器	$T_1 = T_2 = 0.014, r_1 = 3, r_2 = 15, r = 0.5, p = 3$

仿真时长 20s，对比仿真结果如下：

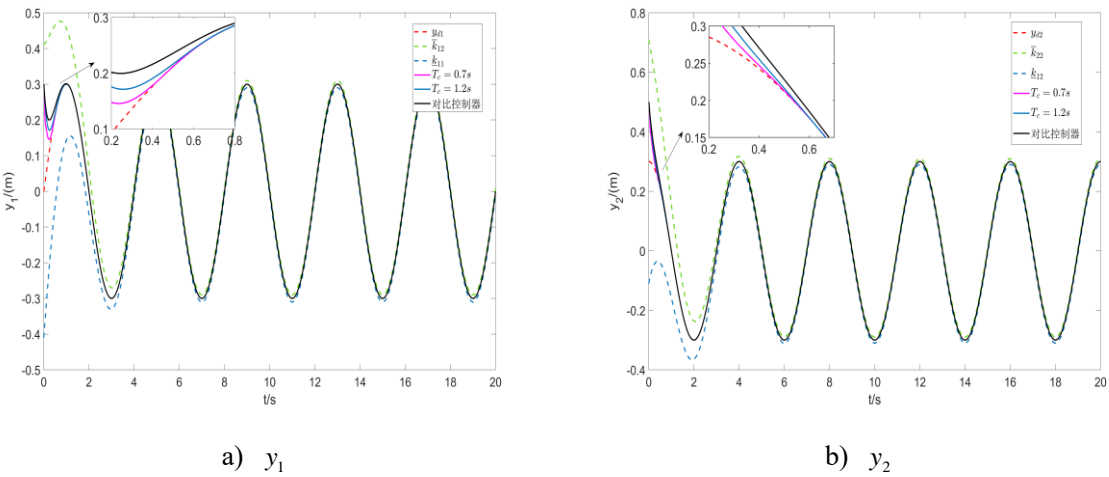


图 4-1 轨迹跟踪图

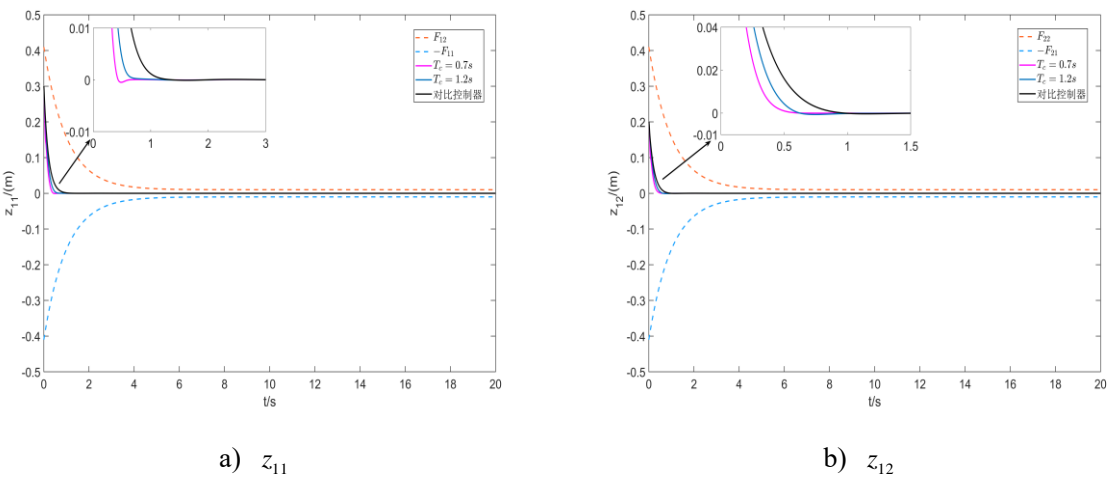


图 4-2 轨迹跟踪误差图



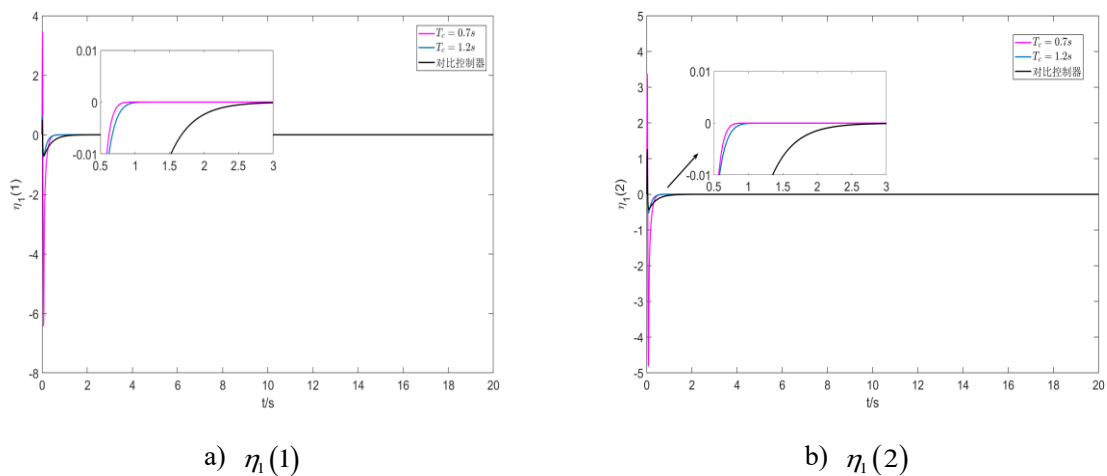


图 4-3 辅助变量图

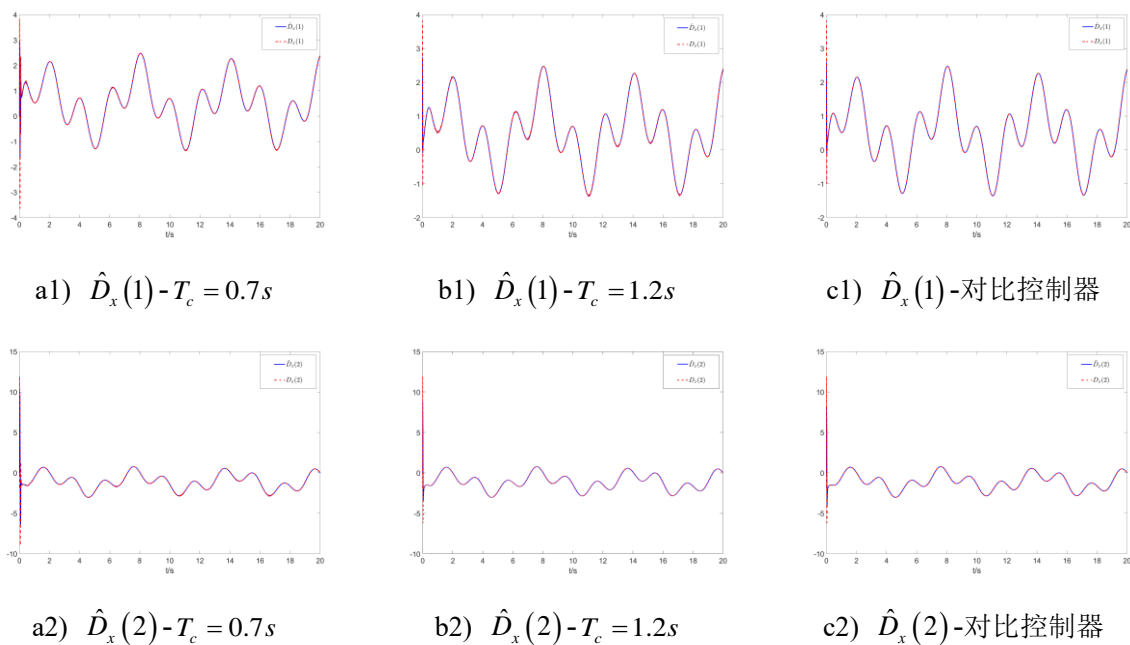


图 4-4 UDE 估计图

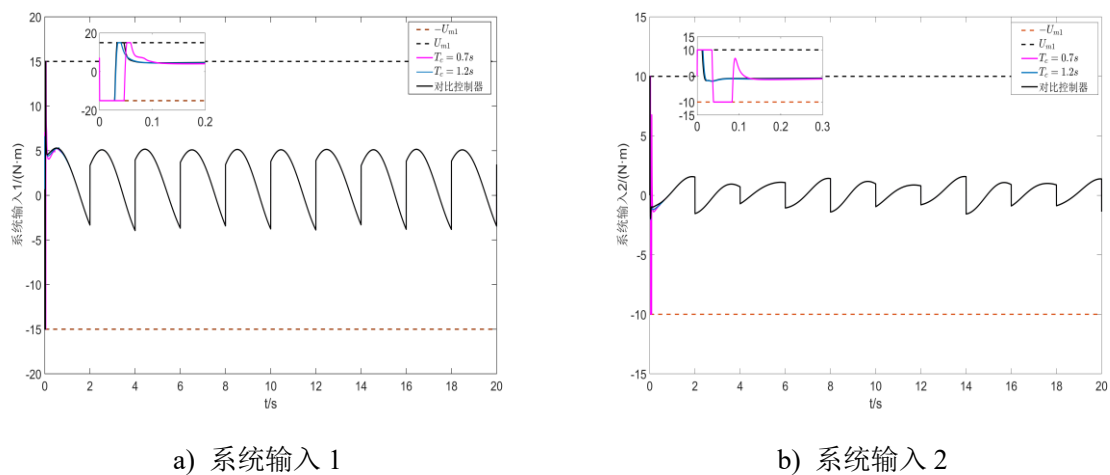


图 4-5 控制输入图

仿真如图 4-1 至图 4-5 所示。图 4-1 给出了系统输出  $y$ 、期望跟踪  $y_d$  及时变输出约束函数  $\underline{k}_i, \bar{k}_i, i=1,2$  的轨迹, 可以看出  $T_c$  为 0.7s 时系统输出最先跟踪上期望轨迹,  $T_c$  为 1.2s 时次之, 对比控制器的作用下的跟踪速度最慢。图 4-2 给出了轨迹跟踪误差  $z_{i1}, z_{i2}$  的轨迹, 可以看出对比控制器作用下的跟踪误差收敛时间最长,  $T_c$  为 1.2s 时次之,  $T_c$  为 0.7s 时的跟踪误差收敛时间最短。图 4-3 给出了辅助变量  $\eta_1(1), \eta_1(2)$  的轨迹, 可以看出辅助变量的收敛时间在  $T_c$  为 0.7s 时比  $T_c$  为 1.2s 时短, 对比控制器对应的辅助变量的收敛时间最长。图 4-4 给出了模型不确定项以及外部干扰  $D_x(1), D_x(2)$  及其估计值  $\hat{D}_x(1), \hat{D}_x(2)$  的轨迹, 可以看出 UDE 能够精确的估计模型的不确定项以及外部干扰。图 4-5 给出了系统输入的轨迹, 可以看出系统输入都没有超过输入饱和值。综上, 对比仿真结果较好的证明了所提控制方案的有效性和优越性。

## 4.5 本章小结

本章在考虑输入饱和与输出约束的情况下, 针对受未知外界扰动的不确定刚性机械臂的任务空间轨迹跟踪控制问题, 提出了一种基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹控制方案。具体的, 利用 BLF 解决时变输出约束, 设计 UDE 估计模型不确定项和未知外界干扰, 在预设收敛时间内收敛的辅助变量解决输入饱和。通过 Lyapunov 稳定性分析, 证明了本章所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号都在预设收敛时间内收敛, 轨迹跟踪误差在预设收敛时间内收敛到一个零的小邻域内, 且输入饱和与输出约束没有被违背。最终, 通过对比仿真实验, 证明了所提出的控制器的有效性和优越性。

## 第五章 柔性关节机械臂自适应神经网络任务空间跟踪控制

### 5.1 引言

第三章和第四章已经讨论了关于刚性机械臂的轨迹跟踪控制问题，本章则针对柔性关节机械臂的轨迹跟踪问题进行研究。柔性关节机械臂相比于刚性关节机械具有轻量化、耗能少以及适应性高等特点，被大量的投入到航天航空、医疗等领域。从控制器设计的角度来讲，柔性关节机械臂系统的阶次更高，设计中遇到的问题更加复杂。例如，当使用反步法设计时，会出现“计算爆炸”的问题等。同时，在实际应用中，柔性关节机械臂也可能存在模型不确定、外部干扰、输入饱和及输出约束等问题。

本章基于神经网络理论，在考虑输入饱和与输出约束的情况下，针对不确定柔性关节机械臂，设计了一种自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制方案。通过设计辅助变量和 NSDF 分别解决输入饱和与输出约束问题，利用命令滤波器和补偿系统解决反步法使用过程中的为“计算爆炸”问题，利用 RBF 神经网络逼近系统的动力学不确定项。针对系统的运动学不确定项，设计了一个指数观测器进行估计。最终结合反步法设计了一种自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制器。

### 5.2 问题描述

本章所研究的柔性关节机械臂的数学模型如式(2-7)所述，选择系统状态变量  $x_1 = x$ ， $x_2 = q$ ， $x_3 = \dot{q}$ ， $x_4 = q_m$ ， $x_5 = \dot{q}_m$  和系统输出  $y = x_1$ ，建立如下状态空间表达式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = J_0 x_3 + D_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = M_0^{-1} (K_0 (x_4 - x_2) - C_0 x_3 - G_0 + D_1) \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = A_0^{-1} (U(\tau) - B_0 x_5 - K_0 (x_4 - x_2) + D_2) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (5-1)$$

其中， $D_1, D_2$  与  $D_3$  表示系统的不确定项，形式如下：

$$\begin{cases} D_1 = -\Delta M \dot{x}_3 - \Delta C x_3 - \Delta G + \Delta K (x_4 - x_2) \\ D_2 = -\Delta A \dot{x}_5 - \Delta B x_5 - \Delta K (x_4 - x_2) \\ D_3 = \Delta J x_3 \end{cases} \quad (5-2)$$

输出  $y = [y_1, \dots, y_m]^T$  需要满足如下输出约束条件：

$$-F_{i1}(t) \leq y_i(t) \leq F_{i2}(t), i=1, \dots, m \quad (5-3)$$

其中,  $-F_{i1}(t), F_{i2}(t)$  表示时变输出约束函数。系统输入  $U(\tau)$  的形式同第三章的式(3-3)。

本章的控制目标为: 给定光滑有界的期望轨迹  $y_d = [y_{d1}, \dots, y_{dm}]^T$ , 考虑输出约束和输入饱和, 针对不确定柔性关节机械臂系统(2-7), 设计一种自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制器, 实现: (1) 系统输出  $y$  能够精确地跟踪上期望轨迹  $y_d$ 。(2) 系统的输入和输出始终保持在给定约束范围内。(3) RBF 神经网络与指数观测器能够准确的逼近或估计模型不确定项。(4) 闭环系统所有信号都是有界的。

为了实现上述控制目标, 本章需要做出的假设及假设合理性说明同第三章。

为了使后续的公式更加简洁, 将  $F_{i1}(t), F_{i2}(t)$  简写为  $F_{i1}, F_{i2}$ 。

### 5.3 控制器设计及稳定性分析

本节首先分别给出了所设计控制方案中 NSDF、RBF 神经网络、指数观测器、辅助变量、命令滤波器、滤波误差补偿系统、虚拟控制律以及实际控制律的形式, 然后通过 Lyapunov 理论进行稳定性分析, 证明了所提控制方案的有效性。

#### 5.3.1 自适应神经网络轨迹跟踪器设计

##### 1. NSDF

为了处理时变输出约束, 设计两个 NSDF 向量  $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_m]^T$  和  $\zeta_d = [\zeta_{d1}, \dots, \zeta_{dm}]^T$ , 分别表示如下:

$$\zeta_i = a \frac{y_i}{(F_{i1} + y_i)(F_{i2} - y_i)}, i=1, \dots, m \quad (5-4)$$

$$\zeta_{di} = a \frac{y_{di}}{(F_{i1} + y_{di})(F_{i2} - y_{di})}, i=1, \dots, m \quad (5-5)$$

其中是  $a$  正的常数。 $\zeta, \zeta_d$  的导数形式如下:

$$\dot{\zeta} = \mu_1 \dot{y} + \mu_2 \quad (5-6)$$

$$\dot{\zeta}_d = \mu_{d1} \dot{y}_d + \mu_{d2} \quad (5-7)$$

其中,  $\mu_1, \mu_2, \mu_{d1}, \mu_{d2}$  的具体形式同第三章的式(3-9)、(3-10)、(3-11)及(3-12)。

##### 2. RBF 神经网络

采用 RBF 神经网络逼近系统的动力学不确定项  $D_1 = [D_{11}, \dots, D_{1n}]^T, D_2 = [D_{21}, \dots, D_{2n}]^T$ , 表达式如下:

$$\begin{cases} D_1 = W_1^T \psi_1 + \delta_1 \\ D_2 = W_2^T \psi_2 + \delta_2 \\ \|\delta_i\| \leq \varsigma_i, i=1,2 \end{cases} \quad (5-8)$$

其中,  $W_1, W_2$  表示 RBF 神经网络权重矩阵,  $\psi_1, \psi_2$  表示基函数向量,  $\delta_1, \delta_2$  表示估计误差,  $\varsigma_1, \varsigma_2$  是正的常数。根据式(5-1)与式(5-2), 逼近  $D_1, D_2$  的 RBF 神经网络的输入分别为  $x_2, x_3, x_4$  与  $x_2, x_4, x_5$ 。

定义  $\theta_1 = \|W_1\|_F^2$  与  $\theta_2 = \|W_2\|_F^2$ , 自适应律设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{r_1 e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} - \bar{r}_1 \hat{\theta}_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \frac{r_2 e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} - \bar{r}_2 \hat{\theta}_2 \end{cases} \quad (5-9)$$

其中,  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  分别是  $\theta_1, \theta_2$  的估计值,  $L_1, L_2, r_1, \bar{r}_1, r_2, \bar{r}_2$  是正的设计参数,  $e_3, e_5$  作为误差变量在之后会有定义, 定义  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$  与  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$  为估计误差。

不同于文献[74, 83]需要在线调整大量的 RBF 神经网络权值, 受到文献[84]的启发, 本章使用的 RBF 神经网络只需要在线自适应更新权值的模, 这大大的减少了需要在线更新的参数数量, 减轻了系统的计算负担。

### 3. 指数观测器

为了精确的估计系统运动学不确定项  $D_3$ , 本章构造了一种指数观测器, 形式如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_e = -k_2 k_3 \hat{x}_e + \frac{\dot{y}_r}{k_2} + k_3 y_r \\ \hat{D}_3 = \frac{k_1 k_2 \hat{x}_e + \dot{y}_r}{k_2} \end{cases} \quad (5-10)$$

其中,  $x_e = x_1 - x_r$ ,  $\hat{x}_e, \hat{D}_3$  分别表示  $x_e, D_3$  的估计值,  $k_1, k_2, k_3$  是正的设计参数, 定义  $\tilde{x}_e = x_e - \hat{x}_e$  与  $\tilde{D}_3 = D_3 - \hat{D}_3$  表示估计误差,  $x_r, y_r$  的形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = J_0 x_3 + k_1 x_e \\ y_r = k_2 x_e \end{cases} \quad (5-11)$$

观测器有效性证明如下:

结合式(5-1)与(5-11), 对  $x_e$  进行求导, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= \dot{x}_1 - \dot{x}_r = J_0 x_3 + D_3 - J_0 x_3 - k_1 x_e \\ &= -k_1 x_e + D_3\end{aligned}\quad (5-12)$$

结合式(5-10)与(5-12)，对  $\tilde{x}_e$  进行求导，得到：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_e &= \dot{x}_e - \dot{\hat{x}}_e = \dot{x}_e - (-k_2 k_3 \hat{x}_e + \frac{1}{k_2} \dot{y}_r + k_3 y_r) \\ &= -k_2 k_3 \tilde{x}_e\end{aligned}\quad (5-13)$$

对式(5-13)进行求解，得到：

$$\tilde{x}_e(t) = \tilde{x}_e(0)e^{-k_2 k_3 t} \quad (5-14)$$

其中， $\tilde{x}_e(0)$  是  $\tilde{x}_e$  的初始值。可以看出，对于任意初始值， $\tilde{x}_e$  都是指数收敛的。结合式(5-10)、(5-12)及(5-14)，估计误差  $\tilde{D}_3$  可以表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{D}_3 &= D_3 - \hat{D}_3 = \dot{x}_e + k_1 x_e - \frac{k_1 k_2 \hat{x}_e + \dot{y}_r}{k_2} \\ &= k_1 (x_e - \hat{x}_e) \\ &= k_1 \tilde{x}_e(0)e^{-k_2 k_3 t}\end{aligned}\quad (5-15)$$

由此可见，指数观测器的观测误差是指数收敛的。

证毕。

#### 4. 辅助变量

设计一个辅助变量  $\varepsilon_1$  来处理输入饱和，形式如下：

$$\dot{\varepsilon}_1 = -p_1 \varepsilon_1 + A_0^{-1} \Delta \tau \quad (5-16)$$

其中， $p_1$  为设计的参数， $\Delta \tau = U(\tau) - \tau$ 。

#### 5. 滤波器误差补偿系统

为了解决反步法设计中虚拟控制器反复求导带来的“计算爆炸”问题，引入二阶命令滤波器如下：

$$\begin{cases} \dot{w}_i = \eta_1 w_{ii} \\ \dot{w}_{ii} = -2\eta_1 \eta_2 w_{ii} - \eta_1 (w_i - \alpha_{i-1}) \end{cases}, i = 3, 4, 5 \quad (5-17)$$

其中， $\eta_1$  与  $\eta_2 \in (0,1)$  为正的设计参数， $w_i$  为滤波器的输出， $w_{ii}$  为滤波器的状态变量，虚拟控制律  $\alpha_{i-1}$  为滤波器的输入。滤波器的初始条件为  $w_i(0) = \alpha_i(0)$ ,  $w_{ii}(0) = 0$ 。命令滤波器的引入带来的滤波误差会对系统性能产生不利的影响，因此，为了保障系统的性能，建立如下补偿系统：

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -c_1\sigma_1 + \mu_1 J_0 (w_3 + \sigma_3 - \alpha_2) \\ \dot{\sigma}_3 = -c_3\sigma_3 - J_0^T \mu_1^T \sigma_1 + M_0^{-1} K_0 (w_4 + \sigma_4 - \alpha_3) \\ \dot{\sigma}_4 = -c_4\sigma_4 - K_0^T (M_0^{-1})^T \sigma_3 + w_5 + \sigma_5 - \alpha_4 \\ \dot{\sigma}_5 = -c_5\sigma_5 - \sigma_4 \end{cases} \quad (5-18)$$

其中,  $\sigma_i, i=1,3,4,5$  为补偿信号,  $c_i, i=1,3,4,5$  为正的设计参数。

## 6. 控制器设计

定义误差变量如下:

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - \sigma_1 \\ e_2 = z_2 \\ e_3 = z_3 - \sigma_3 \\ e_4 = z_4 - \sigma_4 \\ e_5 = z_5 - \sigma_5 \end{cases} \quad (5-19)$$

其中,  $z_i, i=1, \dots, 5$  的具体表达式如下:

$$\begin{cases} z_1 = \zeta - \zeta_d \\ z_2 = x_2 - \alpha_1 \\ z_3 = x_3 - w_3 \\ z_4 = x_4 - w_4 \\ z_5 = x_5 - w_5 - \varepsilon_1 \end{cases} \quad (5-20)$$

其中,  $\alpha_1$  为虚拟控制律。虚拟控制律设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = w_3 + \sigma_3 + c_2 e_2 \\ \alpha_2 = J_0^+ \mu_1^{-1} (-c_1 z_1 + \mu_{d1} \dot{x}_d - \mu_2 + \mu_{d2}) + J_0^+ \left( -\hat{D}_3 - \frac{\mu_1^T e_1}{2} \right) \\ \alpha_3 = K_0^{-1} M_0 (\dot{w}_3 - J_0^T \mu_1^T z_1 - c_3 z_3 - e_2) + x_2 + K_0^{-1} (G_0 + C_0 x_3) \\ \quad - \frac{K_0^{-1} (M_0)^{-T} e_3 \hat{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} - \frac{K_0^{-1} (M_0)^{-T} e_3}{2} \\ \alpha_4 = \dot{w}_4 - K_0^T (M_0)^{-T} z_3 - c_4 z_4 - \varepsilon_1 \end{cases} \quad (5-21)$$

其中,  $c_2$  是一个正的设计参数。

实际控制律  $\tau$  设计如下:

$$\tau = A_0 (\dot{w}_5 - z_4 - c_5 z_5 - p_1 \varepsilon_1) + K_0 (x_4 - x_2) + B_0 x_5 - \frac{(A_0^{-1})^T e_5 \hat{\theta}_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} - \frac{(A_0^{-1})^T e_5}{2} \quad (5-22)$$

### 5.3.2 稳定性分析

**定理 5.1** 对如式(2-7)描述的柔性关节机械臂系统, 假设条件成立, 设计如式(5-9)所示参数自适应律、如式(5-21)所示的虚拟控制律及如式(5-22)所示的实际控制律, 系统输出的初始值满足约束条件, 那么

- (1) 闭环系统所有信号有界。
- (2) 系统输出始终保持在给定的约束范围内。
- (3) 轨迹跟踪误差收敛至一个零的小邻域内。

证明:

第一步: 选择 Lyapunov 函数  $V_1(t) = \frac{1}{2} e_1^T e_1$ , 并对其进行求导, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= e_1^T (\dot{z}_1 - \dot{\sigma}_1) = e_1^T (\dot{\zeta} - \dot{\zeta}_d - \dot{\sigma}_1) = e_1^T (\mu_1 \dot{x}_1 - \mu_{d1} \dot{x}_d + \mu_2 - \mu_{d2} - \dot{\sigma}_1) \\ &= e_1^T \mu_1 (J_0 x_3 + D_3) + e_1^T (-\mu_{d1} \dot{x}_d + \mu_2 - \mu_{d2} - \dot{\sigma}_1) \\ &= e_1^T \mu_1 (J_0 (w_3 + \sigma_3 + e_3) + D_3) + e_1^T (-\mu_{d1} \dot{x}_d + \mu_2 - \mu_{d2} - \dot{\sigma}_1)\end{aligned}\quad (5-23)$$

将补偿信号(5-18)、虚拟控制律(5-21)代入式(5-23)可得:

$$\dot{V}_1 = -c_1 e_1^T e_1 + e_1^T \mu_1 J_0 e_3 - \frac{e_1^T \mu_1 \mu_1^T e_1}{2} + e_1^T \mu_1 \tilde{D}_3 \quad (5-24)$$

根据杨氏不等式及式(5-15), 上式中  $e_1^T \mu_1 \tilde{D}_3$  可以放缩如下:

$$\begin{aligned}e_1^T \mu_1 \tilde{D}_3 &\leq \frac{e_1^T \mu_1 \mu_1^T e_1}{2} + \frac{\tilde{D}_3^T \tilde{D}_3}{2} \leq \frac{e_1^T \mu_1 \mu_1^T e_1}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 e^{-2k_2 k_3 t} \tilde{x}_e^T(0) \tilde{x}_e(0) \\ &\leq \frac{e_1^T \mu_1 \mu_1^T e_1}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2\end{aligned}\quad (5-25)$$

将式(5-25)代入式(5-24), 得到:

$$\dot{V}_1 \leq -c_1 e_1^T e_1 + e_1^T \mu_1 J_0 e_3 + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \quad (5-26)$$

第二步: 选择 Lyapunov 函数  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2$ , 并对其进行求导, 得到:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + e_2^T (\dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1) = \dot{V}_1 + e_2^T (x_3 - \dot{\alpha}_1) \\ &= \dot{V}_1 + e_2^T (w_3 + \sigma_3 + e_3 - \dot{\alpha}_1)\end{aligned}\quad (5-27)$$

将虚拟控制律(5-21)与式(5-26)代入式(5-27), 可得:

$$\dot{V}_2 \leq -\sum_{i=1}^2 c_i e_i^T e_i + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + e_3^T (J_0^T \mu_1^T e_1 + e_2) \quad (5-28)$$

第三步: 选择 Lyapunov 函数  $V_3 = V_2 + \frac{1}{2} e_3^T e_3$ , 并对其进行求导, 得到:



$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + e_3^T (\dot{z}_3 - \dot{\sigma}_3) = \dot{V}_2 + e_3^T (\dot{x}_3 - \dot{w}_3 - \dot{\sigma}_3) \\
 &= \dot{V}_2 + e_3^T (M_0^{-1} (K_0 (x_4 - x_2) - G_0 - C_0 x_3 + D_1) - \dot{w}_3 - \dot{\sigma}_3) \\
 &= \dot{V}_2 + e_3^T (M_0^{-1} (K_0 (w_4 + \sigma_4 + e_4 - x_2) - G_0 - C_0 x_3 + D_1) - \dot{w}_3 - \dot{\sigma}_3)
 \end{aligned} \tag{5-29}$$

将补偿信号(5-18)与虚拟控制律(5-21)代入式(5-29)，可得：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &\leq -\sum_{i=1}^2 c_i e_i^T e_i + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + e_3^T (J_0^T \mu_1^T e_1 + e_2) \\
 &\quad + e_3^T (M_0^{-1} (K_0 (e_4 + w_4 + \sigma_4 - x_2) - G_0 - C_0 x_3 + D_1) - \dot{w}_3 - \dot{\sigma}_3) \\
 &= -\sum_{i=1}^3 c_i e_i^T e_i + e_3^T M_0^{-1} K_0 e_4 + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + e_3^T M_0^{-1} D_1 \\
 &\quad - \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} - \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3}{2}
 \end{aligned} \tag{5-30}$$

根据杨氏不等式、柯西不等式及式(5-8)， $e_3^T M_0^{-1} D_1$  可以放缩如下：

$$\begin{aligned}
 e_3^T M_0^{-1} D_1 &= e_3^T M_0^{-1} W_1^T \psi_1 + e_3^T M_0^{-1} \delta_1 \\
 &\leq \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \theta_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3}{2} + \frac{\delta_1^T \delta_1}{2} \\
 &\leq \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \theta_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2}
 \end{aligned} \tag{5-31}$$

将式(5-31)代入式(5-30)，得到：

$$\dot{V}_3 \leq -\sum_{i=1}^3 c_i e_i^T e_i + e_3^T M_0^{-1} K_0 e_4 + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \tag{5-32}$$

第四步：选择 Lyapunov 函数  $V_4 = V_3 + \frac{1}{2} e_4^T e_4$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= \dot{V}_3 + e_4^T (\dot{x}_4 - \dot{w}_4 - \dot{\sigma}_4) = \dot{V}_3 + e_4^T (x_5 - \dot{w}_4 - \dot{\sigma}_4) \\
 &= \dot{V}_3 + e_4^T (e_5 + w_5 + \sigma_5 + \varepsilon_1 - \dot{w}_4 - \dot{\sigma}_4)
 \end{aligned} \tag{5-33}$$

将补偿信号(5-18)与虚拟控制律(5-21)代入式(5-33)中，得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &\leq -\sum_{i=1}^3 c_i e_i^T e_i + e_4^T K_0^T (M_0^{-1})^T e_3 + e_4^T (e_5 + w_5 + \sigma_5 - \dot{w}_4 - \dot{\sigma}_4) \\
 &\quad + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \\
 &= -\sum_{i=1}^4 c_i e_i^T e_i + e_4^T e_5 + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2
 \end{aligned} \tag{5-34}$$

第五步：选择 Lyapunov 函数  $V_5 = V_4 + \frac{1}{2}e_5^T e_5$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}_5 &= \dot{V}_4 + e_5^T (\dot{z}_5 - \dot{\sigma}_5 - \dot{\varepsilon}_1) = \dot{V}_4 + e_5^T (\dot{x}_5 - \dot{w}_5 - \dot{\sigma}_5 - \dot{\varepsilon}_1) \\ &= \dot{V}_4 + e_5^T (A_0^{-1}(\tau + \Delta\tau - K_0(x_4 - x_2) - B_0x_5 + D_2) - \dot{w}_5 - \dot{\sigma}_5 - \dot{\varepsilon}_1) \\ &= \dot{V}_4 + e_5^T (A_0^{-1}(\tau + \Delta\tau - K_0(x_4 - x_2) - B_0x_5) - \dot{w}_5 - \dot{\sigma}_5 - \dot{\varepsilon}_1) + e_5^T A_0^{-1}D_2\end{aligned}\quad (5-35)$$

将辅助变量(5-16)、补偿信号(5-18)、实际控制律(5-22)与式(5-34)代入式(5-35)中，得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}_5 &\leq -\sum_{i=1}^4 c_i e_i^T e_i + \frac{L_1^2}{2} + \frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{1}{2}k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} \\ &\quad + e_5^T (e_4 + A_0^{-1}\tau - A_0^{-1}(K_0(x_4 - x_2) + B_0x_5) - \dot{w}_5 - \dot{\sigma}_5 + p_1\varepsilon_1) + e_5^T A_0^{-1}D_2 \\ &= -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i - \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \hat{\theta}_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} - \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5}{2} \\ &\quad + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{1}{2}k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + e_5^T A_0^{-1}D_2\end{aligned}\quad (5-36)$$

根据杨氏不等式和式(5-8)， $e_5^T A_0^{-1}D_2$  可以放缩如下：

$$\begin{aligned}e_5^T A_0^{-1}D_2 &= e_5^T A_0^{-1}W_2^T \psi_2 + e_5^T A_0^{-1}\delta_2 \\ &\leq \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \theta_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5}{2} + \frac{\delta_2^T \delta_2}{2} \\ &\leq \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \theta_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5}{2} + \frac{\zeta_2^2}{2}\end{aligned}\quad (5-37)$$

将式(5-37)代入式(5-36)，得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}_5 &\leq -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i + \frac{e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \tilde{\theta}_1 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} + \frac{e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \tilde{\theta}_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} \\ &\quad + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{\zeta_2^2}{2} + \frac{1}{2}k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2\end{aligned}\quad (5-38)$$

第六步：选择 Lyapunov 函数  $V_6 = V_5 + \frac{\tilde{\theta}_1^2}{2r_1} + \frac{\tilde{\theta}_2^2}{2r_2} + \frac{\varepsilon_1^T \varepsilon_1}{2}$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}_6 &= \dot{V}_5 - \frac{\tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1}{r_1} - \frac{\tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2}{r_2} + \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon} \\ &\leq -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\zeta_1^2}{2} + \frac{\zeta_2^2}{2} + \frac{1}{2}k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 + \varepsilon_1^T (-p_1\varepsilon_1 + A_0^{-1}\Delta\tau) \\ &\quad + \frac{\tilde{\theta}_1}{r_1} \left( \frac{r_1 e_3^T M_0^{-1} (M_0^{-1})^T e_3 \psi_1^T \psi_1}{2L_1^2} - \dot{\tilde{\theta}}_1 \right) + \frac{\tilde{\theta}_2}{r_2} \left( \frac{r_2 e_5^T A_0^{-1} (A_0^{-1})^T e_5 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} - \dot{\tilde{\theta}}_2 \right)\end{aligned}\quad (5-39)$$

将自适应律(5-9)代入式(5-39)，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 \leq & -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i - p_1 \varepsilon_1^T \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T A_0^{-1} \Delta \tau \\ & + \frac{\bar{r}_1 \tilde{\theta}_1^2}{r_1} + \frac{\bar{r}_2 \tilde{\theta}_2^2}{r_2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{\varsigma_2^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \end{aligned} \quad (5-40)$$

根据杨氏不等式，将  $\tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \hat{\theta}_2, \varepsilon_1^T A_0^{-1} \Delta \tau$  放缩如下：

$$\tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i = \tilde{\theta}_i (\theta_i - \tilde{\theta}_i) = \tilde{\theta}_i \theta_i - \tilde{\theta}_i^2 \leq -0.5 \tilde{\theta}_i^2 + 0.5 \theta_i^2, i=1,2 \quad (5-41)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T A_0^{-1} \Delta \tau & \leq \frac{\varepsilon_1^T \varepsilon_1}{2} + \frac{(A_0^{-1} \Delta \tau)^T (A_0^{-1} \Delta \tau)}{2} \\ & \leq \frac{\varepsilon_1^T \varepsilon_1}{2} + \frac{\|A_0^{-1}\|_F^2 \|\Delta \tau\|^2}{2} \leq \frac{\varepsilon_1^T \varepsilon_1}{2} + \frac{\varsigma_3^2 \varsigma_4^2}{2} \end{aligned} \quad (5-42)$$

其中， $\varsigma_3, \varsigma_4$  分别为  $\|A_0^{-1}\|_F, \|\Delta \tau\|$  的上界。

将式(5-41)与式(5-42)代入式(5-40)，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_6 \leq & -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i - \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_1^T \varepsilon_1 + \frac{\bar{r}_1}{r_1} \left(\frac{\theta_1^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}_1^2}{2}\right) + \frac{\bar{r}_2}{r_2} \left(\frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}_2^2}{2}\right) \\ & + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{\varsigma_2^2}{2} + \frac{\varsigma_3^2 \varsigma_4^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \\ = & -\sum_{i=1}^5 c_i e_i^T e_i - \frac{\bar{r}_1 \tilde{\theta}_1^2}{2r_1} - \frac{\bar{r}_2 \tilde{\theta}_2^2}{2r_2} - \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_1^T \varepsilon_1 + \frac{\bar{r}_1 \theta_1^2}{2r_1} + \frac{\bar{r}_2 \theta_2^2}{2r_2} \\ & + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{\varsigma_2^2}{2} + \frac{\varsigma_3^2 \varsigma_4^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \end{aligned} \quad (5-43)$$

定义：

$$\rho_1 = 2 \min \left[ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, p_1 - \frac{1}{2}, \frac{\bar{r}_1}{2}, \frac{\bar{r}_2}{2} \right] \quad (5-44)$$

$$\chi_1 = \frac{\bar{r}_1 \theta_1^2}{2r_1} + \frac{\bar{r}_2 \theta_2^2}{2r_2} + \frac{L_1^2}{2} + \frac{L_2^2}{2} + \frac{\varsigma_1^2}{2} + \frac{\varsigma_2^2}{2} + \frac{\varsigma_3^2 \varsigma_4^2}{2} + \frac{1}{2} k_1^2 \|\tilde{x}_e(0)\|^2 \quad (5-45)$$

将式(5-43)进一步放缩为：

$$\dot{V}_6 \leq -\rho_1 V_6 + \chi_1 \quad (5-46)$$

对式(5-46)求解，得到：

$$0 \leq V_6(t) \leq \left( V_6(0) - \frac{\chi_1}{\rho_1} \right) e^{-\rho_1 t} + \frac{\chi_1}{\rho_1} \quad (5-47)$$

第七步：选择 Lyapunov 函数  $V_\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i=1,3,4,5} \sigma_i^T \sigma_i$ ，并对其进行求导，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= \sum_{i=1,3,4,5} \sigma_i^T \dot{\sigma}_i \\ &= - \sum_{i=1,3,4,5} c_i \sigma_i^T \sigma_i + \sigma_1^T g_3 (w_3 - \alpha_2) + \sigma_3^T g_4 (w_4 - \alpha_3) + \sigma_4^T g_5 (w_5 - \alpha_4) \end{aligned} \quad (5-48)$$

其中， $g_3 = \mu_{11} J_0$ ， $g_4 = M_0^{-1} K_0$ ， $g_5 = 1$ 。

根据文献[85]，可得  $\|g_i (w_i - \alpha_{i-1})\| \leq \bar{\mu} \bar{g}, i=3,4,5$ ， $\bar{\mu}$  是滤波器误差  $w_i - \alpha_{i-1}, i=3,4,5$  的上界， $\bar{g}$  是  $g_i$  或  $\|g_i\|_F, i=3,4,5$  的上界。

利用杨氏不等式，式(5-48)可进一步放缩如下：

$$\dot{V}_\sigma \leq - \sum_{i=1,3,4} \left( c_i - \frac{1}{2} \right) \sigma_i^T \sigma_i - c_5 \sigma_5^T \sigma_5 + \frac{3\bar{g}^2 \bar{\mu}^2}{2} \quad (5-49)$$

定义  $\rho_2 = 2 \min \left[ c_1 - \frac{1}{2}, c_3 - \frac{1}{2}, c_4 - \frac{1}{2}, c_5 \right]$ ， $\chi_2 = \frac{3\bar{g}^2 \bar{\mu}^2}{2}$ ，将式(5-49)进一步放缩为：

$$\dot{V}_\sigma \leq -\rho_2 V_\sigma + \chi_2 \quad (5-50)$$

对上式求解，得到：

$$0 \leq V_\sigma(t) \leq \left( V_\sigma(0) - \frac{\chi_2}{\rho_2} \right) e^{-\rho_2 t} + \frac{\chi_2}{\rho_2} \quad (5-51)$$

根据式(5-47)和式(5-51)，可以推出误差  $e_i, i=1,2,3,4,5$ ，补偿信号  $\sigma_i, i=1,3,4,5$  以及辅助变量  $\varepsilon_1$  都是有界的。进一步，根据  $z_1 = e_1 + \sigma_1$  推出  $z_1$  是有界的。根据假设可以推出  $\zeta_d$  是有界的，进一步可以得到  $\zeta$  的有界性。由于  $\zeta$  是有界的，可以推出系统输出  $y = x_1$  是有界的且满足输出约束条件。在实际机械臂中，关节角通常都是有界的。根据关节角  $x_2$  与  $z_2$  的有界性，可以推出虚拟控制律  $\alpha_1$  是有界的。根据式子，可以推出  $\alpha_2$  是有界的，进一步得出  $w_3$  是有界的，则根据式子和  $z_3$  的有界性， $x_3$  也是有界的。根据式子，可以推出  $\alpha_3$  是有界的，则  $w_4$  也是有界的。进一步根据式子与  $z_4$  的有界性，可以推出  $x_4$  的有界性。根据式子，可以推出  $\alpha_4$  是有界的，则  $w_5$  也是有界的。进一步根据式子与  $z_5, \varepsilon_1$  的有界性，可以推出  $x_5$  的有界性。最终根据控制律表达式，可以推出控制输入  $\tau$  的有界性。至此闭环系统所有信号都被证明是有界的，接下来证明轨迹跟踪误差收敛到一个零的小邻域内。根据式(5-4)与式(5-5)， $z_1$  的第  $i$  项可以表示如下：

$$z_{li} = a \frac{y_i}{(F_{i1} + y_i)(F_{i2} - y_i)} - a \frac{y_{di}}{(F_{i1} + y_{di})(F_{i2} - y_{di})} \quad (5-52)$$

通过一系列放缩变换,可以推出轨迹跟踪误差  $z = y - y_d$  是有界的,且收敛到一个零的小邻域内。具体证明与第三章稳定性分析的第二部分类似,不在赘述。证毕。

## 5.4 数值仿真与分析

本节首先给出了仿真对象及其参数设置,然后分别给出对比仿真使用的控制器形式、控制参数取值以及对应的数值仿真结果图,并对仿真结果图进行对比分析,验证本章所提出的自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制器的有效性和优越性。本节的仿真环境与第三章相同。

### 5.4.1 仿真对象及参数设置

选择两连杆柔性关节机械臂为仿真对象,模型如式(2-7)所示,各个矩阵形式如下<sup>[61]</sup>:

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_1l_1l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_1l_1l_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2l_2^2 \end{pmatrix}, G_0 = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2)l_1g \sin(q_1) \\ -m_2l_2g \sin(q_2) \end{pmatrix} \\ C_0 &= m_2l_1l_2 \sin(q_2 - q_1) \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ K_0 &= \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, J_0(q) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-53)$$

系统的动力学和运动学不确定项如下:

$$\begin{cases} D_1 = -0.15M_0\ddot{q} + 0.1K_0(q_m - q) - 0.3G_0 - 0.25C_0\dot{q} \\ D_2 = -0.2A_0\dot{q}_m - 0.1K_0(q_m - q) - 0.35B_0\dot{q}_m \\ D_3 = [D_{31}, D_{32}]^T = 0.1J_0\dot{q} \end{cases} \quad (5-54)$$

其中,  $q = [q_1, q_2]^T$ ,  $q_1$  表示连杆 1 的关节角,  $q_2$  表示连杆 2 的关节角。机械臂的参数如下表所示:

表 5-1 两连杆柔性关节机械臂参数

参数名	参数意义	参数取值	单位
$m_1$	连杆 1 的质量	2.0	Kg
$m_2$	连杆 2 的质量	3.0	Kg
$l_1$	连杆 1 的长度	1	M
$l_2$	连杆 2 的长度	1	M

机械臂末端执行器初始位置设置为  $y(0) = x_1(0) = [0.8, -0.3]^T$ ，关节角度初始值  $x_2(0)$  通过逆向运动学进行求解， $x_3(0), x_4(0), x_5(0)$  全部设为  $[0, 0]^T$ 。自适应参数的初始值设置为  $\hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_2(0) = 0.01$ 。指数观测器初始值设置为  $x_r(0) = [0, 0]^T, \hat{x}_e(0) = [0, 0]^T$ 。系统的期望参考轨迹为  $y_d = [y_{d1}, y_{d2}]^T = [0.4 + 0.5 \cos(t), -0.4 + 0.5 \sin(t)]^T$ ，输入饱和值设置为  $U_m = [100, 60]^T$ 。系统的时变输出约束设置为：

$$\begin{aligned} F_{11} &= 0.1 - 0.05 \cos(t), F_{12} = 1 + 0.6 \cos(t) \\ F_{21} &= 1 - 0.6 \sin(t), F_{22} = 0.1 + 0.05 \sin(t) \end{aligned} \quad (5-55)$$

### 5.4.2 仿真结果与分析

为了验证本章设计的自适应神经网络控制器的有效性，选择如下形式的控制器作对比：

$$\tau = A_0(\dot{w}_5 - z_4 - c_5 z_5) + K_0(x_4 - x_2) + B_0 x_5 - \frac{(A_0^{-1})^T e_5 \hat{\theta}_2 \psi_2^T \psi_2}{2L_2^2} - \frac{(A_0^{-1})^T e_5}{2} \quad (5-56)$$

值得注意的是，上述对比控制器在设计中除了没有考虑输入饱和外，其余控制方法设计与本章相同。

本章设计控制器(5-22)参数设置为： $a=1, r_1=1, \bar{r}_1=1, r_2=1, \bar{r}_2=1, L_1=L_2=1, k_1=0.01, k_2=2, k_3=20, p_1=1, \eta_1=400, \eta_2=0.8, c_1=10, c_2=5, c_3=30, c_4=5, c_5=5$ ，逼近  $D_1$  的 RBF 神经网络的隐藏层节点数 4096，中心宽度为 5，输入为  $x_2, x_3, x_4$ 。逼近  $D_2$  的 RBF 神经网络的隐藏层节点数为 64，中心宽度为 1，输入为  $x_2, x_4, x_5$ 。对比控制器(5-56)的参数设置与本章控制器相同。仿真时长 20s，仿真结果如下：

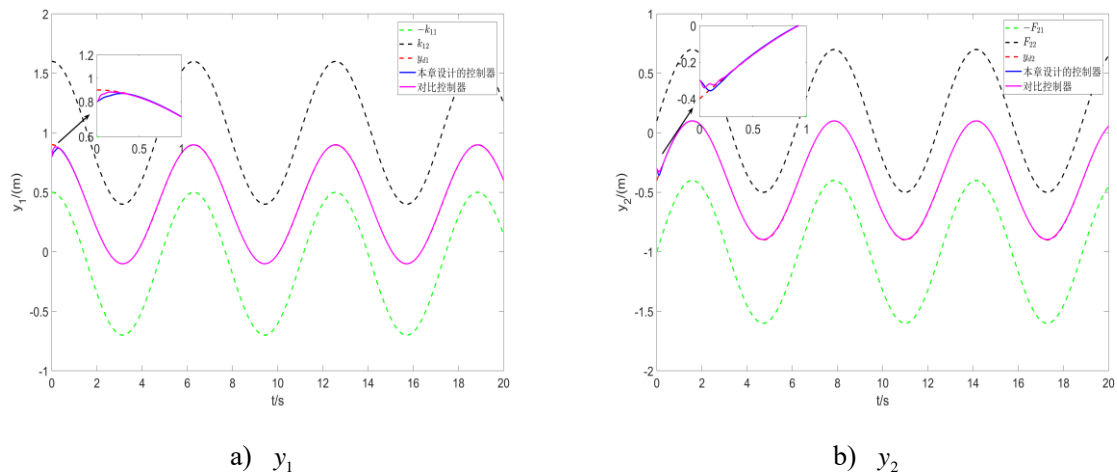


图 5-1 轨迹跟踪图

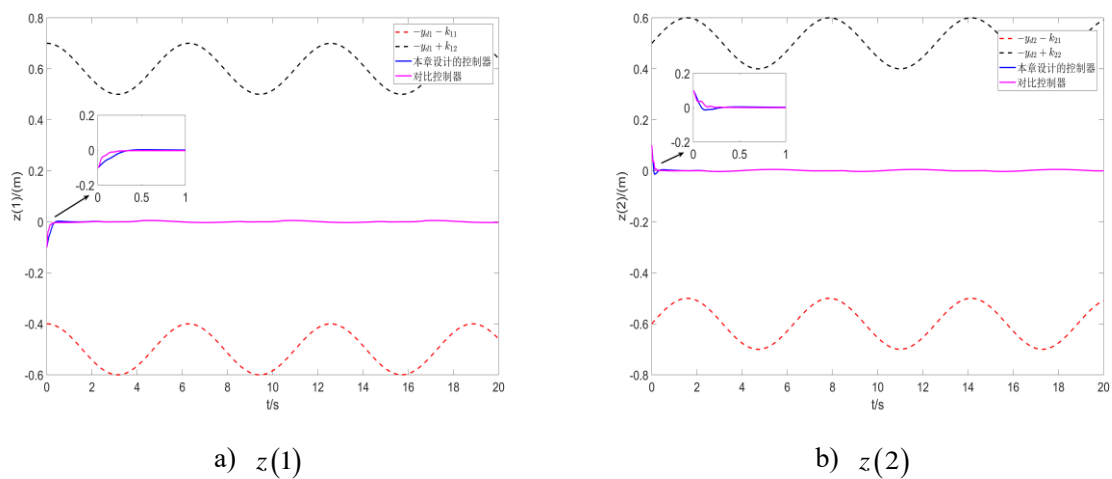


图 5-2 轨迹跟踪误差图

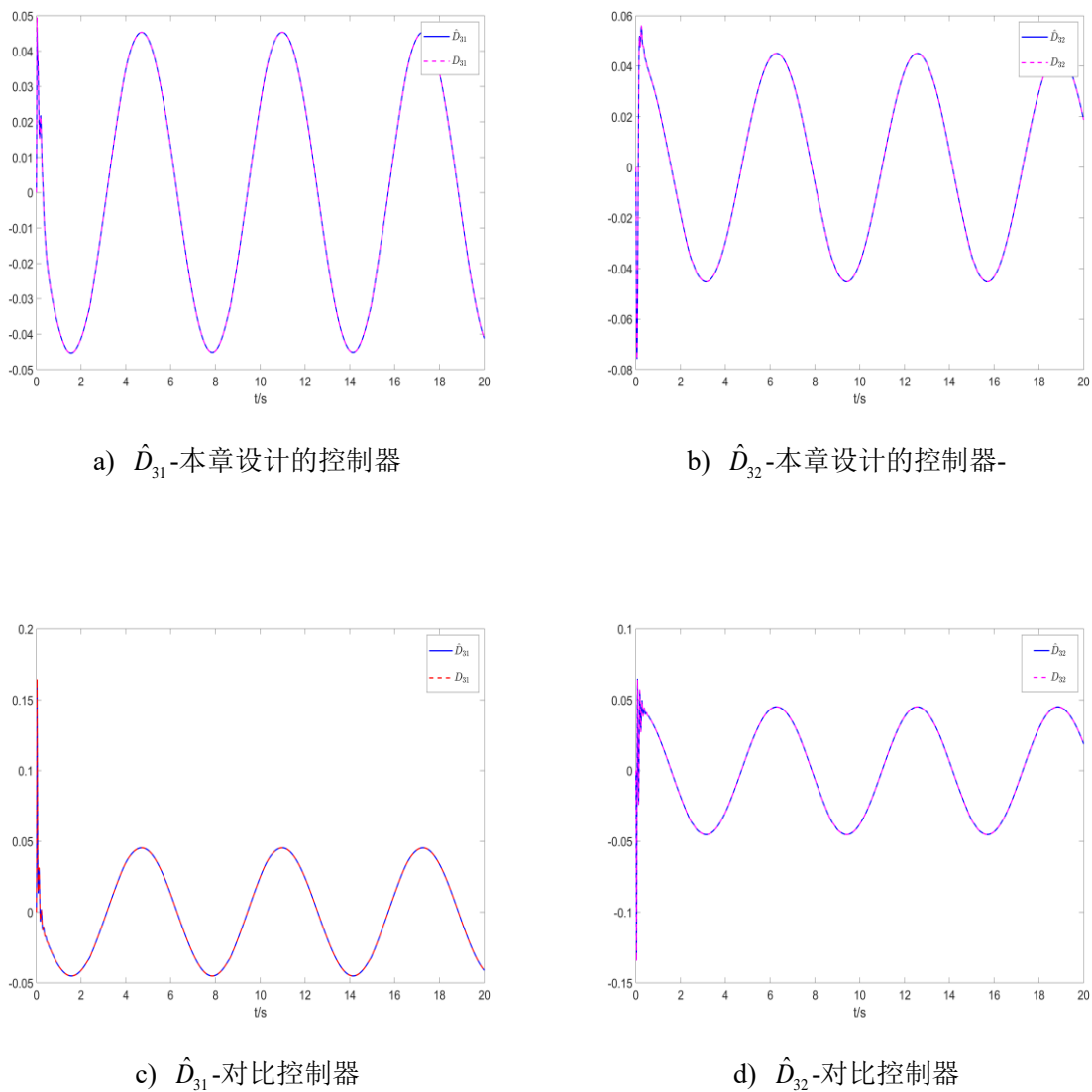
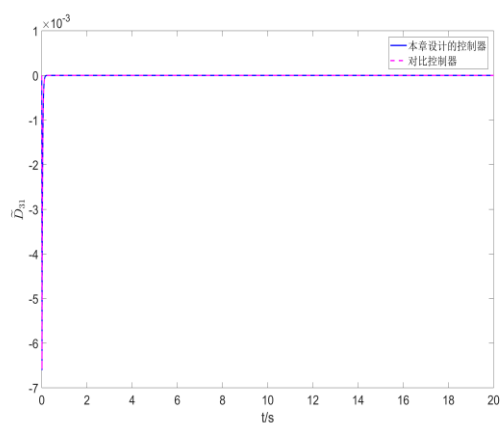
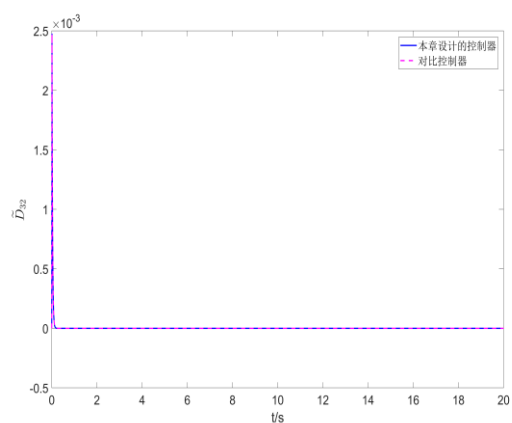


图 5-3 指数观测器估计值图

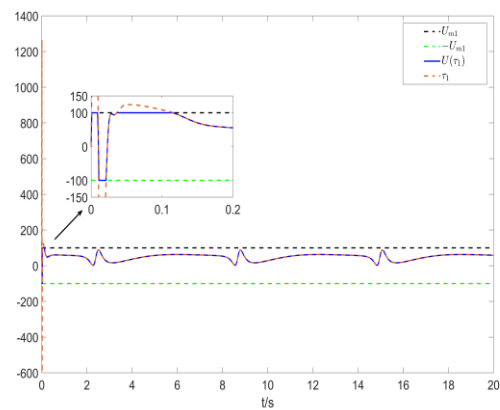


a)  $\tilde{D}_{31}$

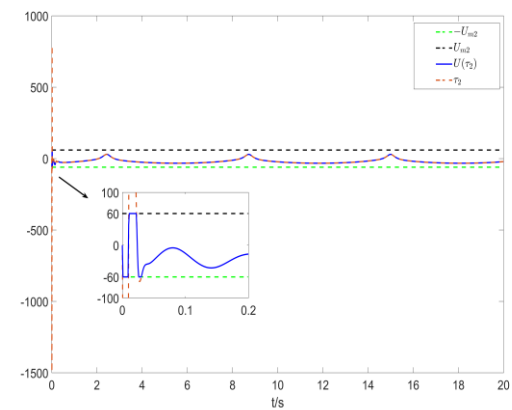


b)  $\tilde{D}_{32}$

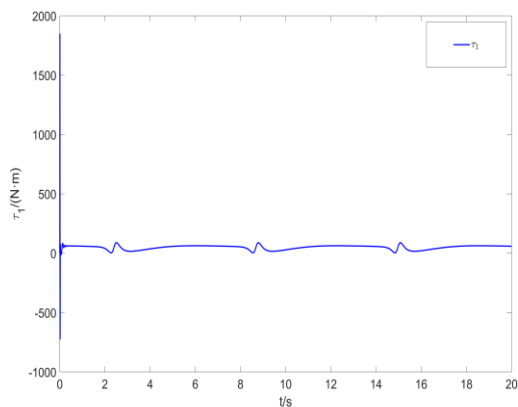
图 5-4 指数观测器估计误差图



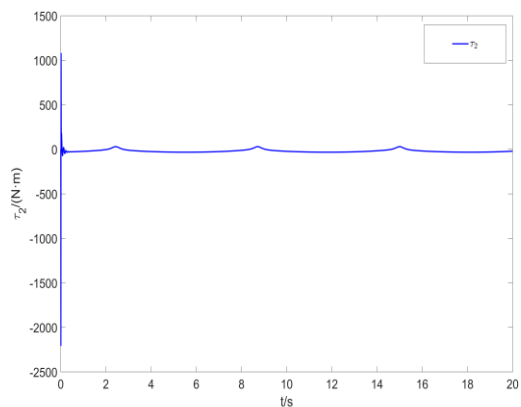
a) 系统输入 1-本章设计的控制器



b) 系统输入 2-本章设计的控制器



c) 系统输入 1-对比控制器



d) 系统输入 2-对比控制器

图 5-5 系统输入图



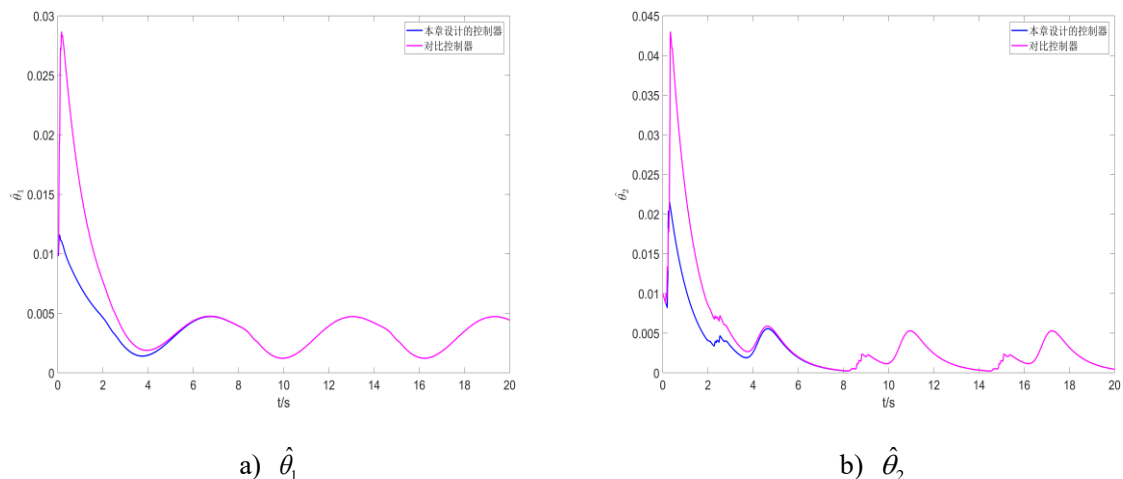


图 5-6 自适应参数图

仿真如图 5-1 至 5-6 所示。图 5-1 给出了系统输出  $y$ 、期望轨迹  $y_d$  以及输出约束函数  $-F_{i1}(t), F_{i2}(t), i=1,2$  的轨迹，可以看出系统输出都能够很好的跟踪上期望轨迹。图 5-2 给出了跟踪误差  $z(1), z(2)$  的轨迹，可以看出跟踪误差收敛到了零的小邻域内。图 5-3 与图 5-4 分别给出了运动学不确定项  $D_{31}, D_{32}$  与估计值  $\hat{D}_{31}, \hat{D}_{32}$ 、估计误差  $\tilde{D}_{31}, \tilde{D}_{32}$  的轨迹，可以看出指数观测器能够准确的估计运动学不确定项，且估计误差很快的收敛到零的小邻域内。图 5-5 给出了系统输入的轨迹，可以看出本章设计的控制器满足输入饱和，而对比控制器不仅不满足输入饱和，还超出了饱和值很多。综合图 5-1、图 5-2 与图 5-5 可以看出，虽然在对比控制器作用下的系统输出跟踪上期望轨迹的时刻要稍微早些，但是对应的代价却是系统输入在初始时间段幅值过大，这很有可能对执行机构造成损伤。图 5-6 给出了自适应参数  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  的轨迹。综上，对比仿真结果较好的证明了本章所提控制方案的有效性和优越性。

## 5.5 本章小结

本章针对不确定柔性关节机械臂的任务空间轨迹跟踪问题，在考虑输入饱和、输出约束情况下，基于 RBF 神经网络理论，提出了一种自适应神经网络轨迹跟踪控制方案。输入饱和与输出约束分别通过引入一个辅助变量和 NSDF 来解决，柔性关节机械臂动力学不确定项通过 RBF 神经网络进行逼近且只需要自适应更新神经网络权值的模，运动学不确定项则通过指数观测器进行估计。本章所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号都是有界的，系统输入和输出都保持在给定的约束范围内，且轨迹跟踪误差收敛到一个零的小邻域内。最终，通过对比仿真实验，证明了所提控制方案的有效性和优越性。

## 总结与展望

### 全文总结

作为对人力的替代，机械臂在医疗、工业制造、航空航天、国防军事、家政服务等领域被广泛应用。在复杂的工作环境下，机械臂的运行不仅会受到各种约束限制，而且还会受到外界的干扰以及模型不确定性带来的影响。因此，本文考虑输出约束与输入饱和，针对不确定机械臂的任务空间轨迹跟踪控制问题进行了研究。

本文的主要研究成果总结如下：

1. 针对具有时变输出约束与输入饱和的不确定刚性机械臂，结合反步法，提出了一种基于 UDE 的任务空间轨迹跟踪控制算法。首先，设计 UDE 估计机械臂模型不确定项以及未知的外界干扰，不同于常见的神经网络或者模糊系统，UDE 的设计更加简洁，仅需要知道目标对象的带宽。其次，为了解决输入饱和与输出约束，分别设计了 NSDF 以及辅助系统。最终，基于 Lyapunov 理论，证明了所设计的控制器能够保证整个闭环系统稳定，闭环系统所有信号都是 UUB 的，输入饱和与输出约束没有被违背且轨迹跟踪误差能够收敛到一个零的小邻域内。

2. 针对具有时变输出约束与输入饱和的不确定刚性机械臂，提出了一种基于 UDE 的预设收敛时间任务空间轨迹跟踪控制方案。相比于有限时间控制器，所设计的控制器使收敛时间不再依赖于系统的初始状态，相比于固定时间控制器，所设计的控制器对收敛时间的调整更加容易，可以预先明确的任意选择收敛时间。输入饱和通过设计一个预设时间收敛的辅助变量来处理。此外，输出约束、模型不确定项与未知外界干扰分别通过 BLF 与 UDE 解决。最后，基于 Lyapunov 理论，证明了所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号在预设收敛时间内收敛，输入饱和与输出约束不被违背，且轨迹跟踪误差在预设收敛时间内收敛到一个零的小邻域内。

3. 针对具有时变输出约束与输入饱和的不确定柔性关节机械臂，基于反步法和 RBF 神经网络理论，提出了一种自适应神经网络任务空间轨迹跟踪控制器。所设计的控制器同时考虑了运动学和动力学不确定性，并分别采用了 RBF 神经网络与指数观测器实现逼近与估计，且神经网络只需要更新权值的模，大大的减少了计算量。此外，指数观测器能够实现估计误差的指数收敛，为实现精准的轨迹跟踪控制提供了良好的基础。输出约束和输入饱和分别通过构造 NSDF 以及辅助变量来解决，相比于解决输入饱和问题时常用的辅助系统，单一辅助变量更加简洁。针对反步法设计中存在的“计算爆炸”问题，

采用二阶的命令滤波器解决，同时还构建了一个滤波器误差补偿系统来减轻命令滤波器的引入带来的影响。最终，基于 Lyapunov 理论，证明了所设计的控制方案能够保证闭环系统所有信号有界，输入饱和与输出约束不被违背，且轨迹跟踪误差收敛到一个零的小邻域内。

## 工作展望

本文先后针对刚性机械臂和柔性关节机械臂的任务空间轨迹跟踪控制问题进行了研究，考虑了输入饱和、输出约束、模型不确定性、未知外界干扰等因素，设计了三种任务空间轨迹跟踪控制器。虽然本文所设计的控制器都取得了良好的控制效果，但仍然还有一些需要完善的地方：

1. 时滞是柔性多关节机械臂系统中的一种常见的现象，对系统的稳定性会产生一定的影响。因此，在柔性关节机械臂的轨迹跟踪控制方案设计过程中，我们需要进一步考虑时滞问题。

2. 柔性机械臂的柔性主要体现在连杆柔性和关节柔性两个方面，本文仅对柔性关节机械臂的控制进行了一定的研究，忽略了柔性连杆对机械臂的控制的影响。因此，考虑柔性连杆对系统模型的影响，如何设计高精度高性能的轨迹跟踪控制器需要进一步地研究探讨。

3. 本文所设计的控制器都是实现轨迹跟踪控制的，然而在实际应用中，除了要对机械臂的运行轨迹进行控制外，还要对机械臂的力进行控制。因此，有必要从对机械臂轨迹跟踪控制的研究进一步延伸到对机械臂力/位混合控制的研究。

4. 受实验室条件限制，本文只进行了仿真实验来验证了所提出控制方案的正确性和有效性，并没有在实际的机械臂上进行实验验证。然而，在实物上进行实验是从理论过度到实际应用中的重要步骤。因此，在未来的工作中，如果条件许可，一定要做实物实验，进一步验证所设计控制方案的有效性。

## 参考文献

- [1] 黄红捷. 工业机械臂轻量化设计的研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2021
- [2] La V.T., Huang Shoudao, Tran T.D., et.al. Vu. Adaptive robust backstepping sliding mode control of a de-icing industrial robot manipulator using neural network with dead zone[J]. International Journal of Robotics and Automation, 2021, 36(3): 154-169
- [3] 杨立欢, 陈惠贤. 关节铰接双面接触摩擦对医用机械臂影响分析[J]. 机械与电子, 2020, 38(01): 76-80
- [4] 郑晓斌. 基于模糊滑模变结构的工业机械臂控制系统研究[J]. 陕西理工大学学报(自然科学版), 2019, 35(01): 22-27
- [5] Shao Xiangyu, Yao Weiran, Li Xiaolei, et al. Direct Trajectory Optimization of Free-Floating Space Manipulator for Reducing Spacecraft Variation[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 2795-2802
- [6] Pradhan S.K., Subudhi B.. Position control of a flexible manipulator using a new nonlinear self-Tuning PID controller[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 7(1): 136-149
- [7] Ardeshiri R.R., Khooban M.H., Noshadi A., et al. Robotic manipulator control based on an optimal fractional-order fuzzy PID approach: SiL real-time simulation [J]. Soft Computing, 2020, 24(5): 3849-3860
- [8] Qiao Lei, Zhao Min, Wu Chao, et al. Adaptive PID control of robotic manipulators without equality/inequality constraints on control gains[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021
- [9] Zhong Guoliang, Wang Changming, Dou Weiqiang. Fuzzy adaptive PID fast terminal sliding mode controller for a redundant manipulator[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 159
- [10] Zhou Jinglei, Liu Endong, Tian Xiumei, et al. Adaptive Fuzzy Backstepping Control Based on Dynamic Surface Control for Uncertain Robotic Manipulator[J]. IEEE Access, 2022, 10: 23333-23341
- [11] Xi Leiping, Zhu Yiming, Li Xiaomin, et al. Adaptive backstepping sliding mode controller design for robotic manipulator position tracking[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2012, 33(3): 253-257
- [12] Liu Haitao, Tian Xuehong, Wang Gui, et al. Finite-Time H-infinity Control for High-Precision Tracking in Robotic Manipulators Using Backstepping Control[J]. IEEE

- Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(9): 5501-5513
- [13]Datouo R., Biya-Motto F., Melingui A., et al. Adaptive Fuzzy Finite-Time Command-Filtered Backstepping Control of Flexible-Joint Robots[J]. Robotica, 2021, 39(6): 1081-1100
- [14]Liu Fucal, Liang Lihuan, Qin Li, et al. Sliding mode control for space manipulator trajectory tracking considering effects of gravity[J]. Kongzhi yu Juece/Control and Decision, 2014, 29(10): 1856-1860
- [15]Hwang J., Chwa D.. Robust Tracking Control of 6 DOF Manipulator using Artificial Neural Network based Integral Sliding Mode Control[J]. Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers, 2022, 71(1): 140-156
- [16]Ma Yajun, Zhao Hui, Li Tao. Robust adaptive dual layer sliding mode controller: Methodology and application of uncertain robot manipulator[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2022, 44(4): 848-860
- [17]席雷平, 陈自立, 李小民. 机械臂变指数趋近律滑模控制律设计[J]. 电光与控制, 2012, 19(4): 47-49
- [18]Tan Ning, Yu Peng. Robust model-free control for redundant robotic manipulators based on zeroing neural networks activated by nonlinear functions[J]. Neurocomputing, 2021, 438: 44-54
- [19]Lima Costa T., Lara-Molina F.A., Cavalini Junior A.A., et al. Robust Hinfinity Computed torque Control for Manipulators[J]. IEEE Latin America Transactions, 2018, 16(2): 398-407
- [20]Dai Li, Yu Yuantao, Zhai Dihua, et al. Robust Model Predictive Tracking Control for Robot Manipulators with Disturbances[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2021, 68(5): 4288-4297
- [21]Izadbakhsh A., Khorashadizadeh S.. Robust task-space control of robot manipulators using differential equations for uncertainty estimation[J]. Robotica, 2017, 35(9): 1923-1938
- [22]Zhou Jinglei, Zhang Qunli. Adaptive Fuzzy Control of Uncertain Robotic Manipulator[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018
- [23]Cheng Xin, Zhang Yajun, Liu Huashan, et al. Adaptive neural backstepping control for flexible-joint robot manipulator with bounded torque inputs[J]. Neurocomputing, 2021, 458: 70-86
- [24]Wang Jiayao, Cui Yang. Adaptive Neural Tracking Control for a Two-Joint Robotic Manipulator with Unknown Time-Varying Delays[J]. Complexity, 2022.
- [25]Neo S.S., Er M.J.. Adaptive fuzzy controllers of a robot manipulator[J]. International

- Journal of Systems Science, 1996, 27(6): 519-532
- [26] Chang Wanmin, Li Yongming, Tong Shaocheng. Adaptive Fuzzy Backstepping Tracking Control for Flexible Robotic Manipulator[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2021, 8(12): 1923-1930
- [27] Rahmani B., Belkheiri M.. Adaptive neural network output feedback control for flexible multi-link robotic manipulators[J]. International Journal of Control, 2019, 92(10): 2324-2338
- [28] He Wei, Huang Bo, Dong Yiting, et al. Adaptive Neural Network Control for Robotic Manipulators with Unknown Deadzone[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(9): 2670-2682
- [29] 王鹏飞, 胡健, 姚建勇, 等. 考虑输出约束的机械臂自适应神经网络鲁棒控制[J]. 测控技术, 2021, 40(08): 105-111
- [30] Sun Tairen, Pei Hailong, Pan Yongping, et al. Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators[J]. Neurocomputing, 2011, 74(14-15): 2377-2384
- [31] Yu Xinbo, Zhang Shuang, Fu Qiang, et al. Fuzzy Logic Control of an Uncertain Manipulator with Full-State Constraints and Disturbance Observer[J]. IEEE Access, 2020, 8: 24284-24295
- [32] Jagannathan S., Hameed M.. Adaptive force balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits[A]. Proceedings of the American Control Conference[C]. Boston, MA, USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2004: 1862-1867
- [33] He Wei, Dong Yiting, Sun Changyin. Adaptive Neural Impedance Control of a Robotic Manipulator With Input Saturation[J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems, 2016, 46(3): 334-344
- [34] Yao Wei, Guo Yu, Wu Yifei, et al. Robust Adaptive Dynamic Surface Control of Multi-link Flexible Joint Manipulator with Input Saturation[J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2022, 20(2): 577-588
- [35] Yang Chenguang, Huang Dianyue, He Wei, et al. Neural Control of Robot Manipulators With Trajectory Tracking Constraints and Input Saturation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(9): 4231-4242
- [36] Zhang Shuang, Liu Rui, Peng Kaixiang, et al. Boundary Output Feedback Control for a Flexible Two-Link Manipulator System With High-Gain Observers[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2021, 29(2): 835-840
- [37] Wu Yuxiang, Xu Tian, Fang Haoran. Command filtered adaptive neural tracking control of

- uncertain nonlinear time-delay systems with asymmetric time-varying full state constraints and actuator saturation[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I- Journal of Systems and Control Engineering, 2021, 235(7): 1139-1153
- [38]Ngo K.B, Mahony R., Jiang ZhongPing. Integrator Backstepping using Barrier Functions for Systems with Multiple State Constraints[A]. IEEE Conference on Decision and Control[C]. Seville, Spain: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2005: 8306-8312
- [39]Zhang Shuang, Dong Yiting, Ou Yang, et al. Adaptive Neural Control for Robotic Manipulators with Output Constraints and Uncertainties[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(11): 5554-5564
- [40]林孟豪, 张蕾, 李鹏飞, 等. 考虑输出约束的机械臂命令滤波反步控制[J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(12): 70-78
- [41]Tee K.P., Ge S.S., Tay E H. Barrier Lyapunov Functions for the control of output constrained nonlinear systems[J]. Automatica, 2009, 45(4): 918-927
- [42]Mishra P.K., Dhar N.K., Verma N.K.. Adaptive Neural-Network Control of MIMO Nonaffine Nonlinear Systems With Asymmetric Time-Varying State Constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(4): 2042-2054
- [43]Zhao Kai, Song Yongduan. Removing the Feasibility Conditions Imposed on Tracking Control Designs for State Constrained Strict Feedback Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1265-1272
- [44]Zhao Kai, Chen Long, Meng Wenchao, et al. Unified Mapping Function-Based Neuroadaptive Control of Constrained Uncertain Robotic Systems[J]. 2022
- [45]Zhao Zhijia, He Xiuyu, AHN C.K.. Boundary Disturbance Observer-Based Control of a Vibrating Single-Link Flexible Manipulator[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(4): 2382-2390
- [46]于欣波, 贺威, 薛程谦. 基于扰动观测器的机器人自适应神经网络跟踪控制研究[J]. 自动化学报, 2019, 45(07): 1307-1324
- [47]Ha W., Back J.. A Disturbance Observer-based Robust Tracking Controller for Uncertain Robot Manipulators[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16(2): 417-425
- [48]Verma V., Chauhan P., Gupta M.K.. Disturbance Observer-assisted Trajectory Tracking Control for Surgical Robot Manipulator[J]. Journal Europeen des Systemes Automatisés, 2019, 52(4): 355-362

- [49]Sun Tairen, Cheng Long, Hou Zengguang, et al. Novel sliding-mode disturbance observer-based tracking control with applications to robot manipulators[J]. Science China Information Sciences, 2021, 64(7)
- [50]Ren Beibei, Wang Yao, Chen Jiayu, et al. A novel nonlinear disturbance observer embedded second-order finite time tracking-based controller for robotic manipulators[J]. Journal of Computing and Information Science in Engineering, 2021, 21(6)
- [51]Zhong Qingchang, Rees D.. Control of uncertain LTI systems based on an uncertainty and disturbance estimator[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME, 2004, 126(4): 905-910
- [52]Liu Chengxiang, Zhao Zhijia, Wen Guilin. Adaptive neural network control with optimal number of hidden nodes for trajectory tracking of robot manipulators[J]. Neurocomputing, 2019, 350:136-145
- [53]Dogan K.M., Tatlicioglu E., Zergeroglu E., et al. Learning Control of Robot Manipulators in Task Space[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(3): 1003-1013
- [54]Liang Xichang, Wan Yi, Zhang Chengrui. Task Space Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators with Uncertain Kinematics and Dynamics[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017
- [55]Gang Feng. A new adaptive control algorithm for robot manipulators in task space[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1995, 11(3): 457-462
- [56]Xu Zhihao, Zhou Xuefeng, Cheng Taobao, et al. Adaptive task-space tracking for robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics and without using acceleration[A]. IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics[C]. Macau, China: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2017: 669-674
- [57]Wang Hanlei. Adaptive Control of Robot Manipulators with Uncertain Kinematics and Dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(2): 948-954
- [58]Hu Qinglei, Xu Liang, Zhang Aihua. Adaptive backstepping trajectory tracking control of robot manipulator[J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(3): 1087-1105
- [59]Liu Fucui, Gao Jingfang, Jia Xiaojing. Adaptive network control of flexible-joint space manipulator in task space under gravity effect[J]. Yuhang Xuebao/Journal of Astronautics, 2015, 36(12): 1391-1397
- [60]Zhang Yu, Hua Changchun, Li Kuo. Disturbance observer-based fixed-time prescribed performance tracking control for robotic manipulator[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(13): 2437-2448
- [61]Ling Song, Wang Huanqing, Liu P.X.. Adaptive Fuzzy Tracking Control of Flexible-Joint



- Robots Based on Command Filtering[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2020, 67(5): 4046-4055
- [62]廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2010
- [63]Ioannou P.A., Sun J.. Robust Adaptive Control[M]. NJ, USA: Prentice Hall, 1996
- [64]Ahmadi S.M., Fateh M.M.. Task-space asymptotic tracking control of robots using a direct adaptive Taylor series controller[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(23): 5570-5584
- [65]Xiao Bing, Yin Shen. Exponential Tracking Control of Robotic Manipulators With Uncertain Dynamics and Kinematics[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(2): 689-698
- [66]Gholipour R., Fateh M.M.. Adaptive task-space control of robot manipulators using the Fourier series expansion without task-space velocity measurements[J]. Measurement, 2018, 123: 285-292
- [67]Zhao Kai, Song Yongduan. Neuroadaptive Robotic Control Under Time-Varying Asymmetric Motion Constraints: A Feasibility-Condition-Free Approach [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(1): 15-24
- [68]Liu Jiehan, Wang Chaoli, Xu Yujing. Distributed adaptive output consensus tracking for high-order nonlinear time-varying multi-agent systems with output constraints and actuator faults[J]. Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics, 2020, 357(2): 1090-1117
- [69]Liu Yanjun, Lu Shumin, Tong Shaocheng. Neural Network Controller Design for an Uncertain Robot with Time-Varying Output Constraint[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(8): 2060-2068
- [70]Liu Yanjun, Tong Shaocheng. Barrier Lyapunov Functions-based adaptive control for a class of nonlinear pure-feedback systems with full state constraints[J]. Automatica, 2016, 64: 70-75.
- [71]Wu Yuxiang, Xu Tian, Mo Hongqiang. Adaptive tracking control for nonlinear time-delay systems with time-varying full state constraints[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2020, 42(12): 2178-2190
- [72]Slotine J.-J. E., Li Weiping. Applied Nonlinear Control[M]. NJ, USA: Prentice Hall, 1991
- [73]He Wei, Chen Yuhao, Yin Zhao. Adaptive Neural Network Control of an Uncertain Robot with Full-State Constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2016, 46(3): 620-629
- [74]Wu Yuxiang, Huang Rui, Wang Yu, et al. Adaptive tracking control of robot manipulators with input saturation and time-varying output constraints[J]. Asian Journal of Control, 2021,

- 23(3): 1476-1489
- [75] Asar M.F., Elawady W.M., Sarhan A.M.. ANFIS-based an adaptive continuous sliding-mode controller for robot manipulators in operational space[J]. *Multibody System Dynamics*, 2019, 47(2): 95-115
- [76] Bhat S.P., Bernstein D.S.. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *Siam Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766
- [77] Zhao D., Li S., Zhu Q., et al. Robust finite-time control approach for robotic manipulators[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(1): 1-15
- [78] Zhou Jinglei. Adaptive fuzzy finite-time control for uncertain robotic manipulator[J]. *International Journal of Robotics and Automation*, 2017, 32(2): 134-141
- [79] Polyakov A.. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2106-2110
- [80] Zhang Liyin, Wang Youming, Hou Yinlong, et al. Fixed-time sliding mode control for uncertain robot manipulators[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 149750-149763
- [81] Wu Cihang, Yan Jianguo, Shen Jiahe, et al. Predefined-Time Attitude Stabilization of Receiver Aircraft in Aerial Refueling[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(10): 3321-3325
- [82] Zuo Zongyu. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks[J]. *Automatica*, 2015, 54: 305-309
- [83] Cheng Long, Hou Zengguang, Tan Min. Adaptive neural network tracking control for manipulators with uncertain kinematics, dynamics and actuator model [J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2312-2318
- [84] 司文杰, 王聪, 董训德, 等. 随机时滞系统的神经网络输出反馈动态面控制[J]. *控制与决策*, 2017, 32(08): 1377-1385
- [85] Dong Wenjie, Farrell J.A., Polycarpou M.M., et al. Command Filtered Adaptive Backstepping[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, 20(3): 566-580