曲率半径公式的几何推导：从直观到严谨

风临波 Fuurinpa

2026 年 2 月 2 日

摘要

本文旨在通过纯几何方法推导平面曲线的曲率半径公式。我们避开单纯的代数运算，强调切线倾角变化量与弧长微分之间的几何约束关系。文中修正了常见的三角级数近似误差，并利用 TikZ 绘制了精确的几何示意图，以期为理解微分几何中的曲率概念提供直观路径。

---

1 引言：密切圆的物理直观

曲率（Curvature）衡量曲线偏离直线的程度。在曲线上的某一点 P，若能找到一个圆与曲线在该点具有相同的切线和相同的弯曲趋势，这个圆即为**密切圆**（Osculating Circle）。

该圆的半径 ρ 定义为曲率半径，其倒数 $\kappa = 1/\rho$ 即为曲率。对于函数 $y = f(x)$，我们的目标是证明：

曲率半径核心公式

$$\rho = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{|y''|}$$

2 基本几何关系的建立

2.1 弧长与转角的微分关系

考虑曲线上相邻的两点 P 和 Q。设 P 点处的切线倾角为 θ，Q 点处的切线倾角为 $\theta + d\theta$。如图 1 所示，两条法线的交点在极限条件下即为曲率中心 O。

根据圆弧几何，弧长 ds 与圆心角 $d\theta$（等同于切线转角）的关系为：

$$ds = \rho \cdot |d\theta| \implies \rho = \left|\frac{ds}{d\theta}\right| \tag{1}$$

2.2 弧长微分 ds

由微积分基本原理，弧长微分满足：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx \tag{2}$$

3 关键：切线角变化率的几何推导

3.1 正切差公式的严谨处理

已知斜率 $y' = \tan\theta$。当 x 增加 dx 时，斜率变为 $y' + dy'$，对应的角度变为 $\theta + d\theta$。由正切和角公式的反向应用：

$$y''dx = dy' = \tan(\theta + d\theta) - \tan\theta$$

利用恒等式 $\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$：

$$y''dx = \frac{\sin(d\theta)}{\cos(\theta + d\theta)\cos\theta}$$

当 $d\theta \to 0$ 时，$\sin(d\theta) \approx d\theta$ 且 $\cos(\theta + d\theta) \approx \cos\theta$。于是：

$$y''dx \approx \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta \cdot d\theta$$

由于 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + (y')^2$，我们得到：

$$d\theta = \frac{y''}{1 + (y')^2}dx \tag{3}$$

4 公式合拢

将式 (2) 和式 (3) 代入式 (1)：

$$\rho = \left|\frac{\sqrt{1 + (y')^2}dx}{\frac{y''}{1+(y')^2}dx}\right| = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} \cdot [1 + (y')^2]}{|y''|}$$

整理即得最终公式：

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

5 几何可视化

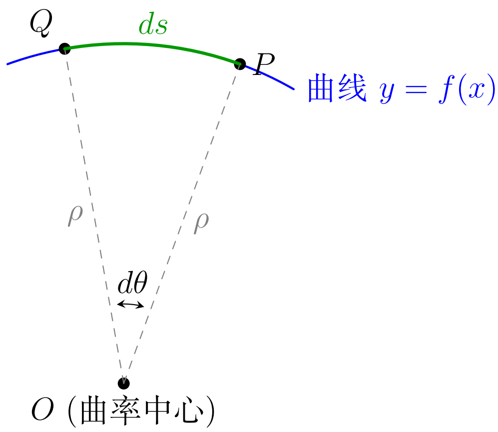

图 1: 曲率半径几何关系图解：注意法线交点与切线转角的关系。

6 结论

推导曲率半径的关键在于理解 y'' 并非直接是转角的变化，而是斜率的变化。斜率与角度之间存在非线性的正切关系，这正是公式中出现 $(1 + y'^2)$ 项的几何来源。