
4 引力波探测器的噪声和灵敏度

噪声是实验物理的天敌，在引力波探测中尤为突出，由于强度太低，微弱的引力波信号淹没在探测器的噪声之中，根本提取不出来。近百年来，引力波探测的每一个进步，都是降低噪声的结果。当前，第三代激光干涉仪引力波探测器的预制研究已在世界各地开展起来，灵敏度直指 10^{-24} ，目标是建设真正意义上的引力波天文台。这是一个非常艰难的任务，充满了挑战 and 机遇。最大的困难仍然是降低噪声。

4.1地面震动噪声

地面震动噪声是激光干涉仪主要的噪声源之一

4.1.1来源

***自然现象**--火山和地质活动、弱地震和远程地震、月球潮汐、海浪、大风引起的房屋及树木的晃动对地基的影响、大雨及冰雹等自然现象引起的地面震动

***人类活动**--交通运输、工农业生产、矿山开采、森林砍伐、建筑工地等人类活动引起的地面震动.

4. 1. 2 幅度和频率

*典型的地面震动幅度为 $x = \alpha / f^2$ ，其中 f 是地面振动频率， α 是常数，一般为 $10^{-8}—10^{-6}$ 数量级，与具体的地域有关。地面运动幅度为 $10^{-6}m$ 数量级，我们期望探测到的引力波的幅度为 $10^{-19}m$ 量级，因此要求地面噪声的衰减系数要好于 10^{-13} 。

*在频率低于1Hz时，自然界的扰动占主导地位，在1Hz之上人类活动起主要作用。根据公式

$$x = \alpha / f^2$$

它与频率的平方成反比，对激光干涉仪引力波探测器灵敏度的影响在低频部分（几十赫兹以下）最严重，而这个频带的地面震动是普通隔震系统最难处理的。

4.1.3 地面震动噪声隔离系统

减小地面震动噪声对测试质量干扰的基本方法是不让测试质量系统直接固定在有噪声的地面上，而是通过一个地面震动过滤器把两者隔离。这个过滤器就是我们所说的地面震动衰减系统。

常用的地面震动隔离系统主要有被动隔震和主动隔震系统两大类。被动隔震系统是一种简单的无源机械过滤器，它是各种复杂的机械过滤器的基础。在早期建造的激光干涉仪引力波探测器如LIGO，GE0600和TAMA300，都采用了级联被动机械过滤器技术。

基本方法是在地面上用橡胶板、很重的有弹性的不锈钢板和弹簧交替地堆放在一起，搭建成一个多层的堆积平台，在平台之上放置一个悬挂系统，把镜子悬挂起来。多层的堆积平台和悬挂系统在地面和镜子之间起隔震作用。

*主动隔震系统有较强的隔震能力，VIRGO及第二代激光干涉仪引力波探测器大都采用这种隔震方式. 实用的主动隔震系统至少包括三个基本部分：倒摆、顶台和镜子悬挂系统。

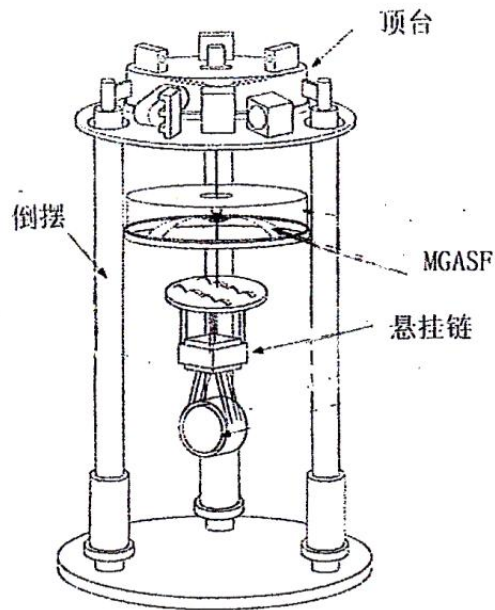


图4.1 地表震动衰减系统结构示意图

A. 倒摆

**倒摆的作用：

- (1). 在地面震动峰值幅度为微米数量级的频带范围内对 x 、 y 、 z 方向的地面运动提供**足够大的衰减系数**。
- (2). 可以在顶部搭建一个平台，以**置放**整个地表震动衰减系统的控制部件
- (3). 提供镜体悬链的**悬挂点**，

**倒摆的基本结构：

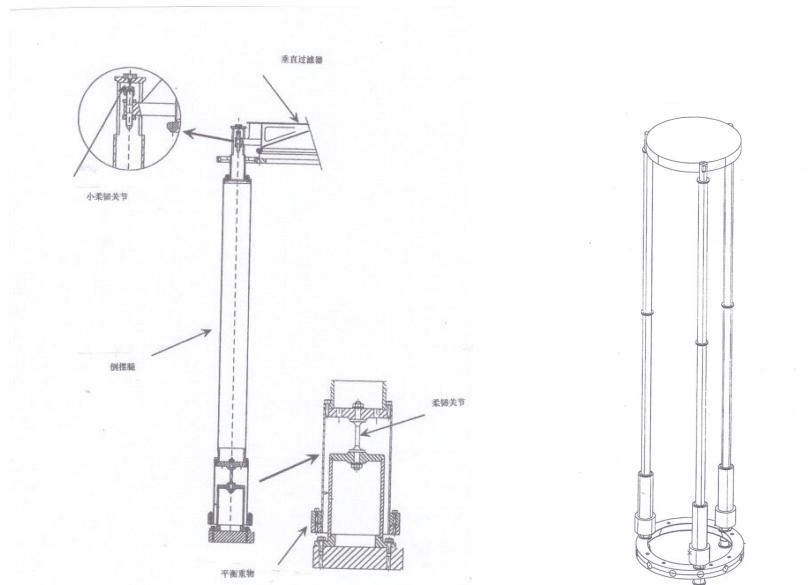


图4.2 倒摆的结构

倒摆腿、钟形平衡重物和柔韧关节。倒摆腿是由质量很轻，强度很大的材料做成，它通过柔韧关节与地面相接触，非常低的**共振频率(小于100 m Hz)**。

**倒摆的主要参数

建立倒摆的物理模型和运动方程，可以解出它的主要参数如：稳定度，传递函数，共振频率

(A). 物理模型

计算倒摆的参数，要从它的动力学问题入手，为此，我们把倒摆简化成一个理想的物理模型，如下图 所示

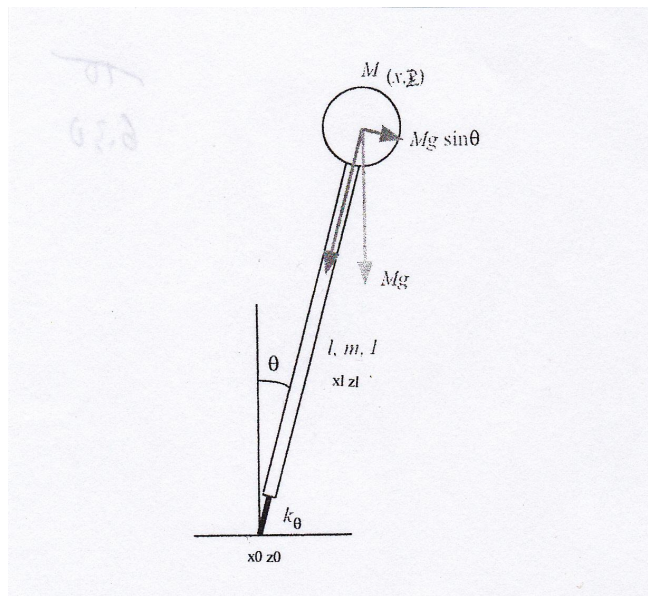


图 4.3a 简化的倒摆模型示意图

对于传统的摆（包括单摆和复摆）来说都是负载（或称为重物）在下面，悬挂线的悬挂点在上面，而倒摆刚好相反，负载在上面，连接杆的支撑点在下面。

倒摆图中：有效负载 M ，柔韧关节的转动弹簧常数 k_θ ，倒摆腿的长度 l ，倒摆腿与垂直轴的夹角 θ ，倒摆腿相对其质心的转动惯量 I

(B) 倒摆的运动方程:

$$J \ddot{\theta} = -K\theta + Mgl \sin \theta$$

在小角度近似下，上式可简化为:

$$J \ddot{\theta} = -K_{eff} \theta$$

**倒摆的稳定性:

解方程可以求出倒摆的总势能为:

$$U_{pot} = \frac{1}{2} K \theta^2 + Mgl(\cos \theta - 1) \approx \frac{1}{2} K_{eff} \theta^2 + Mgl \frac{\theta^4}{4!} + O(\theta^6)$$

从系统的约化势能 U_{pot} / K 与重力与弹力之比为 $R = \frac{Mgl}{K}$ 之间的曲线关系我们可以得到倒摆的稳定性。它为倒摆的设计提供了重要的参数

****倒摆的势能 U_{pot}/K 与重力弹力之比 $R = \frac{Mgl}{K}$ 之间的关系**

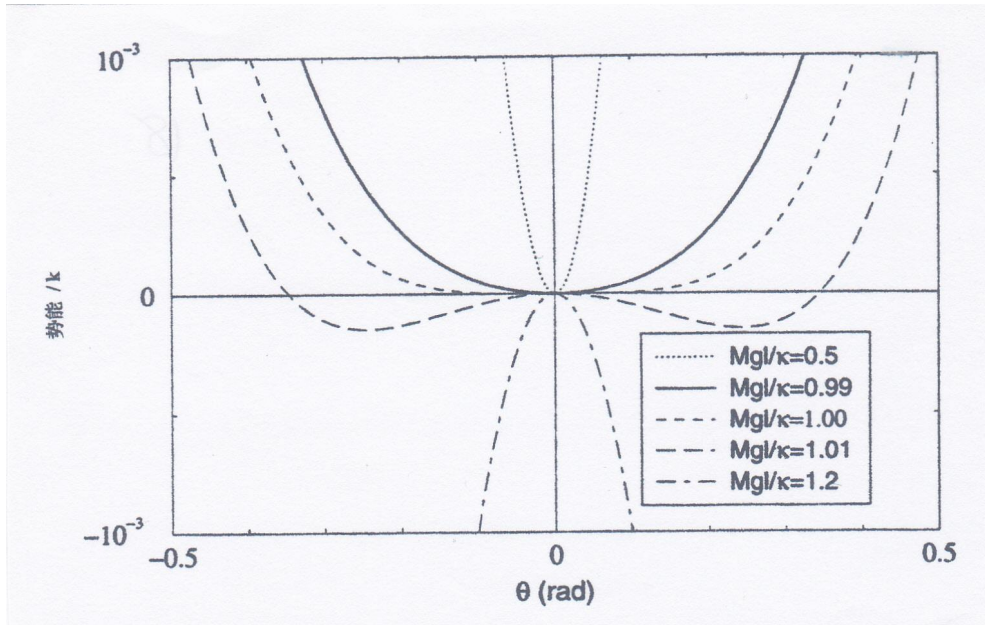


图 4.3b 倒摆的约化势能 U_{pot}/K 与不同重力弹力比 $R = \frac{Mgl}{K}$ 之间的关系

当 $R \ll 1$ 时，即重力远小于弹簧的恢复力时，倒摆系统是非常稳定的，但力与 θ 的关系曲线很陡，相应于倒摆系统有高的共振频率和较大的恢复力。

随着 R 值的增加，在 $\theta = 0$ 附近，势能曲线变得“平坦”。相应于倒摆系统有小的恢复力和低的共振频率，这时系还还是稳定的。

当 $R \lesssim 1$ 时，倒摆系统仍然是稳定的，共振频率很低，当 $R = 1$ 时，重力与弹簧的恢复力相等，在 $\theta = 0$ 周围恢力为 0

**倒摆的共振频率

为了计算它的共振频率，我们需要分析倒摆顶部的线性位移 X ($X = l\theta$)，写出它的运动方程，然后求方程的解。设倒摆的线刚度为 k ， $k = K / l^2$ ，在小位移情况下，其顶部的运动方程为：

$$M \ddot{X} = -(k - \frac{Mg}{l})X + O(X^3) \approx \bar{K}X + O(X^3)$$

其中 $\bar{K} = -(k - \frac{Mg}{l})$ ，当 $\bar{K} > 0$ 时，倒摆系统可以等效成一个线谐振子，解方程我们得到其共振频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{g}{l}}$$

可以看出，倒摆的共振频率与 $\sqrt{\frac{\kappa}{M}}$ 成正比。共振频率越低，系统的隔震能力特别是对低频地面震动的隔震能力越强，在具体应用中，我们总是希望得到尽可能低的共振频率。适当调整弹性刚度 k 和有效负载 M ，可以获得需要的共振频率

**** 倒摆的传递函数：**

传递函数描述的是系统对一个运动的传递情况。是进入该系统之前和通过系统之后运动状态变化的度量。倒摆的传递函数描述了倒摆与地面连接处地面震动噪声在经过倒摆传递之后在倒摆顶端发生的变化，是地面震动噪声传递到倒摆顶端后的幅度值与原来地基处的幅度之比。

计算倒摆的传递函数分以下几个步骤：

a) 写出倒摆系统的拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{4} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \dot{X}_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - Mgz - mgz_c - \frac{1}{2} Kl^2 \theta^2$$

m 是倒摆腿的质量、 J 是它相对于其质心的转动惯量， K 是弹性关节的线性刚度。计算时忽略垂直方向的地面震动，只考虑水平方向，

b) 利用分析力学的变分原理 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$

导出倒摆的运动方程为：

$$\left(M + \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2} \right) \ddot{X} - \left(\frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} \right) \ddot{X}_0 - \frac{g}{l} \left(M + \frac{m}{2} \right) (X - X_0) + K(X - X_0) = 0$$

c) 在频率域内解微分方程，我们可以得到方程的解为：

$$X(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \bullet (\omega_0^2 + \beta\omega^2) X_0(\omega)$$

其中

$$\omega_0^2 = \frac{K - (M + \frac{m}{2}) \bullet \frac{g}{l}}{M + \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2}}$$

$$\beta = \frac{\frac{m}{4} - \frac{J}{l^2}}{M + \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2}}$$

d) 定义倒摆的传递函数为： $\frac{X(\omega)}{X_0(\omega)}$ ，我们有：

$$\frac{X(\omega)}{X_0(\omega)} = \frac{\omega_0^2 + \beta\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

在这里， $X_0(\omega)$ 是倒摆底部柔韧关节与地面接触点部位地面震动噪声的位移幅度， $X(\omega)$ 是经倒摆传递后，倒摆部顶部（即镜子链悬挂点）的位移。

** 倒摆的传递函数曲线

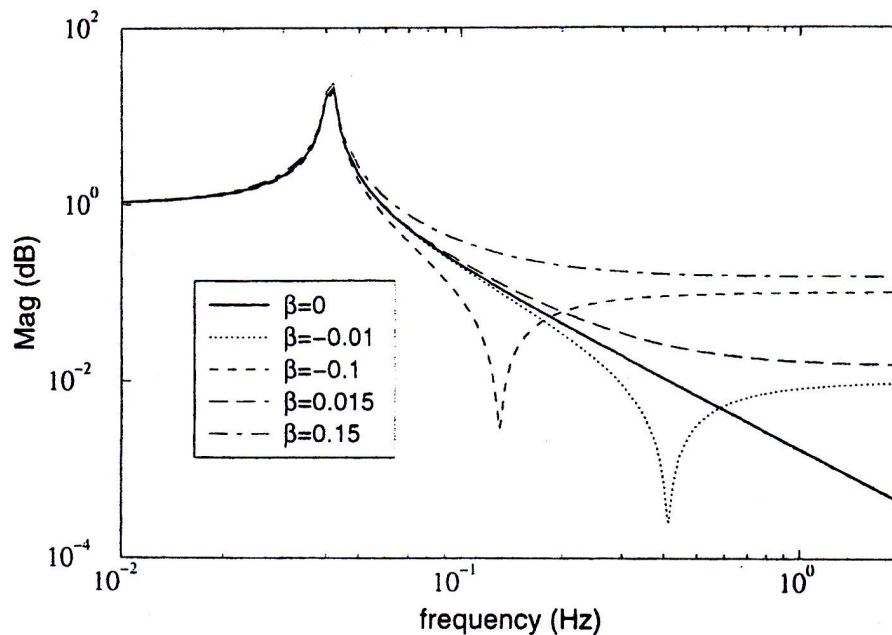


图 4.4 倒摆的传递函数曲线

从倒摆的传递函数曲线可以看出:当 $\beta = 0$ 时, 传递函数对应于

理想的倒摆。从公式 $\beta = \frac{\frac{m}{6}}{M + \frac{m}{3}}$ 可以看出, 当 $m = 0$ 时 $\beta = 0$,

这里 m 是倒摆腿的质量, 很显然 $m = 0$ 是不可能实现的, 但是我们依然可以根据这个原则, 在满足机械强度需要的情况下, 尽可能选择质量轻的材料制造倒摆的腿。

B.顶台

*顶台的布局:

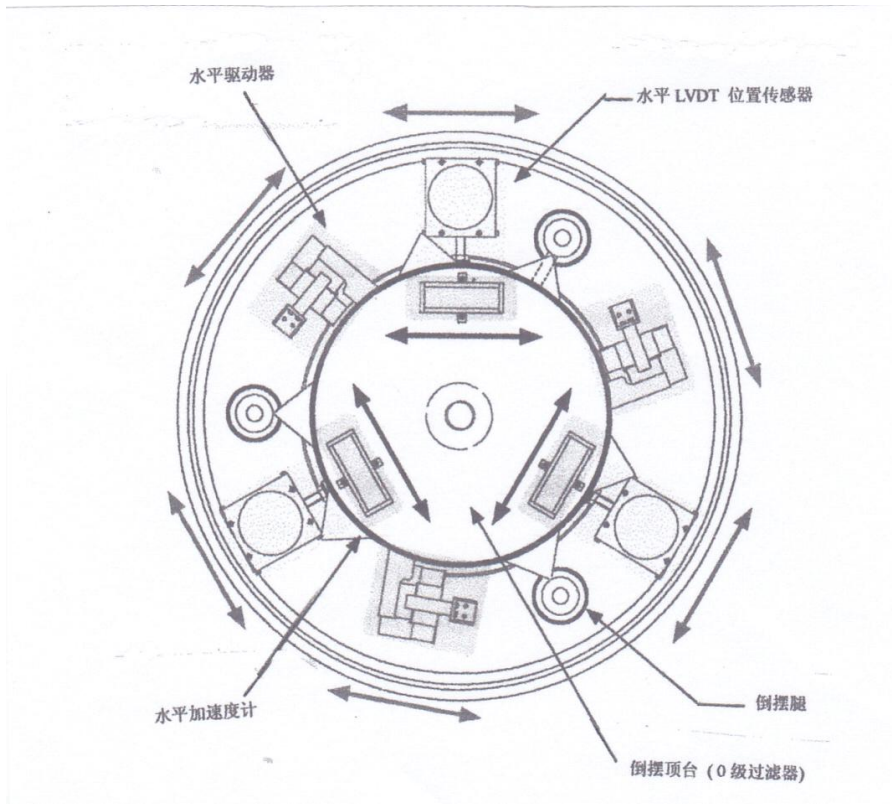


图4.5 顶台上的传感器及控制部件(TAMA300)

- 1). 三个水平加速度计, 用于隔震系统的惯性阻尼.
- 2). 三个由线性可变微分传感器组成的水平传感器 LVDT (Linear Variable Differential Transducer), 用于倒摆状态控制.
- 3). 三个水平线圈—磁铁驱动器, 用来提供惯性阻尼所需的动力。
- 4). 三个步进马达驱动器, 用做倒摆初始位置的调整和控制
- 5). 一个垂直步进马达驱动器, 用以调整零级过滤器的垂直高度,

C. 镜子悬挂系统

镜子悬挂链是由多种部件组成的多级串联垂直震动衰减系统

**垂直方向地面震动衰减的重要性

法布里—珀罗腔中的两面镜子（即测试质量）彼此分开数公里。由于地球表面的球面效应，两个悬挂点的垂直方向分别指向地心，并不互相平行

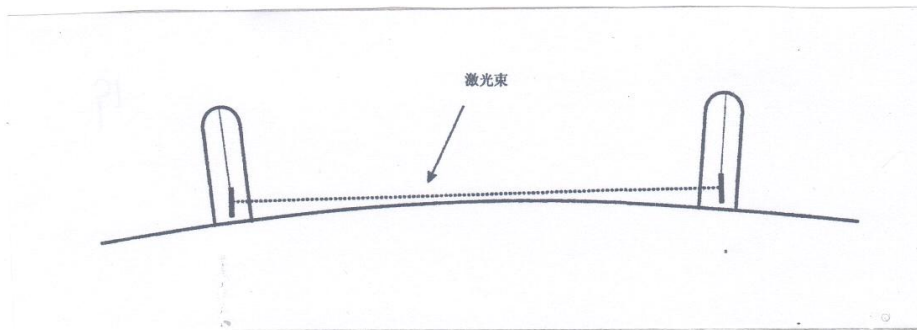


图4.7镜子运动时垂直—水平方向耦合示意图

测试质量悬挂点局部的垂直运动 Δz ，会耦合到测试质量，导致测试质量体的水平运动 Δx 。它是不能被忽视的，因此，地面的垂直震动也是应该被隔离的。

****垂直方向地面震动衰减系统的关键部件：单体几何反弹簧过滤器**

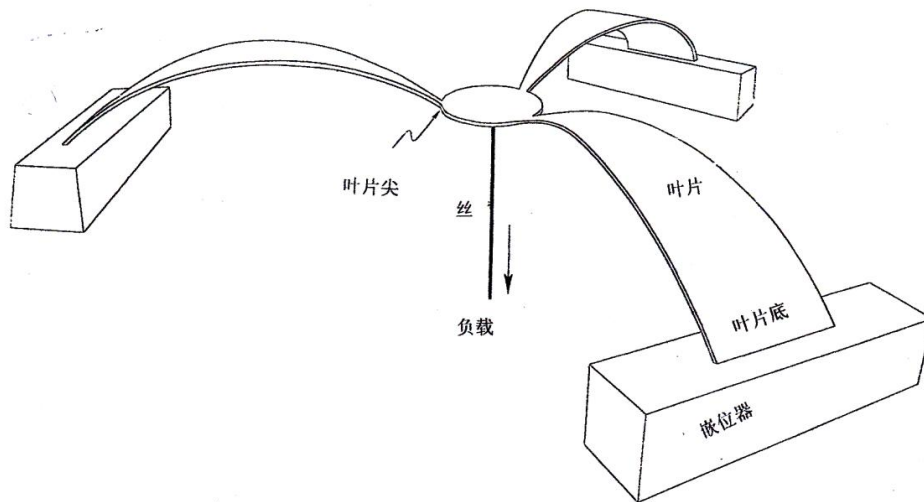


图4. 8单体几何反弹簧过滤器结构示意图

一组径向排列的**悬臂弹簧**组成，弹簧叶片的一端固定在一个共同的**圆形护圈**上，被隔震的有效负载挂在**圆盘的中心位置**，弹簧叶片的另一端以适当的初始角度**固定在一个嵌位器件上**，使弹簧叶片具有一定的弯曲度，适当调节嵌位器件可以**调整这个弯曲度**，使叶片得到适当的**水平和垂直方向的压缩**，调好之后把嵌位器件定位。在重物的作用下弹簧叶片像钓鱼杆一样柔韧。

(a) 单体几何反弹簧过滤器工作原理

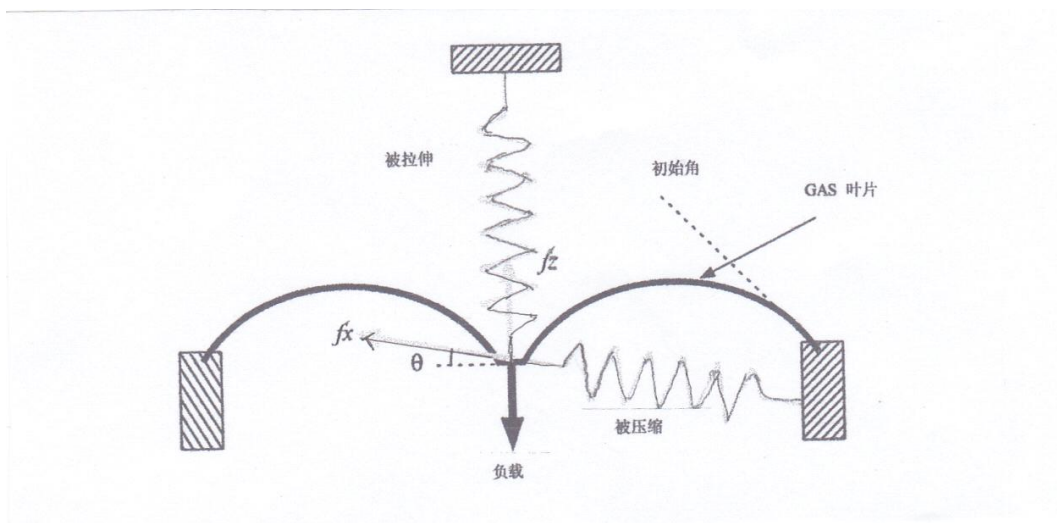


图4.8 MGASF的工作原理示意图

每个悬臂弹簧都看成是由两根独立的弹簧组成，一根基本上是水平的（夹角很小），另一根在垂直方向. 两根弹簧有一端连接在一起. 组成一个复合弹簧。偏离工作点时，一条弹簧伸长而另一条压缩，使负载回到工作点（平衡点），故称为反弹簧效应，而这种反弹簧效应是由特殊的几何结构产生的。

(b) 运动方程和传递函数

由于系统是对称的，我们在这里只选取一个叶片进行分析。叶片的尖端直接加有负载，负载的质量为 m 。垂直弹簧在平衡点单独地支撑负载。定义参数 Z 为尖端的实际高度与工作点位置的差。尖端的运动被限制在垂直方向。水平弹簧的长度为 l ，它与垂直方向的夹角为 θ 。参数 K_z, K_x, l_{oz}, l_{ox} 分别表示垂直和水平弹簧的弹簧常数及自然长度。

负载 m 在垂直方向的运动方程为：

$$m\ddot{Z} = K_z(Z_{eq} - Z - l_{oz}) - K_x(l - l_{ox})\cos\theta - mg$$

解方程我们就可以得到它的传递函数

传递函数

当把 MGASF 等效为垂直方向线谐振子时，它的传递函数为：

$$H_{zo}(\omega) = \frac{Z}{Z_g} = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

其中 Z_g 表示负载相对于地面的高度， $\omega_o^2 = \frac{K_{eff}}{m}$ 是垂直方向共振角频率。

一个过滤器不能满足对地面震动衰减的需要。这时我们可以把 n 个过滤器串联起来，组成级联过滤器

*Virgo 的悬挂链

Virgo 有非常讲究的悬挂链，多级串联，且有很多辅助部件，隔振效很好

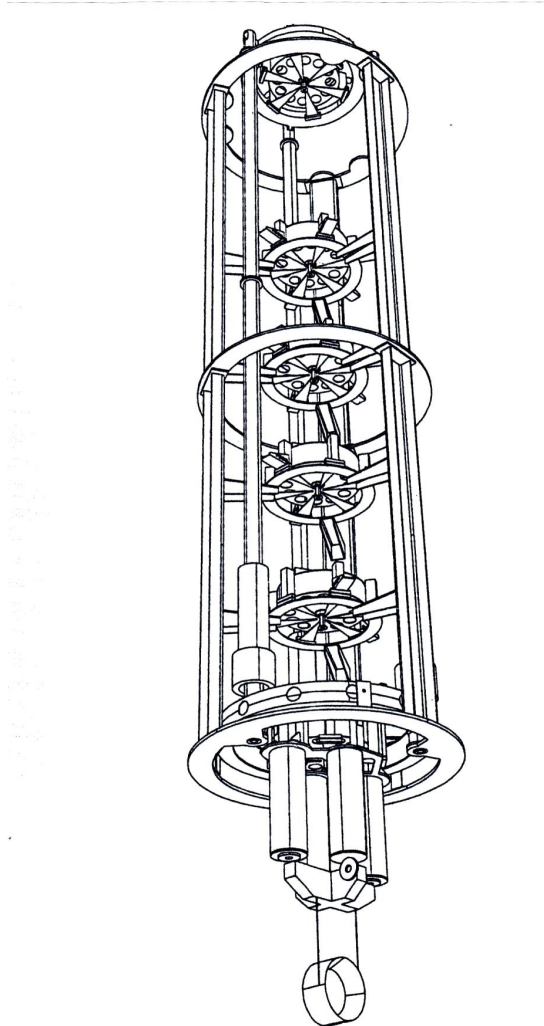


图4.10 Virgo 的悬挂链

4.2 热噪声

根据涨落-耗散理论, 任何一个受损耗影响的机械系统都会受到位置涨落的影响. 激光干涉仪引力波探测器中的镜子 (即测试质量) 及其悬挂系统就是这样的一种机械系统. 镜子的位置必然受这种涨落影响. 这种涨落就是所说的热噪声。

热噪声的根源是分子的无规则运动, 激光干涉仪引力波探测器中的热噪声主要有如下三种类型。

4.2.1 单摆热噪声

在激光干涉仪引力波探测器中,干涉仪的测试质量(即镜子)悬挂于稀薄的空气之中.它所处的周围环境相当于一个具有热量的大容器.测试质量系统通过耗散机制与其进行能量交换.交换来的能量作为一种涨落力注入到测试质量系统中,使其悬挂丝和测试质量体(相当于一个单摆)发生热运动,导致位置涨落,形成热噪声.

干涉仪中用细丝悬挂起来的镜子整体上可以看成是一个单摆.单摆是一个典型的具有损耗的谐振子,单摆热噪声是一种阻尼谐振子的热噪声,它完全可以用阻尼谐振子的热噪声分析方法进行分析.

A). 物理模型

激光干涉仪引力波探测器的测试质量系统, 可以简化为悬挂于稀薄气体中的单摆 (如下图所示), 单摆热噪声是气体分子无规则热运动产生的。它的大小可以用分子运动论推导出来

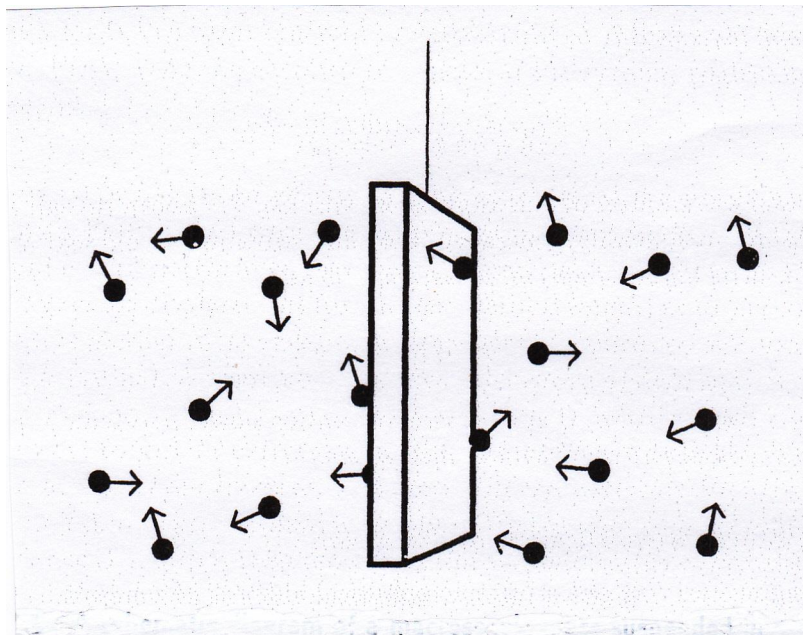


图 4.9 悬挂在稀薄气体中测试质量的简化模型

我们将测试质量简化为一个质量为 m 的直角薄板, 截面积为 A , 用一根长线把他悬挂起来, 做成一个单摆. 其共振频率为 f_0 . 薄板周围的空间充满稀薄气体, 压力为 $P = nK_B T$. 其中 n 是单位体积内气体分子的个数, T 是温度, K_B 是玻尔兹曼常数

B). 物理分析—得出涨落力的功率谱

*每个板面上分子撞击的计数率 $N = \frac{1}{4} n \bar{v} A \sqrt{\frac{K_B T}{2\pi\mu}}$

*分子对每一个面产生的撞击力 $F_+ = PA = nK_B TA$

*撞击板的总分子数的相对涨落 $\frac{\sigma_{N_\tau}}{N_\tau} = \frac{1}{\sqrt{N_\tau}}$

*涨落力的功率谱 $F^2(f) \approx K_B T$

最后我们可以得到涨落力的功率谱, 它与 $K_B T$ 成正比

c)利用涨落 - 耗散理论, 我们也可以计算出单摆热噪声的幅度谱

$$X_{Thorm}^2(f) = \frac{4K_B T}{(2\pi f)^2} R\{Y(f)\} \quad (Y(f) \text{ 称为系统的导纳})$$

它与用分子运动论推导出的结果是一致的

激光干涉仪引力波探测器中的单摆热噪声是比较大因此测试质量系统（即镜子）必须置于真空室内，真空室的真空度要好于 10^{-9} 托。

4.2.2 悬挂丝和镜面的热噪声

激光干涉仪引力波探测器中镜子和悬挂丝自身都可以看成连续机械系统，本身都具有有限的刚度，因此它们都具有弹性内部模式. 热噪声源于机械系统的内摩擦。

由内摩擦引起的热噪声通常分为悬挂丝热噪声(琴弦模式)和镜面本身热噪声(鼓面模式)，前者通过悬丝的涨落直接引起测试质量位置的涨落, 而镜子本身的热噪声是镜子内部及其涂层中所有涨落和耗损过程的叠加

**悬挂丝的热噪声—琴弦模式

悬挂丝的诸多内部正态模式能够被热激发而使丝产生近似于正弦序列的琴弦运动模式. 在正弦形状的琴弦运动模式下, 悬挂丝的位置会产生波动, 使测试质量的质心位置出现涨落形成噪声. 这种类型的热噪声模式显示出丝振动模式的谐波性, 因此, 悬挂丝的这种热噪声模式通常称为琴弦模式。第一琴弦正态模式的频率通常为百赫兹量级. 因此有些琴弦正态模式位于引力波探测频带内, 对探测灵敏度产生很大的影响。必须引起高度关注。

悬丝热噪声的位移幅度谱

$$X_{Th.int}^2 \sim \frac{4K_B T}{\omega} \sum_j \frac{\omega_j^2 \Phi_j}{mj[(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \omega_j^4 \Phi_j^2]}$$

这里 ω_j 和 Φ_j 分别是 j 级模式的自然频率和耗损角, m_j 是 j 级模式的有效质量.

**镜子的热噪声—鼓面模式

镜子本身作为一个连续机械系统，亦可以看成是由无穷多个谐振子构成，它们对应于系统的无穷多个正态模式。每个模式都有自己的共振频率、有效质量和阻尼时间。这使得该连续机械系统具有很多内在的机械共振模式。这些模式能够被热激发而使镜子的表面发生位置涨落，形成热噪声。在分析镜子本身的热噪声时，我们感兴趣的参量是对着高斯型激光束的镜子表面位置的涨落。这种由热噪声导致的镜子表面位置的涨落模式通常被称为热噪声的“鼓面模式”。

鼓面模式热噪声的共振频率一般比较高，在激光干涉仪引力波探测器覆盖的探测频带内的热噪声是这些共振模式的尾部效应，它对干涉仪的灵敏度也会产生很大的影响。镜子表面由于热噪声导致的位置涨落就可以用下面的公式表示：

$$x_{\text{th}}^2(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega^2} \frac{1 - \sigma^2}{\sqrt{\pi} E_0 w} \phi(\omega) \quad (7-43)$$

其中 E_0 是镜子的杨氏模量， w 是激光束截面半径， σ 是泊松比。可以看出，热噪声随耗损角 $\phi(\omega)$ 的增加而增加，随构成镜子的材料的刚性的增加而减小。并且随激光束尺寸的增大而变小。在镜子尺寸允许的情况下，尽量使用大尺寸的激光束是有利的。

****镜子材料的选择和镀膜**

镜子基底材料的结构损失在镜子热噪声中起着重要的作用. 降低基质热噪声——选择机械损耗尽可能低的光学材料, 熔硅具有非常低的机械损耗, 非常小的光学吸收, 出色的均匀性及非常小的双折射.

为了得到需要的反射率, 镜子表面需要用特殊的材料进行涂镀. 沉积在镜子基质表面的涂层是用低折射率材料和高折射率材料交替涂镀15-40层而成. 涂层总厚度为几微米. 需要指出的是, 在重达几十公斤的镜子中, 机械损耗的主要贡献来自在镜子表面沉积的这几微米厚的涂层. 镜子涂层的热噪声严重地影响干涉仪的灵敏度, 寻找机械损耗低的涂层材料, 研究现有涂层材料的机械损耗根源仍是当前令人感兴趣的课题.

低温环境中, 散热面积大, 散热系数好

**热透镜效应

在激光干涉仪引力波探测器中，为了提高性能，我们总是希望尽可能地使用高功率激光器。但是，高的激光功率在附属光学部件中（如镜子，调制器，法拉第隔离器，偏振器等）被吸收的光能量会导致局部温度升高，使折射系数发生变化，导致透镜效应。继而导致与光学共振相匹配的模式的质量降低。使系统的稳定性变差。尤其是干涉仪臂上主要光学部件在兆瓦级激光功率下会表现出强烈的透镜效应。

另外，在激光照射下，测试质量（即镜子）表面的镀膜层都会吸收光子能量而变热。激光从测试质量的中心穿过时，中心部位会吸收激光功率并转化为热量由中心向周围传递，使测试质量内部形成一个不均匀的温度场。测试质量的不同部位将会因热膨胀而有不同程度的变形。这一变形会直接改变测试质量的透射率，改变透射光的光程差，使透射光波形失真。同时，由于测试质量的表面变形，将改变测试质量的曲率半径，而测试质量的曲率半径是光学谐振腔的重要参数。它的变化将直接导致光学谐振腔的构型发生变化，破坏腔的稳定性。因此，在设计激光干涉仪引力波探测器时，热透镜效应是必须要加以考虑的。

** KAGRA 测试质量在室温和低温条件下热噪声应变幅度的比较

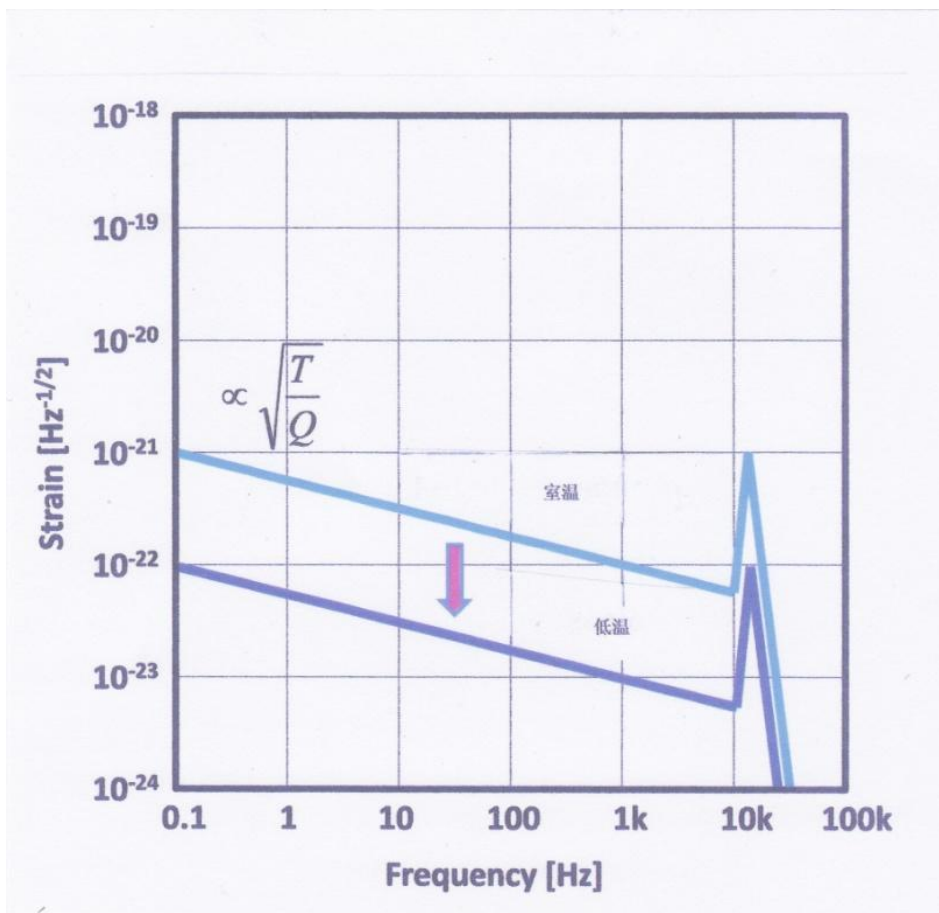


图 4.10 KAGRA 的测试质量在室温和低温条件下的热噪声

4.3 激光干涉仪的光量子噪声

光量子噪声源自光的量子性质，在几乎所有频率上它都会对灵敏度加以限制，光量子噪声是干涉仪灵敏度进一步提高的主要障碍。它包括霰弹噪声和辐射压力噪声两大类

4.3.1 霰弹噪声

**霰弹噪声的起源

从统计物理可知，激光器所发射的光子数目本身是有涨落的。激光束中光子数并非在每个时间点都是相同的，激光束的强度是有起伏的。当激光束射入光探测器时，产生的光电流强度是有涨落的，这种涨落在干涉仪输出端引起的噪声被称为霰弹噪声，又叫散粒噪声。

**霰弹噪声的强度

在实际应用中，引力波探测器噪声强度 h_{noise} 中的霰弹噪声成分用噪声功率谱密度的平方根 h_{shot} 来表示：

$$h_{shot}(f) = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\bar{h}c\lambda}{2\pi P_{in}}}$$

(这种表示比 σ 更通用一些)

霰弹噪声与输入激光功率 P_{in} 的平方根成反比，输入光束功率 P_{in} 越大,霰弹噪声越小. 霰弹噪声与工作频率无关是白噪声

其中 \bar{h} 是约化普朗克常数

4.3.2 辐射压力噪声

**辐射压力噪声的起源

在干涉仪臂中往返运动的光束中的光子，在撞击到镜子表面之后，**会向相反的方向折回，动量发生变化**。这种光子动量的变化使镜子受到一种压力，称为**光辐射压力**。在该力的作用下，镜子会向光子弹回方向的反方向反冲，其**平衡位置发生变化**。由于**光子数目的统计涨落**，辐射压力不是常数，它是有统计涨落的。这种**辐射压力的涨落**会直接引起测试质量**位置的波动**，形成噪声。称之为**辐射压力噪声**。

**** 辐射压力噪声的应变强度:**

和霰弹噪声一样,引力波探测器噪声中 h_{noise} 的辐射压力噪声成分一般不用位置的统计涨落 $X(f)$ 来表示,而是用噪声功率谱密度的平方根 h_{rp} 来表示:

$$h_{rp}(f) = \frac{2}{L} X(f) = \frac{1}{mLf^2} \sqrt{\frac{\hbar P_{in}}{2\pi^3 c \lambda}}$$

辐射压力噪声的大小与输入功率的平方根 $\sqrt{P_{in}}$ 成正比,它不再是"白"噪声,而是与频率的平方 f^2 成反比.

**辐射压力噪声与镜子质量的关系

自由质量对力的敏感性

$$1/(M\Omega)^2$$

其中 M 是测试镜子的质量， Ω 是我们感兴趣的频率，除了使用功率低的激光器外，增加镜子的质量可以减小测试质量对力的敏感性从而减小辐射压力效应在镜子运动上影响。

4.3.3 光量子噪声

在激光干涉仪引力波探测器中,有两种与光的量子特性相关的噪声源, 它们与输入功率 P_{in} 的关系是相反的. 霰弹噪声随功率 P_{in} 的增大而减少,但辐射压力噪声随功率 P_{in} 的增大而增大.我们可以把这两种噪声看成一种噪声(称之为光学噪声或光量子噪声)的两张面孔.

$$h_{orn}(f) = \sqrt{h_{shot}^2(f) + h_{rp}^2(f)}$$

在低频区域, 辐射压力噪声占主导地位(它正比于 $\frac{1}{f^2}$). 在高频区域,霰弹噪声占主导地位. 增加输入光束的功率 P_{in} 可以改善干涉仪在高频区域的灵敏度,但要以增加低频区域的噪声为代价.

5.4 引力梯度噪声

从牛顿万有引力定律可知，悬挂起来的测试质量周围的物体都会与该测试质量相互吸引. 局部质量分布的变化（如大气密度的变化、人员来往、车辆移动和附近地区的风吹草动等）引起局部牛顿引力场的涨落，产生引力梯度噪声（有时称为牛顿噪声）. 这种噪声会使隔震系统“短路”，直接作用在镜子上, 是无法回避的. 引力梯度噪声使测试质量产生的运动幅度的大小为：

$$x(\omega) = \frac{4\pi G \rho}{\omega^2} \beta(\omega) W(\omega)$$

在这里 L 是干涉仪臂长, G 是引力常数, ρ 是局部的土壤密度, $X_s(f)$ 是局部地面震动噪声谱. $\beta(\omega)$ 是一个无量纲的减弱传递函数, 它表示测试质量与地面之间的距离对引力梯度噪声的影响, 当测试质量与地面之间距离的绝对值增大时, 引力梯度噪声的影响会减小, 因此 $\beta(\omega)$ 又被称为减弱因子.

** KAGRA地表面与地下震动噪声的比较

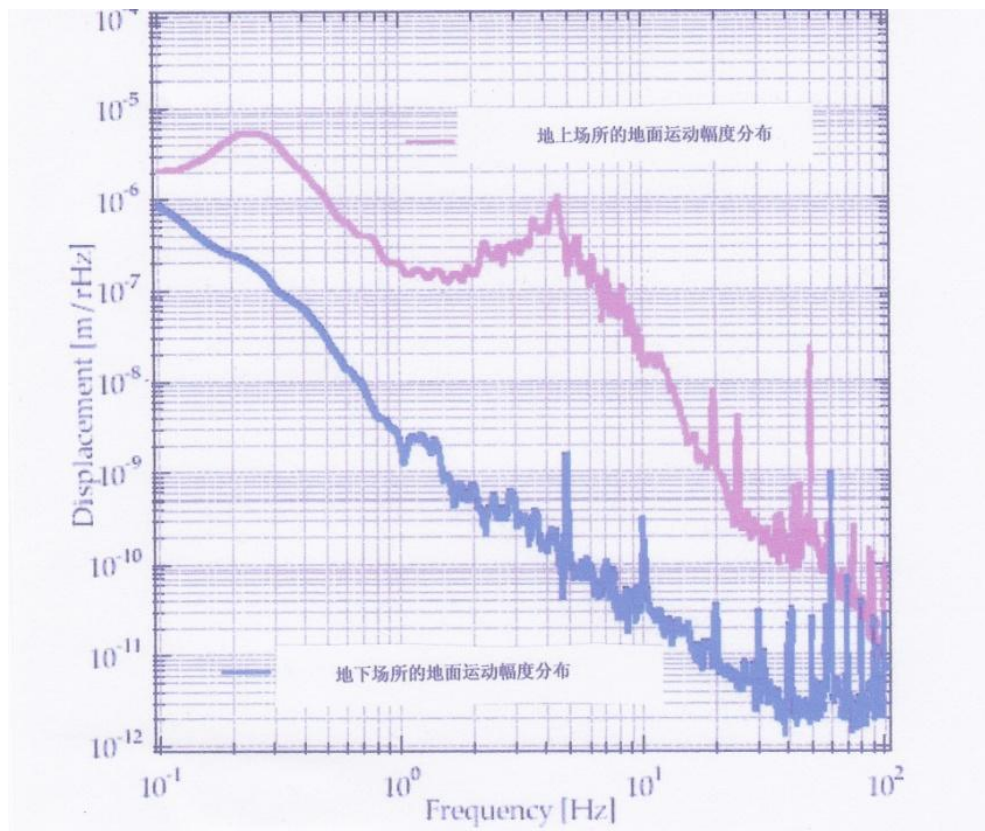


图 4.11 KAGRA 地面与地下震动噪声的比较

由于 KAGRA 建在地下，大大减小了牛顿梯度噪声，地面震动噪声也可以减小到原来的 1/100 左右，地面噪声的压低有效地提高了探测器的灵敏度并把探测频率向低频端推进。

4.5 散射光子噪声

在传输过程中,少部分激光会被散射离开主光束. 当它们随后被反射回来时,会和干涉仪中挟带引力波信号的光束耦合. 这些散射光携带的是它们散射面上的信息,因此会污染期望中的信号,形成噪声. 在设计激光干涉仪引力波探测器的真空室和真空管道时,要采取必要的措施(如各种各样的光阑),使该噪声减至最小值.

4.6 残余气体噪声

激光干涉仪引力波探测器的真空室和真空管道中会有少量气体残留下来. 这些残余气体除了引起热噪声外, 它的密度扰动会使折射率发生涨落, 对激光束传播产生影响, 形成噪声. 称为残余气体噪声.

另外, 残余气体分子对镜面不同部位的撞击是随机的. 撞击产生的压力在镜面上的分布是不均匀的. 它会引起镜子晃动. 形成干涉仪的噪声. 它也属于残余气体噪声的一种.

**真空系统 (Vacuum System)

为了降低杂散光子噪声和残余气体噪声，所有的测试质量，光学镜，隔震系统都置于真空度非常高的真空室中，激光也要在光束在真空管道中穿行，真空管道内设置有光阑，降低杂散光子噪声

激光干涉仪引力波探测器对真空度的要求很高。原则上讲，剩余气体分子引起的光束相位噪声要小于地面震动噪声与霰弹噪声的和。真空度要好于 10^{-9} 托，LIGO的真空管道如下图所示



图 4.13 LIGO 的真空管道

**激光干涉仪引力波探测器噪声曲线

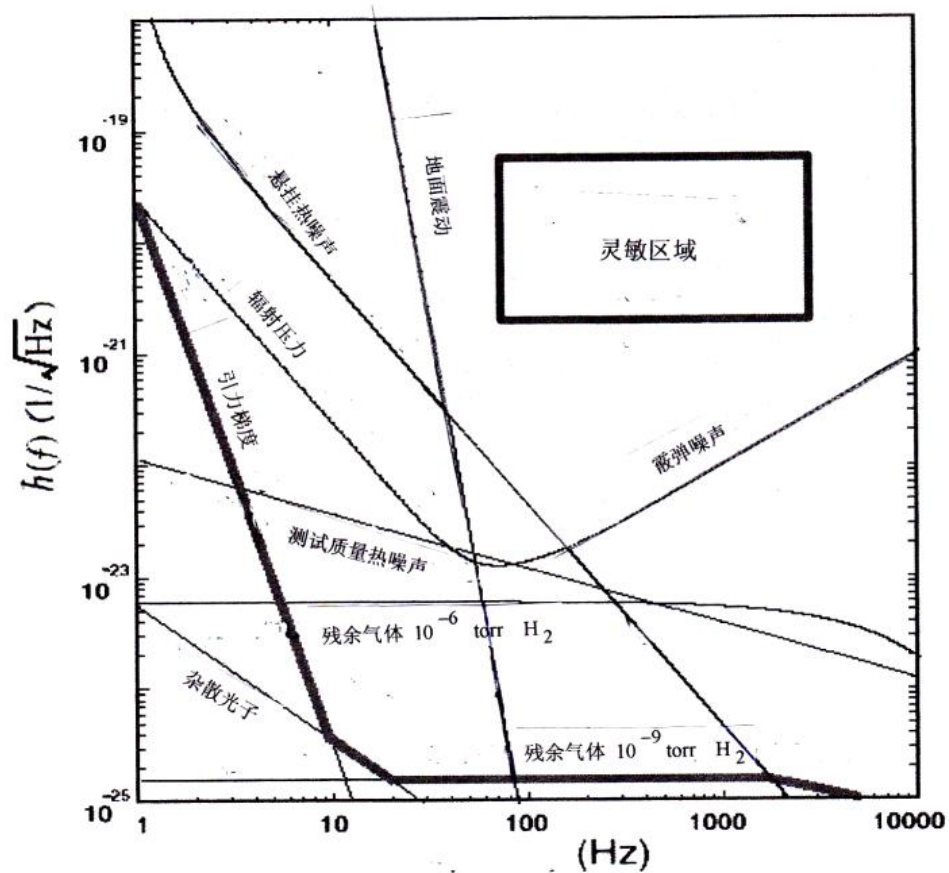


图4.13 激光干涉引力波探测器噪声曲线

4.7 激光干涉仪引力波探测器的敏度

4.7.1 灵敏度的定义

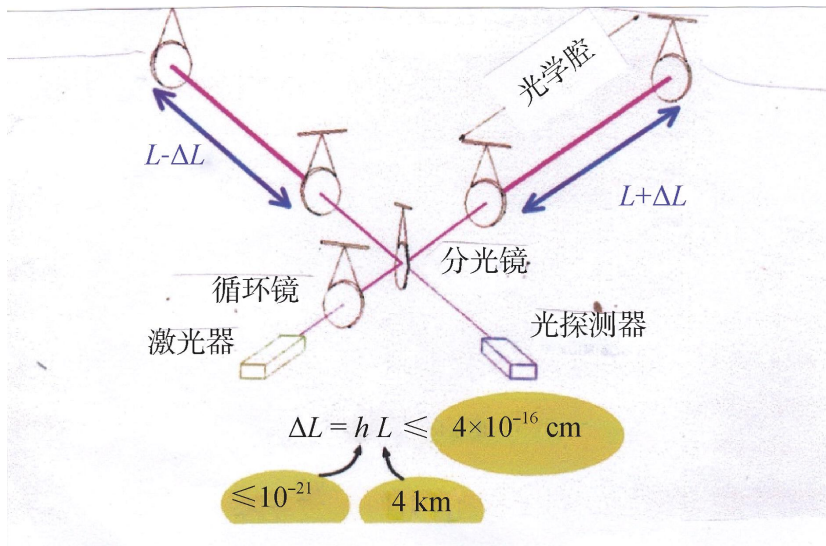


图4.13激光干涉仪引力波探测器的灵敏度示意

设干涉仪的臂长为 L ，当引力波到来时，根据引力波的特性，相互垂直的两臂一个伸长另一个相应地缩短，设臂长的变化量为 ΔL ，则两臂的长度分别变为 $L + \Delta L$ ， $L - \Delta L$ ，干涉仪的应变灵敏度 h_d 定义为：

$$h_d = \Delta L / L$$

4.7.2灵敏度的确定

确定探测器灵敏度的大小，要用一个标准引力波信号源对其进行刻度. 建造实验室引力波源的最佳方案是密近双星旋绕模型

设想我们能够建造一个哑铃，它由两个质量体组成，每个质量有一吨重，分别位于一根两米长的杆子的两端，使这个四极矩围绕着垂直于连接杆并通过杆中点的轴旋转，旋转角频率为： $f_{rot} = 1kHz$ ，忽略连接杆的贡献与双星系统相同的模型该装置产生的引力波振幅为：

$$h_{lab} = 2.6 \times 10^{-33} m \times \frac{1}{R}$$

波动效应至少要在一个波长的距离上才能显现出来, 对 $f_{rot} = 1kHz$ 的引力波来说, 一个波长的距离为 $R = 300Km$, 我们的实验室产生器在探测点给出的引力波振幅是:

$$h_{lab} = 9 \times 10^{-39}$$

(1) 强度太弱, 无使用价值

当前在地球上能测量的振幅 10^{-21} , 相差18个数量级之多.

(2) 观测点到源的距离300Km, 不现实

(3) 连接杆的应力不够大, 高转速下被撕裂, 飞散, 不能运转

上述分析表明不可能在实验室内建造这样的引力波信号源. 因此激光干涉仪引力波探测器的灵敏度不能用引力波信号的幅度来表示. 需要用其它方法来确定。

获得的数据基本上都是噪声（引力波信号是极其稀有的）。对一台引力波探测器来说, 我们现在可以知道它能探测到的最小噪声水平是多少. 探测器自身的灵敏度是由其噪声水平决定的. 信号噪声比越大, 探测到该信号的几率越大, 该探测器的灵敏度越高.

我们将激光干涉仪引力波探测器灵敏度的大小定义为: 当干涉仪中引力波信号的幅度与其噪声水平相等时(即信噪比等1时) 的噪声值. 更明确地说, 激光干涉仪引力波探测器的灵敏度曲线实际上是 (假定信噪比为1时) 它的噪声值曲线.

*几个有用的概念

(1) 引力波探测器的输出信号

引力波探测器的输出信息是一个时间序列 $S(t)$ ，它包括探测器的噪声 $n(t)$ 及探测器对引力波信号的响应 $h(t)$ ：

$$S(t) = F^+(t)h_+(t) + F^\times(t)h_\times(t) + n(t)$$

(2) 谱密度和功率谱密度

在频率域内,我们可以写出一个系统的能量随频率变化的函数,称之为能量频率谱, 又称能谱. 在频带宽度为 1Hz 的单位频带中所含有的能量称为能量频率谱密度, 简称谱密度 $D(\omega)$. 单位时间内的能量谱密度称为功率谱密度 $S(\omega)$.

$$S(\omega) = D(\omega)/T, \quad (\text{ } T \text{ 是时间间隔.})$$

4.7.3 灵敏度和噪声水平表示法

探测器中的噪声信息是时间的随机函数, 在无限大的时间间隔内 (从 $-\infty$ 到 $+\infty$) 噪声幅度的平均值是零. 因此用幅度平均值表示噪声水平是不可取的. 对于噪声这一类的随机函数, 其大小要用功率谱密度来表示, 功率谱密度有时简称为功率谱, 本文以后讲到功率谱时均指功率谱密度. 时间函数 $S(t)$ 的功率谱 $P_s(f)$ 定义为其自相关函数的福里叶交换:

$$P_s(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

我们在讨论功率谱 $P_s(f)$ 时, 通常只用正频率而不用负频率. 称为单边功率谱, 定义为

$$S^2(f) \equiv \begin{cases} 2P_s(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

若表征噪声函数 $S(t)$ 的物理量是电压 $V(t)$, 功率谱 $S^2(f)$ 的单位就是 $V^2(f)/\text{Hz}$, 在讨论像噪声这样的随机时间序列时, 通过带宽为 Δf 的滤波器的功率表示为: $V^2(f)/\text{Hz} \cdot \Delta f$. 当把相邻各噪声合并在一起时用的是功率(即幅度的平方)相加, 而不是幅度相加.

在实际中, 我们经常用从功率谱导出的一个物理量——**幅度谱密度** $\Re(f)$, 它定义为功率谱的平方根:

$$\Re(f) \equiv \sqrt{S^2(f)}$$

(有些文献中仍用 $S(f)$ 表示幅度谱密度)

功率谱密度和幅度谱密度是描述同一个噪声水平的两个物理量, 当用频谱分析仪进行频谱测量时, 用功率谱的单位比较方便. 当用示波器或电表进行测量时, 用幅度谱密度的单位比较方便. 奇怪的符号 $1/\sqrt{\text{Hz}}$ 没有什么物理意义, 它的作用只是时刻提醒我们, 尽管用了幅度谱密度这一概念, 也丝毫改变不了这样一个事实: 在以时间函数表示的噪声中, 对各个独立频带的噪声值求和时, 不是幅度的线性相加, 而是幅度平方的线性相加.

如果功率谱的单位为 V^2/Hz , 则幅度谱密度的单位为 $V/\sqrt{\text{Hz}}$.

引力波的强度以无量纲振幅 h 表示, 因此, 在表示激光干涉仪引力波探测器的灵敏度时单位是 “ $1/\sqrt{\text{Hz}}$ ”.

4.7.4 激光干涉仪引力波探测器的灵敏度曲线

第一代激光干涉仪LIGO的灵敏度曲线如下图所示

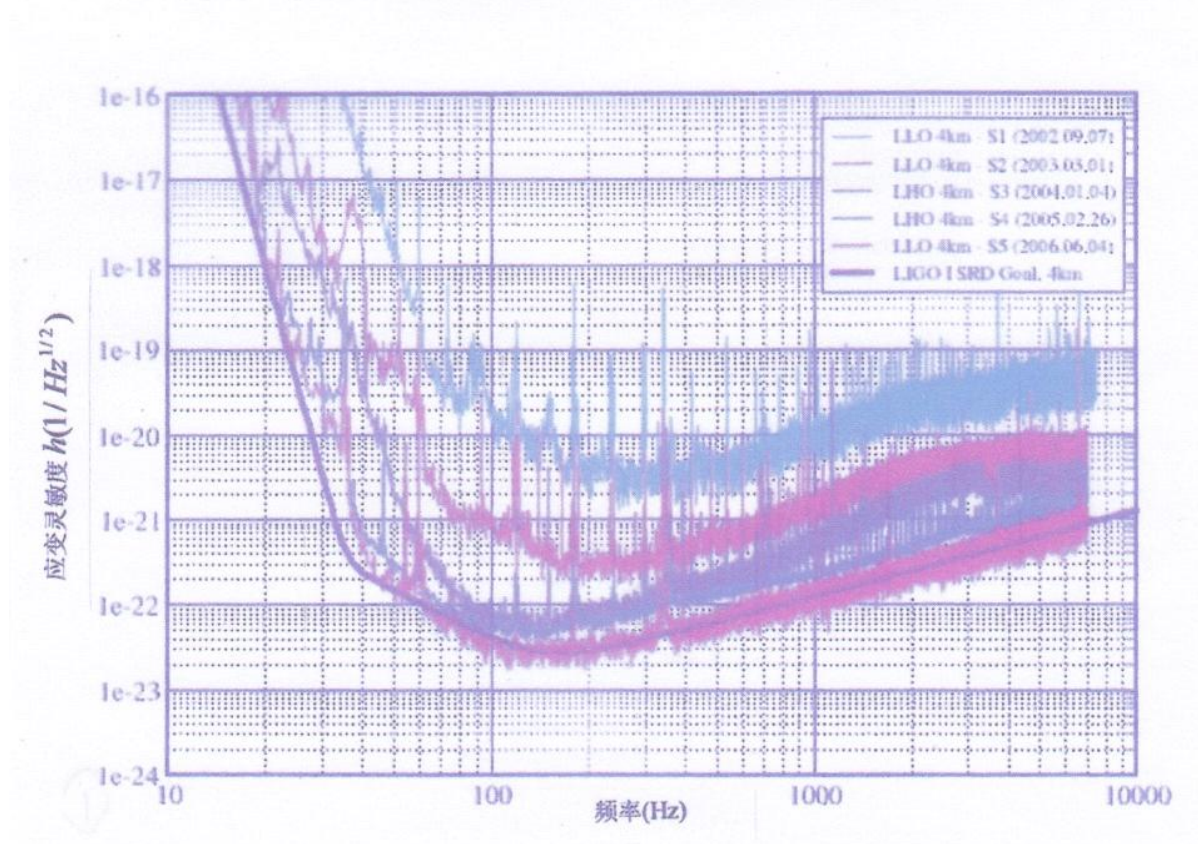


图4.14激光干涉仪引力波探测器的灵敏度曲线

从2002—2007 初级LIGO运行了5年，绝大部分数据都是进行统调（也叫调优）灵敏度才到达设计指标，激光干涉仪引力波探测器从建成到正式取数要用非常长的时间进行调节。

谢谢大家