关于悬链线方程的力学推导与求解思考

风临波

2026 年 2 月 3 日

1　物理模型与微元分析

考虑一根质量均匀分布的柔性绳索，两端悬挂在等高或不等高的支点上。设其线密度为 ρ。取绳索上任意一段微元 dl，其受力分析如图 1 所示。

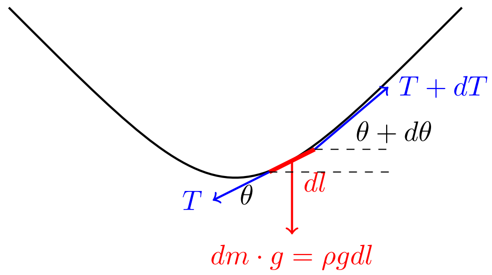

图 1: 悬链线微元受力分析示意图

微元在水平和竖直方向满足平衡条件：

- **水平方向：** $(T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta$　(1)
- **垂直方向：** $(T + dT)\sin(\theta + d\theta) - T\sin\theta = \rho g dl$　(2)

2　原始推导的深化

通过对方程 (1) 进行微分展开，可以得到关键的中间结论：

$$\frac{dT}{T} = \tan\theta d\theta \tag{1}$$

对此式两边积分：

$$\ln T = \ln(|\sec\theta|) + C \implies T\cos\theta = T_0 \tag{2}$$

这证明了在绳索任意一点，张力的水平分量为一个常数，记作 T_0。

同时，根据几何关系，微元长度满足 $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx$。

3　方程的统一与求解

结合上述物理约束，我们将所有变量统一到直角坐标系下。已知 $\tan\theta = y'$，代入垂直方向平衡方程：

$$d(T\sin\theta) = \rho g dl \implies d(T_0\tan\theta) = \rho g dl \tag{3}$$

代入 $y' = \tan\theta$，得到二阶常微分方程：

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \rho g \sqrt{1 + (y')^2} \tag{4}$$

令 $a = \frac{\rho g}{T_0}$，方程简写为：

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2} \tag{5}$$

通过分离变量法积分，并设最低点为坐标原点（即 $x = 0$ 时 $y' = 0$），可得：

$$\operatorname{arcsinh}(y') = ax \implies y' = \sinh(ax) \tag{6}$$

再次积分得到最终的悬链线方程：

$$y = \frac{1}{a}\cosh(ax) + C \tag{7}$$

4 关于 T_0 的超越方程特性

对于给定绳长 S 和水平跨度 L 的情况，T_0 的确定取决于以下关系：

$$S = \int_{-L/2}^{L/2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \frac{2}{a}\sinh\left(\frac{aL}{2}\right) \tag{8}$$

这是一个关于 a（进而关于 T_0）的超越方程。当 $L \to S$ 时，$T_0 \to \infty$，这符合“无法将有质量的绳子拉成绝对直线”的物理直觉。