TD 10 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Le brownien plan est d'aire nulle.*

Le but de cet exercice est de montrer que le mouvement brownien plan est presque sûrement d'aire nulle, on note λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et $X = \lambda(B[0,1])$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) < \infty$.
2. Soit A_1, A_2 deux boréliens d'aire positive, montrer que
$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^2,\ \lambda(A_1 \cap (A_2 + x)) > 0\}) > 0.$$
3. Montrer que $\lambda(B[0,1] \cap B[2,3]) = 0$ p.s.
4. Soit $B_t^1 = B_t,\ 0 \leq t \leq 1$ et $B_t^2 = B_{t+2} - B_2 + B_1,\ 0 \leq t \leq 1$. Montrer que B^1 et B^2 sont indépendant de $B_2 - B_1$ et que si on note $R(x) = \lambda(\{B^1[0,1] \cap (x + B^2[0,1])\})$,
$$\text{p.s. } \lambda(\{x \in \mathbb{R},\ R(x) > 0\}) = 0.$$
5. Conclure.

Exercice 2 — *Continuation harmonique*

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $x \in D$. On suppose que $u : D \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$ harmonique et bornée. Montrer qu'il existe unique continuation harmonique $u : D \to \mathbb{R}$.

Exercice 3 — *Retour aux sources*

Soit $d \geq 2$. Soit B un mouvement brownien de dimension d issu de 0. Montrer que, presque sûrement, B ne touche $x = 0$ qu'à l'instant $t = 0$.

Exercice 4 — *Fonctions harmoniques et martingales*

Soit h une fonction continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs réelles. Montrer que h est harmonique si et seulement si, pour toute boule ouverte $\mathcal{B}$ d'adhérence incluse dans U, pour tout x dans $\mathcal{B}$, le processus $(h(B^{(x)}_{\min(t,T_{\mathcal{B}})}))_{t\geq 0}$ est une martingale.

Ci-dessus, $B^{(x)}$ désigne un mouvement brownien issu de x et $T_{\mathcal{B}}$ l'instant où il *quitte* $\mathcal{B}$.