Úloha č.1

1. Uvažujme operáciu $\circ$ definovanú nasledovne: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzáverových vlastností dokážte alebo vyvráťte nasledujúce vzťahy:
   (a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$
   (b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$
   (c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

   $\mathcal{L}_2^D$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov, $\mathcal{L}_2$ triedu bezkontextových jazykov a $\mathcal{L}_3$ triedu regulárnych jazykov.

Riešenie

(a) Trieda regulárnych jazykov $\mathcal{L}_3$ je uzavretá voči doplnku, t.j. ak $L_2 \in \mathcal{L}_3$, potom $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$. Dôkaz tvrdenia vyplýva z vety 3.23[1] a teda, že trieda regulárnych jazykov tvorí množinovú Booleovu algebru, a tá je uzavretá voči doplnku.

Oba jazyky figurujúce vo vzťahu zjednotenia sú regulárne, a keďže trieda regulárnych jazykov je uzavretá vzhľadom k zjednoteniu (veta 3.22[1]), zadaný vzťah **platí**.

(b) Vzťah $L_1 \cup \overline{L_2}$ môžeme pomocou De Morganových zákonov prepísať na $\overline{\overline{L_1} \cap L_2}$. Ako je spomenuté v predchádzajúcom príklade, trieda regulárnych jazykov je uzavretá vzhľadom k doplnku, platí teda $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$. Veta 4.27[1] nám (okrem iného) hovorí, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzavreté voči prieniku s regulárnymi jazykmi, môžeme teda tvrdiť, že platí aj $\overline{L_1} \cap L_2 \in \mathcal{L}_2^D$. Trieda jazykov DZA je podľa tejto vety takisto uzavretá vzhľadom k doplnku, preto $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathcal{L}_2^D$ čím sme dokázali, že zadaný vzťah **platí**.

(c) Dôkaz sporom:
Predpokladajme, že zadaný vzťah platí. Nech jazyk L_1 je prázdny jazyk, potom formulu $L_1 \cup \overline{L_2}$ môžeme prepísať nasledovne: $\emptyset \cup \overline{L_2} = \overline{L_2}$. Avšak bezkontextové jazyky nie sú uzavreté voči doplnku (veta 4.24[1]) a preto nemusí platiť $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$. Tento vzťah **neplatí**.

[1] https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf

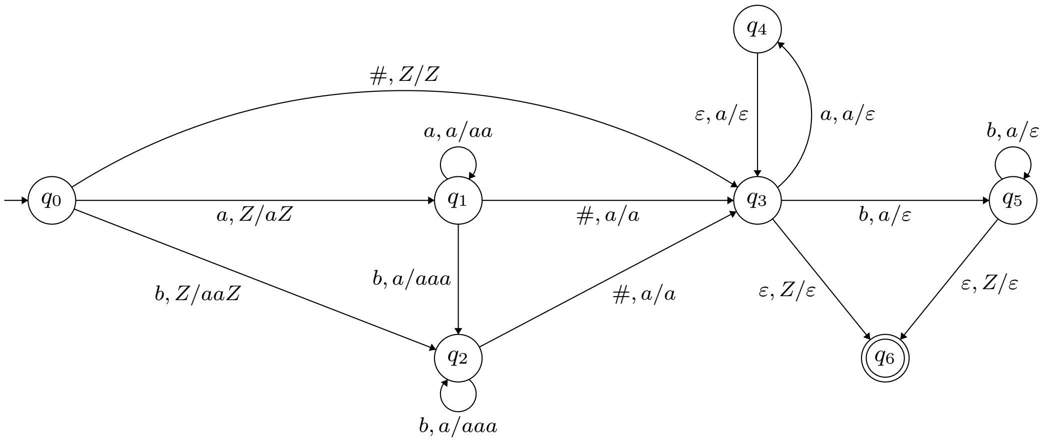
2. Majme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný nasledovne: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i+2j = 2k + l\}$. Zostrojte deterministický zásobníkový automat M_L taký, že $L(M_L) = L$.

Riešenie

$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{a, b, \#\}, \{a, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_6\})$

Prechodová funkcia δ je definovaná nasledovne:

$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_1, aZ)\}$ $\delta(q_0, b, Z) = \{(q_2, aaZ)\}$ $\delta(q_0, \#, Z) = \{(q_3, Z)\}$
$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, aa)\}$ $\delta(q_1, b, a) = \{(q_2, aaa)\}$ $\delta(q_1, \#, a) = \{(q_3, a)\}$
$\delta(q_2, b, a) = \{(q_2, aaa)\}$ $\delta(q_2, \#, a) = \{(q_3, a)\}$ $\delta(q_3, a, a) = \{(q_4, \varepsilon)\}$
$\delta(q_3, b, a) = \{(q_5, \varepsilon)\}$ $\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_6, \varepsilon)\}$ $\delta(q_4, \varepsilon, a) = \{(q_3, \varepsilon)\}$
$\delta(q_5, b, a) = \{(q_5, \varepsilon)\}$ $\delta(q_5, \varepsilon, Z) = \{(q_6, \varepsilon)\}$



3. Dokážte, že jazyk L z predchádzajúceho príkladu nie je regulárny.

Riešenie

Dôkaz sporom:
Predpokladajme, že jazyk L je regulárny. Potom podľa vety 3.18[1] existuje celočíselná konštanta $p > 0$ taká, že každá veta $a^p b^p \# a^p b^p \in L$, kde $4p + 1 > p$ môže byť zapísaná v tvare $xyz = a^p b^p \# a^p b^p$, $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq p$, a platí $xy^i z \in L$ pre $i \geq 0$.

Podreťazce x, y, z zvolíme nasledovne:
$x = a^k \quad k \geq 0$
$y = a^l \quad l > 0$
$z = a^{p-k-l} b^p \# a^p b^p$

Potom iterácia $xy^{10}z = a^{p+9l} b^p \# a^p b^p \notin L$. Došlo k sporu a predpoklad, že jazyk L je regulárny neplatí. Jazyk L nie je regulárny.

4. Navrhnite algoritmus, ktorý pre daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne či $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

   Ďalej demonštrujte beh tohto algoritmu na automate $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definovaná ako

   $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$
   $\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}$
   $\delta(q_4, a) = \{q_0\}$

Riešenie

Algoritmus je založený na myšlienke hľadania reťazca w, prijímaného automatom A s dĺžkou nanajvýš 4 symboly. Iteratívny algoritmus postupne vytvára množiny stavov C_i, kde $i = 0, \ldots, 4$. Každá množina stavov C_i je zjednotením množín stavov, do ktorých automat môže prejsť z akéhokoľvek stavu $q \in C_{i-1}$ prečítaním ktoréhokoľvek symbolu $a \in \Sigma$. Môžeme povedať, že množina C_i obsahuje všetky možné stavy, do ktorých sa automat môže dostať prečítaním i symbolov zo vstupného reťazca. Ak automat A dokáže prejsť prečítaním $i < 5$ symbolov z počiatočného stavu q_0 do nejakého koncového stavu $f \in F$, znamená to, že platí: $\exists w \in L(A) : |w| < 5$.

Vstup: Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
Výstup: FALSE, ak $\exists w \in L(A) : |w| < 5$, inak TRUE

$C_0 \leftarrow \{q_0\}$
$n \leftarrow 4$
for $i \leftarrow 1$ to n **do** ▷ $i = 1; 2; 3; 4$
    $C_i \leftarrow \emptyset$
    for $q \in C_{i-1}$ **do**
        for $a \in \Sigma$ **do**
            $C_i \leftarrow C_i \cup \delta(q, a)$
        end for
    end for
    if $C_i \cap F \neq \emptyset$ **then** ▷ prienik s množinou koncových stavov
        return FALSE
    end if
end for
return TRUE

Beh algoritmu na zadanom automate:
$C_0 = \{q_0\}$
$C_1 = \{q_1, q_0\}$
$C_2 = \{q_1, q_0\} \cup \{q_1, q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$
$C_3 = \{q_1, q_0\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_0, q_3\} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$C_4 = \{q_1, q_0\} \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_0, q_3\} \cup \{q_0, q_4\} = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$C_4 \cap F = \{q_4\} \neq \emptyset$

Na tomto demonštračnom príklade algoritmus vracia hodnotu FALSE. Pre zadaný automat A neplatí výrok $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

5. Dokážte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\}$ je regulárny. Postupujte nasledovne:
    - Definujte $\sim_L$ pre jazyk L.
    - Zapíšte rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určite počet tried tohto rozkladu.
    - Ukážte, že L je zjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$.

Riešenie

- $$\begin{aligned}\forall x, y \in \Sigma^* : x \sim_L y \iff\ & (\#_b(x) > 2 \wedge \#_b(y) > 2) \vee \\ & \Big(\big((\#_b(x) = 0 \wedge \#_b(y) = 0) \vee \\ & \quad (\#_b(x) = 1 \wedge \#_b(y) = 1) \vee \\ & \quad (\#_b(x) = 2 \wedge \#_b(y) = 2)\big) \wedge \\ & \quad \big(\#_a(x)\ mod\ 2 = \#_a(y)\ mod\ 2\big)\Big)\end{aligned}$$

- $\Sigma^*/\sim_L$:
    1) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) > 2\}$
    2) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\}$
    3) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\}$
    4) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\}$
    5) $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\}$
    6) $L_6 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\}$
    7) $L_7 = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w)\ mod\ 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\}$

- Je zrejmé, že jazyk $L = L_5 \cup L_6 \cup L_7$ a rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ má konečný index $= 7$. Na základe vety 3.20[1] preto môžeme tvrdiť, že L je jazyk prijímaný deterministickým konečným automatom. Jazyk L je regulárny.