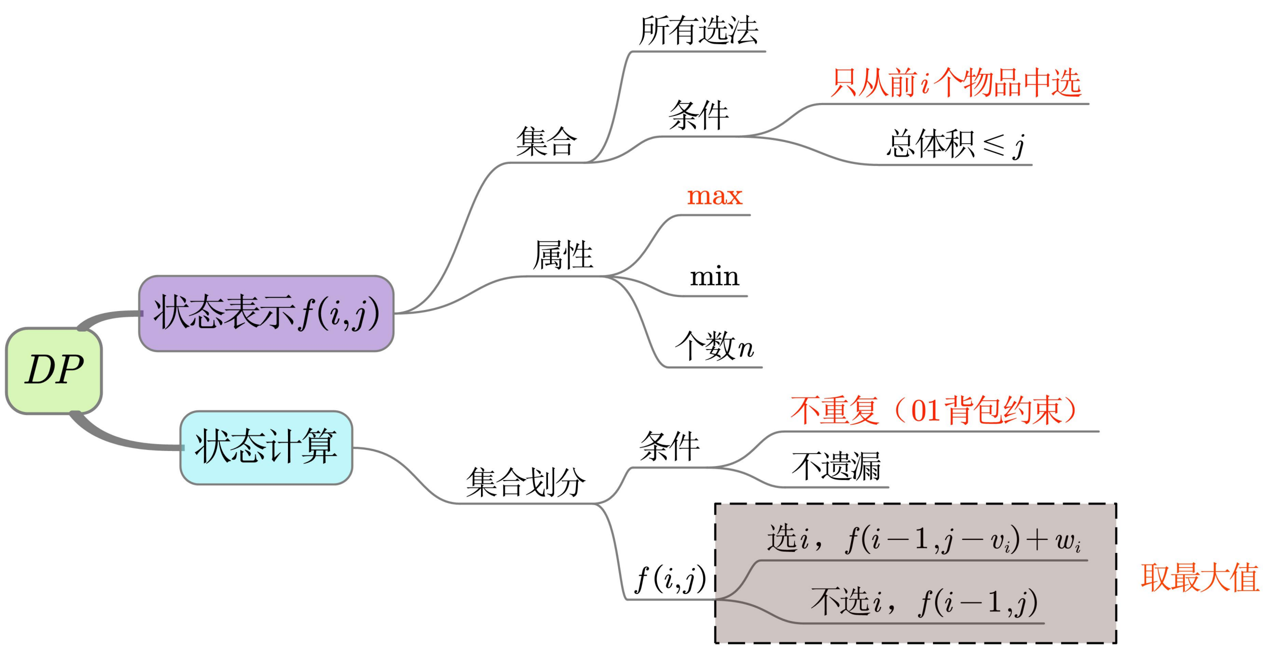
01背包问题



n个物品，每个物品的体积为 v_i，价值是w_i，背包的容量是m

若每个物品最多只能装一个，且不能超过背包容量，则背包的最大价值是多少？

```
        int n; // 物品总数
        int m; // 背包容量
        int[] w; // 重量
        int[] v; // 价值

//    dp[i][j]的含义：在考虑前i个物品后，背包容量为j条件下的最大价值
```

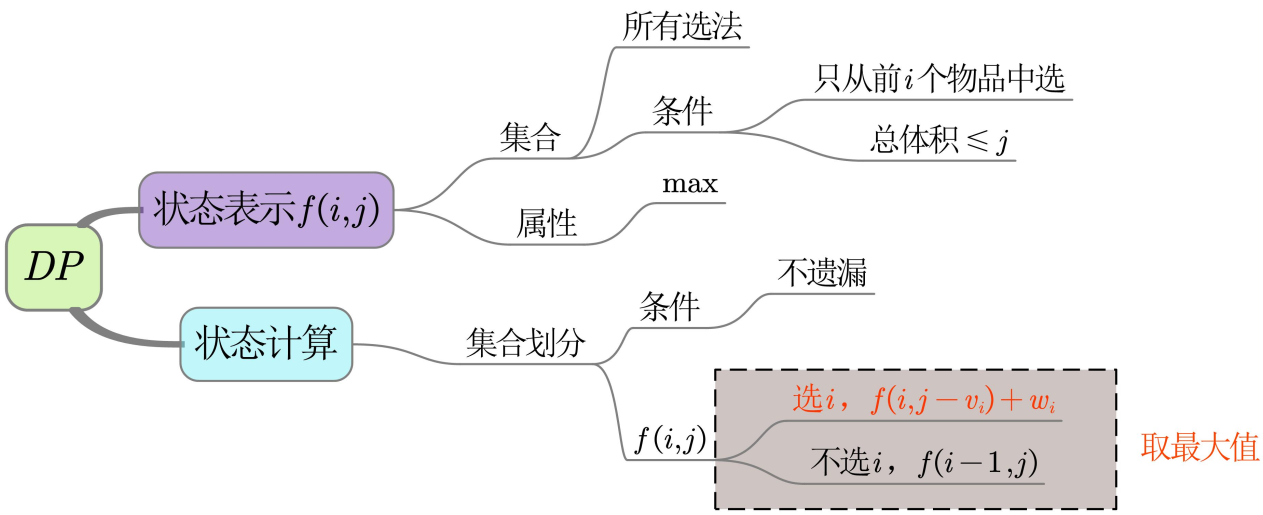
```
/*   二维形式   */
        int[][] dp = new int[n][m]; // 表示考虑前i个物品后，背包容量为j时
的最大价值

        for(int i = 1; i <= n; i++){
            for(int j = 1; j <= m; j++){
                if(w[i] > j){                   //   当前重量装不进，价值等于
前i-1个物品
                    dp[i][j] = dp[i-1][j];
                }else{                          // 能装，需判断
```

```
                        dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i-1][j-w[i]]
+ v[i]);
                    }
                }
            }

            return dp[n][m];
```

```
/* 因为dp[i][j] 始终用的是 dp[i-1][..] 这一行的数据进行更新，可以将其压缩成一维数组 */
// 使dp[i][j] 始终使用的是 左边的数据进行更新 dp[i-..][j]，为了避免写后读，所以应该倒序遍历容量。

/*  一维形式 */
int[] dp = new int[m]; // dp[j] 表示背包容量为j的情况下的的最大价值

for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = m; j >= w[i]; j--){  // 注意是倒序，否则出现写后读错误
        dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i]);
    }
}

return dp[m];
```

完全背包问题

在01背包的基础上，条件变为每个物品可以取任意个



状态 dp[i,j]表示：所有只考虑前 i 个物品，且总体积不大于 j 的所有选法

属性 max:

```
采用这样的思维：
     1. 先去掉 k 个物品 i
     2. 求出此时的 max(dp[i-1, j - k * w[i]])
     3. 再把 k 个物品加回来

得到 dp[i-1][j - k * w[i]] + k*v[i]

     状态的划分就是 对 第 i 个物品 取 0， 1， 2， 3....., k-1, k个
```

```
int n; // 物品总数
          int m; // 背包容量
          int[] w; // 重量
          int[] v; // 价值

//   dp[i][j]的含义：在考虑前i个物品后，背包容量为j条件下的最大价值
```

```
/*         二维形式      */
int[][] dp = new int[n][m]; // 在考虑前i个物品后，背包容量为j条件下的最大价值

for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
        for(int k = 0; k * w[i] <= j; k++){
            dp[i][j] = Math.max(dp[i][j], dp[i-1][j - k * w[i]] + v[i] * k);
        }
    }
}
return dp[n][m];
```

优化思路

dp[i,j] = max(dp[i-1, j]，dp[i-1, j-w_i] + v_i,，dp[i-1, j-2w_i] + 2v_i，dp[i-1, j-3w_i] + 3v_i, ……，dp[i-1, j-kw_i] + k*v_i) ①

变形一下：

dp[i,j-w_i] = max(dp[i-1, j-w_i]，dp[i-1, j-2w_i] + v_i,，dp[i-1, j-3w_i] + 2v_i，dp[i-1, j-4w_i] + 3v_i, ……，dp[i-1, j-kw_i] + (k-1)*v_i)

再变形得：

dp[i],j-w_i]+v_i= max(dp[i-1, j-w_i]+ v_i，dp[i-1, j-2w_i] + 2v_i,，dp[i-1, j-3w_i] + 3v_i，dp[i-1, j-4w_i] +4v_i, ……，dp[i-1, j-kw_i] + k*v_i)

此等式右边与等式①中深色部分相同：

所以可以得到

```
dp[i,j] = max(dp[i-1,j], dp[i,j-wi] + vi)
```

```java
/* 优化后 */
for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
        if(j < w[i]){
            dp[i][j] = dp[i-1][j];
        }else{
            dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i][j- w[i]] + v[i]);
        }
    }
}

return dp[n][m];
```

```java
// 压缩成一维

int[] dp = new int[m]; //f[j]表示背包容量为j条件下的最大价值

for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){ // 因为变为一维，此时 j初始值应该为 w[i]
        if(j < w[i]){
            dp[i][j] = dp[i-1][j]; // 压缩成一维后，变为 dp[j]=dp[j]恒
成立，可以抹去
        }else{
            dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i][j- w[i]] + v[i]);
            // dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i]);
        }
    }
}

/*优化后*/
for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = w[i]; j <= m; j++){ // 注意这里是顺序
            dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j-w[i]] + v[i]);
        }
    }
}

return dp[m];
```

多重背包问题

限定：第i件物品最多拿s_i件

dp[i,j] = max(dp[i-1, j]，dp[i-1, j-w_i] + v_i,，dp[i-1, j-2w_i] + 2v_i， ……，dp[i-1, j-$s_i w_i$] + s_i*v_i) ①

变形一下：

dp[i,j-w_i] = max(dp[i-1, j-w_i]，dp[i-1, j-2w_i] + v_i,，dp[i-1, j-3w_i] + 2v_i，……，dp[i-1,j-$s_i w_i$]+(s_i-1)v_i，dp[i-1, j-(s_i+1)w_i] + s_i*v_i)

再变形得：

dp[i],j-w_i]+v_i= max(dp[i-1, j-w_i]+ v_i，dp[i-1, j-2w_i] + 2v_i,，dp[i-1, j-3w_i] + 3v_i, ……，dp[i-1,j-$s_i w_i$]+$s_i v_i$，dp[i-1, j-(s_i+1)w_i] + (s_i+1)*v_i)

可以看出多了最后一项，无法按照完全背包的方式优化

```
int n;                  // 物品总数
int m;                  // 背包容量
int w[n];               // 重量
int v[n];               // 价值
int s[n];    // 物品数量
int[][] dp = new int[n][m]; //dp[i][j]表示在考虑前i个物品后，背包容量为j条件下的最大价值

for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
        for(int k = 0; k <= s[i] && k*w[i] <= j; k++){
            dp[i][j] = Math.max(dp[i][j], dp[i-1][j - k*w[i]] + k*v[i]);
        }
    }
}

return dp[n][m];
```

二进制优化

已知1，2，4，…，2^k可以由系数0和1线性组合出$0-2^{k+1}-1$。

考虑更一般的情况，若想线性组合出0-S，且$S<2^{k+2}$，则猜测可由1，2，4,..,2^k，C组合出，其中$C< 2^{k+1}$。显然，在C一定存在的情况下，可得到的数的范围为C-S。

由于$C <2^{k+1}$，则$C <= 2^{k+1}-1$，故可用1，2，4，.....，2^k，C和一定的系数组成表示任何 $< 2^{k+2}$的数。

因此对于有`s[i]` 件的某个物品i，可以打包成log(s[i])包物品，每包有1，2，4，…，2^k，C件物品，其中`k=log(s[i]) - 1`，通过这种情况可以将 `s[i]` 件物品从 0 到 `s[i]`分别进行枚举，从而转化为 0 1 背包。

```
/*       二进制优化    */
int n;                 // 物品总数
int m;                 // 背包容量
int w[N];              // 重量
int v[N];              // 价值
int s[N];

int cnt = 0;
for(int i = 1; i <= n; i++){
    int a = w[i];
    int b = v[i];
    int s = s[i];

    // 读入物品个数时顺便打包
    int k = 1;   // 当前包裹的大小
    while(k <= s){
        cnt++; // 实际物品种数（即 打包后的包裹总数）
        w[cnt] = a*k;
        v[cnt] = b*k;
        k *= 2; // 包裹容量倍增
    }

    if(s > 0){
        // 不足的单独放一个包裹，即C
        cnt++;
        w[cnt] = a*s;
        v[cnt] = b*s;
```

```
    }
}
// 更新物品种数
n = cnt;

int[][] dp = new int[n][m];

// 转化为 0 1 背包问题
for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = m; j >= w[i]; j--){
        dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j - w[i]]+v[i]);
    }
}

return dp[m];
```

分组背包问题

每组物品最多拿一个

枚举第 i 组物品选哪个 或者 都不选

```
dp[i-1, j] // 一个都不选

dp[i-1, j-w[i,k]] + v[i,k]; // 从前 i 件物品中选了 第 k 件
```

```
int n;                // 物品总数
int m;                // 背包容量
int v[N][S];           // 重量
int w[N][S];           // 价值
int s[N];             // 各组物品种数

// int[][] dp = new int[n][m];

for(int i = 1; i <= n; i++){
    for(int j = 1; j <= m; j++){
        for(int k = 0; k < s[i]; k++){
            //if(j >= w[i][k]){
```

```
                    //dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i-1][j-w[i]
[k]] + v[i][k]);
               //}else{
                    dp[i][j] = dp[i-1][j];
               //}

              /*  优化成一维  */
              if(w[i][k] <= j){
                  dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j-w[i][k]] + v[i][k]);
              }
          }
     }
}

return dp[n][m];
```