

Robust Methods for Optical Interferometry Images

Ph.D Thesis

M. en C. Orlando Miguel Medina Cázares

Centro de Investigaciones en Óptica

23 de Noviembre del 2015

Asesor: Dr. Julio Estrada Rico.
Co-Asesor: Dr Manuel Servin Guirado.

Algoritmos de Cuadratura

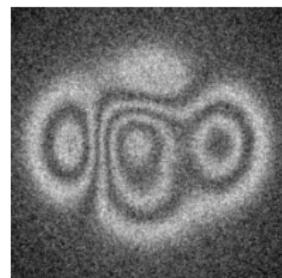
Patrón de franjas:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\phi(x, y)] \quad (1)$$

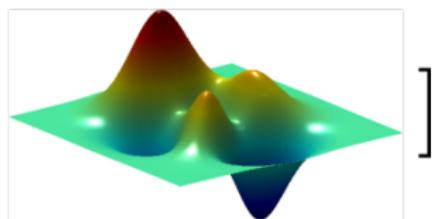
Algoritmos de Cuadratura

Patrón de franjas:

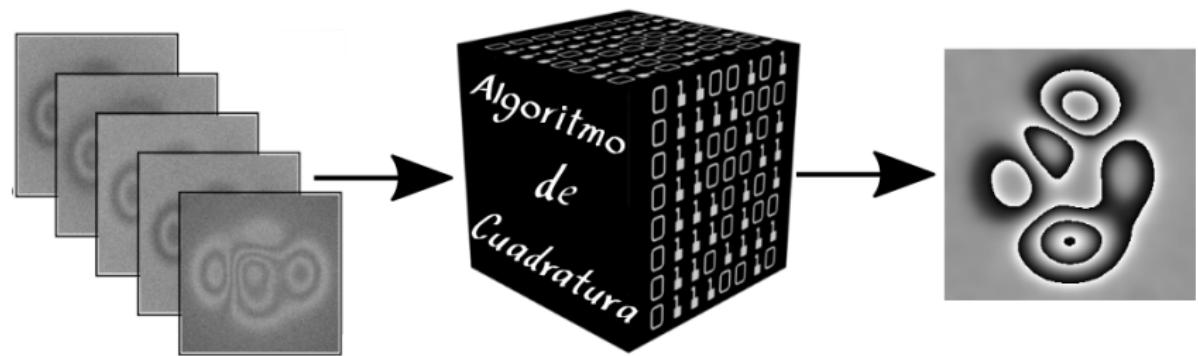
$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad (1)$$



$$= a + b \cos[$$



Algoritmos de Cuadratura

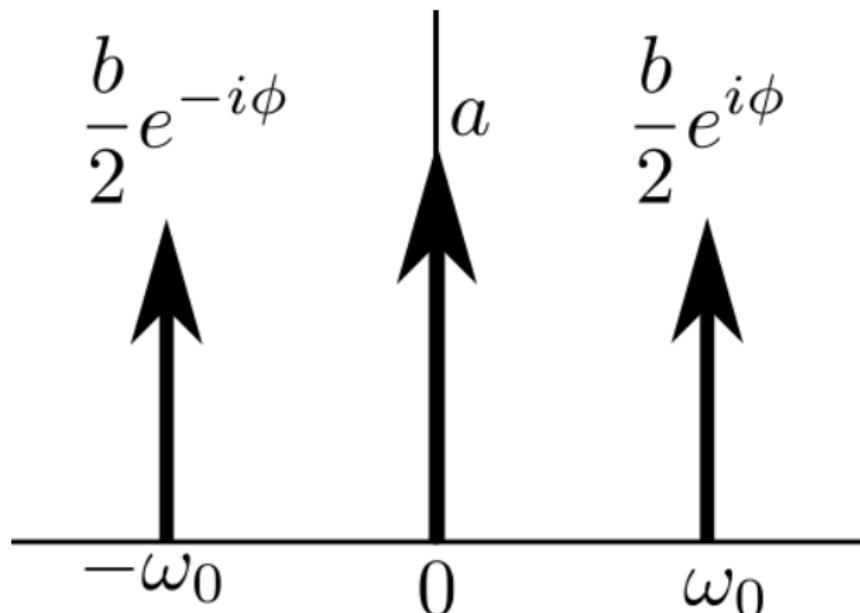


Algoritmos de Cuadratura

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[I(x, y)] &= I(\omega) \\ &= a\delta(\omega) + \frac{b}{2}e^{-i\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{b}{2}e^{i\phi}\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}\quad (2)$$

Algoritmos de Cuadratura

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[I(x, y)] &= I(\omega) \\ &= a\delta(\omega) + \frac{b}{2}e^{-i\phi}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{b}{2}e^{i\phi}\delta(\omega + \omega_0)\end{aligned}\quad (2)$$

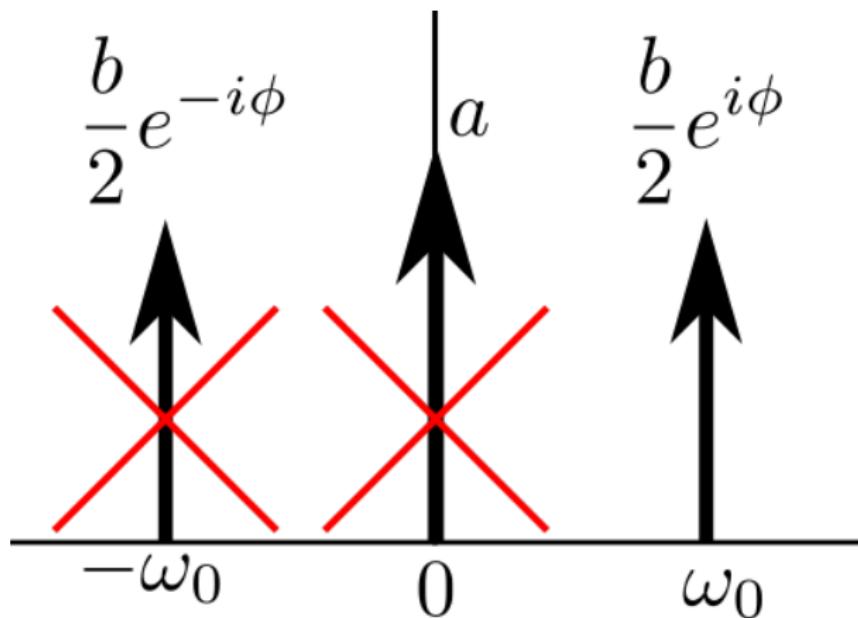


Algoritmos de Cuadratura

$$H(-\omega_0) = H(0) = 0, H(\omega_0) \neq 0 \quad (3)$$

Algoritmos de Cuadratura

$$H(-\omega_0) = H(0) = 0, H(\omega_0) \neq 0 \quad (3)$$

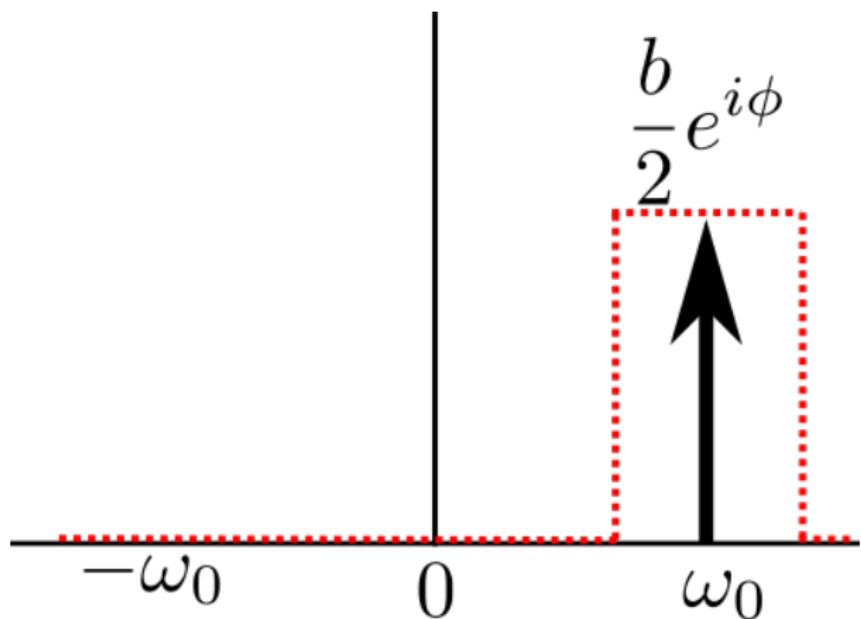


Algoritmos de Cuadratura

$$I(\omega)H(\omega) = \frac{b}{2} \exp[i\phi] \quad (4)$$

Algoritmos de Cuadratura

$$I(\omega)H(\omega) = \frac{b}{2} \exp[i\phi] \quad (4)$$

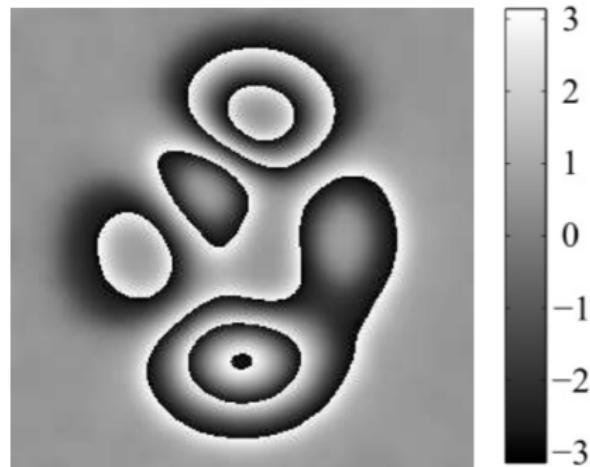


Algoritmos de Cuadratura

$$\hat{\phi} = \text{atan} \left[\frac{\text{Im}\left\{ \frac{b}{2} \exp[i\phi] \right\}}{\text{Re}\left\{ \frac{b}{2} \exp[i\phi] \right\}} \right] = \text{atan} \left[\frac{\sin[\phi]}{\cos[\phi]} \right] \quad (5)$$

Algoritmos de Cuadratura

$$\hat{\phi} = \text{atan} \left[\frac{\text{Im}\left\{ \frac{b}{2} \exp[i\phi] \right\}}{\text{Re}\left\{ \frac{b}{2} \exp[i\phi] \right\}} \right] = \text{atan} \left[\frac{\sin[\phi]}{\cos[\phi]} \right] \quad (5)$$

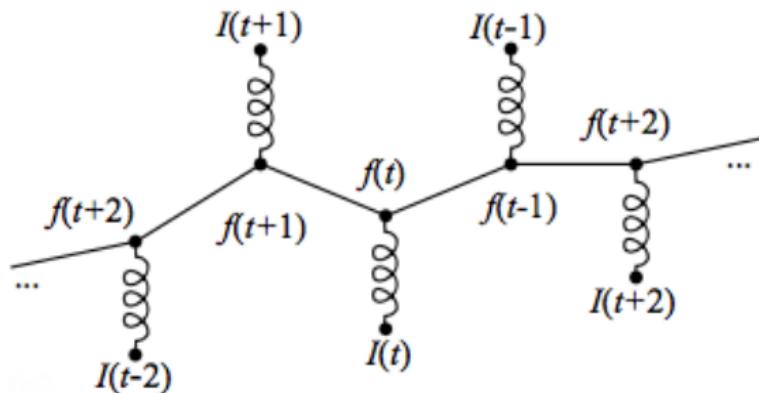


Filtros Regularizados

$$U[f(x, y)] = \iint_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy \quad (6)$$

Filtros Regularizados

$$U[f(x, y)] = \iint_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right]^2 \right\} dx dy \quad (6)$$

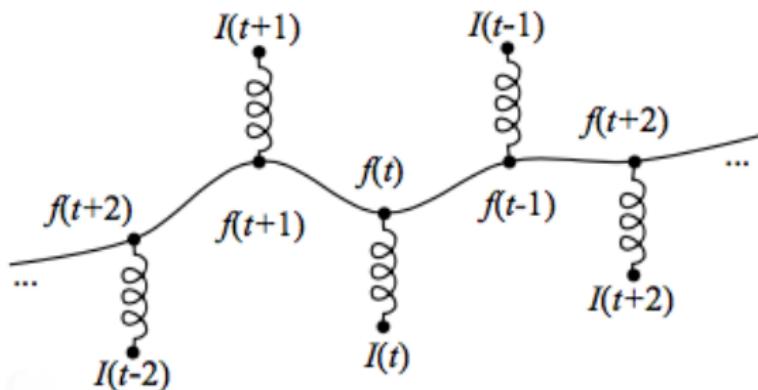


Filtros Regularizados

$$U[f(x, y)] = \iint_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} dx dy \quad (7)$$

Filtros Regularizados

$$U[f(x, y)] = \iint_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right]^2 + \eta \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} dx dy \quad (7)$$



Filtros Regularizados

Funcional:

$$U[f(x, y)] = \sum_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta R[f(x, y)] \right\} \quad (8)$$

Regularizador Resorte:

Filtros Regularizados

Funcional:

$$U[f(x, y)] = \sum_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta R[f(x, y)] \right\} \quad (8)$$

Regularizador Resorte:

$$R_r[f(x, y)] = [f(x, y) - f(x-1, y)]^2 + [f(x, y) - f(x, y-1)]^2 \quad (9)$$

Regularizador Placa:

Filtros Regularizados

Funcional:

$$U[f(x, y)] = \sum_{(x,y) \in S} \left\{ [f(x, y) - I(x, y)]^2 + \eta R[f(x, y)] \right\} \quad (8)$$

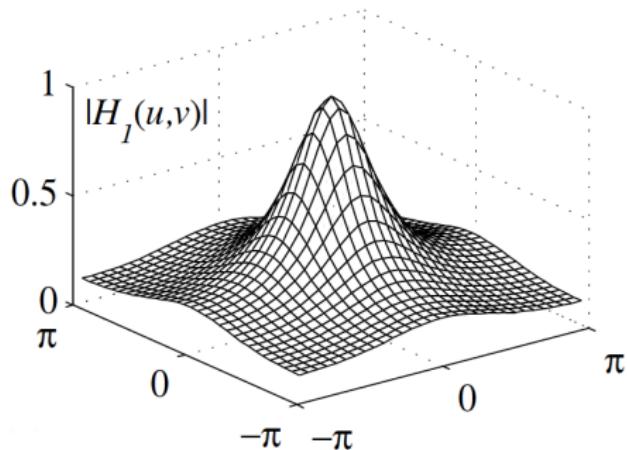
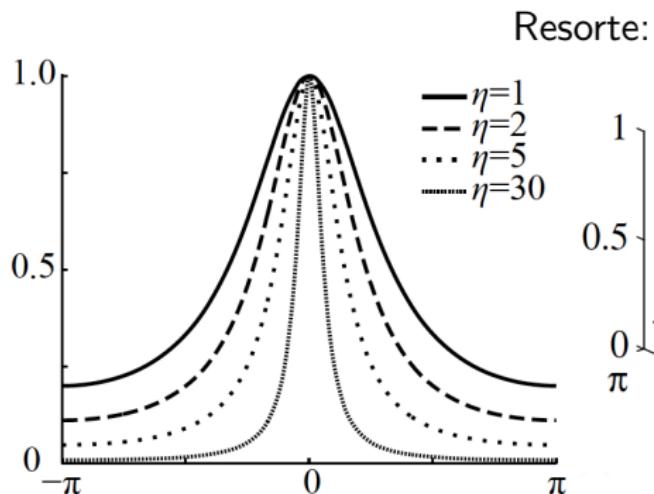
Regularizador Resorte:

$$R_r[f(x, y)] = [f(x, y) - f(x-1, y)]^2 + [f(x, y) - f(x, y-1)]^2 \quad (9)$$

Regularizador Placa:

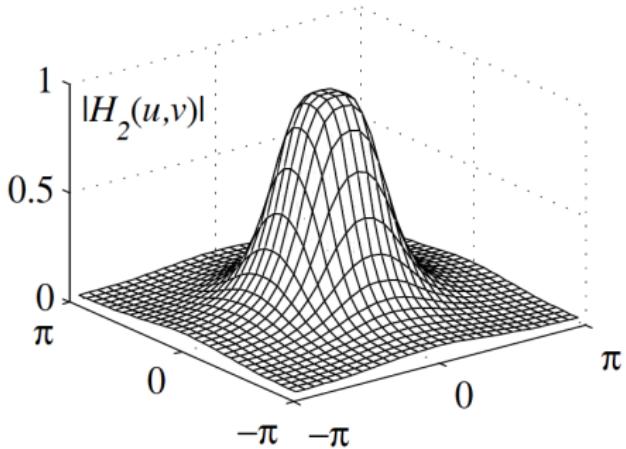
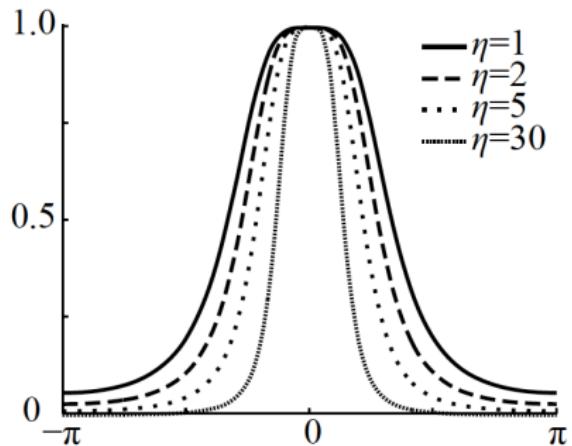
$$\begin{aligned} R_p[f(x, y)] &= [f(x+1, y) - 2f(x, y) - f(x-1, y)]^2 \\ &\quad + [f(x, y+1) - 2f(x, y) - f(x, y-1)]^2 \\ &\quad + [f(x+1, y+1) - f(x-1, y-1) \\ &\quad + f(x-1, y+1) - f(x+1, y-1)]^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Filtros Regularizados



Filtros Regularizados

Placa:



Mínimos Cuadrados Regularizados

$$\begin{aligned}I(x, y, k) &= a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y) + \alpha k] \\&= a(x, y) + C(x, y) \cos[\alpha k] - S(x, y) \sin[\alpha k]\end{aligned}\quad (11)$$

donde:

$$C(x, y) = b(x, y) \cos[\phi(x, y)]$$

$$S(x, y) = b(x, y) \sin[\phi(x, y)]$$

Mínimos Cuadrados Regularizados

Funcional de mínimos cuadrados:

$$U[a, C, S] = \sum_{k=0}^{N-1} [a + C \cos(\alpha k) - S \sin(\alpha k) - I(k)]^2 \quad (12)$$

Mínimos Cuadrados Regularizados

Funcional de mínimos cuadrados:

$$U[a, C, S] = \sum_{k=0}^{N-1} [a + C \cos(\alpha k) - S \sin(\alpha k) - I(k)]^2 \quad (12)$$

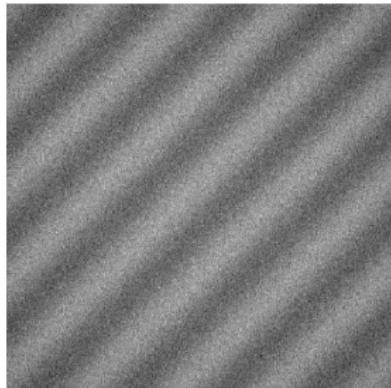
$$\begin{pmatrix} a(x, y) \\ C(x, y) \\ S(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & \sum c_k(x, y) & \sum s_k(x, y) \\ \sum c_k(x, y) & \sum c_k(x, y)^2 & \sum c_k(x, y)s_k(x, y) \\ \sum s_k(x, y) & \sum c_k(x, y)s_k(x, y) & \sum s_k(x, y)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum I_k(x, y) \\ \sum I_k(x, y)C_k(x, y) \\ \sum I_k(x, y)S_k(x, y) \end{pmatrix}$$

Mínimos Cuadrados Regularizados

$$\phi = \text{atan} \left[\frac{S(x, y)}{C(x, y)} \right] = \text{atan} \left[\frac{\sin[\phi(x, y)]}{\cos[\phi(x, y)]} \right] \quad (13)$$

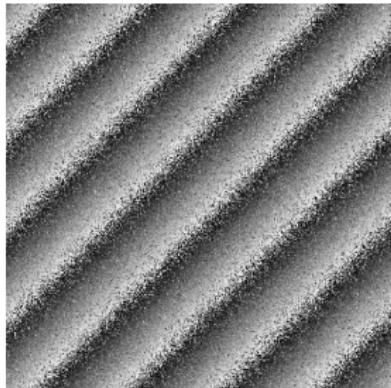
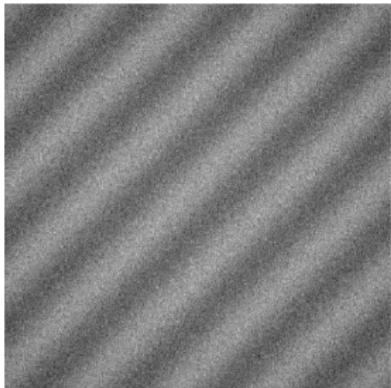
Mínimos Cuadrados Regularizados

$$\phi = \text{atan} \left[\frac{S(x, y)}{C(x, y)} \right] = \text{atan} \left[\frac{\sin[\phi(x, y)]}{\cos[\phi(x, y)]} \right] \quad (13)$$



Mínimos Cuadrados Regularizados

$$\phi = \text{atan} \left[\frac{S(x, y)}{C(x, y)} \right] = \text{atan} \left[\frac{\sin[\phi(x, y)]}{\cos[\phi(x, y)]} \right] \quad (13)$$



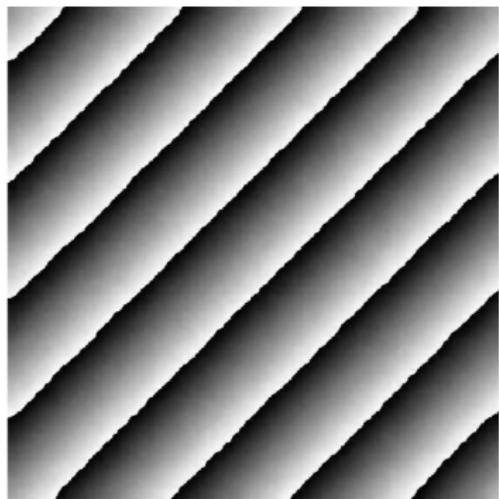
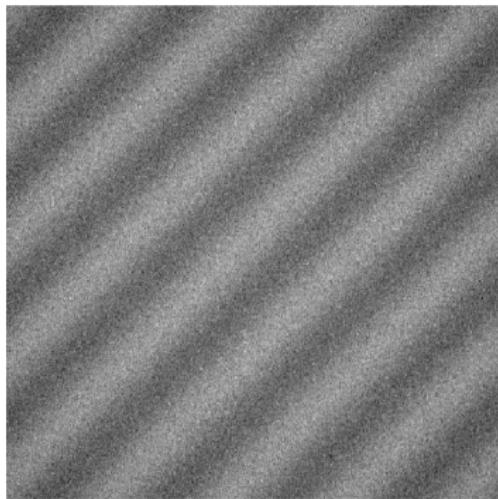
Mínimos Cuadrados Regularizados

Funcional de mínimos cuadrados regularizados:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a}, \mathbf{C}, \mathbf{S}) = & \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{x,y \in L} [a + C \cos(\alpha k) - S \sin(\alpha k) - I_k]^2 M_{x,y} \\ & + \lambda \sum_{x,y \in L} [(C_{x,y} - C_{x-1,y})^2 + (S_{x,y} - S_{x,y-1})^2] M_{x,y} \\ & + \mu \sum_{x,y \in L} (a_{x,y} - a_{x-1,y})^2 M_{x,y} \end{aligned} \tag{14}$$

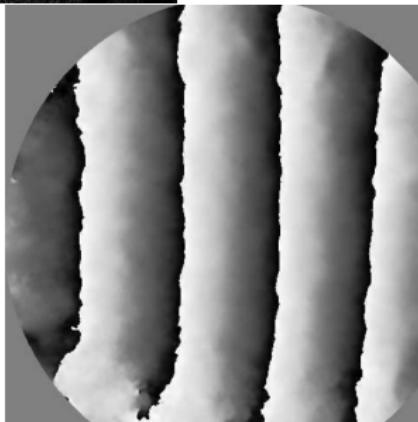
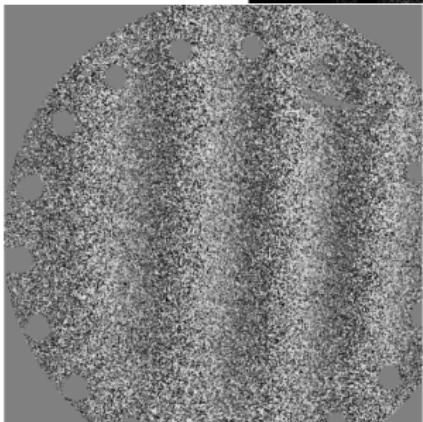
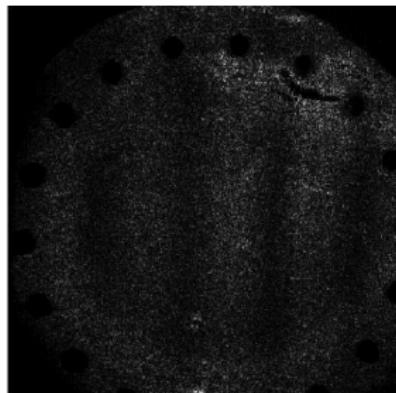
Mínimos Cuadrados Regularizados

Resultado usando mínimos cuadrados regularizado



Mínimos Cuadrados Regularizados

Comparación de resultados experimentales



Mínimos Cuadrados Regularizados

Conclusiones:

- ▶ Incorporación de información adyacente.

Mínimos Cuadrados Regularizados

Conclusiones:

- ▶ Incorporación de información adyacente.
- ▶ Interpolación de pequeños espacios vacíos (si así se desea).

Mínimos Cuadrados Regularizados

Conclusiones:

- ▶ Incorporación de información adyacente.
- ▶ Interpolación de pequeños espacios vacíos (si así se desea).
- ▶ Recobra una fase limpia de ruido.

Algoritmo auto-entonable para PSI

Funcional de energía:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{f}, \alpha) = & \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{(x,y)} \left[\frac{1}{2} [f(x,y)e^{i\alpha_k} + f^*(x,y)e^{-i\alpha_k}] - I'_k(x,y) \right]^2 \\ & + \lambda \sum_{(x,y)} [||D_x[f(x,y)]||^2 + ||D_y[f(x,y)]||^2] \end{aligned} \quad (15)$$

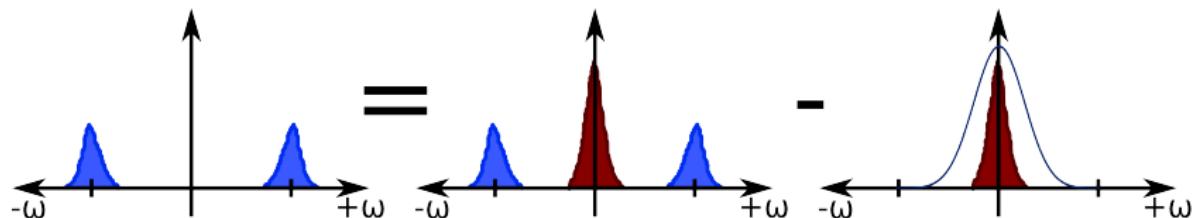
Donde $f(x,y) = e^{i\phi(x,y)} = \cos[\phi(x,y)] + i\sin[\phi(x,y)]$

Algoritmo auto-entonable para PSI

Remover DC del patrón de franjas:

$$I'_k(x, y) = b'(x, y) \cos(\phi(x, y) + \alpha_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (16)$$

$$I'_k(x, y) = I_k(x, y) - [I_k * h](x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (17)$$



Algoritmo auto-entonable para PSI

Operadores $D_x[]$ y $D_y[]$ toman la primera diferencia:

$$D_x[f(x, y)] = f(x, y) - f(x - 1, y) + f(x, y) - f(x + 1, y), \quad (18)$$

$$D_y[f(x, y)] = f(x, y) - f(x, y - 1) + f(x, y) - f(x, y + 1). \quad (19)$$

Algoritmo auto-entonable para PSI

Para resolver el funcional separamos el problema en dos.

Algoritmo auto-entonable para PSI

Para resolver el funcional sepáramos el problema en dos.

- ▶ Parte lineal:

$$\frac{\partial U}{\partial \cos(\phi)} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sin(\phi)} = 0. \quad (21)$$

Algoritmo auto-entonable para PSI

Para resolver el funcional sepáramos el problema en dos.

- ▶ Parte lineal:

$$\frac{\partial U}{\partial \cos(\phi)} = 0, \quad (20)$$

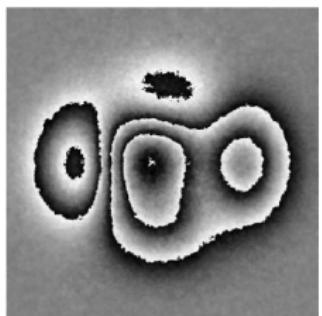
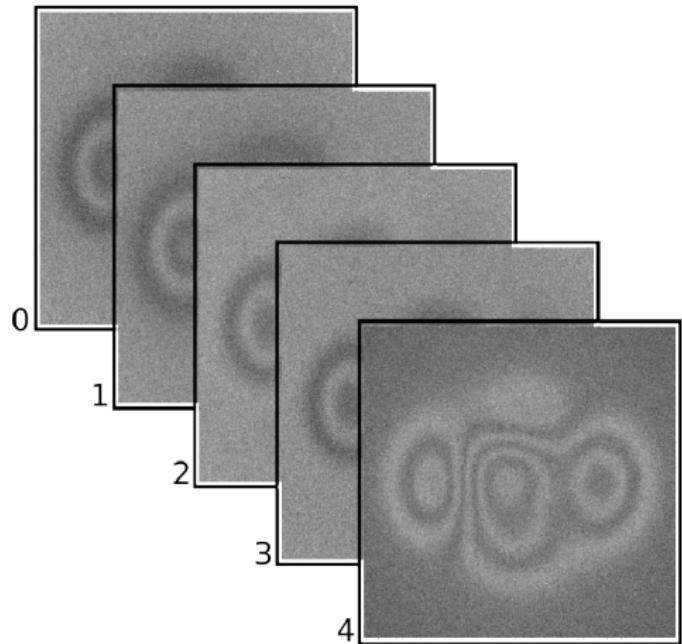
$$\frac{\partial U}{\partial \sin(\phi)} = 0. \quad (21)$$

- ▶ Parte no lineal:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0, \quad (22)$$

Algoritmo auto-entonable para PSI

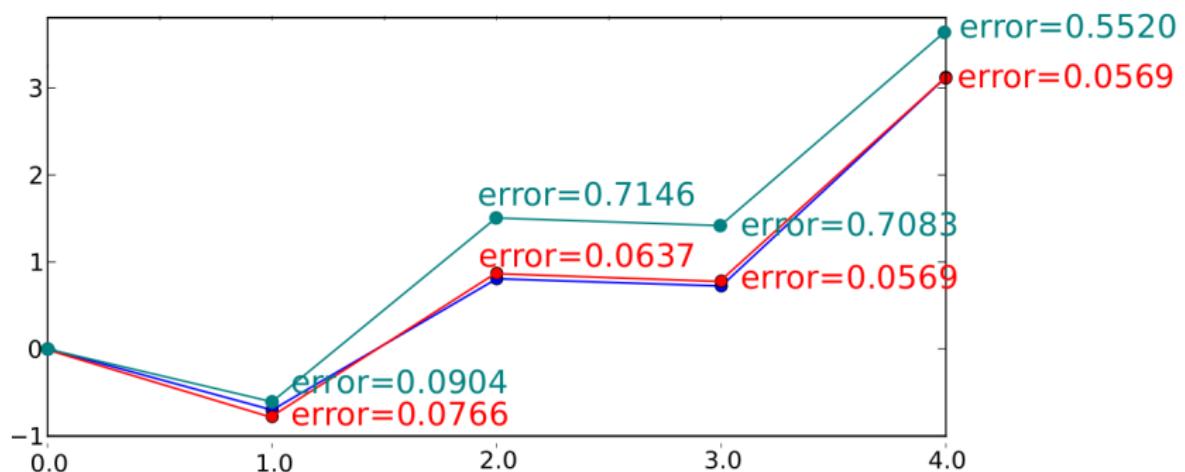
Fase recobrada:



Algoritmo auto-entonable para PSI

Pasos calculados:

- Actual steps
- Estimated steps using with our method
- Estimated steps using AIA



Algoritmo auto-entonable para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este método es robusto a pasos no constantes.

Algoritmo auto-entonable para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este método es robusto a pasos no constantes.
- ▶ El método es capaz de filtrar el ruido.

Algoritmo auto-entonable para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este método es robusto a pasos no constantes.
- ▶ El método es capaz de filtrar el ruido.
- ▶ Recobra la fase y los pasos con error mínimo.

Algoritmo Adaptivo para PSI

Interferograma con variaciones en cada punto:

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\phi_0(x, y) + \eta_k(x, y) + \omega_0 k], \quad (23)$$

renombrando $\beta_k(x, y) = \eta_k(x, y) + \omega_0 k$

$$I_k(x, y) = a(x, y) + b(x, y)\cos[\phi_0(x, y) + \beta_k(x, y)] \quad (24)$$

Algoritmo Adaptivo para PSI

Suponiendo que conocemos las variaciones $\beta_k(x, y)$ podemos calcular la $f(x, y)$:

$$U[a(x, y), f(x, y)] = \sum_{k=0}^{K-1} [a(x, y) + \operatorname{Re}\{f(x, y)e^{i\beta_k(x, y)}\} - I_k(x, y)]^2. \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} a(x, y) \\ C(x, y) \\ S(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & \sum c_k(x, y) & \sum s_k(x, y) \\ \sum c_k(x, y) & \sum c_k(x, y)^2 & \sum c_k(x, y)s_k(x, y) \\ \sum s_k(x, y) & \sum c_k(x, y)s_k(x, y) & \sum s_k(x, y)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum I_k(x, y) \\ \sum I_k(x, y)C_k(x, y) \\ \sum I_k(x, y)S_k(x, y) \end{pmatrix}$$

Algoritmo Adaptivo para PSI

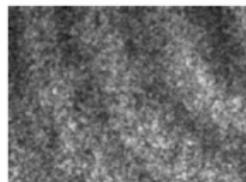
Suponiendo que conocemos el campo complejo $f(x, y)$ podemos calcular β_k

$$U[a(x, y), g_k(x, y)] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\{a(m, n) + Re\{g_k(m, n)e^{i\phi_0(x, y)}\} - I_k(m, n)\} h(x-m, y-n) \right]^2$$

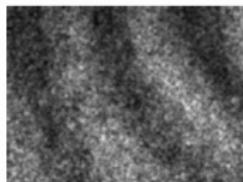
$$\begin{pmatrix} \hat{a}(x, y) \\ \hat{c}_k(x, y) \\ \hat{s}_k(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1s * h](x, y) & [\phi * h](x, y) & [\psi * h](x, y) \\ [\phi * h](x, y) & [\phi * h]^2(x, y) & [\phi\psi * h](x, y) \\ [\psi * h](x, y) & [\phi\psi * h](x, y) & [\psi * h]^2(x, y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} [I_k * h](x, y) \\ [I_k \phi * h](x, y) \\ [I_k \psi * h](x, y) \end{pmatrix}$$

Algoritmo Adaptivo para PSI

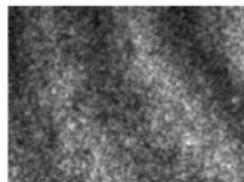
Fases experimentales obtenidas:



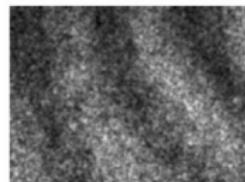
(a)



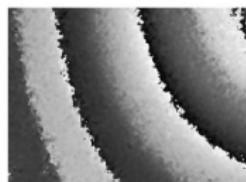
(b)



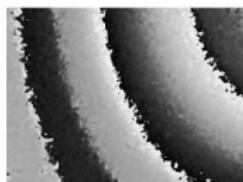
(c)



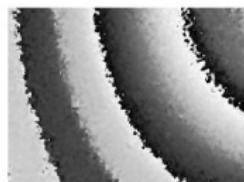
(d)



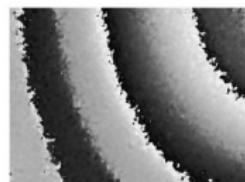
(e)



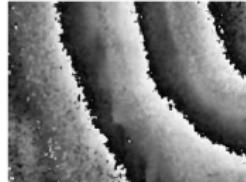
(f)



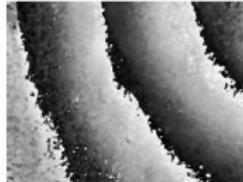
(g)



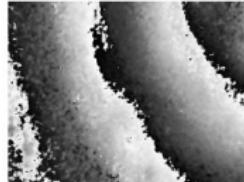
(h)



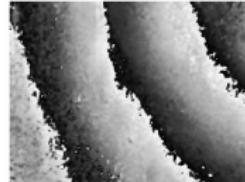
(i)



(j)



(k)



(l)

Algoritmo Adaptivo para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este algoritmo no supone una fase estática para cada punto.

Algoritmo Adaptivo para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este algoritmo no supone una fase estática para cada punto.
- ▶ El algoritmo calcula un desplazamiento para cada pixel.

Algoritmo Adaptivo para PSI

Conclusiones:

- ▶ Este algoritmo no supone una fase estática para cada punto.
- ▶ El algoritmo calcula un desplazamiento para cada pixel.
- ▶ El proceso es lineal y utiliza un estimador local pesado.

Corrector de fase envuelta desentonada

Funcional de energía:

$$\begin{aligned} U(f) &= \sum_{x,y \in L} |f(x,y) - g(x,y)|^2 \\ &\quad + \lambda \sum_{x,y \in L} |f(x,y) - f(x-1,y)e^{iu_{x,y}}|^2 \\ &\quad + \lambda \sum_{x,y \in L} |f(x,y) - f(x,y-1)e^{iv_{x,y}}|^2 \\ \text{Para } g(x,y) &= e^{i\phi_{x,y}^\varepsilon} \end{aligned}$$

Corrector de fase envuelta desentonada

Cálculo de las frecuencias espaciales en x :

$$\nabla \phi_{x,y} = \nabla \left[\arctan \left(\frac{\sin \phi_{x,y}}{\cos \phi_{x,y}} \right) \right]$$

$$u_{x,y} = \frac{\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} \cos \phi - \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} \sin \phi}{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos \phi_{x,y} = \cos \phi_{x,y} - \cos \phi_{x+1,y},$$

Corrector de fase envuelta desentonada

Cálculo de las frecuencias espaciales en y :

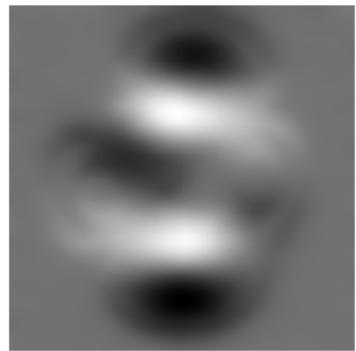
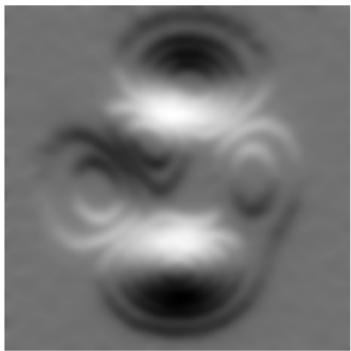
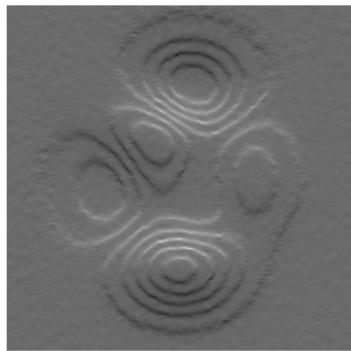
$$\nabla \phi_{x,y} = \nabla \left[\arctan \left(\frac{\sin \phi_{x,y}}{\cos \phi_{x,y}} \right) \right]$$

$$u_{x,y} = \frac{\sin \phi \frac{\partial}{\partial x} \cos \phi - \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} \sin \phi}{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin \phi_{x,y} = \sin \phi_{x,y} - \sin \phi_{x,y+1}.$$

Corrector de fase envuelta desentonada

Secuencia del mejoramiento de las frecuencias espaciales



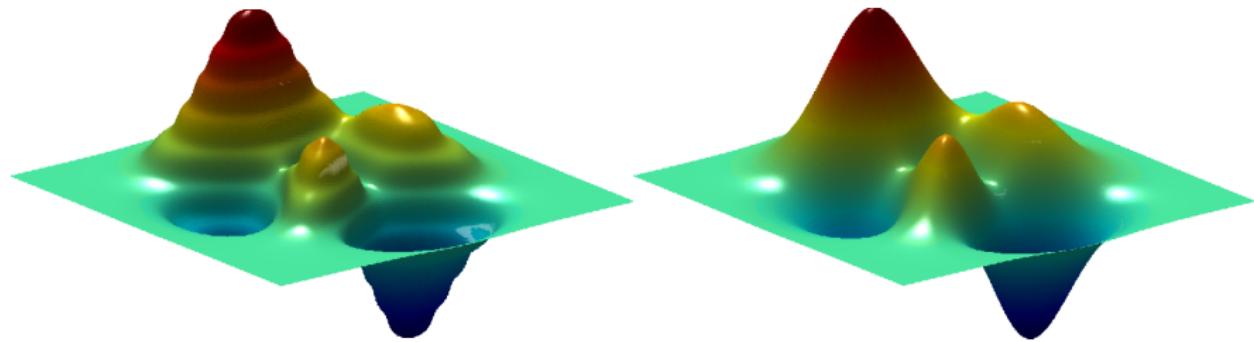
Corrector de fase envuelta desentonada

Ejemplo de la fase envuelta mejorada



Corrector de fase envuelta desentonada

Ejemplo de la fase envuelta mejorada en 3D



Corrector de fase envuelta desentonada

Conclusiones:

- ▶ El algoritmo es capaz de reducir el desentonamiento en la fase envuelta introducido por el algoritmo de cuadratura.

Corrector de fase envuelta desentonada

Conclusiones:

- ▶ El algoritmo es capaz de reducir el desentonamiento en la fase envuelta introducido por el algoritmo de cuadratura.
- ▶ El algoritmo es capaz de limpiar una fase envuelta ruidosa sin perder información por el filtrado.

Corrector de fase envuelta desentonada

Conclusiones:

- ▶ El algoritmo es capaz de reducir el desentonamiento en la fase envuelta introducido por el algoritmo de cuadratura.
- ▶ El algoritmo es capaz de limpiar una fase envuelta ruidosa sin perder información por el filtrado.
- ▶ La estrategia de remover el desentonamiento de la fase envuelta es una aproximación nunca antes propuesta.

Corrector de fase envuelta desentonada

Conclusiones:

- ▶ El algoritmo es capaz de reducir el desentonamiento en la fase envuelta introducido por el algoritmo de cuadratura.
- ▶ El algoritmo es capaz de limpiar una fase envuelta ruidosa sin perder información por el filtrado.
- ▶ La estrategia de remover el desentonamiento de la fase envuelta es una aproximación nunca antes propuesta.
- ▶ El algoritmo es lineal y por ende estable.

Producción científica

- ▶ **Medina O**, Estrada JC. "Full-field two-dimensional least-squares method for phase-shifting interferometry". Opt. Eng. 0001;53(11):114106.
- ▶ **Orlando Medina**; Julio C. Estrada; Manuel Servin. Regularized least-squares algorithm for phase-shifting interferometry MOPM 4-6 sep 2013.
- ▶ **Orlando Medina**; Julio C. Estrada; Manuel Servin. Regularized self-tuning phase demodulation for phase-shifting interferometry with arbitrary phase shifts Proc. SPIE 8493, Interferometry XVI: Techniques and Analysis, 84930K (September 13, 2012);
- ▶ M. Servin, J.C. Estrada and **Orlando Medina**. Fourier transform demodulation of pixelated phase-mask interferograms Optics Express, Vol. 18, Issue 15, pp. 16090-16095 (2010).
- ▶ **Orlando Medina**; Julio C. Estrada; Manuel Servin, Demodulacion temporal de interferogramas VII Simposio La Óptica en la Industria. 10-12 sep 2009.
- ▶ Nombramiento de **Candidato en el SNI**.