Devoir Maison 2015: survie dans le Casino

À traiter de préférences individuelles et rendre avec un pdf

Un joueur entre dans un casino avec une somme x, et est décidé soit à tout perdre, soit à gagner une somme $X > x$ à la fin de son jeu. Son problème est alors de choisir la meilleure stratégie possible pour maximiser la probabilité de gagner.

Dans tout le problème, le joueur ne joue que sur rouge ou noir, et lorsqu'il mise m, il gagne la somme m avec une probabilité p et la perd avec une probabilité $q = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

On supposera dans tout le problème que $0 < x < 1$ et que $X = 1$. La fortune dont dispose le joueur à l'instant n est désignée par X_n, et $X_0 = x$. $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu $\sigma(X_0, \dots, X_n)$. La variable T désigne le temps d'arrêt $\inf\{n;\ X_n \in \{0, 1\}\}$. On pose par définition $X_n = X_T$ lorsque $n \geq T$.

La stratégie du Samouraï.

Dans cette partie, le joueur adopte la stratégie suivante : tant que $X_n \leq 1/2$, il mise X_n, c'est à dire toute sa fortune. Lorsque $X_n \geq 1/2$, il mise $1 - X_n$, c'est à dire juste ce dont il a besoin pour atteindre 1 en un coup s'il gagne.

Question 1 Montrer que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + (2p-1)[X_n \mathbb{1}_{X_n \leq 1/2} + (1 - X_n)\mathbb{1}_{X_n > 1/2}].$$

En déduire que, selon le signe de $2p-1$, le processus X^T est une sous-martingale ou une surmartingale bornée.

Question 2 En déduire que le temps d'arrêt T est fini presque sûrement. Montrer que $Q_p(x) = \mathbb{E}(X_T)$ est la probabilité de gagner, et que $Q_p(x) = \lim_n \mathbb{E}(X_{n \wedge T})$.

Question 3 Deux joueurs s'asseyent en même temps à la table, l'un avec une fortune initiale x et l'autre avec une fortune initiale $y > x$, tout les deux avec la stratégie décrite plus haut. Au temps n, le premier a gagné X_n^x et le second X_n^y.

Montrer que pour tout n, $X_n^x \leq X_n^y$, en déduire que $Q_p(x) \leq Q_p(y)$.

Question 4 Un second joueur vient s'installer à la table à l'instant 1, et commence avec une fortune initiale $y = X_1^x$, suivant la même stratégie que le premier. Son gain à l'instant n (qui est l'instant de jeu $n+1$ du premier joueur) est noté Y_n^y.

Montrer que $Y_n^y = X_{n+1}^x$. En déduire que $\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_1) = Q_p(X_1)$. Déduire de ce qui précède que

$$Q_p(x) = \begin{cases} pQ_p(2x) & x \leq 1/2 \\ p + qQ_p(2x-1) & x > 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

En déduire que $Q_p(X_n)$ est une martingale.

Question 5 Calculer $Q_p(1/3)$ ainsi que $Q_p(1/2^n)$, pour $n \geq 1$.

Question 6 Dans cette question, nous voudrions établir quelques propriétés de la fonction Q_p.

1. Montrer que $Q_p(0) = 0$, $Q_p(1) = 1$.
2. Pour $0 < a \leq 1$, on note $\ell(a) = \sup_{|x-y| \leq a} |Q(x) - Q(y)|$. Montrer en utilisant (1) que $\ell(a) \leq \max(p, q)\ell(2a)$, et que $\ell(1) = 1$.
3. En déduire que $\ell(2^{-n}) \leq \max(p, q)^n$, puis que Q_p est continue sur $[0, 1]$.
4. Montrer que, si Q et Q' sont deux fonction bornées sur $[0, 1]$ vérifiant (1), alors
$$\sup_{x \in [0,1]} |Q(x) - Q'(x)| \leq \max(p, q) \sup_{x \in [0,1]} |Q(x) - Q'(x)|.$$
En déduire que Q_p est l'unique solution bornée de (1).
5. Montrer que $Q_{1/2}(x) = x$, $Q_p(x) = 1 - Q_p(1 - x)$.

Question 7 On cherche dans cette partie une autre représentation de la fonction $Q_p(x)$. Considérons une suite de v.a.i. ϵ_i prenant les valeurs 0 ou 1 avec probabilité p et q, et soit $X = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\epsilon_n$. On note μ_p la loi de X.

On note $R(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Montrer que si $x < 1/2$, $X \leq x$ si et seulement si $\epsilon_1 = 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\epsilon_{n+1} \leq 2x$. En déduire que dans ce cas, $R(x) = pR(2x)$.

Montrer que si $x > 1/2$, $X \leq x$ si et seulement si, ou bien $\epsilon_1 = 0$, ou bien $\epsilon_1 = 1$ et $\sum_{1}^{\infty} 2^{-1}\epsilon_{n+1} \leq 2x - 1$. En déduire une identité pour $R(x)$ dans le cas $x > 1/2$.

Que est ce $R(x)$?

Question 8 Montrer que la loi de X est la mesure uniforme pour $p = 1/2$. Montrer que, si U est une v.a. uniforme sur $[0, 1]$, et que l'on note $\epsilon_n(X)$ la n-ième composante de X dans son écriture en base 2, alors p.s. $\lim_n \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \epsilon_p(X) = 1/2$.

Optimalité de la stratégie du Samouraï.

Dans cette partie, on va voir que la stratégie de la première partie est optimale. Dans la suite, $p < 1/2$.

On cherche à démontrer tout d'abord que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $s \in [0, 1]$ tel que $0 \leq x - s \leq x \leq 1$, on a
$$Q_p(x) \geq pQ_p(x + s) + qQ_p(x - s) \tag{2}$$
où on prolonge la fonction Q_p par 1 sur $x \geq 1$.

Question 9 Montrer qu'il suffit pour démontrer (2) de se ramener au cas $x + s \leq 1$, puis au cas où x, s sont de la forme $k/2^n$ (dyadique).

Question 10 Montrer par récurrence sur n que (2) est vraie lorsque x, s sont dyadiques d'ordre n. Puis conclure.

Question 11 Toutes les stratégies offertes au joueur sont de la forme suivante: à l'instant n, s'il possède une fortune X_n, il peut miser pour le tour suivant une variable aléatoire H_n, $\mathcal{F}_n$ mesurable et telle que $0 < H_n \leq X_n$. Il s'arrête au premier instant T où $X_n = 0$ ou bien $X_n \geq 1$. Un tel choix d'une famille de v.a. H_n s'appelle une stratégie.

Pour une fonction f borélienne bornée, donner une expression de $\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)$ ne faisant intervenir que la fonction f, p, q ainsi que les valeurs de X_n et H_n.

Montrer que $X_{n\wedge T}$ est selon le cas une sous martingale ou une surmartingale bornée.

Montrer que $Q_p(X_n)$ est une sur-martingale.

Question 12 Donner un exemple de stratégie où $T = \infty$ p.s.

Question 13 On suppose désormais que le joueur a choisi une stratégie telle que $T < \infty$ p.s., on appelle A l'événement $\{X_T = 1\}$. Montrer que $\mathbb{P}(A) \leq Q_p(x)$.

Question 14 Pensez vous qu'il existe d'autres stratégies optimales?

Bandit à deux bras

Nous disposons un bandit à deux bras A et B, en appuyant sur A, on gagne un jeton avec probabilité p_A et même pour B avec probabilité p_B (p_A, p_B sont fixés). On joue avec la stratégie suivante: mettons des étiquettes sur ces bras, initialement $A_0 = 1 = B_0$, on tire un bras avec probabilité proportionnel aux étiquettes, si le tirage nous a donné un jeton, nous augmentons l'étiquette du bras correspondant de 1 et ainsi suite.

Question 15 Montrer que l'espérance du nombre de jeton gagné au temps n est plus grand que celle qui joue avec une stratégie triviale.

Question 16 Existe il une stratégies optimale[1]?

[1] Disons par exemple tous les deux tirages nous coûtent un jeton.