

<i>člen skupiny</i>	<i>ID</i>	<i>č. domácí úlohy</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>Σ</i>
Liščinský Matúš	196175	1/2						
Majzlík Jakub	196109	1/2						
Marcin Vladimír	196353	1/2						
Moravčík Libor	196275	1/2						
Mrázik Matej	196043	1/2						

Sada 1

1. Dokažte nebo vyvráťte protipříkladem následující tvrzení. Pro všechny množiny $X, Y, Z \subseteq U$ platí (doplňky množin uvažujeme vůči množině U):

Riešenie:

-množiny: $X = \{1,2,3,4\}$

$$Y = \{2,3,5,6\}$$

$$Z = \{2,3,7,8\}$$

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

a.) $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

Dôkaz:

$$\text{„}\supseteq\text{“ } x \in \overline{X \cap Y} \Rightarrow \neg(x \in X) \vee \neg(x \in Y) \Rightarrow \neg(x \in X \wedge x \in Y) \Rightarrow x \notin X \cap Y \Rightarrow x \in \overline{X \cap Y}$$

$$\text{„}\subseteq\text{“ } x \in \overline{X \cap Y} \Rightarrow \neg(x \in X \wedge x \in Y) \Rightarrow \neg(x \in X) \vee \neg(x \in Y) \Rightarrow x \notin X \vee x \notin Y \Rightarrow x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$$

b.) $Y - X = X - Y$

Protipříklad:

$$Y - X = \{5,6\}$$

$$X - Y = \{1,4\}$$

$$Y - X \neq X - Y$$

c.) $\overline{X \cup Y} \supseteq X$

Protipříklad:

$$\overline{X \cup Y} = \{7,8,9,10\}$$

$$X = \{1,2,3,4\}$$

$$\overline{X \cup Y} \not\supseteq X$$

d.) $(X \cup Y) \cap (Y - X) = Y$

Protipříklad:

$$(Y - X) = \{5,6\}$$

$$X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y - X) = \{5,6\}$$

$$Y = \{2,3,5,6\}$$

$$(X \cup Y) \cap (Y - X) \neq Y$$

e.) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup Z$

Protipříklad:

$$Y \cap Z = \{2,3\}$$

$$X - (Y \cap Z) = \{1,4\}$$

$$(X - Y) = \{1,4\}$$

$$(X - Y) \cup Z = \{1,2,3,4,7,8\}$$

$$X - (Y \cap Z) \neq (X - Y) \cup Z$$

Sada 1

2. Na množině $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ je dána relace $R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$. Zapište relaci R výčtem prvků. Určete její definiční obor a obor hodnot. Nalezněte relaci R^{-1} .

Riešenie:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in X, 3x \text{ dělí } 4y\}$$

$$R = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (1, 6), (2, 6), (4, 6), (8, 6)\}$$

$$R^{-1} = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 4), (6, 8)\}$$

$$\text{Dom}R = \{1, 2, 4, 8\}$$

$$\text{Im}R = \{3, 6\}$$

3. Uvažujte množinu T_n všech topologií na množině o $n = 2$ prvcích s uspořádáním inkluzí. Nakreslete její Hasseův diagram a rozhodněte, zda je (T_2, \subseteq) svazově uspořádaná.

Riešenie:

- množina $M = \{0, 1\}$

- topologie na množině M :

$$- \tau_a = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$$

$$- \tau_b = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$$

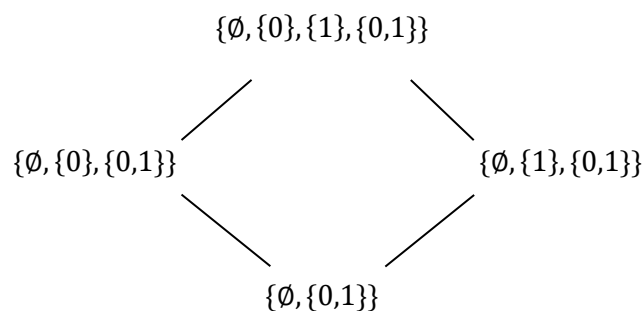
$$- \tau_c = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$- \tau_d = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

- množina T_2 všech topologií na množině $M = \{0, 1\}$

$$- T_2 = \{\{\emptyset, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}\}$$

- Hasseův diagram:



- Z Hasseova diagramu můžeme vidět, že každá dvojprvková podmnožina množiny T_2 má v T_2 supremum a infimum $\Rightarrow (T_2, \subseteq)$ je svazově uspořádaná.

$$\text{napr.: } \sup\{\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$\inf\{\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}\} = \{\emptyset, \{0, 1\}\}$$

4. Dokažte nebo vyvráťte protipříkladem pro libovolné dvě relace R_1, R_2 na množině X :

Riešenie:

$$- X = \{1, 2, 3\} \quad \Delta X = \{(x, x) | x \in X\}$$

$$- R_1 = \{[2, 3], [3, 1]\}$$

$$- R_2 = \{[1, 2], [2, 3]\}$$

$$a.) \rho(R_1 \cup R_2) = \rho(R_1) \cup \rho(R_2)$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} „\subseteq“ \quad [x, y] \in \rho(R_1 \cup R_2) &\Rightarrow [x, y] \in R_1 \cup R_2 \cup \Delta X \Rightarrow [x, y] \in R_1 \vee [x, y] \in R_2 \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow \\ &\Rightarrow ([x, y] \in R_1 \vee [x, y] \in \Delta X) \vee ([x, y] \in R_2 \vee [x, y] \in \Delta X) \Rightarrow [x, y] \in \rho(R_1) \cup \rho(R_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} „\supseteq“ \quad [x, y] \in \rho(R_1) \cup \rho(R_2) &\Rightarrow ([x, y] \in R_1 \vee [x, y] \in \Delta X) \vee ([x, y] \in R_2 \vee [x, y] \in \Delta X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x, y] \in R_1 \vee [x, y] \in R_2 \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow [x, y] \in R_1 \cup R_2 \cup \Delta X \Rightarrow [x, y] \in \rho(R_1 \cup R_2) \end{aligned}$$

$$b.) \sigma(\rho(R_1)) = \rho(\sigma(R_1))$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} „\subseteq“ \quad [x, y] \in \sigma(\rho(R_1)) &\Rightarrow [x, y] \in \rho(R_1) \cup \rho(R_1^{-1}) \Rightarrow ([x, y] \in R_1 \vee \Delta X) \vee ([y, x] \in R_1 \vee \Delta X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x, y] \in R_1 \vee [y, x] \in R_1 \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow [x, y] \in (R_1 \cup R_1^{-1}) \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x, y] \in \sigma(R_1) \cup \Delta X \Rightarrow [x, y] \in \sigma(\rho(R_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} „\supseteq“ \quad [x, y] \in \rho(\sigma(R_1)) &\Rightarrow [x, y] \in \sigma(R_1) \cup \Delta X \Rightarrow [x, y] \in (R_1 \cup R_1^{-1}) \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x, y] \in R_1 \vee [y, x] \in R_1 \vee [x, y] \in \Delta X \Rightarrow ([x, y] \in R_1 \vee \Delta X) \vee ([y, x] \in R_1 \vee \Delta X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x, y] \in \rho(R_1) \cup \rho(R_1^{-1}) \Rightarrow [x, y] \in \sigma(\rho(R_1)) \end{aligned}$$

$$c.) \sigma(\tau(R_1)) = \tau(\sigma(R_1))$$

Protipříklad:

$$\tau(R_1) = \{[2, 3], [3, 1], [2, 1]\}$$

$$\sigma(R_1) = \{[2, 3], [3, 1], [3, 2], [1, 3]\}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) = \{[2, 3], [3, 1], [2, 1], [3, 2], [1, 3], [1, 2]\}$$

$$\tau(\sigma(R_1)) = \{[2, 3], [3, 1], [3, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 2], [3, 3], [1, 1], [1, 2]\}$$

$$\sigma(\tau(R_1)) \neq \tau(\sigma(R_1))$$

$$d.) \tau(R_1 \cup R_2) = \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$$

Protipříklad:

$$\tau(R_1) = \{[2, 3], [3, 1], [2, 1]\}$$

$$\tau(R_2) = \{[1, 2], [2, 3], [1, 3]\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1]\}$$

$$\tau(R_1 \cup R_2) = \{[1, 2], [2, 3], [3, 1], [1, 3], [2, 1], [1, 1], [3, 3], [2, 2], [3, 2]\}$$

$$\tau(R_1) \cup \tau(R_2) = \{[1, 2], [2, 3], [1, 3], [3, 1], [2, 1]\}$$

$$\tau(R_1 \cup R_2) \neq \tau(R_1) \cup \tau(R_2)$$

Sada 1

5. Položme $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{0, 1, 2\}$. Dále klademe $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$, $x_1 \odot x_2 = (x_1 \cdot x_2) \bmod 6$, $y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$ a $y_1 \boxdot y_2 = (y_1 \cdot y_2) \bmod 3$ pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$. Dokažte, že $f: X \rightarrow Y$, kde $f(x) = x \bmod 3$ je morfismus algeber (X, \oplus, \odot) a (Y, \boxplus, \boxdot) . Nalezněte $\text{Ker } f$ a sestrojte faktorovou algebru $X/\text{Ker } f$. Faktorizujte zobrazení f přes faktorovou algebru.

Riešenie:

$$- X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$Y = \{0, 1, 2\}$$

$$- x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \bmod 6$$

$$x_1 \odot x_2 = (x_1 * x_2) \bmod 6$$

$$y_1 \boxplus y_2 = (y_1 + y_2) \bmod 3$$

$$y_1 \boxdot y_2 = (y_1 * y_2) \bmod 3$$

$$- f: X \rightarrow Y$$

$$f(x) = x \bmod 3$$

$$- \text{Třeba dokázat: } f(x_1 \oplus x_2) = f(x_1) \boxplus f(x_2)$$

$$- \text{platí: } (a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n$$

$$x = 6v + z$$

- kde x je libovolné číslo dělené 6timi

- v je výsledek po celočíselném dělení $x/6$

- a z je zbytek po celočíselném dělení

$$- f(x_1 \oplus x_2) = f((x_1 + x_2) \bmod 6) = ((x_1 + x_2) \bmod 6) \bmod 3$$

$$f(x_1) \boxplus f(x_2) = (x_1 \bmod 3) \boxplus (x_2 \bmod 3) = ((x_1 \bmod 3) + (x_2 \bmod 3)) \bmod 3 = (x_1 + x_2) \bmod 3$$

$x_1 + x_2$	$(x_1 + x_2) \bmod 6$	$((x_1 + x_2) \bmod 6) \bmod 3$	$(x_1 \bmod 3) \boxplus (x_2 \bmod 3)$
$6v$	0	0	0
$6v+1$	1	1	1
$6v+2$	2	2	2
$6v+3$	3	0	0
$6v+4$	4	1	1
$6v+5$	5	2	2

$$- \text{Z tabulky můžeme vidět, že: } f(x_1 \oplus x_2) = f(x_1) \boxplus f(x_2)$$

$$- \text{Třeba dokázat: } f(x_1 \odot x_2) = f(x_1) \boxdot f(x_2)$$

$$- \text{platí: } (a * b) \bmod n = (a \bmod n * b \bmod n) \bmod n$$

$$x = 6v + z$$

- kde x je libovolné číslo dělené 6timi

- v je výsledek po celočíselném dělení $x/6$

- a z je zbytek po celočíselném dělení

$$- f(x_1 \odot x_2) = (x_1 \odot x_2) \bmod 3 = (x_1 * x_2) \bmod 3$$

$$f(x_1) \boxdot f(x_2) = (x_1 \bmod 3) \boxdot (x_2 \bmod 3) = (x_1 \bmod 3 * x_2 \bmod 3) \bmod 3 = (x_1 * x_2) \bmod 3$$

Sada 1

$x_1 * x_2$	$(x_1 * x_2) \bmod 6$	$((x_1 * x_2) \bmod 6) \bmod 3$	$(x_1 * x_2) \bmod 3$
$6v$	0	0	0
$6v+1$	1	1	1
$6v+2$	2	2	2
$6v+3$	3	0	0
$6v+4$	4	1	1
$6v+5$	5	2	2

- Z tabulky můžeme vidět, že platí: $f(x_1 \odot x_2) = f(x_1) \boxdot f(x_2)$

- $f(x) = x \bmod 3$

$f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,0), (4,1), (5,2)\}$

$f^{-1} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,3), (1,4), (2,5)\}$

- $\text{Ker } f = f^{-1} \circ f$

$\text{Ker } f = \{(0,0), (0,3), (1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,0), (3,3), (4,1), (4,4), (5,2), (5,5)\}$

- $X/\text{Ker } f = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$

- Faktorizace zobrazení přes faktorovou algebru:

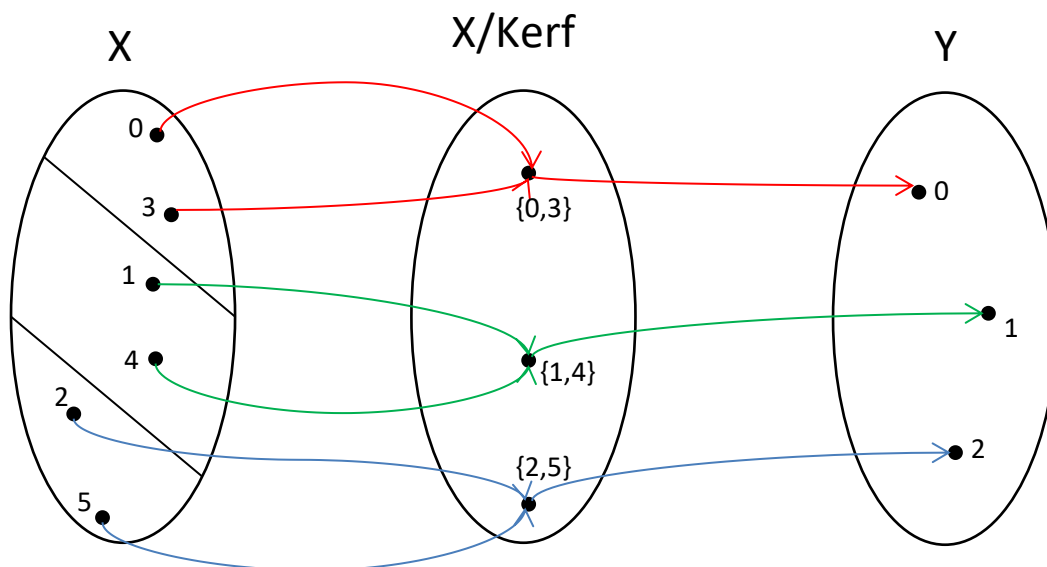
- $f = h \circ g$

- $g: X \rightarrow X/\text{Ker } f$

$g = \{(0, \{0,3\}), (1, \{1,4\}), (2, \{2,5\}), (3, \{0,3\}), (4, \{1,4\}), (5, \{2,5\})\}$

- $h: X/\text{Ker } f \rightarrow Y$

$h = \{(\{0,3\}, 0), (\{1,4\}, 1), (\{2,5\}, 2)\}$



Sada 1

6. Najděte všechny podgrupy grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) . Které z nich jsou normální? Sestrojte příslušné faktorové grupy.

Riešenie:

(\mathbb{Z}_6, \oplus)

\oplus	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

- Podgrupy:

$(\{0\}; \oplus), (\{0, 3\}; \oplus), (\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}; \oplus)$

Rozklad grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) podľa podgrupy $(\{0\}; \oplus)$:

- Ľavý rozklad:

$$0 \oplus \{0\} = \{0\}$$

$$1 \oplus \{0\} = \{1\}$$

$$2 \oplus \{0\} = \{2\}$$

$$3 \oplus \{0\} = \{3\}$$

$$4 \oplus \{0\} = \{4\}$$

$$5 \oplus \{0\} = \{5\}$$

$$L = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},\}$$

- Pravý rozklad:

$$\{0\} \oplus 0 = \{0\}$$

$$\{0\} \oplus 1 = \{1\}$$

$$\{0\} \oplus 2 = \{2\}$$

$$\{0\} \oplus 3 = \{3\}$$

$$\{0\} \oplus 4 = \{4\}$$

$$\{0\} \oplus 5 = \{5\}$$

$$P = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\},\}$$

Ľavý rozklad sa rovná pravému. Podgrupa $(\{0\}; \oplus)$ je normálna podgrupa grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) .

Sada 1

Faktorová grupa:

Triedy rozkladu: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$

\oplus	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Rozklad grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) podľa podgrupy $(\{0,3\}; \oplus)$

- Ľavý rozklad:

$$0 \oplus \{0,3\} = \{0,3\}$$

$$1 \oplus \{0,3\} = \{1,4\}$$

$$2 \oplus \{0,3\} = \{2,5\}$$

$$3 \oplus \{0,3\} = \{3,0\}$$

$$4 \oplus \{0,3\} = \{4,1\}$$

$$5 \oplus \{0,3\} = \{5,2\}$$

$$L = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$$

- Pravý rozklad:

$$\{0,3\} \oplus 0 = \{0,3\}$$

$$\{0,3\} \oplus 1 = \{1,4\}$$

$$\{0,3\} \oplus 2 = \{2,5\}$$

$$\{0,3\} \oplus 3 = \{3,0\}$$

$$\{0,3\} \oplus 4 = \{4,1\}$$

$$\{0,3\} \oplus 5 = \{5,2\}$$

$$P = \{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$$

Ľavý rozklad sa rovná pravému. Podgrupa $(\{0,3\}; \oplus)$ je normálna podgrupa grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) .

Faktorová grupa:

Triedy rozkladu: $\{0,3\} = [0], \{1,4\} = [1], \{2,5\} = [2]$

\oplus	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

Sada 1

Rozklad grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) podľa podgrupy $(\{0,1,2,3,4,5\}; \oplus)$

- Ľavý rozklad:

$$0 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$1 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5,0\}$$

$$2 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{2,3,4,5,0,1\}$$

$$3 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{3,4,5,0,1,2\}$$

$$4 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{4,5,0,1,2,3\}$$

$$5 \oplus \{0,1,2,3,4,5\} = \{5,0,1,2,3,4\}$$

$$L = \{\{0,1,2,3,4,5\}\}$$

- Pravý rozklad:

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{1,2,3,4,5,0\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{2,3,4,5,0,1\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{3,4,5,0,1,2\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{4,5,0,1,2,3\}$$

$$\{0,1,2,3,4,5\} \oplus = \{5,0,1,2,3,4\}$$

$$P = \{\{0,1,2,3,4,5\}\}$$

Ľavý rozklad sa rovná pravému. Podgrupa $(\{0,1,2,3,4,5\}; \oplus)$ je normálna podgrupa grupy (\mathbb{Z}_6, \oplus) .

Faktorová grupa:

$$\text{Trieda rozkladu: } \{0,1,2,3,4,5\} = [0]$$

$$\begin{array}{c|c} \oplus & [0] \\ \hline [0] & [0] \end{array}$$

7. V Booleově algebre $(X, \oplus, \odot, ', 0, 1)$ zjednodušte výrazy:

$$(i) \quad (a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a)$$

$$(ii) \quad (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z)'$$

$$(iii) \quad (x' \oplus y')'$$

Riešenie:

$$(i) \quad (a \oplus c) \oplus (c \oplus b) \oplus (b \oplus a) \overset{\text{Asociativní zákon}}{\Leftrightarrow} (a \oplus a) \oplus (b \oplus b) \oplus (c \oplus c) \overset{\text{Idempotenní zákon}}{\Leftrightarrow} a \oplus b \oplus c$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x' \odot z')' &\overset{\text{De Morganův zákon}}{\Leftrightarrow} (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x'' \oplus z'') \Leftrightarrow \\ &\overset{\text{Zákon dvojité negace}}{\Leftrightarrow} (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus x \oplus z \overset{\text{Idempotenní zákon}}{\Leftrightarrow} (x \odot y) \oplus (x \odot z) \oplus (x \odot 1) \oplus z \Leftrightarrow \\ &\overset{\text{Distributivní zákon}}{\Leftrightarrow} x \odot (y \oplus z \oplus 1) \oplus z \overset{\text{Idempotenní zákon}}{\Leftrightarrow} x \odot 1 \oplus z \overset{\text{Idempotenní zákon}}{\Leftrightarrow} x \oplus z \end{aligned}$$

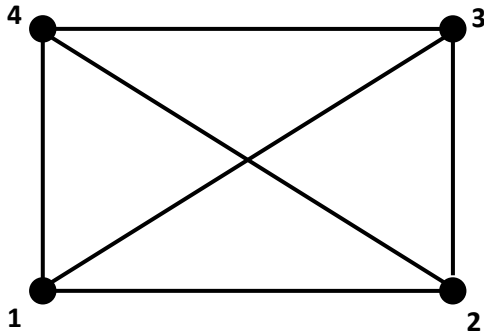
$$(iii) \quad (x' \oplus y')' \overset{\text{De Morganův zákon}}{\Leftrightarrow} x'' \odot y'' \overset{\text{Zákon dvojité negace}}{\Leftrightarrow} x \odot y$$

Sada 1

8. Buď G úplný graf o n vrcholech. Určete počet cest délky 2, které začínají v pevně zvoleném vrcholu a a končí v jiném pevně zvoleném vrcholu b . Kolik existuje takových cest délky 3? Zobecněte tento výsledek pro libovolné k , kde $1 \leq k < n$.

Riešenie:

Úplný graf o n vrcholech, kde $n=4$



Ako počiatočný vrchol si zvolíme vrchol 1 a koncový vrchol bude vrchol 3.

Počet ciest z počiatočného do koncového bodu

dĺžky k si označíme ako $P(k)$

$$P(2) = 2$$

$$P(3) = 2$$

Cesty : 1 {1,2} 2 {2,3} 3
1 {1,4} 4 {4,3} 3

Cesty: 1 {1,2} 2 {2,4} 4 {4,3} 3
1 {1,4} 4 {4,2} 2 {2,3} 3

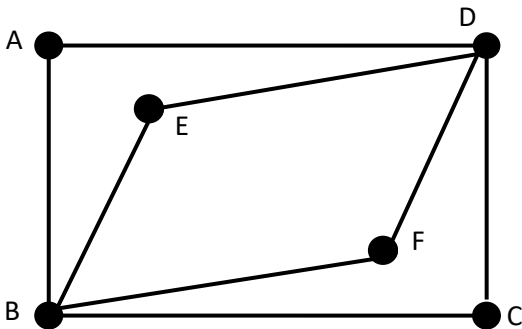
Počet ciest dĺžky 2 v našom grafe je rovný 2, rovnako tak aj počet ciest dĺžky 3.

Všeobecne však platí pre počet ciest dĺžky k v úplnom grafe o n vrchoch, kde $1 \leq k < n$ vzťah:

$$P(k) = \frac{(n-2)!}{(n-(k+1))!}$$

9. Nakreslete graf se šesti vrcholy, který lze nakreslit jedním uzavřeným tahem, ale v němž neexistuje hamiltonovská kružnice. Náležitě zdůvodněte, že tento graf má požadované vlastnosti.

Riešenie:



Tento graf je možné nakresliť jedným uzavretým ťahom a neobsahuje hamiltonovskú kružnicu, t.j. kružnicu, ktorá prechádza všetkými vrcholmi grafu práve raz.

- Dôkaz, že graf neobsahuje Hamiltonovú kružnicu:

n - počet vrcholov grafu

- Existuje vrchol ktorého stupeň je menší ako $n/2=3$ (napríklad vrchol E)

- Existuje dvojica nesusedných vrcholov pre ktoré neplatí, že súčet ich stupňov je väčší nanajvýš rovný n , t.j. neplatí vzťah $st\ x + st\ y \geq n$ (napríklad pre vrcholy A a C)

- Existuje prirodzené číslo $k < (n/2)$, pre ktoré neplatí, že počet vrcholov, ktorých stupeň neprevyšuje k je menší ako k . (napríklad počet vrcholov so stupňom 2 je $4 > k$)

Sada 1

10. Je dána soustava lineárních rovnic

$$x + y - z = -1$$

$$x + y - 2z = 1$$

$$2x + 2y - 2z = 3$$

Každá rovnice určuje rovinu v třírozměrném Eukleidovském prostoru \mathbb{R}^3 . Určete jejich vzájemnou polohu.

Riešenie:

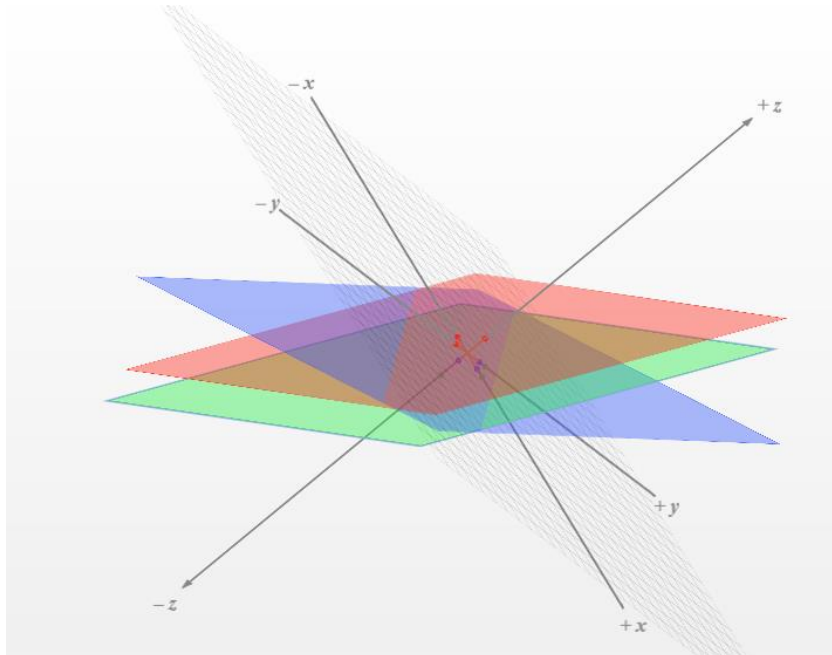
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad r_1 \leftrightarrow r_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad r_2 \rightarrow r_2 - 1/2r_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad r_3 \rightarrow r_3 - 1/2r_1$$

- Tretia rovnica nemá riešenie, to znamená, že ani sústava rovníc nemá riešenie.
- Všetky 3 roviny sa nepretnú, 1. a 3. rovina sú rovnobežné (majú rovnaký normálový vektor $n_1 = (1, 1, -1) = n_3(2, 2, -2)$)



Zelená a červená rovina sú rovnobežné.