Sprawozdanie - laboratorium 1

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Krystsina Mironenka

1 Wstęp teoretyczny

W trakcie zajęć zajęliśmy się tematem rozkładu LU, który zastosować można do odwracania macierzy, obliczania jej wyznacznika i rozwiązywania układów równań.

1.1 Rozkład LU

Rozkład LU to procedura, która dąży do znalezienia macierzy **L** (od lower - dolny) i **U** (od upper - górny), których iloczyn będzie równy macierzy początkowej.

$$\boldsymbol{A = L \cdot U}$$

Gdzie L i U są następującej postaci:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u1, n \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Dla ułatwienia obliczeń, można też przyjąć, że wszystkie elementy na diagonali macierzy L są jedynkami. Jest wiele metod, którymi można dojść do takiego rozkładu np. metoda Gaussa-Crouta lub metoda Dolittle'a.

1.2 Zastosowanie rozkładu LU do innych operacji i obliczeń na macierzach

1.2.1 Obliczanie wyznacznika det(A)

Dzięki rozkładowi LU można m.in. obliczyć wyznacznik macierzy **A**. Z twierdzenia Cauchy'ego:

$$\boldsymbol{det(A) = del(L \cdot U) = det(L) \cdot det(U)}$$

Korzystając z faktu, że wyznacznik macierzy trójkątnej jest iloczynem elementów na przekątnej:

$$\boldsymbol{det(L)} = \iota_{1,1} \cdot \iota_{2,2} \ldots\ldots \iota_{n,n}, \boldsymbol{det(U)} = u_{1,1} \cdot u_{2,2} \ldots\ldots u_{n,n}$$

Co więcej - gdy założymy, że elementy na diagonali **L** są jedynkami, to **det(L) = 1**. Wówczas:

$$\boldsymbol{det(A) = det(L)}$$

1.2.2 Odwracanie macierzy

Rozkład LU jest też również przydatny do odwracania macierzy. By to zrobić, trzeba rozwiązać **n** układów równań z wektorami wyrazów wolnych postaci:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, b_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kolejne wektory rozwiązań tego układu utworzą macierz, która jest macierzą odwrotną **A**.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem w trakcie laboratoriów było wykonanie różnych operacji na macierzy **A**, której elementy są dane wzorem:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\sigma}$$

gdzie $\sigma=2$, gdy używamy biblioteki GSL.

Pierwszym zadaniem było znalezienie rozkładu LU macierzy A korzystając z funkcji: **gsl_linalg_ LU_decomp**, która dokonuje rozkładu LU na danej macierzy:

gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix *a, gsl_permutation *p, int *signum)

gdzie: **A** - macierz układu, **p** - wektor permutacji wierszy, **signum** - określa parzystą lub nieparzystą liczbę permutacji. Macierz **A** zostaje nadpisana macierzami: L (dolna trójkątna - poniżej diagonali) oraz **U** (górna trójkątna + diagonala).

Ważną informacją było to, że macierze **LU**, połączone w jedną nadpisują początkową macierz **A**, dlatego po wykonaniu tej operacji przekazaliśmy dane do dwóch nowo utworzonych macierzy **L** i **U.** Dla ułatwienia obliczeń przyjęliśmy, że na diagonali macierzy **L** znajdują się same jedynki.

Kolejnym zadaniem było obliczenie wyznacznika macierzy **A**, korzystając z podpunktu **1.2.1.**

Następnie należało znaleźć macierz odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$, korzystając z metody opisanej w podpunkcie **1.2.2**. Do rozwiązywania układów równań wykorzystaliśmy funkcję **gsl_linalg_LU solve**.

gsl_linalg_LU_solve(gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, gsl_vector *b, gsl_vector *x)

gdzie: **A** - to rozkład **LU** (wpisany do macierzy A), **b** - aktualny wektor wyrazow wolnych. Po kolei tworzyliśmy kolejne wektory wyrazów wolnych, rozwiązywaliśmy układ dzięki procedurze

gsl_linalg_LU_solve, a wyniki zapisywaliśmy do nowej macierzy, dzięki czemu powstała macierz $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Mając macierz odwrotną można było obliczyć iloczyn $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}$. Utworzyliśmy 3, proste pętle które pomnożyły obie macierze i zwróciły wynik w nowej macierzy.

Ostatnim zadaniem było obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy korzystając z normy:

$$\|A\|_{1,\infty}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$$

Tym razem również korzystając z prostych pętli i funkcji **fabs** znaleźliśmy odpowiednie wartości dla każdej z macierzy A i $\boldsymbol{A}^{-1}$ i pomożyliśmy je nawzajem.

2.2 Wyniki

Otrzymana przez nas macierz **A** na podstawie wzoru miała postać:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.33 & 0.25 & 0.2\\ 0.25 & 0.2 & 0.167 & 0.143\\ 0.33 & 0.25 & 0.2 & 0.167\\ 0.2 & 0.167 & 0.143 & 0.125\end{bmatrix}$$

Po dokonaniu rozkładu **LU** tej macierzy otrzymaliśmy następujące macierze:

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0 & 0\\ 0.67 & 0.83 & 1 & 0\\ 0.4 & 1 & -0.86 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.33 & 0.25 & 0.2\\ 0 & 0.033 & 0.042 & 0.043\\ 0 & 0 & -0.0014 & -0.0024\\ 0 & 0 & 0 & 0.000102\end{bmatrix}$$

Obliczony przez nas wyznacznik wyniósł $det(A)\approx-2.36216\text{e}09$ czyli jest niezerowy, więc możemy odwrócić macierz.

Macierz odwrotna macierzy A wygląda następująco:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}200 & -1200 & 2100 & -1120\\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400\\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800\\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800\end{bmatrix}$$

Następnie obliczyliśmy iloraz $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$, który z definicji powinien być macierzą jednostkową.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -8{,}86\text{e-}14 & -9.55\text{e-}14 & -1{,}78\text{e-}14 \\ -7.49\text{e-}14 & 1 & 1.55\text{e-}13 & 6.09\text{e-}14 \\ -4.79\text{e-}14 & 6.33\text{e-}14 & 1 & 1.97\text{e-}14 \\ -2.84\text{e-}14 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak widać powyżej macierz ta nie jest macierzą jednostkową, ale gdyby dokonać przybliżeń wartości, to miałaby już taką postać. Świadczy to o tym, że metoda jest prawidłowa, ale z jakichś przyczyn niedokładna.

Na sam koniec obliczyliśmy wskaźnik uwarunkowania macierzy wg normy z równania wyżej

$$k(\boldsymbol{A}) = 14700$$

Wskaźnik $\kappa(\boldsymbol{A})$ jest bardzo wysoki.

3 Wnioski

Otrzymany w obliczeniach wysoki wskaźnik uwarunkowania macierzy świadczy o tym, że dane rozwiązywanego przez nas problemu były źle dobrane i nie nadają się do numerycznego rozwiązywania.
Przykładem tego jest to, że zgodnie z definicją macierzy odwrotnej iloraz macierzy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ dla niezerowego wyznacznika powinien być równy macierzy jednostkowej, a nasze wyniki nie są temu równe.