基于极坐标几何增量的行星运动方程推导与解析

风临波

2026 年 2 月 6 日

摘要

本文从极坐标系下的位置矢量微元出发，通过几何分解与矢量微积分方法，详细推导了行星在万有引力作用下的加速度表达式及运动微分方程。文中重点探讨了径向与横向增量的物理本质，并给出了该方程组的解析解，最终证明了轨道方程为圆锥曲线。

1 位置矢量的微小增量与几何分解

在极坐标系中，行星的位置矢量 $\vec{r}$ 由模长 r 和径向单位矢量 $\vec{e}_r$ 决定：

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{1}$$

其中，$\vec{e}_r$ 为径向单位矢量，$\vec{e}_\theta$ 为横向单位矢量。当时间流逝 dt 时，位置矢量的微分 $d\vec{r}$ 可几何分解为：

1. **径向增量**：沿 $\vec{e}_r$ 方向的长度变化 dr。
2. **横向增量**：由角度变化 $d\theta$ 引起的弧长变化 $rd\theta$，方向沿 $\vec{e}_\theta$。

这里的分解 dr 和 $rd\theta$，本质上与我们在直角坐标系或自然坐标系中分解速度矢量是一致的。在那些坐标系中，我们可能会将微小位移写成 $vdt\cos\alpha$（沿径向）和 $vdt\sin\alpha$（沿横向）。我们此处只不过是选取了跟轨道几何性质最相关的变量 r 和 θ 来直接表示这些增量。dr 对应了径向距离的直接伸缩，$rd\theta$ 对应了转动引起的切向位移。这种表示方法比引入中间变量 v 和夹角 α 更为直接和本质。其矢量微元表示为：

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta \tag{2}$$

2 速度与加速度的推导

2.1 速度矢量的获得

将公式 (2) 对时间求导。在展开过程中，若保留所有微元项，则有：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + dr\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}d\theta\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + rd\theta\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \tag{3}$$

由于第二、三、五项均包含一阶或以上的小量，在极限过程中趋于零，故舍弃。得到速度的速度点号标记法形式：

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{4}$$

2.2 加速度的逐步展开与去小量

加速度是速度对时间的导数：$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$。注意，在极坐标系下，单位矢量 $\vec{e}_r$ 和 $\vec{e}_\theta$ 的方向是随时间变化的，因此对它们求导不能忽略。对速度矢量 $\vec{v}$ 再次求导，利用乘积法则展开：

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r) + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \tag{5}$$

考虑到单位矢量旋转产生的变化率：

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \tag{6}$$

几何上，$\vec{e}_r$ 在 dt 时间内转过 $d\theta$ 角度，其改变量 $d\vec{e}_r$ 的大小是 $1 \cdot d\theta$，方向指向 $\vec{e}_\theta$，$d\vec{e}_\theta$ 也是同理。代入并合并同类项，得到极坐标下的加速度全表达式：

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \tag{7}$$

3 引力作用下的微分方程组

结合牛顿第二定律 $\vec{F} = m\vec{a}$ 与万有引力公式 $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$，消去质量 m 并对比 $\vec{e}_r$ 与 $\vec{e}_\theta$ 分量，得到如下方程组：

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \tag{8}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{9}$$

至此，完成了从基本的几何位移定义到最终运动微分方程组的完整推导。

4 微分方程的解析与轨道方程

为了求得行星的运动轨迹 $r(\theta)$，我们对上述方程组进行求解。

4.1 角动量守恒

方程 (8) 可重写为全微分形式：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \implies r^2\dot{\theta} = h \tag{10}$$

其中 h 为单位质量的角动量，是一个常数。这表明在引力场中，行星在单位时间内扫过的面积相等。

4.2 Binet 变换与轨道解析

引入变量代换 $u = \frac{1}{r}$，并将对时间 t 的导数通过角动量关系转换为对角度 θ 的导数：

$$\dot{r} = -h\frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{11}$$

将上述变换代入径向方程 (9)，消去 t 后得到关于 u 的线性微分方程：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{12}$$

这是一个非齐次常系数线性微分方程，其通解为：

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2}[1 + e\cos(\theta - \theta_0)] \tag{13}$$

代回 $r = 1/u$，得到最终的轨道方程：

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)} \tag{14}$$

其中 $p = h^2/GM$ 为半正焦弦，e 为离心率。该结果在数学上描述了以太阳为一个焦点的圆锥曲线（椭圆、抛物线或双曲线），圆满解释了开普勒第一定律。