



4 — Ecuaciones no lineales.

Teorema 2.3 Sea f una función continua sobre el intervalo $[a_0, b_0]$ y tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones generadas por el método de bisección, de acuerdo con las notaciones anteriores.

Entonces, denotando mediante x_* una raíz de f en $[a_0, b_0]$, se tiene

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_*$$

$$ii) |x_* - c_n| \leq 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0)$$

Demostración: En primer lugar, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones monótonas y acotadas, que deben tener el mismo límite pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$$

Por otro lado, denotando x_* al límite común y pasando al límite en

$$0 \geq f(a_n)f(b_n)$$

(f continua) se obtiene $(f(x_*))^2 \leq 0$ y, por tanto, $f(x_*) = 0$.

Teorema 2.1 Valor intermedio. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \leq x \leq f(b)$ o $f(b) \leq x \leq f(a)$, existe un punto c , $a \leq c \leq b$, en el cual $f(c) = x$.

Si el intervalo con que se empieza el proceso iterativo, $[a_0, b_0]$, contiene una solución r , usando como estimación de ésta $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, se tendrá que

$$e_0 = |r - c_0| \leq \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

En cualquier iteración, razonando de forma similar,

$$e_i = |r - c_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 2.2 Al aplicar el método de la bisección a una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua en un intervalo $[a, b]$ en el que $f(a)f(b) < 0$, después de n iteraciones, en las que se habrán evaluado la función $n + 2$ veces, se habrá obtenido un valor de la solución c_n tal que su error

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}},$$

donde r es el valor real de la solución.

Es fácil ver que si f es continua los intervalos $[a_i, b_i]$ seguirán conteniendo (al menos) una raíz de f , de modo que tomando $c_i = (a_i + b_i)/2$ como su aproximación se tendrá:

$$|x - c_n| \leq \frac{1}{2} |b_n - a_n| = \frac{1}{4} |b_{n-1} - a_{n-1}| = \dots = \frac{1}{2^n} |b_1 - a_1|$$

que permite establecer una cota de error (absoluto) y calcular el número de iteraciones necesarias para alcanzar una cierta precisión ε_x , pues para asegurar que

$$\frac{1}{2^n} |b_1 - a_1| \leq \varepsilon_x$$

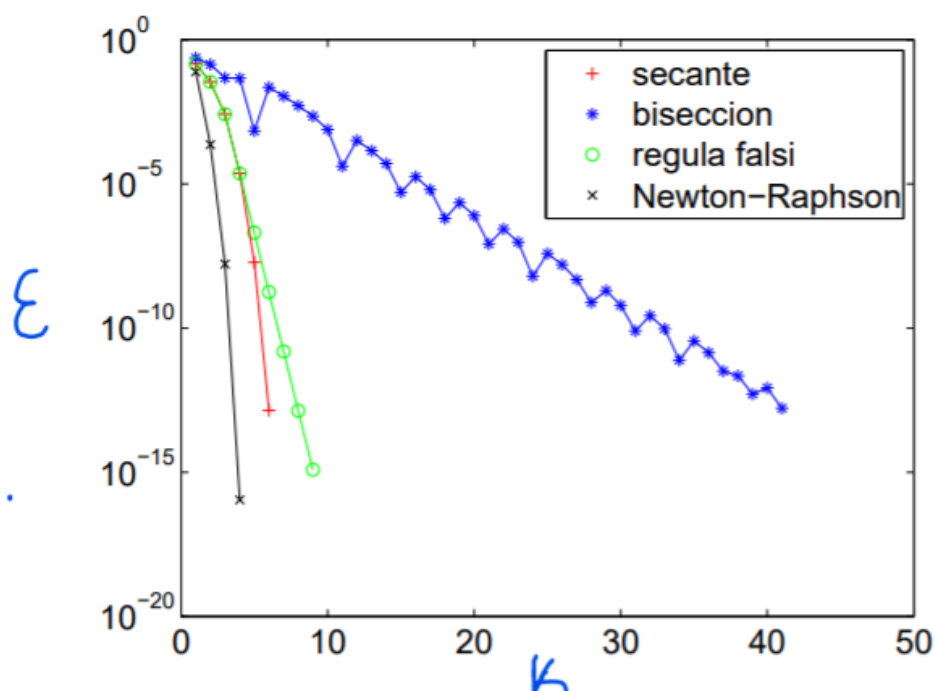
basta con tomar el (primer) valor de n tal que

$$2^n \geq \frac{|b_1 - a_1|}{\varepsilon_x}$$

esto es

$$n \geq \frac{\log(|b_1 - a_1|) - \log(\varepsilon_x)}{\log(2)}$$

Definición 2.1 Una solución es correcta en p posiciones decimales si el error es menor que $0,5 \times 10^{-p}$.



Si la aritmética de la máquina muestra que la función es igual a cero en un valor que no es exactamente una raíz, no hay manera de que el método o algoritmo pueda recuperarse ni hacer mucho más.

El error hacia atrás es cercano a $\epsilon_{\text{máq}} \approx 2,2 \times 10^{-16}$, mientras que el error hacia delante es aproximadamente 10^{-5} . Como el error hacia atrás no puede disminuirse por debajo de un error relativo por debajo del ϵ de la máquina, tampoco es posible disminuir el error hacia delante.

Hay que destacar que este ejemplo es bastante especial pues la función tiene una **raíz triple** en $r = 2/3$, ●

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3} - \frac{8}{27} = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3.$$

Definición 2.3 Si una función continua y derivable m veces tiene en r una raíz, $f(r) = 0$, y $0 = f(r) = f'(r) = f''(r) = \dots = f^{(m-1)}(r)$, pero $f^{(m)}(r) \neq 0$, se dice que f tiene una **raíz de multiplicidad m** en r . Se dice que f tiene una **raíz múltiple** en r si la multiplicidad es mayor que uno. La raíz es *simple* si la multiplicidad es igual a uno.

Teorema 2.3 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y derivable, $f(r) = 0$ y $S = |f'(r)| < 1$, la iteración de punto fijo, para estimaciones iniciales lo suficientemente próximas a r , converge linealmente hacia el punto r , con razón S .

Definición 2.5 Sea e_i el error en el paso i de un método iterativo. Si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se dice que el método *converge linealmente* con razón S .

Definición 2.6 Sea una sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $x_i \in \mathbb{R}$, convergente a x^* . El **orden de convergencia** de $\{x_i\}$ es el máximo de los números no negativos r que satisface

$$0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|x_{i+1} - x^*|}{|x_i - x^*|^r} < \infty.$$

Si $r = 1$, la sucesión se dice que **converge linealmente**; si $r = 2$, se dice que lo hace **cuadráticamente**; si $r = 3$, **cúbicamente**, etc. El valor del límite, β , se conoce como *razón*, o **constante de error asintótico**.

Definición 2.7 Un método iterativo $x_{i+1} = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, que parte de un punto x_0 , se dice que tiene una **velocidad de convergencia de orden r** cuando la sucesión $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ converge con orden r hacia la solución x .

- La convergencia cuadrática quiere decir, grosso modo, que en las proximidades del límite o solución el número de dígitos significativos que aporta cada paso del proceso al valor de la solución es el doble que el anterior
- Converge linealmente. Esta convergencia significa que cada iteración añade un número de dígitos constante a la solución final

Problema

Encontrar la(s) raíces de

- $f(x) = \cos^2(x) - x^2$
- $f(x) = x \sin(x) - 1$ en $[-1, 2]$
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$
- Determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa $m=68.1$ kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de $t=10$ s.
- $x^3 - 2x - 5 = 0$. Esta ecuación tiene valor histórico. Fue la ecuación que usó John Wallis para presentar por primera vez el método de Newton a la academia francesa de ciencias en el siglo XV.

Empleando los métodos con $TOL = 10^{-8}; 10^{-16}; 10^{-32}; 10^{-56};$

- ⇒ Posición falsa #4
- ⇒ Newton-Raphson #2
- ⇒ Müller #5
- ⇒ algoritmo Δ^2 de Aitken (TODOS)
- ⇒ Punto Fijo #3
- ⇒ Secante #1

PREGUNTAS

- Cuales son condiciones para aplicar el método
- Proporcione una explicación geométrica del algoritmo (*excepto para la convergencia acelerada)
- Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo
- Cuál son las raíces. Valide su resultado
- Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.
- Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso, en los casos que se presente el problema
- Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólffram para factorizar)
- ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?
- Realice una gráfica que muestre la relación entre ε_{i+1} y ε_i , qué representa esa gráfica, encuentre una relación de la forma:

$$\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$$

Utilizando la definición 2.6 verifique el orden de convergencia de forma numérica, también verifique la definición 2.5 acerca de la convergencia lineal (realice un número considerable de iteraciones)

- Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones
- Como se comporta el método con respecto al de bisección
- Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Entregables:

- ! Documento con introducción general del método, y las respuestas a las preguntas (en formato pdf con edición LATEX) en repositorio
- ! La implementación en R y/o Python

Fechas

- Presentación de primeros resultados (16 febrero- 17 febrero)
- Presentación de resultados completos (18,- 19 de febrero): Exposición con máximo 8 diapositivas y duración máxima de 10 minutos
- Documentación (Entregables) en GitHub de cada estudiante 21 de febrero

Evaluación

Este problema vale la mitad del parcial (7.5%) de marzo 2- o 3 2021

Enlaces- Referencias

CHAPRA, Steven C. y CANALE, Raymond P.: Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw Hill 2002.

<https://www.codesansar.com/numerical-methods/secant-method-online-calculator.htm>

<https://rdr.io/cran/cmna/>

Palabras Claves:

Épsilon de la máquina, Python, R, Convergencia, significancia, Error hacia Adelante, Error hacia atrás