ENS de Lyon - M1 **printemps 2016**

TD 4 de processus stochastiques et mouvement brownien

Sauf mention explicite, on utilisera la filtration $\mathcal{F}^+$.

Exercice 1 — *Temps d'arrêt.*

Soit (T_n) une suite de $\mathcal{F}^0$-temps d'arrêt.

1. On suppose que pour tout ω, la suite $(T_n(\omega))$ tend en croissant vers une valeur $T(\omega)$. Montrer que T est un $\mathcal{F}^0$-temps d'arrêt.
2. On suppose que pour tout ω, la suite $(T_n(\omega))$ tend en décroissant vers une valeur $T(\omega)$. Montrer que T est un $\mathcal{F}^+$-temps d'arrêt.

Exercice 2 — *Mesurabilité.*

Soient B un mouvement brownien et T un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}^0$. Démontrer que $(T, B_{\min(t,T)})_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exercice 3 — *Non temps d'arrêt.*

Soit B un mouvement brownien, montrer que $T = \inf\{t \geq 0 : \ B_t = \max_{0\leq s\leq 1} B_s\}$ n'est pas un temps d'arrêt.

Exercice 4 — *Pas de zéro isolé.*

Soit B un mouvement brownien et

$$\textbf{zéro} = \{t \geq 0 : \ B_t = 0\};$$

Montrer que p.s. le zéro du mouvement brownien est fermé et sans point isolé. En déduire que, l'ensemble des zéros du mouvement brownien est non-dénombrable.

Exercice 5 — *Le dernier point du cercle.*

Soit B un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Par projection sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ce processus définit une trajectoire aléatoire sur le cercle. Démontrer que le dernier point à être découvert par ce processus est presque sûrement bien défini et que sa loi est uniforme sur le cercle.

Exercice 6 — *Filtration non continue.*

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω l'ensemble des trajectoires càd de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soit X le processus coordonnés dans Ω et

$$T_A = \inf\{t > 0 : \ X_t \in A\}.$$

1. Montrer que T_A est un $\mathcal{F}_t^+$ temps d'arrêt si et seulement si $\{T_A < t\} \in \mathcal{F}_t^0$ pour tout t.
2. En déduire que T_A est un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}_t^+$.[1]

---

1. En fait T_A n'est pas un temps d'arrêt pour $\mathcal{F}_t^0$.