泛函分析读书笔记

夏康玮

2022 年 3 月 5 日

Preface

兜兜转转很久终于开始了笔记的输出，其实泛函分析本不是我现在的学习任务，但是本科学习的时候恰逢疫情期间，老师让我们自己看书学习，完全放养下就变成了摸鱼状态，最后考试临时抱佛脚加上考试没出难题才渡过一关．

研一上半学期是第二遍学习，用的是许全华老师的《泛函分析讲义》．书本身不错，但是言简意赅的同时也会让我这个半吊子水平的人有时摸不着头脑，再加上研一上的时候自己学习一直不在状态，课后不复习，然后陷入恶性循环，最后还是啥也没学到．

这学期恰逢江宁老师讲弘毅班的泛函分析课程，之前就对江老师的厉害有所耳闻，于是打算旁听，终于解决掉讨论班和泛函的时间冲突后终于可以安心上课和学习，前三周也过去了，不能再像以前一样陷入恶性循环，基本的笔记宏包和文类也写的差不多了，已经没有再拖延的借口．

自己也需要借此机会来探寻和稳固适合自己的学习方法，输入内化输出，如何才能让学习最高效．

不管怎么样，先往下做吧．完成往往比完美好．

铭记：你不需要很厉害才能开始，但你只有开始才能很厉害，共勉．

夏康玮于珞珈山
2022 年 3 月 5 日

Contents

Chapter 1 第一章 1

Chapter 2 《泛函分析讲义（第二版）上》张恭庆林源渠 — 习题参考解答 2

2.1 度量空间 2

2.1.1 压缩映射原理 2

Chapter 1

第一章

《泛函分析讲义（第二版）上》张恭庆林源渠 — 习题参考解答

1.1 度量空间

1.1.1 压缩映射原理

1. 证明：完备空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

解答

分析 证明没什么太大的难度，核心就是度量空间中闭集的序列刻画和完备的定义

Step 1. 先证明前半结论. 任取闭子集的一个基本列，那么它也是大空间的基本列而大空间完备，那么就收敛，极限点由子集闭知也在子集内，那么这个子集就是完备的

Step 2. 再证明后半结论. 任取完备子空间的一个收敛序列，那么它也是基本列，而由于完备那么它收敛的极限就在这个子空间内，由闭集的定义（《泛函分析讲义（第二版）上》张恭庆林源渠 P2 定义 1.1.4）知子空间是闭集

2. （Newton 法）设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x} \in (a,b)$ 使得 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证: 存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$, 使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$, 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的, 并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$$

解答 （《泛函分析学习指南》林源渠 P8）考虑 $Tx \triangleq x - \frac{f(x)}{f'(x)}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Tx) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

因为 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0, f''(x)$ 在点 $\hat{x}$ 处连续，所以 $\lim_{x\to\hat{x}} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 0$，从而 $\exists \hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$，使得

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| \leqslant \alpha < 1, \quad f'(x) \neq 0 \quad (\forall x \in U(\hat{x})),$$

$$|Tx - Ty| = \left|\frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}\right| |x - y| \leqslant \alpha|x - y| \quad (\forall x, y \in U(\hat{x})).$$

于是，对 $\forall x_0 \in U(\hat{x}), x_{n+1} = Tx_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是收敛的．设 $x_n \to x \in U(\hat{x}), Tx = x \Longrightarrow f(x) = 0$，联合

$$\left.\begin{aligned} f(\hat{x}) = 0, &\quad \hat{x} \in U(\hat{x}), \\ f(x) = 0, &\quad x \in U(\hat{x}), \\ f'(x) \neq 0, &\quad \forall x \in U(\hat{x}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad x = \hat{x}$$

故有 $x_n \to \hat{x} (n \to \infty)$．

更新日志