**TD 11 de processus stochastiques et mouvement brownien**

Dans la suite, $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ dans $\mathbb{R}^d$, $\overline{B(x,r)}$ sa fermeture et $\partial B(x,r)$ la borne de $B(x,r)$.

**Exercice 1** — *Fonction Green*

Soit $d \geq 3$, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, on définit (avec $p(x,y,t) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2t})$)

$$G(x,y) = \int_0^\infty p(x,y,t)dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto G(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$.
2. Montrer que
$$F_r(x) := \int_{B(0,r)} G(x,z)dz = \mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{B_t \in B(0,r)} dt\right).$$
3. Soit $d \geq 3$, montrer que $x \mapsto G(x,0)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.
4. Montrer que, pour $d \geq 3$, il existe une constant $c_d \neq 0$,
$$\mathbb{E}_0\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{B_t \in B(0,r)} dt\right) = c_d r^2.$$

**Exercice 2** — *Mesure harmonique*

Rappelons que pour $A \subset \mathbb{R}^d$ fermée et $B \subset A$ borel, $\tau = \inf\{t \geq 0,\ B_t \in A\}$

$$\mu_A(x,B) = \mathbb{P}_x(B_\tau \in B,\ \tau < \infty).$$

Soit $d \geq 2$, $x, y \notin \overline{B(0,r)}$, soit $A \subset B(0,r)$ compact et non-polaire. Montrer que $\mu_A(x,\cdot)$ et $\mu_A(y,\dot{)}$ sont mutuellement absolument continue et de densité de Radon-Nykodim strictement entre 0 et infini p.s.

*On pourra utiliser la formule de Poisson, i.e. pour $A \subset \partial B(0,r)$*

$$\mu_{\partial B(0,r)}(x,A) = \int_A \frac{|r^2 - |x|^2|}{|x-y|^d} d\omega(y)$$

*où $\omega$ est la mesure de probabilité uniforme sur $\partial B(0,r)$.*

**Exercice 3** — *Fonction Green arrêtée*

Soit $T = \inf\{t > 0,\ B_t \in \partial B(0,r)\}$, on considère $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$.

1. Montrer qu'il existe $\widehat{p} : [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ tel que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}_x(B_t \in A,\ t \leq T) = \int_A \widehat{p}(t, x, y)dy, \text{ pour tout borélien } A$$

2. On définit

$$G(x, y) = \int_0^{\infty} \widehat{p}(t, x, y)dt,$$

montrer que

$$G(x, A) := \int_A G(x, y)dy = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^T \mathbb{1}_{B_t \in A} dt \right].$$

3. Montrer que $x \mapsto G(x, y)$ est harmonique sur $B(0, r) \setminus \{y\}$.