ENS de Lyon - M1 **2016 Printemps**

TD 2 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Caractérisation pratique du mouvement brownien.*

Montrer qu'un mouvement brownien (B_t) est caractérisé par les deux propriétés suivantes :

1. B_t est un processus gaussien centré de covariance $K(s,t) = s \wedge t$;
2. B_t est (p.s.) à trajectoire continue.

Exercice 2 — *Construction de Lévy*

Soit $D_n = \{\frac{k}{2^n},\ 0 \le k \le 2^n\}$ et $D = \cup_{n \ge 0} D_n$, considérons $(N_t, t \in D)$ une famille i.i.d. de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Dans la construction de Lévy on veux construire une famille de v.a. $\{B_t,\ t \in D\}$ telle que pour tout n,

a) $\forall r < s < t \in D_n,\ B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ et indépendant de $B_s - B_r$.

b) $\{B_t,\ t \in D_n\}$ est indépendant de $\{N_t,\ t \in D \setminus D_n\}$.

1. Montrer que si X, Y sont deux v.a. réelles gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
2. Soit $B_0 = 0$ et $B_1 = N_1$, posons par récurrence que, pour $t \in D_n \setminus D_{n-1}$
$$B_t = \frac{1}{2}\left(B_{t-2^{-n}} + B_{t+2^{-n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}} N_t.$$
Montrer qu'avec cette définition, a) et b) sont satisfaites.
3. Définissons les fonctions linéaires par morceaux F_n par
$$F_0(t) = \begin{cases} N_1 & t = 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \quad \text{et pour } n \ge 1,\ F_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2}^{-(n+1)} N_t & t \in D_n \setminus D_{n-1} \\ 0 & t \in D_{n-1} \end{cases}$$
Montrer que pour tout $t \in D_n$, $B_t = \sum_{i=0}^{n} F_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t)$.
4. En utilisant l'inégalité $\mathbb{P}(|N_t| \ge c\sqrt{n}) \le \exp(-\frac{c^2 n}{2})$, montrer que p.s. les événements $A_n = \{\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n} 2^{-(n+1)/2}\}$ sont réalisés à partir de certain nombre (aléatoire) $N < \infty$ une fois $c > \sqrt{2 \log 2}$.
5. En déduire que, p.s. $B_t = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t)$ converge uniformément sur $[0,1]$, et on note $\{B_t,\ t \in [0,1]\}$ cette limite.
6. Montrer que B_t est un mouvement brownien sur $[0,1]$.

Exercice 3 — *Plus sur la tribu du brownien.*

On considère cette fois ci l'espace des fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$: $C(I)$ muni de sa topologie définie par $d(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|$. On note comme toujours $\mathcal{B}(C(I))$ la plus petite tribu telle que $T_x : f \mapsto f(x)$ soit continu pour tout x, $\sigma(\mathcal{O}(C(I)))$ sa tribu borélienne.

1. Soit Q dénombrable dense dans I, montrer que $\mathcal{B}(C(I))$ est générée par les cylindres de la forme
$$C(I) \cap \left(\prod_{x\in Q} A_x \prod_{x \in I\setminus Q} \mathbb{R} \right) \text{ où } \forall x,\ A_x \in \mathcal{B}.$$
2. Soit I compact, montrer que $\sigma(\mathcal{O}(C(I))) = \mathcal{B}(C(I))$. Sinon, montrer que
$$\sigma(\mathcal{O}(C(I))) \supsetneq \mathcal{B}(C(I)).$$