
5. 标准量子极限和压缩态光场

光量子噪声源自光的量子性质，在几乎所有频率上它都会对灵敏度加以限制，**光量子噪声是干涉仪灵敏度进一步提高的主要障碍**。它包括霰弹噪声和辐射压力噪声两大类

5.1 霰弹噪声

****霰弹噪声强度计算**

在激光器中，每个光子的发射都是独立事件，发射的光子数为N的事件出现的几率P(N)可以用泊松分布来描述：

$$P(N) = \frac{\bar{N}^N \cdot e^{-\bar{N}}}{N!} \quad (\bar{N} \text{ 为多次测量的平均数})$$

当 $\bar{N} \gg 1$ 时，泊松分布可以用高斯分布来近似，高斯分布的标准偏差为：

$$\sigma = \sqrt{N}$$

****霰弹噪声引起的位置统计涨落 σ_{dL}**

在具体测量中, 我们是用输出功率来度量测试质量位置变化和涨落的, 因此, 我们需要把输出功率的统计涨落折合成测试质量位置的统计涨落, 也就是说, 把由光子数的统计涨落引起的霰弹噪声折合成位置的统计涨落 σ_{dL} , 它的计算公式为:

$$\sigma_{dL} = \frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}} / \frac{1}{P_{out}} \cdot \frac{dP_{out}}{dL} = \sqrt{\frac{\bar{h}c\lambda}{4\pi P_{in}\tau}}$$

在这里 \bar{h} 是约化普朗克常数, P_{in} 是输入激光功率, P_{out} 是输出功率,

**霰弹噪声的应变强度

在实际应用中，引力波探测器噪声强度 h_{noise} 中的霰弹噪声成分一般不用位置的统计涨落 σ_{dL} 来表示，而是用噪声功率谱密度的平方根 h_{shot} 来表示，这种表示法比 σ 更通用。

$$h_{shot}(f) = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\hbar c \lambda}{2\pi P_{in}}}$$

霰弹噪声与输入激光功率 P_{in} 的平方根成反比，输入光束功率 P_{in} 越大，霰弹噪声越小。霰弹噪声与工作频率无关是白噪声

在这里 \hbar 是约化普朗克常数， P_{in} 是输入激光功率， L 是干涉仪的臂长

5.2 辐射压力噪声

**辐射压力噪声的强度计算

*从一个无耗损的镜面反射的、功率为 P 的光波对镜子的作用力 F_{rad} 为

$$F_{rad} = \frac{P}{c},$$

*光束中光子数的涨落引起的该力 F_{rad} 的涨落为:

$$\sigma_F = \frac{1}{c} \sigma_P$$

*用功率谱密度 $F(f)$ 来表示力光辐射压力 F_{rad} 的涨落 σ_F 有:

$$F(f) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar P_{in}}{c\lambda}}$$

其中 c 是光速, λ 是光波波长

**在最佳探测条件下, 输出功率为 P_{out} 的光束产生的辐射压力涨落所引起的测试质量位置的波动幅度:

$$X(f) = \frac{1}{m\omega^2} F(f) = \frac{1}{m(2\pi f)^2} F(f) = \frac{1}{mf^2} \sqrt{\frac{\hbar P_{in}}{8\pi^3 c \lambda}}$$

由于干涉仪的两个臂中光子数的涨落是反关联的, (即进入一个臂的光子数多了意味着进入另一个臂的光子就少了), 使得在干涉仪的输出信号中这个效应被加倍.

**** 辐射压力噪声的应变强度:**

和霰弹噪声一样,引力波探测器噪声中 h_{noise} 的辐射压力噪声成分一般不用位置的统计涨落 $X(f)$ 来表示,而是用噪声功率谱密度的平方根 h_{rp} 来表示:

$$h_{rp}(f) = \frac{2}{L} X(f) = \frac{1}{mLf^2} \sqrt{\frac{\hbar P_{in}}{2\pi^3 c \lambda}}$$

辐射压力噪声的大小与输入功率的平方根 $\sqrt{P_{in}}$ 成正比,它不再是”白”噪声,而是与频率的平方 f^2 成反比.

辐射压力噪声对低频灵敏度的影响是巨大的

5.3 光量子噪声

在激光干涉仪引力波探测器中,有两种与光的量子特性相关的噪声源,它们与输入功率 P_{in} 的关系是相反的.霰弹噪声随功率 P_{in} 的增大而减少,但辐射压力噪声随功率 P_{in} 的增大而增大.我们可以把这两种噪声看成一种噪声(称之为光学噪声或光量子噪声)的两张面孔.

$$h_{orn}(f) = \sqrt{h^2_{shot}(f) + h^2_{rp}(f)}$$

在低频区域,辐射压力噪声占主导地位(它正比于 $\frac{1}{f^2}$).在高频区域,霰弹噪声占主导地位.增加输入光束的功率 P_{in} 可以改善干涉仪在高频区域的灵敏度,但要以增加低频区域的噪声为代价.

5. 4标准量子极限

**实验定义

从光量子噪声的特性我们可以看出，霰弹噪声和辐射压力噪声对激光功率的响应是相反的。但是，对于任何一个给定的探测频率来说，我们总可以利用选择输入激光功率的方法可以使两种噪声的贡献折中，即使霰弹噪声与辐射压力噪声相等

$$h_{shot}(f) = h_{rp}(f)$$

这时光量子噪声最小，激光干涉仪的灵敏度达到最佳值，这个最佳值对应的最小光量子噪声值被称为该频率处灵敏度的标准量子极限SQL.

** 标准量子极限计算公式

标准量子极限通常也用噪声谱密度 $S_h^{SQL}(\Omega)$ 来表示, 它一般小于激光干涉仪的噪声谱密度 $S_h(\Omega)$

$$S_h(\Omega) \geq S_h^{SQL}(\Omega)$$

显然, 标准量子极限 S_h^{SQL} 给出了干涉仪的噪声谱密度 $S_h(\Omega)$ 的下部边界, 标准量子极限谱密度的计算公式为:

$$S_h^{SQL}(\Omega) = 8\bar{h} / m\Omega^2 L^2$$

在这里 m 是单个测试质量的质量值 (假定干涉仪的四个测试质量具有相同的质量值), L 是干涉仪臂上法布里-珀罗腔的长度, \bar{h} 是约化普朗克常数. Ω 是被测引力波的角频率).

通常标准量子极限以无量纲振幅 $h_{SQL}(f)$ 来表示，它定义为

$$h_{SQL}(f) = \sqrt{S_h^{SQL}(\Omega)}$$

可以看出，标准量子极限 SQL 的大小与干涉仪的具体参数有关，例如，臂长4公里的 LIGO的标准量子极限（以无量纲振幅表示） $h_{SQL}(f)$ 在频率为100Hz 时数量级为 $10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$

**标准量子极限曲线

在任何选定的工作频率上，总可以找到一个最合适的激光功率，使霰弹噪声和辐射压力噪声大小相等，这时光量子噪声最小，称为标准量子极限，不同频率下的标准量子极限点连成一条直线就是标准量子极限曲线

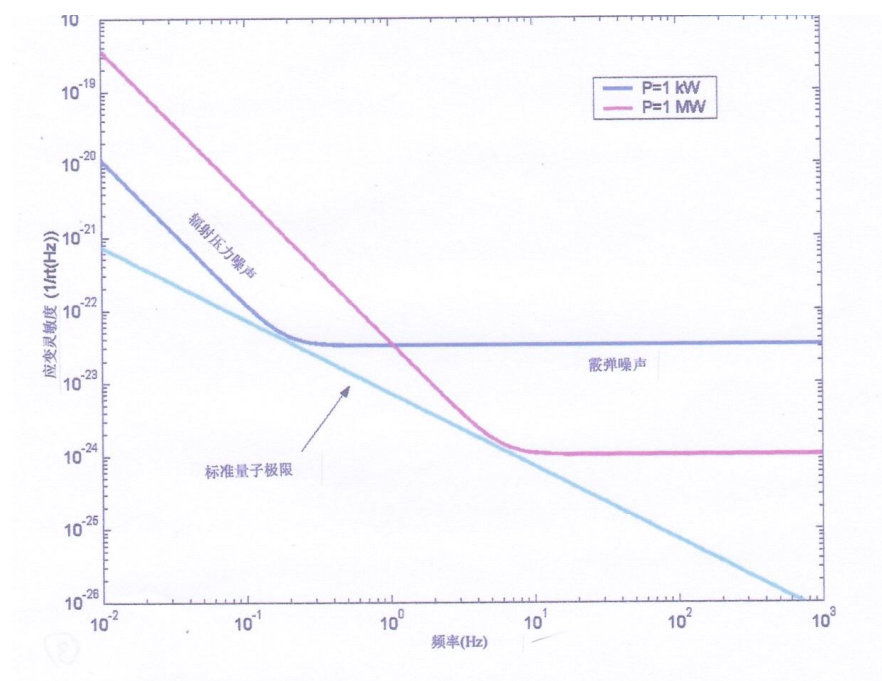


图5.1 标准量子极限曲线

**激光干涉仪中标准量子极限产生的原因

在激光干涉仪引力波探测器中，标准量子极限产生的原因是量子力学的测不准原理。当引力波通过时，由它引起的时空畸变位移量是非常小的（约为 10^{-19} 米或更小）激光干涉仪引力波探测器必须以非常高的精度进行长度测量。其长度测量精度已进入微观尺度，这就需要考虑量子力学中的测不准关系。量子力学中的测不准原理告诉我们，如果两个力学量的算符是不对易的（如坐标算符 \hat{x} 和动量算符 \hat{p}_x ），则这两个算符对应的力学量（坐标 x 和动量 p_x ）一般不能同时具有确定的值。坐标 x 的均方误差越小，即坐标 x 的测量越精确，则与其对应的动量 p_x 的测量误差越大，即测量越不精确。

把量子力学的测不准原理应用在在激光干涉仪引力波探测器的测试质量上，能很好地解释标准量子极限问题。根据测不准原理，如果测试质量的相对位置以极高的精度进行测量，那么测试质量的动量会因此受到扰动。随后，这种动量扰动会产生位置的不确定性，这种位置的不确定性会影响引力波引起的极微小的位移。这就是说，量子力学测不准原理对干涉仪灵敏度的提高产生了一个极限，它就是所谓的标准量子极限

5.5 光量子噪声的来源

光量子噪声从本质上讲来源与光的量子性。电磁场的量子理论告诉我们，激光干涉仪引力波探测器中的光量子噪声来自真空涨落与干涉仪内部光场之间的耦合，这种耦合导致用做探针的激光的相位和振幅的不确定性。产生霰弹噪声和辐射压力噪声。

在量子场论中，电磁场的最低能量状态叫“真空态”或称为“零点场”。它的能量是不为零的，因而是有涨落的。电磁场的真空涨落是光量子噪声产生的根源。

5.6 压缩态光场与标准量子极限的突破

5.6.1 标准量子极限的严重性

光量子噪声直接产生于测量和读出过程. 在激光干涉仪频带内几乎所有频率上它都会对灵敏度加以限制. 标准量子极限的大小是由光量子噪声决定的

计算表明, 在LIGO探测器中由光量子噪声决定的标准量子极限为 10^{-24} , 第一代LIGO的灵敏度为 10^{-22} , 离标准量子极限还远, 第二代激光干涉仪的灵敏度为 10^{-23} , 标准量子极限的影响不十分严重, 而第三代激光干涉仪的灵敏度的设计值为 10^{-24} , 与标准量子极限相比拟, 光量子噪声是限制第三代激光干涉仪引力波探测器灵敏度提高的主要障碍

5.6.2 突破标准量子极限的途径

需要指出，标准量子极限是在第一代激光干涉仪研制过程中提出的，光量子噪声在经典的迈克尔孙干涉仪中对探测灵敏度形成一个基本的极限。只要光的霰弹噪声和辐射压力噪声之间不发生关联，光束就稳固地施加标准量子极限。标准量子极限是激光干涉仪引力波探测器降低噪声、提高探测灵敏度的天然障碍。因此认为，这是激光干涉仪引力波探测器灵敏度的极限值。称之为标准量子极限。

大幅度突破标准量子极限的出路在于改变常规干涉仪的光学结构和读出方式，设计全新的探测器。后来的研究表明，采用新技术，如光场压缩技术，信号循环技术，干涉仪的灵敏度也可以在一定频率范围内突破标准量子极限

**压缩态光场

压缩态光场的应用是突破标准量子极限最有效的方法，因此它是当前世界各大引力波实验室研究的热门课题之一。

压缩态光场与光场的相干态密不可分，为了深入研究光场压缩态的特性及获取方法，我们有必要对光场相干态进行概括的介绍。

A. 相干态光场

量子力学中物理量是用波函数描述的，如果不在它的本征态下进行测量。则测量结果具有不确定性，设 p 和 q 是广义坐标和广义动量，根据海森堡测不准原理，我们有： $\Delta p \Delta q \geq \hbar / 2$ ，而在经典力学中，对任何物理量的测量都是唯一的，即 $\hbar = 0$ 。

当公式 $\Delta p \Delta q \geq \hbar / 2$ ，取等号时，即当 $\Delta p \Delta q = \hbar / 2$ 时，我们认为这种量子态是最接近经典的态。相干态和压缩态就是这种最接近经典的态。实验和理论均可证明，一台理想的激光器所产生的激光场就是相干态光场，它既是一个量子态而且又是最接近经典物理的态。

**经典相干光场

在传统的经典光学中，人们以光场是否具有产生干涉的能力作为相干光的判据，传统光学中所说的相干光是一阶相干光。它是一阶相干度的绝对值等于 **1** 的光场。这种相干性实质上是对光场相位差的起伏加以严格限制，使光场相位差随机起伏造成的噪声受到限制。但是不能把光场起伏造成的全部噪声加以限制。

从理论上讲，我们可以引进各阶的相关函数簇来描述光场的随机性，对经典电磁场理论来说，当所有各阶的相干度的绝对值都等于 **1** 时，光场所有场量的起伏都受到了最大程度的限制，这种光场是严格意义上的完全相干光。这就是说，

经典理论中的完全相干光应该是场量不存在任何起伏的无噪声光场。

****量子相干态光场**

在量子光学中，同样可以引进相关函数簇来描述光场的随机性，完全相干光的定义与经典理论相似，只不过场量用算符表示，相关函数的形式也有所不同。

在光的量子理论中，相干态光场是严格意义上的完全相干光。但是与经典理论的相干性不同，相干态不是无噪声的光场，它的场量具有来自真空起伏的量子涨落。在光学测量中，以真空涨落作为量子噪声标准，称为标准量子噪声极限。相干态是符合最小测不准关系的量子态。

****湮灭算符 a 和产生算符 a^+**

相干态有很多等效的定义，最简便的是将单模光场相干态 $|\alpha\rangle$ 定义为湮灭算符的本征态，设 a 为湮灭算符， $|\alpha\rangle$ 为单模光场相干态，我们有：

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

相干态 $|\alpha\rangle$ 上被湮灭一个光子后其状态不变，由于湮灭算符 a 是非厄米的，所以本征值 α 不是实数而是复数。在经典意义上，复数 α 对应于单模光场的复振幅。

**正交振幅与正交相位

为了形象地用正交图解释光场压缩态，需要引进两个物理量，正交振幅与正交相位

相空间是一对正则共轭广义坐标和广义动量构成的空间，湮灭和产生算符 a 和 a^+ 为非厄米算符，其本征值是复数。我们知道，量子力学中的力学量是用算符来表示的，实验上可观测的物理量是实数，而在任何状态下，厄米算符的本征值为实数，因此，实验上可观测的物理量要用厄米算符来表示。为了描述可观测的物理量，我们需要用 a 和 a^+ 这两个非厄米算符定义两个新的厄米算符 X_1 和 X_2 ：

$$X_1(r) = a^*(r) + a(r), \quad X_2(r) = i[a^*(r) - a(r)]$$

$X_1(r)$ 和 $X_2(r)$ 对应的算符是厄米算符，对应的可观测的物理量是实数

对于电磁场来说，算符 X_1 和 X_2 的物理含义分别对应于电磁场的广义坐标和广义动量，算符 X_1 和 X_2 代表电场 $E(r,t)$ 的两个正交分量的幅度，是电场的一对正交相位振幅算符，利用正交振幅 X_1 和正交相位 X_2 ，极化为 $p(r,t)$ 的电场 $E(r,t)$ 可以表示为：

$$E(r,t) = E_0[X_1 \cos(\omega t) - X_2 \sin(\omega t)]p(r,t)$$

正交相位算符和正交振幅算符是量子力学中描述光场（即电磁场）的基础。

由以上讨论可以知道，相干态同样也是电场和磁场最小测不准态，两者起伏相同。相干态的粒子起伏实质上是真空起伏，相干态的起伏可以用下图表示出来：

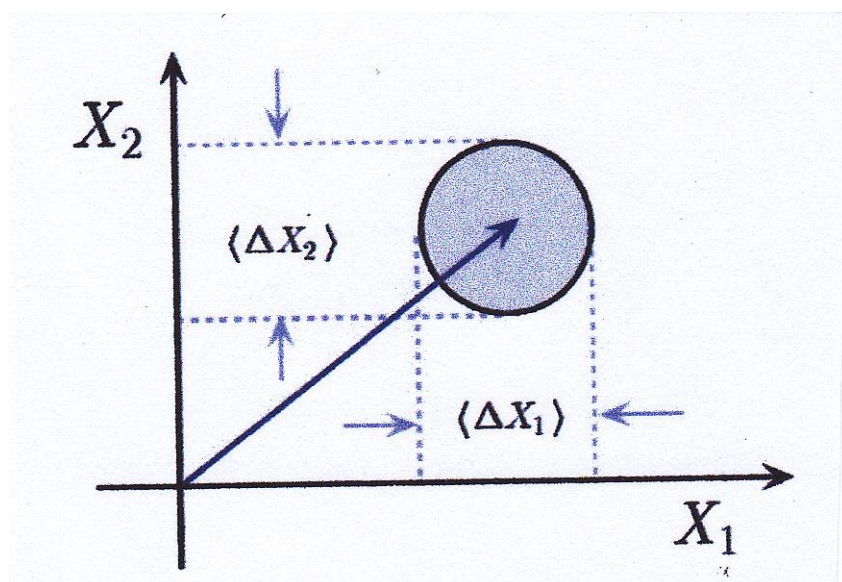


图 5.2 相干态的涨落

在图中，长箭头代表相干光，圆圈代表正交相位及正交振幅的起伏。相干态的光子数服从泊松分布，其光子数的涨落等于平均光子数。

****相干态、真空态、压缩态**

压缩态与粒子数态一样是具有纯量子性的光场态，没有经典对应，真空态是本征值 $\alpha = 0$ 的相干态的特例，因此，光场场量幅度的涨落实质上是真空场的起伏所致。相干态可以通过平移真空态得到。真空态，相干态和压缩态都是最小不确定态，满足海森堡不等式的下限。这一点和热辐射态不同。真空态和相干态各向不确定性都相等，即：

$$\Delta X_1 = \frac{1}{2}; \quad \Delta X_2 = \frac{1}{2};$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}$$

$$\langle (\Delta X_1)^2 \rangle \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{16}$$

压缩态的各向不确定性不同，它是另一种最小测不准态，其每一个正交分量上的方差并不相等，即：

$$(\Delta X_1)^2 \neq (\Delta X_2)^2$$

这表明，压缩态中任选的一个正交分量上的涨落小于 $\frac{1}{4}$ ，即被压缩了（但与此同时，另外一个正交分量上的涨落大于 $\frac{1}{4}$ ，两者的乘积仍等于 $\frac{1}{16}$ ），因此，这种量子态被称为压缩态。在正交振幅（或正交相位）压缩态中，两个正交分量的涨落一个低于真空涨落，另一个高于真空涨落，被压缩方向的正交分量的不确定性减小，而与其正交方向的另一个分量的不确定性放大。这就是说，压缩态在某一正交分量上具有更小的噪声（它小于真空起伏），但二个涨落的乘积仍满足海森堡最小测不准关系，即：

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &> \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 < \frac{1}{2} \\ \Delta X_1 &< \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = \frac{1}{4}; \quad \langle (\Delta X_1)^2 \rangle \langle (\Delta X_2)^2 \rangle = \frac{1}{16}$$

由此可知，相干态只是 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \frac{1}{2}$ 时的一种最小测不准态，可以认为它是最小测不准态的一个特例，更普遍的情况应该是：

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &> \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 < \frac{1}{2} \\ \Delta X_1 &< \frac{1}{2}, \quad \Delta X_2 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

这种量子态就是压缩态，当压缩椭圆的长轴（或短轴）与 x_1 或 x_2 轴方向相同时，这种压缩态被称为正交压缩态。

下图给出了最小测不准态曲线。该曲线形象地表明相干态只是最小测不准态的一个特例。

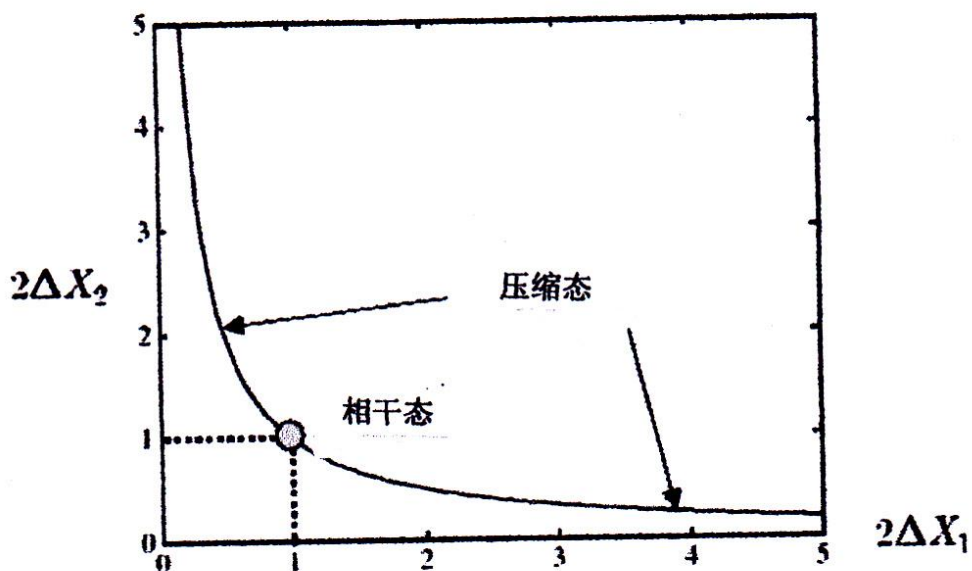


图 5.3 最小测不准态曲线

**正交图

正交图可以清楚地表示光子的量子特性，是理解激光干涉仪光量子噪声及压缩态光场的一种强有力的图形工具

光场是由数量巨大的光子组成的。由于光子的量子特性,光场中的光子并不都具有严格相同的正振幅和正交相位，它的正交振幅和正交相位遵循一定的几率分布.在一个有限的时间内进行连续测量以便确定光子状态时每次测量所得的结果都可以用 $\hat{X}_1(r), \hat{X}_2(r)$ 平面内的一个点来表示,大量的测量完成之后就可以得到光子态的几率在 $\hat{X}_1(r), \hat{X}_2(r)$ 平面内的分布（图5.4）

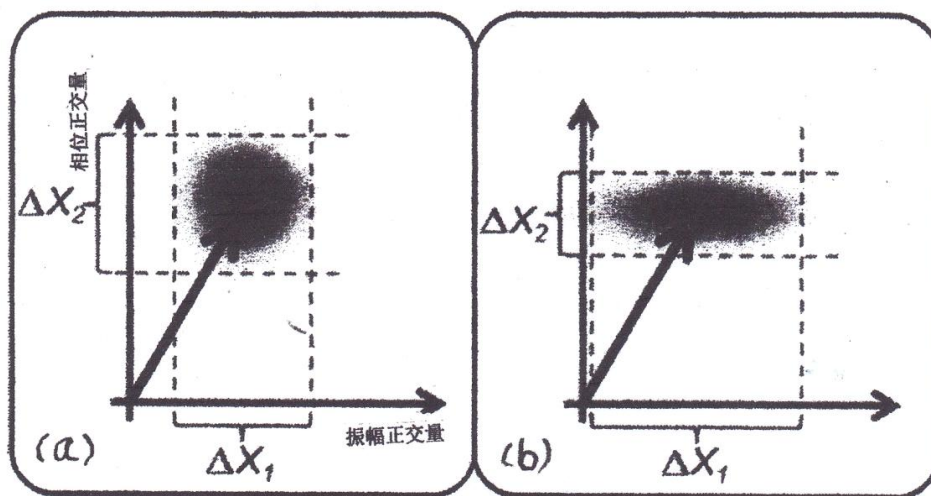


图 5.4 光子态的几率分布

在图中，实线箭头指着的**圆心在** $\hat{X}_1(r)$ ， $\hat{X}_2(r)$ 平面内是一个特殊点，代表着完成一次测量后，在这个态上遇见光子的最高几率。光场的相干部分具有确定振幅和相位，用**箭头**表示出来。场的不确定性（或称为噪声）用一片“云”来表示。

光的量子特性禁止我们将云的面积减小到一个确定的区域以下，这个“极限区域”我们称为不确定性极限，又称为标准量子极限.它是海森堡测不准原理决定的。测不准原理对于粒子表现在坐标和动量上，对于光来说表现在正交相位和正交振幅上

正交图表示,真空涨落寓于正交振幅和正交相位的涨落之中。涨落水平能够在这两个正交量之间对立地进行互易，但两个涨落的乘积受测不准原理的约束,是保持不变的。

换句话说,虽然量子力学中的测不准原理限定了“云”的最小面积，但是我们有权进行挤压,改变它的形状。(图4右图).当正交相位的不确定性 Δx_2 被挤压减小时，正交振幅的不确定性 Δx_1 被扩大了.表示不确定性的园由正圆变成了椭圆。根据测不准原理，压缩后的面积保持不变。

****光量子噪声与正交振幅正交相位涨落的关系**

光量子噪声包括霰弹噪声辐射压力噪声，而真空涨落又表现为正交振幅与正交相位的涨落，两者有什么样的对应关系？

正交振幅的涨落将导致激光功率的涨落，也就是激光束内光子数的涨落，这种涨落表现为一种噪声，称为霰弹噪声。真空涨落中正交相位的涨落，相当于测试质量位置的涨落。因为测试质量位置的涨落会导致光程的涨落，从而引起正交相位的涨落，这种效应表现为一种噪声，它就是辐射压力噪声。

**非压缩态光场量子噪声的图像表示

干涉仪中通常使用的光场是非压缩态光场。也叫传统光场，传统光场的量子噪声可以分为有光-机耦合和没有光-机耦合两种情况，图像表示是不同的。

量子噪声指的是干涉仪中光量子涨落的幅度，而信号指的是引力波导致的光相位的变化。在激光干涉仪引力波探测器中，这种相位的变化显示了两臂长度差的变化。长度差是用干涉仪的信号表示的，当干涉仪输出信号幅度是常数时，量子噪声越低，则干涉仪的灵敏度越高。

下图给出了传统光场中被光量子噪声限定的干涉仪的灵敏度的图像。

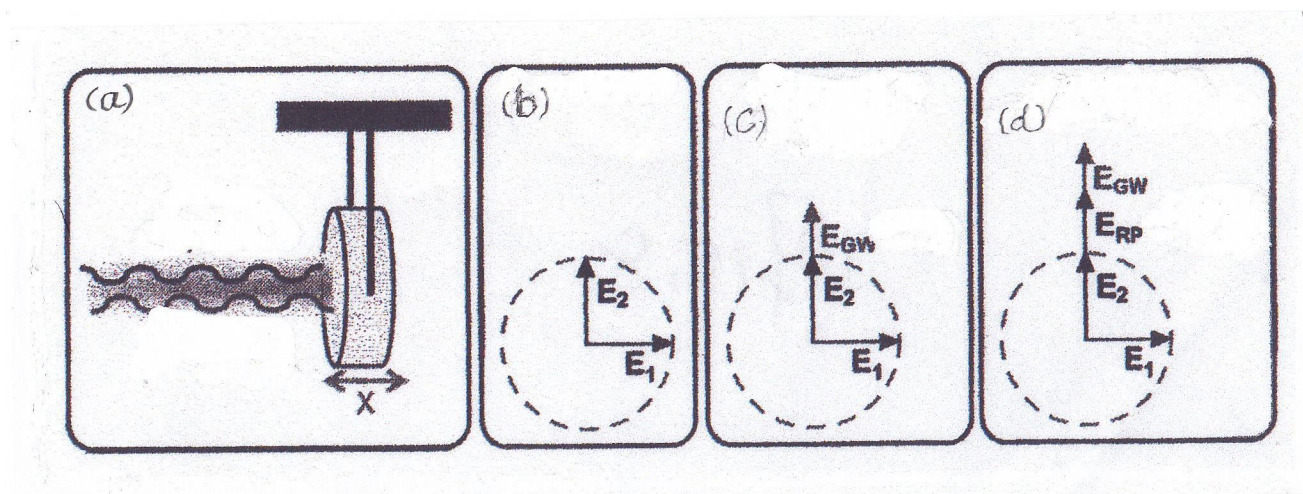


图 5.5 传统的、非压缩光场的量子噪声的图像表示

图 (a) 表示相位涨落 (辐射压力噪声) 和振幅涨落 (霰弹噪声) 对镜子的作用, X 表镜子的位移。

图 (b) 表示输入光场, 它用无相互关联的噪声贡献 E_2 及 E_1 来描述。 E_2 及 E_1 分别是正交相位及正交振幅以不发生关联是因为没有光-机耦合。

图 (c) 表示在没有光-机耦合的情况下输出光场的图像, E_{GW} 为引力波信号。

图 (d) 表示在光-机耦合占主导地位的情况下输出光场的图像, 这时正交振幅的涨落 E_1 由于光机耦合一部分转变为为正交相位的涨落 E_{RP} , 从而在个正交量的噪声成分之间引进了相互关联。

在图 5.5 中 我们用虚线圆表示进入干涉仪系统内的光子态的不确定性的轮廓。用两个箭头 E_2 和 E_1 分别表示互相垂直的两个正交量（正交相位与正交振幅）的涨落导致的光量子噪声。图 5.5 给出了输入光场量子噪声的图像，可以看到，对相干态来说，两个正交量中的噪声 E_2 和 E_1 是完全没有相互关联的。

当引力波使干涉仪的臂长发生改变，或由于局部干扰使干涉仪的镜子位置发生移动时，会产生一个引力波信号，这个信号在图中用小箭头 E_{GW} 表示，它出现在正交相位中。图 10.10 (c) 给出了输出光场的图像

。

为了测量引力波信号，我们需要确定一个读出角（也称为正交角）。很明显，在图 5.5 所示的简单情况下，我们精确地读出正交相位就能得到最好的信号噪声比。因为在这种情况下，噪声幅度对所有可能的读出角都一样大，但信号在正交相位方向（即在垂直方向）最大。根据这个原因，今后如果不另做明确的说明，我们总是选择与正交相位严格相符合的方向进行读出。

当光-机耦合主导地位时，事情就要发生巨大的变化。我们知道，相位涨落和振幅涨落产生的量子噪声都作用在被悬挂起来的镜子上（参阅图 5.5（a）），相位涨落在测试质量上不引起机械效应，振幅涨落通过辐射压力耦合到测试质量上，导致测试质量位置的涨落，与引力波信号相似，这种位置涨落做为一个附加成份出现在正交相位上，如图 5.5（d）中的 E_{RP} 所示。可以看出，通过光-机耦合从正交振幅耦合到正交相位的涨落 E_{RP} 使两个正交量中的噪声成分有了关联。图 5.5（d）给出了在光-机耦合占主导地位的情况下输出光场的图像。

需要指出，正交相位中的原始涨落 E_2 与来自正交振幅通过光-机耦合而耦合到正交相位中的涨落 E_{RP} 是有区别的，后者是正交相位和正交振幅的相互关联涨落，这种被引入的相互关联可以用来突破标准量子极限 SQL。

在正交相位中辐射压力诱生涨落的幅度，即 E_{RP} 的长度，与镜子的质量及频率的平方反比。

****压缩态光场量子噪声的图像表示**

在图5.4中。光场的不确定性(或称为噪声)用一片“云”来表示。这片云的外部轮廓是一个圆,改变这个圆的形状的方法就是所谓的“压缩光场技术”,如上面图5.4所表示的那样,如果光态的不确定性在一个正交参量(图中是正交相位)中被压缩而减小,那么必须以增加与之垂直的另一个正交参量(图中是正交振幅)中的不确定性为代价。这时表示光子态不确定性的圆变成了椭圆。压缩椭圆可以用三个参数来描述,这三个参数描述了压缩态光场的主要参数。

(1). 压缩水平和反压缩水平

虽然海森堡测不准原理控制了正交图像中圆的最小面积，我们仍然可以自由地改变圆的形状。改变圆形状的方法就是所谓的“压缩光场技术”，如上面图 5.4 所表示的那样，如果光态的不确定性在一个正交参量（图中是正交相位）中被压缩而减小，**压缩水平指的是未压缩圆的直径与压缩椭圆短轴长度与之比，反压缩水平指的是未压缩圆的直径与压缩椭圆主轴长度与之比**

(2). 压缩角

在正交平面内压缩圆的取向称为压缩角

(3). 压缩态光场的频率

在过去十几年间，用于引力波探测器的压缩态光场的产生技术取得了长足的进步，压缩水平已超过 12 db，压缩频率可以降低到几个赫兹。

**压缩态光场的作用

光场的两个正交分量的涨落都是可以被挤压的。电磁场真空态的两个正交分量（正交相位和正交振幅）的涨落在满足测不准原理的条件可以相互对立的进行互易

理论上讲，为了降低霰弹噪声，我们就可以把正交振幅的涨落进行压缩，得到一个压缩态。这时我们不考虑正交相位涨落的涨大而引起的辐射压力噪声的增大。若把这种以牺牲辐射压力噪声为代价而使霰弹噪声降低的压缩态注入干涉仪，那么输出信号中的霰弹噪声就会被降低，

反之亦然.由于在激光干涉仪引力波探测器中，霰弹噪声和辐射压力噪声分别在不同的频率区域占主导地位,我们可以在一个频率区域内注入正交振幅压缩而在另一个频率区域内使用正交相位压缩.从而在特定的频带内灵敏度可以突破标准量子极限

光场的两个正交分量的涨落都是可以被压缩的。那么为了降低霰弹噪声，我们就可以把正交振幅的涨落进行压缩，得到一个压缩态。这时正交相位涨落会相应地涨大从而使辐射压力噪声增大。反之如果把正交相位的涨落进行压缩，可以降低辐射压力噪声，作为代价，这时由于正交振幅的涨落相应地增大，辐射压力噪声也相应地增大了。

压缩光场的应用十分广泛，在激光干涉仪引力波探测器中，从干涉仪的信号输出口注入压缩态光场可以突破灵敏度的标准量子极限，这是新一代激光干涉仪引力波探测器期待采用的关键措施。

****压缩态光场激光干涉仪中的应用**

注入什么类型的压缩光场要根据具体情况决定，这一点特别重要，下面我们讨论如何根据激光干涉仪引力波探测器的具体情况中注入压缩态光场。

(1). 激光干涉仪的读出信号是两束光的干涉结果，它与两束光的相位差有关，也就是说干涉仪测量的是两束光的相位关系。因此在正交图上干涉仪的读出角选择在严格的正交相位方向

(2). 激光干涉仪引力波探测器内光场强度极高，具有非常强的光—机耦合效应，正交振幅的涨落通过辐射压力耦合到正交相位的涨落 E_{RP} 非常大。

以上两点决定了在激光干涉仪引力波探测器应该注入那种类型的压缩光场。

**相位压缩——改善高频灵敏度

如果想在干涉仪引力波探测器的高频区域提高灵敏度，根据干涉仪的读出特点，要注入相位压缩光

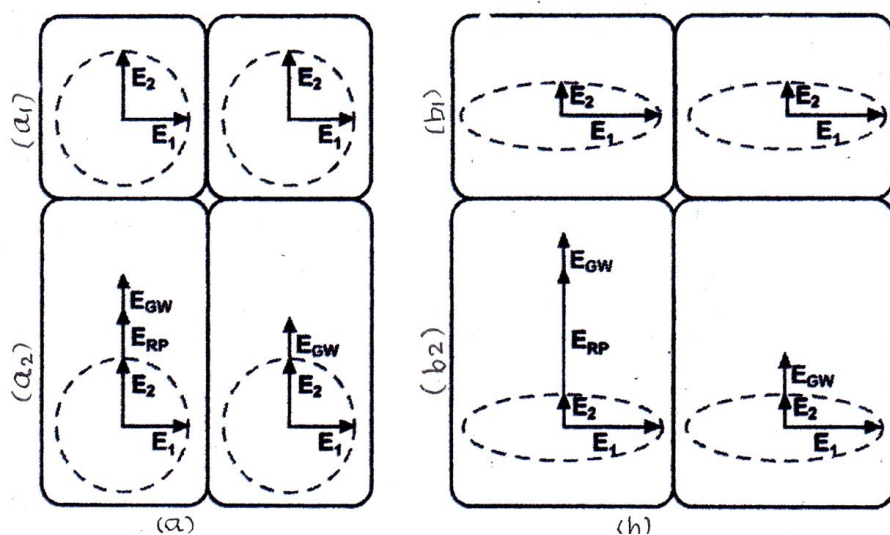


图5.6相位压缩光示意图

图(a)是未压缩光场，图(b)为相位压缩光场，上半图是没有信号的情况，下半部分是有信号输出的情况。

图(a)和(b)的左半边为低频输出，右半边高频输出

当注入相位压缩光时，图(b)中正交相位 E_2 被压缩而变短，由于引力波信号的幅度保持为常数，因此在高频部分我们可以改善信号噪声比，从而提高干涉仪高频区域的灵敏（如图b2的右下图）

当正交相位 E_2 被压缩而变短的同时由于正交振幅 E_1 的反压缩效应，它的涨落增加了，正交振幅 E_1 因此而变长（图 b2 的左下图），这种涨落通过辐射压力耦合到正交相位（图 b2 左下图中的 E_{RP} ），使正交相位中的噪声大幅度增加。鉴于引力波信号 E_{GW} 与压缩水平无关，由于低频区域的量子噪声随着相位压缩光的应用而增加，在总体上我们在低频端还是损失了灵敏度。

如果我们想在低频区域提高干涉仪的灵敏度，就要注入振幅压缩光使 E_1 的长度因压缩而变短，从而使耦合到正交相位中的辐射压力噪声 E_{RP} 减小。其结果是低频灵敏度得到了改善。但是，这种改善是以牺牲高频区域的灵敏度为代价的。当然在对正交振幅进行压缩时，由于正交相位的反压缩效应， E_2 要比未压缩时变长一些。计算表明， E_2 的反压缩效应比 E_1 的耦合噪声 E_{RP} 的作用要小得多。总体上低频灵敏度还是得到改善。

通过以上讨论我们可以看到, 注入纯粹的相位压缩光或振幅压缩光我们仅能在探测频带的特定区域改善干涉仪的灵敏度。从定性的观点来看, 在理想的情况下(即压缩水平严格地等于反压缩水平), 利用这种压缩光技术得到的灵敏度变化与利用增加或减少干涉仪内激光功率得到的变化是完全相同的。

因此我们得出一个重要结论: 利用纯粹的相位压缩光或振幅压缩光, 不能使激光干涉仪引力波探测器的灵敏度在整个探测频带内突破标准量子极限 SQL。

**频变压缩

前面的分析告诉我们，注入单纯的振幅压缩光或单纯的相位压缩光不可能在干涉仪的整个探测频带内压低光量子噪声，改善灵敏度。因此，利用这种压缩光态不能在整个探测频带内是灵敏度突破标准量子极限 SQL。然而，如果以频变压缩（或称为频率制约压缩）的方式改变注入光的压缩角，我们就能够就有可能在干涉仪的整个探测频带内减小量子噪声，从而在几乎频带内使灵敏度突破标准量子极限 SQL。

从以前的讨论中我们知道，在有光-机耦合的情况下，激光干涉仪的灵敏度在高频区域受限于霰弹噪声，在低频区域主要受辐射压力噪声中的 E_{RP} 的限制， E_{RP} 是振幅涨落通过由辐射压力引起的镜子运动耦合到正交相位中造成的。

如果我们以探测频率的函数来转动压缩椭圆，使得整个探测频带内总能在最理想的正交量中得到压缩，就能够在探测器的整个探测频带内（而不是单一频率上）减小量子噪声，提高灵敏度。由于压缩角的转动是以频率的函数进行的，我们称这种的压缩为频变压缩，也称为频率制约压缩。其工作原理可以用图 5.7 来说明。。

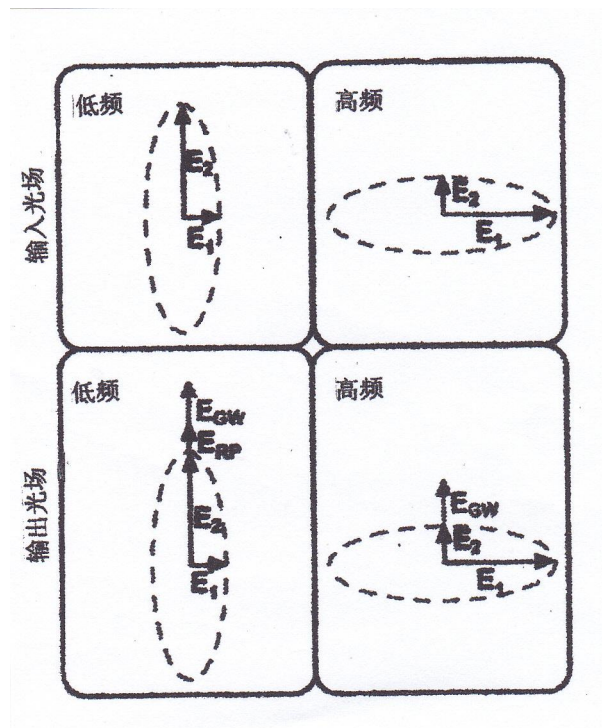


图 5.7 频变压缩过程示意图

图 5.7 给出了频变压缩的正交图像。如前所述，精确地读出正交相位我们能够得到最好的信号噪声比，因此在图 5.7 中，对所有的探测频率我们都读出正交相位。在高频区域，使用相位压缩技术来降低光量子噪声，降低的数值完全与注入纯粹的、频率无关的相位压缩时得到的结果相等。由于相位压缩光的注入减小了量子噪声，干涉仪的灵敏度在高频区域得到了提高。

当探测频率朝着频带的低频端改变时，我们让压缩椭圆连续地从相位压缩向振幅压缩转动，转动过程中的关键在于要让正交振幅中原初 E_1 矢量的长度减小，使得通过辐射压力导致的镜子运动耦合到正交相位中的噪声较小，即正交相位中 E_{RP} 的长度减小。其结果使低频区域的信号噪声比 SNR 大于未压缩时的情况。

图 5.8 给出了使用纯粹相位压缩以及频变压缩时简单激光干涉仪引力波探测器的灵敏度曲线

**频变压缩激光干涉仪引力波探测器的灵敏度曲线

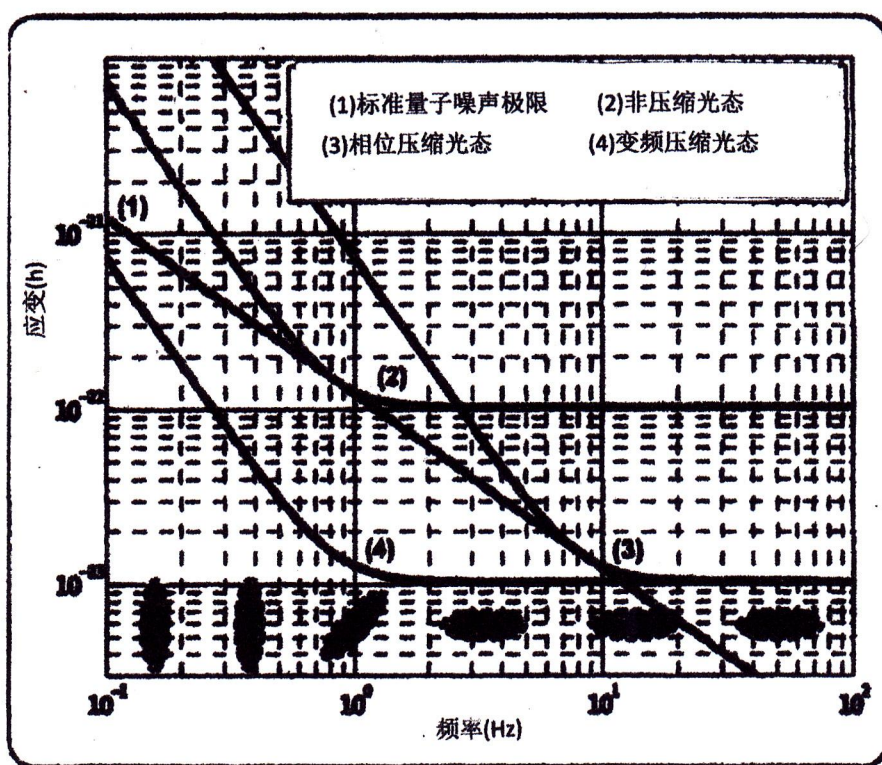


图 5.8 变频压缩示意图

在图中，曲线(1)为标准量子极限，曲线(2)表示没有使用压缩态时常规干涉仪的灵敏度曲线，曲线(3)表示利用纯粹相位压缩时的灵敏度曲线，曲线(4)表示利用频变压缩时的情况。图 5.8 底部的椭圆表示在探测频带的不同频率注入压缩光的压缩椭圆的最佳取向。它表明，频变压缩技术可以在宽频带内使量子噪声减小到标准量子极限之下。

****读出角改变**

通常情况下，精确地在正交相位中读出干涉仪信号是理所当然的，因为利用这种读出方法我们能得到最强的引力波信号。但是在采用频变压缩技术时，我们利用不同的读出角，在干涉仪灵敏度的提高方面获得益处。所谓不同的读出角指的是读出正交相位和正交振的幅叠，而不是严格的读出正交相位。

通过改变并选择合适的读出角，我们能够在特定频率上消除辐射压力噪声，从而在一定的频率范围内使灵敏度得到极大的提高（图 5.9）

**读出角选择与干涉仪灵敏度的关系

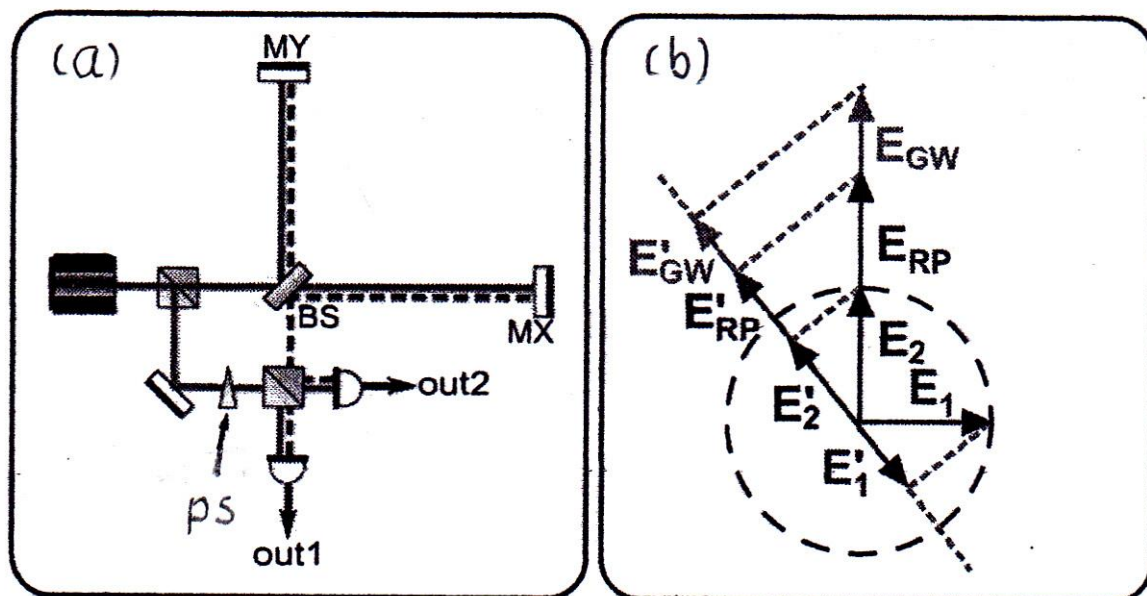


图 5.9 读出角选择干涉仪灵敏度的关系

通过选择合适的读出角来减小量子噪声的工作原理如图 5.9 所示。在图中 E_1 的长度表示正交振幅中的噪声， E_2 的长度表示正交相位中的噪声， E_{RP} 的长度表示通过光-机相互作用 E_1 到 E_2 的耦合。

我们知道， E_{RP} 的长度与观测频率有关， E_1 的长度虽然与 E_{RP} 的长度有关联但却是与观测频率无关的。这就是意味着对于任何一个观测频率，一定存在一个特殊的读出角，对于这个读出角度来说，两个相互关联的矢量 E_1 和 E_{RP} 在读出轴上的投影 E'_1 和 E'_{RP} 具有严格相等的长度。由于 E'_1 和 E'_{RP} 相互关联但指向相反的方向，因此他们会严格地相互抵消

这样以来，干涉仪的灵敏度就只由 E'_{GW} 和 E'_2 的长度比来确定。在这种情况下，我们就设法在选定的观测频率上完全消除了辐射压力噪声的作用。从而使干涉仪的灵敏度在该频率上得到提高

从以上分析我们清楚地看到，由于压缩角是频率的函数，适当地转动压缩角，可以使在高频部分起主要作用霰弹噪声和在低频部分起主要作用辐射压力噪声都得到压低，因此，利用压缩光技术可以在宽频带内突破标准量子极限，使干涉仪的灵敏度得到相当大的改善。计算表明，使用压缩系数为 10db 的光束，干涉仪霰弹噪声的减小相当于激光功率扩大 10 倍时产生的效果。

压缩光场是量子光学中的一种非常重要的非经典光场，该光场的一个正交分量的起伏变小时，即被“压缩”时，另一个正交分量的起伏相应变大。利用这一特征，压缩态在光通信、微弱信号检测、高精度干涉测量、等方面都有重要的应用。

****真空涨落进入干涉仪的途径**

电磁场的真空涨落可以通过干涉仪与外界相通的开口进入干涉仪内部。找到真空涨落的进出口，就找到压缩态光场的注入口。激光干涉仪引力波探测器与外界相通的开口有四个，它们分别是：激光输入口、信号输出口及两个臂上法布里 - 珀罗腔的终端镜。在实际应用中，终端镜的透射率极低，对真空涨落来说这两个口子可以认为是关闭的。这样一来，可供真空涨落进入的开口就只剩两个：激光输入口和信号引出口。

干涉仪都工作在贴近”暗纹”状态。在这种工作状态下，从两臂返回的载频光在分光镜上再次相遇，发生干涉。朝着分光镜输出口方向传播的部分是相消干涉，而朝着激光输入口方向传播的部分是相长干涉。从激光输入口进入干涉仪的量子涨落几乎全部被反射回来，只有极小的一部分可以在干涉仪内运作并到达信号输出口，从干涉仪信号输出口进入的真空涨落也被反射，但绝大部分能进入干涉仪并最终到达位于信号输出口的光探测器。在干涉仪的信号输出口注入压缩态光场可以使激光干涉仪引力波探测器的灵敏度突破标准量子极限 SQL.

谢谢大家
