ENS de Lyon - M1 **2016 Printemps**

TD 3 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Invariance par isométrique*

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien d-dimensionel. Soit A une isométrique de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $(AB_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien d-dimensionel.

Exercice 2 — *Non différentiabilité*

1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, montrer que p.s.
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} = \infty.$$
2. Montrer que p.s.
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty.$$
3. On définie, respectivement les dérivée à droite supérieure ou inférieure d'une fonction f en t par
$$D^\star f(t) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad D_\star f(t) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$
Soit $t_0 \geq 0$, montrer que p.s. $D^\star B_{t_0} = \infty$ et $D_\star B_{t_0} = -\infty$, et t_0 est un point d'accumulation par la droite de $\{s : \ B_s = B_t\}$.

4* Montrer que, p.s. pour tout t, soit $D^\star B_t = \infty$ soit $D_\star B_t = -\infty$ soit les deux. En particulier, p.s. les trajectoires du mouvement Brownien sont non-différentiables partout. (Indication : considérer l'événement
$$A_{n,k} = \left\{ \left| \frac{B_{k+j}}{2^n} - \frac{B_{k+j-1}}{2^n} \right| \leq \frac{M(2j+1)}{2^n}, \ j = 1,2,3 \right\})$$

Exercice 3 — *Application de la construction de Lévy*

On se rappel les notations dans la construction de Lévy du TD précédemment.

1. Montrer que F_n est p.p. dérivable et que p.s. il existe $C_1 < \infty$ (donc aléatoire) telle que
$$\|F_n'\|_\infty \leq 2^n \|F_n\|_\infty \leq C_1(\omega) + c\sqrt{2^{n-1}n}.$$
2. Soit $t, t+h \in [0,1]$, montrer que p.s. il existe $l < \infty$ (aléatoire) telle que
$$|B_{t+h} - B_t| \leq C_2(\omega) h\sqrt{l2^l} + C_3(\omega)\sqrt{l2^{-l}}.$$

3. En prenant $l = \lfloor \log_2 \frac{1}{h} \rfloor$, montrer qu'il existe $C < \infty$ telle que, p.s. pour h suffisamment petit, et $t + h \leq 1$, on a

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C(\omega)\sqrt{h \log_2 \frac{1}{h}}.$$

4. En déduire que, la trajectoire du mouvement Brownien est p.s. α-Höldérienne pour $\alpha < \frac{1}{2}$ et que, pour $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\frac{|B_t|}{t^\alpha} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Exercice 4 — *Cas* $\alpha > \frac{1}{2}$

Soit B_t un mouvement Brownien. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que p.s. pour tout $h_0 > 0$, il existe $h < h_0$ et $0 \leq t \leq 1 - h$ tels que

$$|B_{t+h} - B_t| \geq C\sqrt{h \log \frac{1}{h}}.$$

En déduire que le mouvement Brownien n'est pas α-Höldérienne pour $\alpha > \frac{1}{2}$ (On pourra utiliser $\mathbb{P}(|B_1| > c\sqrt{n}) \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2 n}$).

Exercice 5 — *Cas* $\alpha = \frac{1}{2}$

En utilisant $\mathbb{P}(B_1 > c\sqrt{n}) \geq \frac{c\sqrt{n}}{c^2 n + 1} e^{-c^2 n/2}$, montrer que le mouvement Brownien est p.s. nulle part $\frac{1}{2}$-Höldérienne.