Complément Agreg ENS de Lyon 2015 : Calculs des lois

Dans la suite f est mesurable et bornée.

Les exemples de la suite recouvrent quasiment tous les cas possibles que l'on peut se poser sur le calculs des lois élémentaires.

Exemple 1. *Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$, soit $Y = X^2$, quelle est la loi de Y ?*

On écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y)] &= \mathbb{E}[f(X^2)] = \mathbb{E}[g(X)] \quad \text{où } g(x) = f(x^2)\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dX(P)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx\\ &= \int_0^1 f(x^2)dx = \int_0^1 f(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}dy\end{aligned}$$

donc $Y(P)(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Exemple 2. *Soit X, Y indépendentes de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$ chaqu'une, quelle est la loi de (Z_1, Z_2) où $Z_1 = X + Y,\ Z_2 = X$?*

Comme $(X,Y)(P)(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Z_1, Z_2)] &= \mathbb{E}[g(X,Y)] \quad \text{où } g(x,y) = f(x+y, x)\\ &= \int\int g(x,y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy\\ &= \int\int f(x+y,x)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy\end{aligned}$$

Le changement de variable $z_1 = x + y,\ z_2 = x$ a pour Jacobien 1, donc

$$= \int\int_{\mathbb{R}^2} f(z_1, z_2)\lambda^2 e^{-\lambda z_1}\mathbb{1}_{0\le z_2\le z_1}dz_1dz_2$$

donc $(Z_1, Z_2)(P)(z_1, z_2) = \lambda^2 e^{-\lambda z_1}\mathbb{1}_{0\le z_2\le z_1}$.

Exemple 3. *Avec le même couple de (X,Y) comme dans l'exemple précédent, quelle est la loi de $Z = X + Y$?*

Il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Z)] &= \mathbb{E}[f(X+Y)] = \mathbb{E}[g(X,Y)] \quad \text{où } g(x,y) = f(x+y)\\ &= \int\int g(x,y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy\\ &= \int\int f(x+y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $z = x + y,\ t = x$,

$$\begin{aligned}&= \int\int f(z)\lambda^2 e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{0\le t\le z}dzdt\\ &= \int f(z)\lambda^2 e^{-\lambda z}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)\underbrace{\int \mathbb{1}_{0\le t\le z}dt}_{z}\,dz\end{aligned}$$

donc $Z(P)(z) = \lambda^2 e^{-\lambda z} z\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$.

Exemple 4. *Soient X, Y sont indépendentes et chaqu'une de loi $\mathcal{E}xp(\lambda)$, quelle est la loi de (A, B) où $A = \min(X, Y)$ $B = \max(X, Y) - \min(X, Y)$?*

Soit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(A,B)] &= \int\int f(\max(x,y), \max(x,y) - \min(x,y))\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy \\
&= \int\int_{0\le y\le x} f(y, x-y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy \\
&+ \int\int_{0\le x\le y} f(x, y-x)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy \\
&= 2\int\int_{0\le x\le y} f(x, y-x)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)dxdy
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $a = x, b = y - x$,

$$= 2\int\int \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(a)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b) f(a,b)\lambda^2 e^{-\lambda a} e^{-\lambda(a+b)} dadb$$

donc $(A, B)(P)(a, b) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(a)2\lambda e^{-2\lambda a}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(b)\lambda e^{-\lambda b}$, remarque que A, B sont indépendentes de loi $\mathcal{E}xp$ de parameters 2λ et λ.

Exemple 5. *Soit X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, quelle est la loi de couple (X, Y) avec $Y = X^2$?*

Beh,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,Y)] &= \mathbb{E}[f(X, X^2)] = \mathbb{E}[g(X)] \text{ où } g(x)f(x,x^2) \\
&= \int g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int\int f(x,y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx\delta_{x^2}(y)dy.
\end{aligned}$$

donc $(X, Y)(P)(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \delta_{x^2}(y)$.