变分法精义：从泛函扰动到最速降线与测地线推导

变分法学习笔记

2026 年 2 月 3 日

1 核心哲学：变分思想与自由度的独立性

变分法的核心在于将待求函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$ 在泛函算子中视为 ** 独立的自由度 **。在处理泛函 $J[y] = \int L(x, y, y')dx$ 时，我们通过对路径施加一个微小的扰动 δy，观察总积分值的变化率。这种"在函数空间找点"的思想，最终将复杂的全局最优路径问题降维为局部的微分方程求解。

2 通用变分算子的详尽推导

假设存在泛函：

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y')dx \tag{1}$$

为了寻找使得 $F[y]$ 取极值的曲线 $y(x)$，我们引入一个微小扰动函数 $\epsilon\eta(x)$，其中 $\epsilon \to 0$，且满足边界约束 $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$。

2.1 第一变分与导数解耦

将扰动后的函数 $y + \epsilon\eta$ 代入泛函，并对 ϵ 求导：

$$\left.\frac{dF}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{dy'}{d\epsilon}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta'\right) dx \tag{2}$$

这里体现了 y 与 y' 的独立处理：$\partial L/\partial y$ 与 $\partial L/\partial y'$ 分别反映了函数值变动及其斜率变动对系统局部的贡献。

2.2 分部积分与欧拉-拉格朗日方程

利用分部积分法处理含 η' 的项：

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y'}\eta' dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'}\eta\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) dx \tag{3}$$

由于边界处 $\eta = 0$，第一项消失。合并后得到：

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right) dx = 0 \tag{4}$$

根据变分基本引理，括号内项必须恒为零，即得到 **Euler-Lagrange Equation**：

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \tag{5}$$

3 Beltrami Identity 的详尽推导（不显含 x 的特殊情形）

当 $L(y, y')$ 不显含自变量 x 时，即 $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$。我们考查 L 的全导数：

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y}y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' = 0 + \frac{\partial L}{\partial y}y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' \tag{6}$$

由 E-L 方程可知 $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)$，代入上式：

$$\frac{dL}{dx} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right]y' + \frac{\partial L}{\partial y'}y'' = \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right) \tag{7}$$

移项合并得：

$$\frac{d}{dx}\left(L - y'\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \implies L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C \tag{8}$$

此式极大地简化了含有重力场或路径几何问题中的二阶微分计算。

4 三大模型实例推导

4.1 两点间直线最短

泛函：$s = \int \sqrt{1+y'^2}dx$，令 $L = \sqrt{1+y'^2}$。
由于 $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$，由 E-L 方程直接得出：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \implies \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \implies y' = k \tag{9}$$

结论：斜率恒定，路径为直线。

4.2 最速降线问题 (Brachistochrone)

已知 $v = \sqrt{2gy}$，时间微元 $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$。
定义 $L = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$（省略系数），代入 Beltrami Identity：

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y'\left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right) = C \tag{10}$$

通分整理：

$$\frac{(1+y'^2) - y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C \implies y(1+y'^2) = \frac{1}{C^2} = 2R \tag{11}$$

得到微分方程：$y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}}$。

4.3 球面最短路径（测地线）

在球面上，微元 $ds = \sqrt{R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\phi^2}$。
设定 θ 为自变量，$\phi' = d\phi/d\theta$，泛函为 $s = R\int\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\phi'^2}d\theta$。
令 $L = \sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\phi'^2}$。由于 $\frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$，由 E-L 方程得：

$$\frac{\partial L}{\partial\phi'} = \frac{\sin^2\theta\cdot\phi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\cdot\phi'^2}} = C \tag{12}$$

该方程确定了路径在球面上的大圆轨迹特征。

5 结论

变分法通过对边界扰动为零的考察，将泛函极值转化为微分方程。其核心在于识别系统的不变量（守恒量）：平移对称性对应直线，显含高度对应摆线，经度对称性对应测地线。