ENS de Lyon - M1 **2016 Printemps**

TD 6 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Pourquoi il ne faut pas oublier d'hypothèse.*

Soit B un mouvement brownien unidimensionnel standard issu de 0. Trouver deux temps d'arrêt S et T — pour la filtration canoniquement associée à B — tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites :
- $\mathbb{P}[S \leq T < \infty] = 1$,
- $\mathbb{E}[S] < \infty$,
- $\mathbb{E}[B_S^2] > \mathbb{E}[B_T^2]$.

Exercice 2 — *D'autres martingales issues du brownien.*

Soit B un mouvement brownien unidimensionnel standard.

1. Démontrer que $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale.
2. Démontrer que $B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ est une martingale.
3. Deviner les suivantes.

Exercice 3 — *Martingale non fermée*

Donner un exemple de martingale non fermée telle que la limite soit non constant.

Exercice 4 — *Martingale locales*

Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ la marche simple sur $\mathbb{Z}$ partant de 1 arrêtée en 0, définissons X_t par

$$X_t = \begin{cases} Z_k & \text{si } \frac{1}{2^k} \leq t < \frac{1}{2^{k+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(X_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ est une martingale, où $T_n = \inf\{t \geq 0,\ X_t = n\}$. $(X_t)_{t\geq 0}$ est t il une martingale ?