Processus de Markov d'espace état dénombrable

ENS Lyon 2016 M1

Soit S un ensemble dénombrable muni de sa topologie complète et la tribu borélienne associée $\mathcal{S}$, soit X un processus stochastique à valeur dans S et $\mathcal{F}_t$ sa filtration naturelle. On dit que X est de Markov[1] si

$$\forall s, t \geq 0, A \in \mathcal{S},\ \mathbb{P}(X_{s+t} \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{s+t} \in A|X_t) \tag{1}$$

On note $\mu(\cdot) = \mathbb{P}(X_0 \in \cdot)$ la loi initiale de X, dans le cas μ est un dirac en x, on note $\mathbb{P}_x$ la loi de processus de Markov associé.

Question 1. Montrer que (1) est équivalent à

$$\forall t_{k+1} > t_k > \cdots > t_0, \forall A \in \mathcal{S},\ \mathbb{P}(X_{t_{k+1}} \in A|X_{t_k}, \ldots, X_{t_0}) = \mathbb{P}(X_{t_{k+1}} \in A|X_{t_k}) \tag{2}$$

Définissons la fonction de transition $p : [0, \infty[\times S \times \mathcal{S} \to [0, 1]$ par

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t) = p(s, X_t, B). \tag{3}$$

Rappelons que (3) est équivalent à dire que

$$\forall s, t \geq 0, \forall f \text{ bornée mesurable},\ \mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t) = \int_S f(y)p(s, X_t, dy). \tag{4}$$

On définit l'opérateur de transition $P = (P_t)_{t\geq 0}$ comme la famille d'opérateur agissant sur L: l'espace de Banach $\{f : S \to \mathbb{R},\ \text{ bornée mesurable}\}$ muni de sa norme sup de la façon suivante:

$$P_s f(x) = \int_S f(y)p(s, x, dy) = \mathbb{E}_x(f(X_s)). \tag{5}$$

Question 2. Montrer que P est bornée (par 1) et il vérifie

$$\forall f \in L,\ P_0 f = f, \quad P_{s+t} f = P_s P_t f. \tag{6}$$

Une famille P d'opérateur bornée vérifiant (6) est appelé un semigroup sur L. Se donné un semigroup P, son générateur G est un opérateur défini par

$$\begin{cases} Gf = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \\ \text{Le domaine de } G : \mathcal{D}(G) \text{ est l'ensemble des fonctions } f \in L \text{ telle que cette limite existe.} \end{cases} \tag{7}$$

Désormais on suppose que notre semigroup P est fortement continu, i.e. pour toute fonctions $f \in L$, $\lim_{t\to 0^+} P_t f = f$.

[1] nous travaillons qu'avec des processus homogène en temps

Question 3. Montrer que

1. Pour toute $f \in L$ et $t \geq 0$,

$$\int_0^t P_s f ds \in \mathcal{D}(G) \text{ et } P_t f - f = G \int_0^t P_s f ds$$

2. Pour toute $f \in \mathcal{D}(G)$ et $t \geq 0$, $P_t f \in \mathcal{D}(G)$ et

$$\frac{d}{dt} P_t f = G P_t f = P_t G f$$

$$P_t f - f = \int_0^t G P_s f ds = \int_0^t P_s G f ds$$

Dans la suite on fait l'hypothèse que X est à trajectoire càdlàg p.s.

Question 4. Montrer que les trajectoires sont des fonctions en escaliers, i.e. pour presque tout ω, pour tout $t \geq 0$, il existe $\Delta t(t, \omega)$,

$$X_{t+s}(\omega) = X_t(\omega), \ \forall s \in [0, \Delta t(t\omega)[.$$

Question 5. Soit $f \in \mathcal{D}(G)$, montrer que M_t^f est une $\mathcal{F}$ martingale où

$$M_t^f = f(X_t) - \int_0^t G f(X_s) ds.$$

Soit τ un temps d'arrêt avec $\mathbb{E}_x(\tau) < \infty$, montrer que, pour toute loi initiale μ

$$\mathbb{E}_\mu f(X_\tau) = \mathbb{E}_\mu f(X_0) + \mathbb{E}_\mu (\int_0^\tau G f(X_s) ds).$$

On définit le taux de transition infinitésimal $g(x, y)$ par

$$\mathbb{P}_x(X_h = y) = g(x, y) h + o(h). \tag{8}$$

Question 6. Montrer que

$$G f(x) = \sum_{y \in S} g(x, y)(f(y) - f(x)).$$

En déduire que G est une matrice indexée par S et que les coefficients off diagonaux de G sont positive et la somme de chaque ligne de G vaut 0.

Question 7. Montrer que, $\tau_1 = \inf\{t \geq 0, X_t \neq X_0\}$ est un $\mathcal{F}_t$ temps d'arrêt. Puis montrer que, sous $\mathbb{P}_x$, τ_1 et X_{τ_1} sont indépendant et qu'il existe une fonction $\lambda : S \to \mathbb{R}^+$ $\mathcal{S}$ mesurable telle que

$$\mathbb{P}_x(\tau_1 > t) = \exp(-\lambda(x) t).$$

Dans la suite on suppose que $\sup_{x \in S} \lambda(x) < \infty$, on peut définir récursivement les temps de saut, i.e.

$$t_1 = \tau_1, \ t_2 = \inf\{t \geq \tau_1, X_t \neq X_{t_1}\}, \ldots, t_{n+1} = \inf\{t \geq t_n, X_t \neq X_{t_n}\}.$$

Question 8. Montrer que, p.s.

$$t_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n = \infty.$$

Question 9. Montrer qu'il existe une matrice T indexée par S telle que pour tout x, y

$$Gf(x) = \lambda(x) \sum_{y\in S} T(x,y)(f(y) - f(x)).$$

Exprimer $g(x,y)$ en fonction de $\lambda(x),\ T(x,y)$.

Rappelons que pour déterminer la loi de notre processus, il suffit de connaître la probabilité des événements[2] suivants (pour tout n, t, tout $(t_k, k = 1, \dots, n)$ et tout $(i_k, k = 1, \dots, n)$)

$$\sigma = \{X_{[0,t_1[} = i_0, X_{[t_1,t_2[} = i_1, \dots, X_{[t_{n-1},t_n[} i_{n-1}, X_{[t_n,t[} = i_n\}$$

Dans la suite on notera simplement σ pour cet événement, en particulier, se donner σ, on connaît t_k, i_k et t.

Question 10. Montrer qu'il existe une fonction d_σ, telle que pour toutes fonctions bornées mesurables Φ définie sur les trajectoires,

$$\mathbb{E}(\Phi(X_u, u \le t)) = \sum_{n\ge1} \sum_{i_0,\dots,i_n} \int_{0\le t_1\le\dots\le t_n\le t} d_\sigma \Phi(\sigma) dt_1 \cdots dt_n + d_{i_0 \underset{t}{\rightarrow}} \Phi(i_0 \underset{t}{\rightarrow})$$

où d_σ est une fonction de $\lambda(x), T(x,y)$ et $l_i(t) := \mathrm{Leb}(\{t : X_t = x\})$ et que $d_{i_0 \underset{t}{\rightarrow}} = \mathbb{P}(i_0 \underset{t}{\rightarrow}) = \mathbb{P}(X_s = i_0, 0 \le s \le t)$.

Question 11. Montrer qu'on peut reconstruire le processus de Markov à partir de sa loi initiale et son générateur.

Un triplet $((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_{t\ge0}, (X_t)_{t\ge0})$ telle que X est adapté et que X_0 soit de loi μ sous $\mathbb{P}$ et telle que pour toute $f \in L$, M_t^f soit une martingale sous $\mathbb{P}$ avec la filtration $\mathcal{F}_t$ est appelée une solution du problème de martingale associé à μ et G.

Question 12. Montrer que, dans le cas où S est un ensemble fini, il existe unique solution du problème de martingale associé à μ et à G.

Indication: pour unicité, on peut commencer en montrant que si $\mathbb{P}$ est une solution, alors X est de Markov sous $\mathbb{P}$, avec équation (2)*; pour l'existence utilise question 5.*

Remarks 1. *Cette caractérisation de processus de Markov par un problème de martingale est complètement générale et il en est de même de beaucoup de notions discutées dans ce DM. Par contre, ces définitions commencent à être non utilisable (voir non existence) quand on passe au cas de plus en plus général, ce qui signifie, ce qu'il faut tenir est plutôt équation* (1)*.*

[2] On les appelles trajectoires