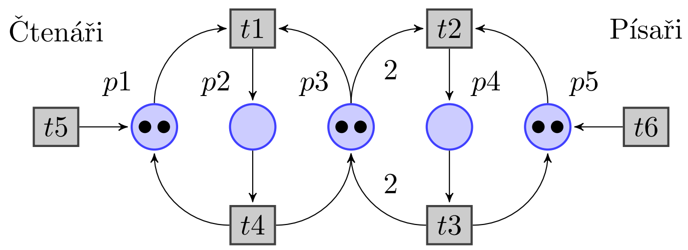
Úloha č.1



Obr. 1: Čitatelia čakajú v *p1*, čítajú v *p2*. Zapisovatelia čakajú v *p5*, zapisujú v *p4*.

Príklad 1. Uvažujte P/T Petriho sieť z obrázku 1:

1. Zostrojte strom dosiahnuteľných značení. S jeho využitím určite a odôvodnite, či:
   (a) je P/T sieť obmedzená,
   (b) je P/T sieť bezpečná,
   (c) je značenie $M_1 = (3, 0, 1, 1, 2)$ pokryteľné, a
   (d) môže byť P/T sieť živá.
2. Uvažujte sieť bez prechodov *t5*, *t6*, a s $M_0 = (3, 0, 2, 0, 3)$. Vypočítajte P-invarianty. S ich využitím určite a odôvodnite, či:
   (a) sú vektory $v_1 = (1, 2, 1, 3, 1)$ a $v_2 = (1, 2, 1, 2, 1)$ P-invarianty,
   (b) je P/T sieť striktne konzervatívna, konzervatívna vzhľadom k nejakému váhovému vektoru (ak áno, tak uveďte príklad takého vektora),
   (c) je značenie $M_2 = (3, 0, 1, 1, 2)$ dosiahnuteľné, a
   (d) interpretujte, čo hovoria P-invarianty o systéme Čitatelia-zapisovatelia.
3. Uvažujte sieť bez prechodov *t5*, *t6*, a s $M_0 = (3, 0, 2, 0, 3)$. Vypočítajte T-invarianty.
   (a) Určite a odôvodnite, či sú vektory $v_1 = (30, 20, 20, 30)$ a $v_2 = (2, 3, 2, 3)$ T-invarianty.
   (b) Čo možno z vypočítaných T-invariantov určiť o živosti siete a prečo?

Riešenie

(1a) Aby bola Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ bezpečná, podľa definície 8.1[1] musí pre každé miesto $p \in P$ platiť nasledovné: $\forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq 1$. Bezpečnosť siete teda zaručuje, že počet značiek žiadneho miesta v ľubovoľnom stave Petriho siete nepresiahne hodnotu 1. Túto podmienku nespĺňa napríklad počiatočné značenie $M_0 = (2, 0, 2, 0, 2) \in [M_0\rangle$, preto táto sieť **nie je bezpečná**.

(1b) Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je obmedzená, ak každé miesto $p \in P$ je obmedzené, t.j platí preňho: $\exists k \in \mathbb{N} : \forall M \in [M_0\rangle : M(p) \leq k$, pre určité $k \in \mathbb{N}$ (definícia 8.2[1]). Daná Petriho sieť **nie je obmedzená**, keďže strom dosiahnuteľných značení (Obr. 2) obsahuje aj uzly so suprémom ω, ktoré reprezentuje nekonečné množstvo značiek v danom mieste.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

(1c) V Petriho sieti $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je značenie M pokryteľné ak $\exists M' \in [M_0\rangle$ také, že $M' \geq M$ (definícia 8.9[1]). Zo stromu dosiahnuteľných značení vidíme, že neexistuje také $M' \in [M_0\rangle$ aby platilo $M' \geq (3, 0, 1, 1, 2)$, z čoho plynie, že dané značenie $M_1 = (3, 0, 1, 1, 2)$ **nie je pokryteľné**. Vzhľadom na to, že táto Petriho sieť predstavuje problém čitateľa-zapisovateľa, ak sa značka nachádza v mieste *p4* znamená to, že niekto zapisuje a v tomto momente nemôže byť žiadna značka v *p2*, kde sa číta. Zároveň musí byť aspoň jedno z miest *p1,p3* bez značky, aby sa nemohol aktivovať prechod *t1*, ktorým by sa dostala značka do miesta *p2*.

(1d) Použitie stromu dosiahnuteľných značení je pri riešení problému živosti siete značne obmedzené. To vyplýva zo skutočnosti, že strom dosiahnuteľných značení je abstrakciou prechodovej funkcie, v ktorej dochádza k strate určitej informácie. Napriek tomu, pri probléme živosti môžeme využiť strom dosiahnuteľných značení, ktorý v tomto prípade neobsahuje žiadne koncové vrcholy (vrcholy bez následníkov) a preto môžeme tvrdiť, že odpovedajúca Petriho sieť **môže byť živá**.

---

(2) Pred riešením samotnej úlohy, si potrebujeme ozrejmiť, čo rozumieme pod pojmom P-invariant. V Petriho sieti $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je P-invariant taký vektor $i : P \to \mathbb{Z}$, pre ktorý platí $\underline{N}^T \cdot i = 0$, kde $\underline{N}^T$ je transponovaná matica Petriho siete N (definícia 9.1[1]).

P-invarianty získame riešením sústavy algebraických rovníc tvaru $\underline{N}^T \cdot i = 0$, kde $i \neq 0$. Na začiatok skonštruujeme maticu Petriho siete $\underline{N}$ a k nej odpovedajúcu transponovanú maticu $\underline{N}^T$.

$$\underline{N} = \begin{array}{c} \\ p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t1 & t2 & t3 & t4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \underline{N}^T = \begin{array}{c} \\ t1 \\ t2 \\ t3 \\ t4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p1 & p2 & p3 & p4 & p5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ďalej z rovnice $\underline{N}^T \cdot i = 0$ získame sústavu algebraických rovníc nasledovne:

$$\begin{array}{c} \\ t1 \\ t2 \\ t3 \\ t4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p1 & p2 & p3 & p4 & p5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc} -a & +b & -c & = 0 \\ -2c & +d & -e & = 0 \\ 2c & -d & +e & = 0 \\ a & -b & +c & = 0 \end{array}$$

P-invarianty môžeme získať aj použitím nástrojov na modelovanie P/T Petriho sietí ako napríklad Netlab. Nižšie sú uvedené minimálne P-invarianty danej Petriho siete, ktoré budeme pri nasledujúcich úlohách využívať.

	$p1$	$p2$	$p3$	$p4$	$p5$
i_1	1	1	0	0	0
i_2	0	0	0	1	1
i_3	0	1	1	2	0

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

(2a) Platí, že ak i_1 a i_2 sú P-invarianty siete N, tak $i_1 + i_2$ a $z \cdot i_1$, kde $z \in \mathbb{Z}$ sú tiež P-invarianty siete N (lemma 9.1[1]).
Vektor $v_1 = (1, 2, 1, 3, 1)$ **je P-invariant** danej Petriho siete, pretože platí $\underline{N}^T \cdot v_1 = 0$ a navyše, môžeme ho rozložiť na súčet invariantov $i_1 + i_2 + i_3$:

$$(1, 2, 1, 3, 1) = (1, 1, 0, 0, 0) + (0, 0, 0, 1, 1) + (0, 1, 1, 2, 0)$$

Výsledkom násobenia transponovanej matice $\underline{N}^T$ s vektorom $v_2 = (1, 2, 1, 2, 1)$ nie je nulový vektor, preto vektor v_2 **nie je P-invariant** danej Petriho siete. Môžeme to jednoducho zistiť aj jeho dosadením do sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} -a + b - c &= 0 & \qquad -1 + 2 - 1 &= 0 \\ -2c + d - e &= 0 & \qquad -2 + 2 - 1 &= -1 \\ 2c - d + e &= 0 & \qquad 2 - 2 + 1 &= 1 \\ a - b + c &= 0 & \qquad 1 - 2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

(2b) Pre Petriho sieť s množinou miest P platí, že je striktne konzervatívna ak existuje P-invariant i taký, že $\forall p \in P : i(p) = 1$. Takýto P-invariant pre danú Petriho sieť neexistuje, preto konštatujeme, že **nie je striktne konzervatívna**.

Túto vlastnosť je možné vyvodiť aj na základe definície 8.3[1], nakoľko v danej Petriho sieti existuje značenie $M \in [M_0\rangle$, pri ktorom sa súčet značiek zmení vzhľadom k počiatočnému značeniu, napríklad značenie $M_1 = (2, 1, 1, 0, 3)$.

Ak pre vektor $v : P \to \mathbb{N}$ a Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ platí:

$$\forall M \in [M_0\rangle : \sum_{p \in P} v(p)M(p) = \sum_{p \in P} v(p)M_0(p)$$

tak hovoríme, že Petriho sieť N je konzervatívna vzhľadom ku váhovému vektoru v. Každý P-Invariant siete N môže byť považovaný za všeobecný váhový vektor, vzhľadom ku ktorému je sieť N konzervatívna. Pre naše zadanie Petriho siete je to je napríklad P-invariant $i_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$.

(2c) Budeme vychádzať z vety o značení siete vzhľadom k P-invariantu (veta 9.1[1]):
Nech N je Petriho sieť s počiatočným značením M_0. Potom pre každý P-Invariant i siete N a pre každé dosiahnuteľné značenie $M \in [M_0\rangle$ **platí**: $M \cdot i = M_0 \cdot i$. Pre hodnoty značení $M_2 = (3, 0, 1, 1, 2)$, $M_0 = (3, 0, 2, 0, 3)$ a P-invariant $i_3 = (0, 1, 1, 2, 0)$ ale rovnosť neplatí:
$M_0 \cdot i_3 \ = \ (3, 0, 2, 0, 3) \cdot (0, 1, 1, 2, 0) \ = \ (0, 0, \mathbf{2}, \mathbf{0}, 0)$
$M_2 \cdot i_3 \ = \ (3, 0, 1, 1, 2) \cdot (0, 1, 1, 2, 0) \ = \ (0, 0, \mathbf{1}, \mathbf{2}, 0)$
$M_0 \cdot i_3 \neq M_2 \cdot i_3 \implies$ značenie $M_2 = (3, 0, 1, 1, 2)$ **nie je dosiahnuteľné**.

(2d) **P-invariant** $i_1 = (1, 1, 0, 0, 0)$ hovorí, že musí platiť:

$$\forall M \ \in \ [M_0\rangle : \ M(p_1) + M(p_2) = M_0(p_1) + M_0(p_2) = 3$$

Tento P-Invariant reprezentuje konštantný počet procesov v miestach *p1* a *p2*. Žiadne procesy nebudú pridané ani odstránené a každý proces sa nachádza na jednom z týchto dvoch miest. Na týchto miestach sú umiestnený čitatelia, a to znamená, že počet čitateľov je konštantný a každý čitateľ buď čaká alebo číta.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

P-invariant $i_2 = (0, 0, 0, 1, 1)$ hovorí, že musí platiť:

$$\forall M \in [M_0\rangle : M(p_4) + M(p_5) = M_0(p_4) + M_0(p_5) = 3$$

Tento P-Invariant má rovnaký význam pre zapisovateľov, ako P-invariant i_1 pre čitateľov. Počet zapisovateľov je konštantný a každý zapisovateľ buď čaká alebo práve zapisuje.

P-invariant $i_3 = (0, 1, 1, 2, 0)$ hovorí, že musí platiť:

$$\forall M \in [M_0\rangle : M(p_2) + M(p_3) + 2 \cdot M(p_4) = M_0(p_2) + M_0(p_3) + 2 \cdot M_0(p_4) = 2$$

Tento P-Invariant hovorí o konštantnom počte procesov v miestach *p2*, *p3* a mieste *p4*. Miesto *p4* obsahuje nanajvýš jednu značku, čo znamená, že môže existovať najviac jeden zapisovateľ, ktorý práve píše. V takomto prípade miesta *p2* a *p3* neobsahujú žiadne značky. Ak niekto zapisuje, tak čitatelia čakajú v mieste *p1* a žiadny z nich nečíta v mieste *p2* a na mieste *p3* nie sú k dispozícii žiadne zdroje. Ďalej tento P-invariant hovorí, že miesto *p2* môže obsahovať najviac 2 značky, takže najviac dvaja čitatelia môžu súčasne čítať zo zdrojov. V tomto prípade nikto nezapisuje (miesto *p4*) a rovnako bez značiek je aj miesto *p3* (nie sú k dispozícii žiadne zdroje).

(3) Pre Petriho sieť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je T-invariant vektor $u : T \to \mathbb{N}$, pre ktorý platí $\underline{N} \cdot u = 0$, kde $\underline{N}$ je matica Petriho siete N. T-invarianty získame riešením sústavy algebraických rovníc tvaru $\underline{N} \cdot u = 0$. Táto sústava obsahuje rovnice:

$$\begin{array}{c} \\ p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t1 & t2 & t3 & t4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\cdot \begin{array}{c} u \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow
\begin{array}{ccccccc} & & -a & +d & = & 0 \\ & & a & -d & = & 0 \\ -a & -2b & +2c & +d & = & 0 \\ & & b & -c & = & 0 \\ & & -b & +c & = & 0 \end{array}$$

T-invarianty pre danú Petriho sieť sú nasledujúce:

	$t1$	$t2$	$t3$	$t4$
u_1	0	1	1	0
u_2	1	0	0	1

(3a) Budme vychádzať zo znalosti o súčte a násobku T-invariantov. Ak $u1$ a $u2$ sú T-invarianty siete N, tak $u1 + u2$ a $z \cdot u1$, kde $z \in \mathbb{Z}$ sú tiež T-invarianty siete N. (lemma 9.3[1])
Konštatujeme, že vektor $v_1 = (30, 20, 20, 30)$ **je T-invariant** danej Petriho siete, pretože platí $\underline{N} \cdot v_1 = 0$ a navyše, môžeme ho rozložiť podľa prechádzajúcej lemmy:

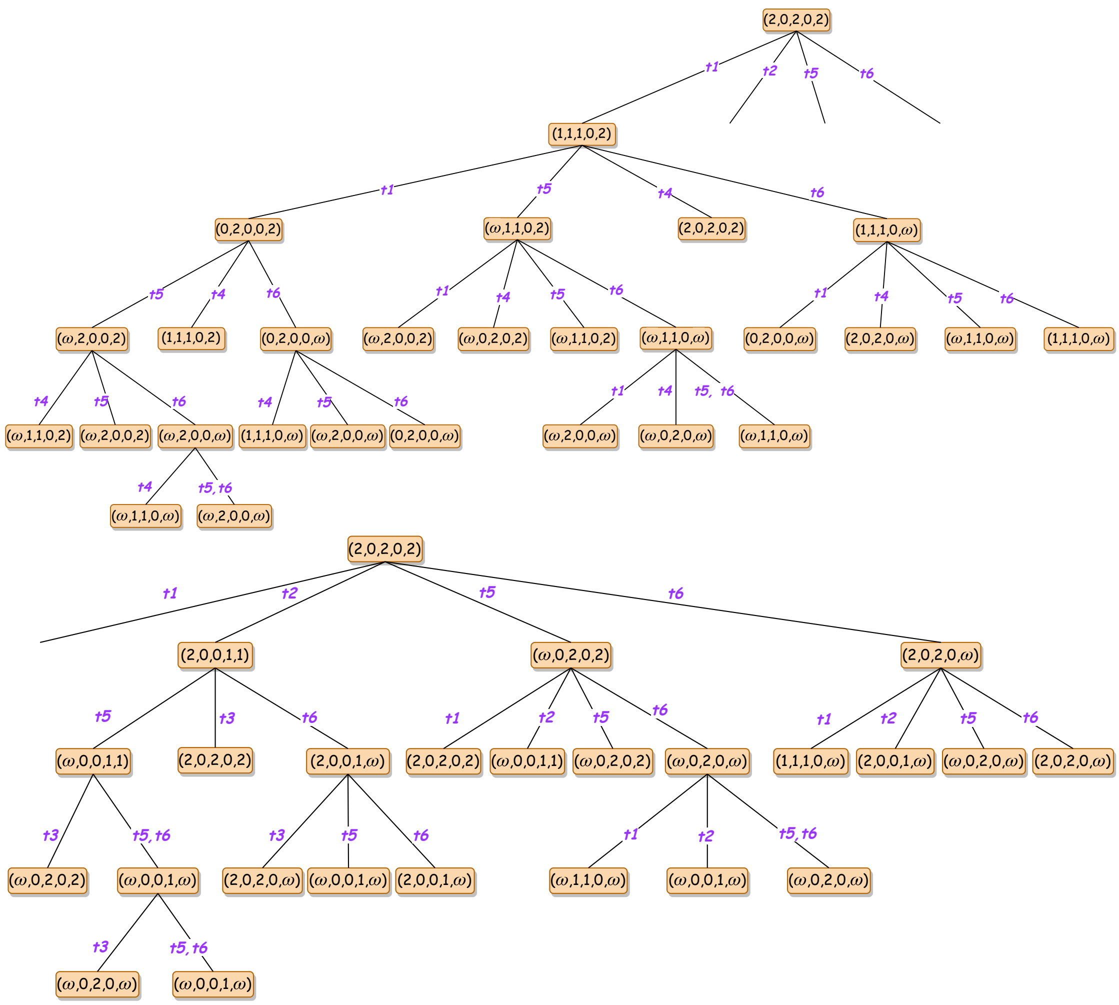
$$v_1 = (30, 20, 20, 30) = 30 \cdot (1, 0, 0, 1) + 20 \cdot (0, 1, 1, 0)$$

[1]https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

Výsledkom násobenia matice $\underline{N}$ s vektorom $v_2 = (2, 3, 2, 3)$ nie je nulový vektor, preto vektor v_2 **nie je T-invariant** danej Petriho siete. Opäť to môžeme overiť dosadením do sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} -a + d &= 0 & \qquad -2 + 3 &= 1 \\ a - d &= 0 & 2 - 3 &= -1 \\ -a - 2b + 2c + d &= 0 & -2 - 6 + 4 + 3 &= -1 \\ b - c &= 0 & 3 - 2 &= 1 \\ -b + c &= 0 & -3 + 2 &= -1 \end{aligned}$$

(3b) Podľa definície 9.6[1] je zrejmé, že daná Petriho sieť je pokrytá T-invariantami, pretože pre každý prechod t siete existuje nezáporný T-invariant u taký, že $u(t) > 0$. Ďalej sa oprieme o vetu 9.9[1], ktorá hovorí, že každá živá a obmedzená Petriho sieť je pokrytá T-invariantami. Tá samozrejme predstavuje iba nutnú podmienku pre živé a zároveň obmedzené Petriho siete: ak daná Petriho sieť nie je pokrytá T-invariantami, tak nieje živá alebo nieje obmedzená. Avšak naša Petriho sieť je pokrytá T-invariantami, preto **môže byť živá** a obmedzená.



Obr. 2: Strom dosiahnuteľných značení danej P/T Petriho siete.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

Príklad 2. Modelujte P/T sieťou Dijkstrov algoritmus pre vzájomné vylúčenie. Pseudokód na obrázku predpokladá neobmedzene mnoho paralelne spúšťaných procesov, každý s unikátnym identifikátorom, a popisuje algoritmus pre proces s identifikátorom i. Pole booleovských hodnôt $flag$ a booleovská premenná p sú zdieľané všetkými procesmi, a sú inicializované na 0. Modelujte verziu systému s práve dvomi procesmi, s indexmi 0 a 1 (unikátne indexy pre neobmedzene mnoho procesov P/T sieťou modelovať nemožno.)

Algorithm 1: Proces s indexom i

```
while true do
    flag[i] := true;
    if p ≠ i then
        wait until ¬flag[p];
        p := i;
    if ∃j : j ≠ i ∧ flag[j] then continue ;
    critical section;
    flag[i] := false;
```

1. Modelujte systém v nástroji Netlab. Použite modelovaciu techniku, kde miesta v sieti odpovedajú programovým riadkom a hodnotám premenných. Snažte sa o čo najväčšiu prehľadnosť modelu, použite textové označenia miest a prechodov. Vykonajte v Netlabe dostupné analýzy a interpretujte výsledky. Na ich základe zdôvodnite odpovede na nasledujúce otázky: Garantuje protokol vzájomné vylúčenie (t.j., procesy nemôžu byť súčasne v kritickej sekcii)? Garantuje nemožnosť uviaznutia?
2. Čo sa stane, ak dovolíme, aby kód procesu s indexom 0 alebo 1 vykonávalo zároveň neobmedzene mnoho procesov? Vyskúšajte v Netlabe.

Riešenie

1. *Popis modelu*
   Pred samotnou analýzou vytvoreného modelu je nevyhnutné krátke zoznámenie sa s riešením. Každému procesu v modelovanom systéme prísluší 8 miest $p_1, \ldots, p_8$ a $p_{15}, \ldots, p_{22}$ reprezentujúcich jednotlivé riadky kódu z Algoritmu 1, a rovnako pre každý proces sa v systéme nachádza 10 prechodov $t_1, \ldots, t_{10}$ resp. $t_{11}, \ldots, t_{20}$. Okrem toho systém obsahuje ďalších 6 miest $p_9, \ldots, p_{14}$, ktoré charakterizujú možné hodnoty zdieľaných premenných p, $flag[0]$, $flag[1]$ a sú v sieti zaznačené modrou farbou. Každé miesto je označené komentárom, reprezentujúcim jeho sémantiku vzhľadom ku procesu. Pre lepšiu orientáciu sú hrany medzi prvkami procesu 0 a zdieľanými premennými označené červenou farbou a medzi prvkami procesu 1 a zdieľanými premennými zelenou farbou.

   Následne boli v Netlabe vykonané dostupné analýzy, pomocou ktorých môžeme určiť základné vlastnosti tejto siete.

   - *Bezpečnosť a obmedzenosť*
     Pri analýze stromu dosiahnuteľných značení si môžeme všimnúť, že počet značiek v ktoromkoľvek značení a mieste nikdy nepresiahne hodnotu 1. Preto podľa definície 8.1[1] môžeme o tejto sieti povedať že **je bezpečná**.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

Navyše, táto sieť **je obmedzená** (1-obmedzená), pretože bezpečnosť siete je iba špeciálnym prípadom obecnejšej vlastnosti, nazývanej obmedzenosť Petriho siete[1].

- *Konzervatívnosť*
  Na základe analýzy P-invariantov môžeme konštatovať, že daná Petriho sieť **je striktne konzervatívna** a to z toho dôvodu, že existuje P-invariant i pre ktorý platí: $\forall p \in P : i(p) = 1$, kde P je množina miest modelovanej Petriho siete:
- *Živosť*
  Nevyhnutnou podmienkou pre živosť siete je, že musí pre sieť existovať kladný T-invariant. Napriek tomu, že takýto T-invariant existuje, táto sieť **nie je živá**, čo potvrdzuje aj výsledok analýzy nástroja Netlab. Dôvodom je, že existuje situácia, kedy jeden proces cyklí (Algoritmus 1: riadok 1 až 6), a druhý proces čaká na nastavenie flagu prvým procesom (Algoritmus 1: riadok 4). Dôjde tak k tzv. **čiastočnému uviaznutiu** (*partial deadlock*) a porušeniu podmienky pre živosť siete z definície 8.5[1]. V modelovanej sieti takýto stav môže nastať napríklad postupnosťou prechodov $t_1, t_2, t_{11}, t_{12}, t_{13}$ čím sa dosiahne uviaznutie procesu s indexom 1 a cyklenie procesu s indexom 0 pred kritickou sekciou.
- *Vzájomné vylúčenie*
  Pri rozhodovaní o tom, či procesy môžu alebo nemôžu byť súčasne v kritickej sekcii si pomôžeme stromom dosiahnuteľných značení. Môžeme v ňom vyhľadávať značenia, pri ktorých sa značka nachádza v oboch miestach reprezentujúcich kritické sekcie, t.j. p_7 a p_{21}, čo indikuje súčasné vykonávanie kritickej sekcie. Takýmto riešením sme dospeli k výsledku, že protokol garantuje vzájomné vylúčenie, nakoľko v pre každé zo značení $M \in [M_0\rangle$ platí, že $M(p_7) + M(p_{21}) \leq 1$.
- *Možnosť uviaznutia*
  Stav uviaznutia znamená úplné zablokovanie systému, t.j. žiadny z procesov nemôže pokračovať a žiadny z prechodov siete nie je v tomto okamihu uskutočniteľný[1]. K takémuto stavu v tejto Petriho sieti nikdy nedôjde, preto konštatujeme, že táto Petriho sieť **garantuje nemožnosť uviaznutia**, avšak negarantuje možnosť vzniku spomínaného čiastočného uviaznutia(*partial deadlock*).

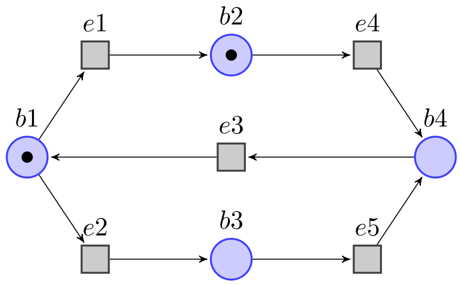
2. Pre účely tohto experimentu potrebujeme zaručiť generovanie nových značiek (procesov) do systému a upraviť Petriho sieť tak, aby kapacita miest nebola obmedzená. V neposlednom rade je nutné, aby sa pri nastavovaní zdieľaných premenných na hodnotu x nevyžadovala značka z miesta reprezentujúceho hodnotu premennej $\neg x$. To znamená, že ak kód procesu 0 už vykonáva nejaký proces ktorý nastavil $flag[0]$ na hodnotu $true$ (zobral tým značku z miesta kde má $flag[0]$ hodnotu $false$), ďalší proces môže vykonávať rovnaký kód. Bez tohoto rozšírenia by systém pracoval rovnako ako pôvodný, vždy by ním putovali iba 2 značky (procesy), ostatné totiž budú čakať vo frontách.

   Je zrejmé, že sieť s nekonečným množstvom procesov (značiek) stráca svoje vlastnosti ako obmedzenosť, bezpečnosť, či konzervatívnosť. Z pohľadu protokolu **zaniká garancia vzájomného vylúčenia**, pretože napríklad ak viacero procesov vykonáva kód kritickej sekcie procesu 0, prvý z nich, ktorý opustí kritickú sekciu, odomknutím zámku dovolí vykonávať kód kritickej sekcie procesu 1.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

Príklad 3. Pre C/E systém na obrázku nižšie urobte nasledujúce:

1. Rozhodnite, ktorá z nasledujúcich formúl je platná a zakreslite ju pomocou faktov.
   (a) $(\neg b1 \rightarrow (\neg b4 \rightarrow (\neg b2 \rightarrow \neg b3)))$
   (b) $(b1 \wedge b2) \rightarrow (b2 \vee b4)$
2. Komplementujte systém.
3. Nakreslite prípadový graf.
4. Pre komplementovaný systém nakreslite najkratší proces, kde sa jeden prípad vyskytuje dvakrát (má dva rôzne S rezy, ktoré zobrazuje na rovnaký prípad).
5. Ktorým cestám v prípadovom grafe odpovedá tento proces?



Riešenie

1. Základným prvkom pre riešenie tejto úlohy je definícia 6.9[1], ktorá hovorí, že v C/E systéme Σ je formula $a \in A_\Sigma$ platná, ak pre každý prípad c z prípadovej triedy C_Σ platí $\hat{c}(a) = 1$.

   Formulu (b) môžeme pomocou pravidla $a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a \vee b$ prepísať do tvaru:

   $(b1 \wedge b2) \rightarrow (b2 \vee b4) \leftrightarrow \neg(b1 \wedge b2) \vee (b2 \vee b4) \leftrightarrow \neg b1 \vee \neg b2 \vee b2 \vee b4 \leftrightarrow \neg b1 \vee 1 \vee b4 \leftrightarrow 1$

   z čoho vyplýva, že formula (b) je vždy pravdivá (tautológia) a preto **je platná** aj pre daný C/E systém.

   Formulu (a) rovnako prepíšeme pomocou vyššie uvedeného pravidla do tvaru:

   $$(\neg b1 \rightarrow (\neg b4 \rightarrow (\neg b2 \rightarrow \neg b3))) \leftrightarrow (\neg b1 \rightarrow (\neg b4 \rightarrow (b2 \vee \neg b3))) \leftrightarrow$$
   $$\leftrightarrow (\neg b1 \rightarrow (b4 \vee b2 \vee \neg b3))$$

   Platnosť formuly (a) overíme vyplnením pravdivostnej tabuľky:

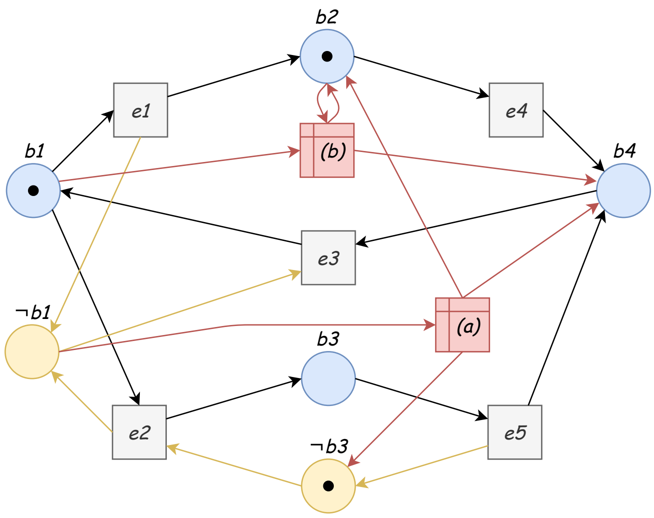
	$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$\neg b1$	$\neg b3$	$\neg b1 \rightarrow (b4 \vee b2 \vee \neg b3)$
$\{b1, b2\}$	1	1	0	0	0	1	**1**
$\{b2, b3\}$	0	1	1	0	1	0	**1**
$\{b3, b4\}$	0	0	1	1	1	0	**1**
$\{b1, b3\}$	1	0	1	0	0	0	**1**
$\{b1, b4\}$	1	0	0	1	0	1	**1**
$\{b2, b4\}$	0	1	0	1	1	1	**1**

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf

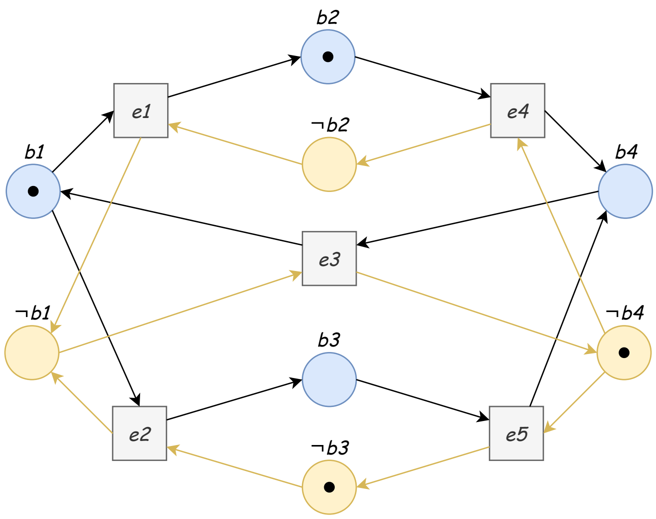
Ako vidíme, formula (a) je pre všetky prípady prípadovej triedy pravdivá, dôsledkom čoho môžeme povedať, že formula (a) **je platná** pre daný C/E systém.

Pri faktoch sa odrazíme od kombinácie definícií 6.8[1] a 6.9[1], ktorá hovorí o tom, že pre fakt t definujeme formulu $a(t)$ použitím jeho vstupnej a výstupnej množiny nasledovne: ak ${}^\bullet t = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ a $t^\bullet = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$, tak $a(t) = (b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_n) \rightarrow (b'_1 \vee b'_2 \vee \cdots \vee b'_m)$.

Formulu (a) sme si už vyššie previedli do požadovaného tvaru, pričom formula (b) sa v takomto tvare už nachádza, preto ich zakreslenie už bude pomerne jednoduché. Pre formulu (a) potrebujeme komplementovať miesta $b1$ a $b3$. Výsledný C/E systém bude ekvivalentný zadanému systému, pretože pridáme iba komplementy podmienok a počet prípadov, udalostí a krokov ostane zachovaný (veta 4.6[1]).

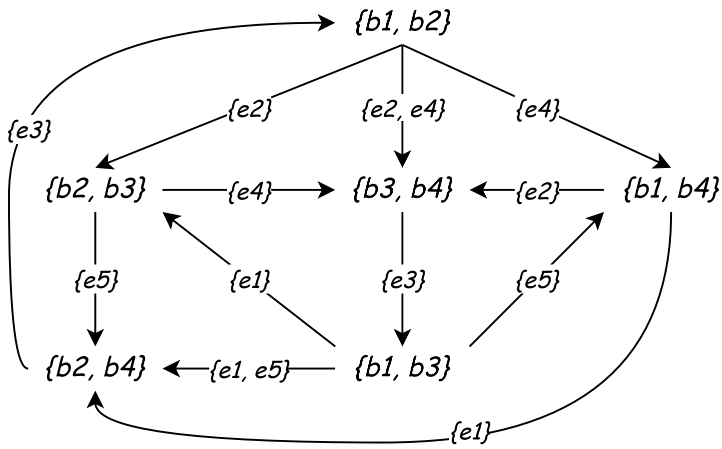


Obr. 3: C/E systém spolu s faktami reprezentujúcimi formuly (a) a (b).

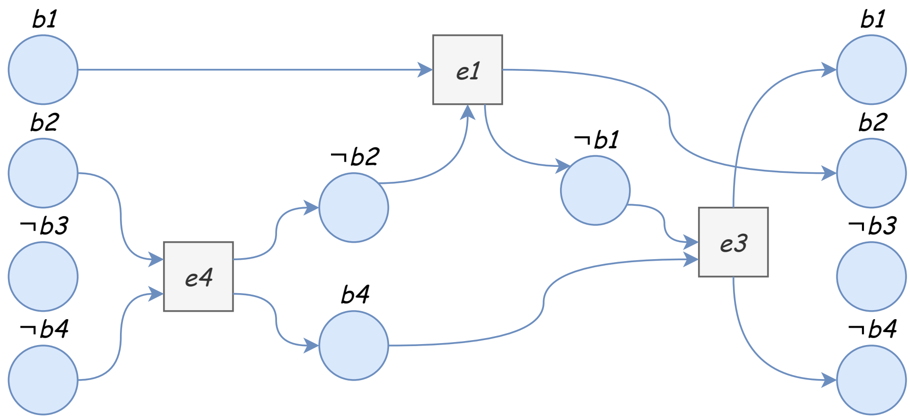


Obr. 4: Komplementovaný C/E systém.

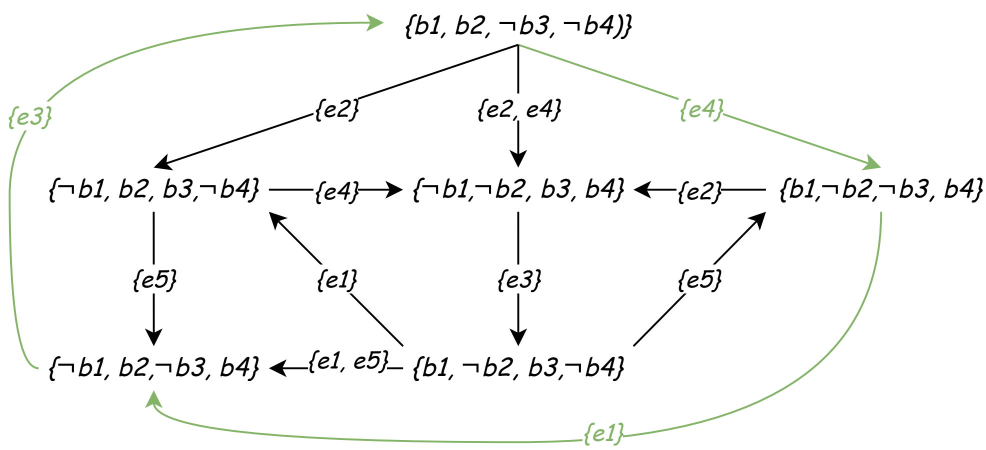
[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/PES/public/Pomucky/PES_opora.pdf



Obr. 5: Prípadový graf C/E systému.



Obr. 6: Výskytová sieť procesu, ktorý je reprezentovaný postupnosťou: $\{b1, b2, \neg b3, \neg b4\}\,[e4\rangle\,\{b1, \neg b2, \neg b3, b4\}\,[e1\rangle\,\{\neg b1, b2, \neg b3, b4\}\,[e3\rangle\,\{b1, b2, \neg b3, \neg b4\}$



Obr. 7: Prípadový graf C/E systému so zvýraznenou cestou procesu z Obr. 6.