Théorie de la mesure

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et $B \subset \Omega$, montrer que, la tribu trace de $\mathcal{F}$ sur B

$$\{A \cap B,\ A \in \mathcal{F}\} \text{ est une tribu.}$$

2. Toute intersection dénombrable de tribus (sur un même ensemble) est une tribu. Peut on enlever 'dénombrable' ?

3. La réunion croissante d'une suite de tribus n'est pas forcément une tribu.

Exercice 2

Soit $\Omega = [0,1]$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{F}$. Sur Ω, on définit la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma\{]0, \frac{1}{i}[,\ i \leq n\}$ pour tout $n \geq 1$. Construire des mesures de probabilités $\mathbb{P}_n$ sur $\mathcal{F}_n$ compatible, i.e. $\mathbb{P}_{n+1}(A) = P_n(A),\ \forall A \in \mathcal{F}_n$, telles qu'il n'existe aucune mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ dont les restrictions aux $\mathcal{F}_n$ soient les P_n.

Exercice 3

Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesuré. Pour tout $x \in E$, l'atome engendré par x dans $\mathcal{E}$ est

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E}:\ x \in A\}} A.$$

1. Les atomes forment une partition de E.

2. Supposons que $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable, montrer que $\mathcal{E}$ contient ses atomes et chaque élément de $\mathcal{E}$ est une réunion au plus dénombrable d'atomes.

3. Si $\mathcal{E}$ est infinie, montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé. $A \subset \Omega$ est dit négligeable pour μ s'il existe $B \supset A$ tel que $B \in \mathcal{F}$ et $\mu(B) = 0$. La tribu complétée de $\mathcal{F}$ pour μ est alors la tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{F}$ et les ensembles négligeables. Nous la noterons $\bar{\mathcal{F}}$.

1. Pour $A \subset \Omega$, montrer que $A \in \bar{\mathcal{F}}$ si et seulement si

$$\sup_{B \subset A, B \in \mathcal{F}} \mu(B) = \inf_{B \supset A, B \in \mathcal{F}} \mu(B).$$

2. Montrer qu'il existe une unique extension de μ a $\bar{\mathcal{F}}$, et la décrire.

Variables aléatoires

Exercice 1

$N(\geq 2)$ voyageurs s'apprêtent à monter dans un avion contenant N places numérotées, chacun étant muni d'un billet avec réservation. Le premier passager, distrait ou simplement con, ne regarde pas le numéro de sa réservation et prend une place au hasard. Les passagers suivants, quand ils entrent dans l'avion, s'asseyent alors à leur place réservée si celle-ci est encore libre, et sinon prennent une place au hasard parmi celles qui restent.

1. Calculer par récurrence sur N la probabilité que le dernier voyageur à entrer finisse à la place qu'il avait réservée.

2. Retrouver le résultat par un argument direct.

Exercice 2

On veut estimer le nombre N d'écureuils dans une forêt. Pour cela on en capture k, on leur met une petite marque sur la patte et on les relâche. Une semaine après (on suppose qu'aucune écureuil n'est mort ou né dans l'intervalle) on en capture ℓ et on compte ceux d'entr'eux qui portent la marque.

1. Calculer la probabilité qu'on trouve m écureuils marqués en fonction de N, k, ℓ.

2. Calculer la valeur de N pour la quelle la probabilité d'observer une valeur m donnée est maximale. En déduire une estimation du nombre d'écureuils dans la forêt.

Exercice 3

On présente un algorithme de simulation récursif de la loi de Poisson: on se donne $\lambda > 0, \alpha \in (0,1)$, et on note

- $N = \lfloor \alpha\lambda \rfloor$, on suppose $N \geq 2$;

- $G = Y_1 + \cdots + Y_N$ où Y_i sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1;

- si $G > \lambda$, on pose X une v.a. de loi binomiale de paramètres $N-1$ et $\frac{\lambda}{G}$, indépendante des v.a. précédentes (sauf via son paramètre);

- si $G = \lambda$, on pose $X = N$;

- si $G < \lambda$, on pose $X = N + Z$, où Z est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda - G$, indépendante des variables précédentes.

1. Déterminer l'espérance, la variance, et la densité de G en fonction de N;

2. Déterminer la probabilité des trois évènements $\{G < \lambda\}, \{G = \lambda\}, \{G > \lambda\}$ et trouver la loi de X.

Exercice 4

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et X une v.a.

1. Si X suit une loi exponentielle de paramètre 1, quelle est la loi de $\lambda X + \mu$?

2. Même question pour X de loi normale centrée réduite.

3. Même question pour X suivant la loi de Cauchy qui a pour densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

Exercice 5

Soit X une v.a. positive.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$.
2. Généraliser la formule à $\mathbb{E}(X^k)$ pour $k \geq 1$ et en déduire que X admet un moment d'ordre k si, et seulement si, $\mathbb{P}(X > x)x^{k-1}$ est intégrable en $+\infty$.

Exercice 6

1. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, quelle est la densité de la loi de X^2?
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la densité de la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i^2$?

Exercice 7

Soient $U_1, \dots, U_n$ n v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Montrer que p.s. tous les U_i sont distincts.
2. On a donc p.s. une unique numérotation des U_i en ordre croissant: on notera $U^{(1)} < \cdots < U^{(n)}$ et on notera σ la permutation qui arrange les U_i. Montrer que σ et le vecteur $U^{(\cdot)}$ sont indépendants.
3. Montrer que σ suit la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$.
4. Déterminer la loi de $U^{(\cdot)}$.
5. Trouver la loi des $U^{(i)}$ et calculer l'espérance et la variance.

Exercice 8

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $m_n = \min_i X_i$ et $M_n = \max_i X_i$.

1. Montrer que m_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.
2. Montrer que la fonction de répartition de $\lambda M_n - \ln n$ converge vers une fonction qui est la fonction de répartition d'une v.a. que l'on notera G.
3. Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, quelle est la loi de $\lambda G + \mu$?
4. Calculer son espérance et sa variance.

xiaolin.zeng@ens-lyon.fr

Fonctions caractéristique

Exercice 1

1. Montrer que la fonction caractéristique d'une v.a. bornée est analytique.
2. Soient X, Y deux v.a. réelles bornées. Montrer que pour que X et Y soient indépendantes, il faut et il suffit que $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X^k Y^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^l)$.

Exercice 2

Soit Z une v.a. réelle, on appelle transformée de Laplace de Z la fonction à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par:

$$L_Z(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda Z}).$$

1. Calculer les transformes de Laplace des v.a. suivantes:
   - Bernoulli, binomiale.
   - Poisson
   - Uniforme
   - Exponentielle
   - Gaussienne
2. Quels liens peut-on exhiber entre la transformée de Laplace de Z et les moments de Z?
3. Quels liens peut-on exhiber entre la transformée de Laplace de Z et la fonction caractéristique de Z?

Exercice 3

Si Z est une variable aléatoire réelle, on appelle log transformée de Laplace de Z la fonction à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par:

$$\Psi_Z(\lambda) = \ln \mathbb{E}(\exp(\lambda Z)).$$

1. Pour Z une v.a. à valeurs dans un invervalle borné I, dériver deux fois Ψ_Z et identifier, pour tout λ, cette dérivée seconde à la variance d'une v.a. Z_λ dont on écrira la loi.
2. Si Z est une v.a. à valeur dans un intervalle borné I, montrer que la variance de Z est majorée par $|I|^2/4$.
3. Si Z est une v.a. centrée à valeur dans un intervalle borné I. Déduire des questions 1,2 que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$,
$$\Psi_Z(\lambda) \leq \frac{|I|^2 \lambda^2}{8}.$$
4. Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des v.a. indépendantes, telles que Z_i est à valeurs dans $[a_i, b_i]$; posons $Z = \sum Z_i$ et $\tilde{Z} = Z - \mathbb{E}(Z)$. Montrer que
$$\Psi_{\tilde{Z}} \leq \frac{\lambda^2}{8} \sum (b_i - a_i)^2.$$

5. Avec les notations de la question 4, on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\tilde{Z}| \geq \epsilon) \leq 2\exp(-\frac{2\epsilon^2}{\sum(b_i - a_i)^2}).$$

Conditionnement

Exercice 0 [Cours]

1. Soient $X_n \geq 0$, montrer que
$$\liminf_n \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(\liminf_n X_n|\mathcal{G}).$$

2. Soient X_n v.a. dans L^1 et $X_n \to X$ p.s. avec $|X_n| \leq Z$ dans L^1. Montrer que
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \lim \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ p.s. et dans } L^1.$$

3. Démontrer l'inégalité de Jensen conditionnelle.

4. Montrer que $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont indépendantes s.s.i. pour tout X $\mathcal{G}_2$ mesurable, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice 1

1. Soient Z et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, à valeurs réelles, telles que Z soit Y-mesurable, montrer qu'il existe une fonction borélienne g de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que $Z = g(Y)$.

2. Si l'on a un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité $f_{X,Y}$ donnée, que peut-on dire sur la loi de X sachant Y?

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, on note S_n la somme partielle. Déterminer $\mathbb{E}(X_1|S_n)$.

2. On se donne une v.a. X et une sous tribu $\mathcal{G}$, exprimer la variance de X en fonction de la variance conditionnelle sachant $\mathcal{G}$ et de l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{G}$.

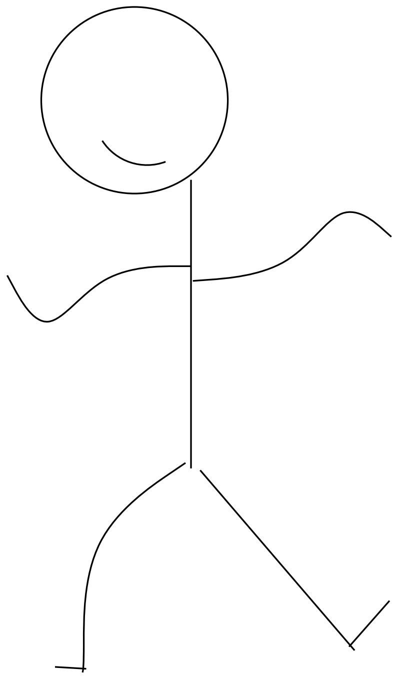
3. On se donne $X_1, \dots, X_n$ des variables de Poisson indépendantes de paramètre λ, donner la loi du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$ sachant $X_1 + \cdots + X_n$. On commencera par donner la loi de la somme.

4. On se donne $X_1, \cdots, X_n$ des variables de loi uniforme sur $(0, 1)$, indépendantes, déterminer la loi du minimum de ces variables sachant le maximum de ces variables.

Exercice 3

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes de même densité f continue et d'espérance finie. Déterminer la loi de X_k sachant le maximum de ces variables: $X_{(n)}$.

Tralala, c'est le moment pour s'amuser.



Exercice 4 *(Ah, mais je ne joue pas à la coinche.)*
Quatre personnes jouent au Bridge.

1. Bob annonce: j'ai un as, quelle est la probabilité qu'il en a au moins deux?
2. Bob annonce: j'ai un as pique, quelle est la probabilité qu'il en a au moins deux?

Exercice 5 *(Comment gâcher une soirée.)*
Je sais que ma voisine a deux enfants.

1. Supposons que je sache que l'aînée est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également une fille?
2. Supposons que je sache que ma voisine a au moins une fille. Quelle est la probabilité que ma voisine ait en fait deux filles?
3. Supposons que je sache que parmi les enfants de ma voisine, il y a une fille qui est née mardi. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également une fille? Que dire si elle a une fille qui s'appelle Marie?

Exercice 6 *(Il est bien d'abuser de ses connaissances en probabilité.)*
Soit n un entier naturel. Deux personnes, A et B, décident de jouer le jeu suivant: A choisit d'abord une suite de pile ou face de longueur n, puis B choisit une autre suite de pile ou face de longueur n. Lancer une pièce de monnaie parfaite et noter les résultat jusqu'à l'un des deux suites paraît, et la personne correspondant gagne.

Question: Dans le cas $n = 3$, montrer que si A annonce xyz, il suffit que B annonce $\bar{y}xy$ pour avoir au moins deux fois plus de chance de gagner.

Convergence des variables aléatoires

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, Σ, P).

Exercice 1

Soient U_n, V_n, $n \geq 1$ deux suites de variables aléatoires telles que:(i) $P\{V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0\} = 1$.
(ii) la suite U_n, $n \geq 1$, converge en loi, lorsque $n \to +\infty$ vers une probabilité μ sur $\mathbb{R}$;
Etablir que $U_n + V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mu \quad \text{en} \quad \text{loi}.$

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}$ des suites de v.a. de loi :

$$X_n = n 1_{\{U \leq 1/n\}}, \qquad Y_n = n 1_{\{U \leq 1/n^2\}},$$

où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner les lois de X_n et Y_n.
2. Montrer que X_n converge en loi, en probabilité mais pas dans L^2 vers 0. Converge t-elle p.s. vers 0 ?
3. Montrer que Y_n converge p.s. vers 0 mais pas dans L^2 vers 0.

Exercice 3

On fixe une suite $a(N) > 0$, $N \geq 1$ de nombres vérifiant $\lim_{N \to +\infty} a(N) = +\infty$ puis on considère une suite $X_N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ de v.a. de Poisson de moyennes $E(X_N) = a(N)$, $N \geq 1$. On pose $Y_N = \frac{X_N - a(N)}{\sqrt{a(N)}} \quad N \geq 1$.
1.- Calculer $E(Y_N)$ et $E((Y_N)^2)$, $N \geq 1$.
2.- Calculer la fonction caractéristique $\phi_N(u) = E(exp(iuY_N)), \quad u \in \mathbb{R}, \quad N \geq 1$. puis la limite $\lim_{N \to +\infty} \phi_N(u)$. pour $u \in \mathbb{R}$ fixé.
4.- On fixe $x \in \mathbb{R}$. Etablir, avec la question 3, la relation limite

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n \leq a(N) + x\sqrt{a(N)}} \frac{a(N)^n e^{-a(N)}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

5.- On note $K(x, y, N) = \sum_{n \leq xN} \frac{(yN)^n e^{-yN}}{n!} \quad N \geq 1, \quad x, y > 0.$
Etablir que: $\lim_{N \to +\infty} K(x, y, N) = \frac{1}{2} 1_{\{0\}}(x - y) + 1_{]0,\infty[}(x - y).$

6.- Soit μ une mesure borélienne positive et bornée sur $\mathbb{R}^+$. On considère sa transformée de Laplace $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tu} d\mu(u), \quad t \geq 0.$
(i) Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(ii) On fixe $x > 0$. Etablir l'identité

$$\sum_{n \leq xN} \frac{(-1)^n N^n g^{(n)}(N)}{n!} = \int_0^{+\infty} K(x, u, N) d\mu(u).$$

(iii) En déduire la formule d'inversion

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n\leq xN}\frac{(-1)^n N^n g^{(n)}(N)}{n!} = \mu([0,x[) + (1/2)\mu\{x\}.$$

7.- Soient μ_1 et μ_2 deux mesures borléiennes, positives et bornées. On désigne par g_1 et g_2 les transformées de Laplace associées. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 \Longleftrightarrow g_1 \equiv g_2$.

Exercice 4

Soit $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une suite de v.a.i.id. de loi normale $\mathfrak{N}(0,1)$. On notera $U_n = \sum_{i=1}^n X_n^2$
On considère, par ailleurs, une suite de v.a.i.id. $V_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $n = 1,\ldots,N$ de loi exponentielle de moyenne $E(V_1) = 2$ et on note $S_n = V_1 + \cdots + V_n$, $n \geq 1$.
1.- Calculer les transformées de Laplace $E(exp(-aV_1))$ et $E(exp(-aU_2))$, $\ a \geq 0$.
2.-En déduire l'expression de la densité de la loi de la variable aléatoire U_2.
3.- Soit $k \geq 1$. Calculer les transformées de Laplace $E(exp(-aS_k))$ et $E(exp(-aU_{2k}))$, $\ a \geq 0$.
4.- Montrer que $U_{2k} \overset{(loi)}{=} S_k$.

Vecteurs Gaussiens

Exercice 1

1. Soit X une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ et soit Z indépendante de X telle que $\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}(Z=-1)=1/2$. Soit $Y=ZX$. Montrer que Y est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, que X et Y sont décorrélées, mais que (X,Y) n'est pas gaussien,

2. Montrer qu'il existe X_1, X_2 des v.a. complexes non corrélées (ce qui signifiera ici que leur covariance complexe est nulle) telles que la v.a. (X_1, X_2) (vu cette fois ci comme un quadruplet réel) soit gaussienne mais que X_1 et X_2 ne soient pas indépendantes.

3. Montrer qu'il existe trois variables aléatoires gaussiennes X_1, X_2, X_3 deux à deux indépendantes telles que (X_1, X_2, X_3) ne suive pas une loi gaussienne.

Exercice 2

Dans cet exercice, les lois gaussiennes sont toutes implicitement supposées centrées.

1. Pour $n \geq 0$, soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que le vecteur aléatoire $X=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un vecteur gaussien et calculer sa matrice de covariance.

2. Soit M une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que MX est un vecteur gaussien et calculer sa covariance.

3. Montrer que MX a une densité sur $\mathbb{R}^n$ et calculer cette densité.

4. Déduire des questions 2 et 3 que, si C est une matrice symétrique $n \times n$ positive et définie, alors le vecteur gaussien Y de $\mathbb{R}^n$ de covariance C a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et la calculer.

5. Si C n'est pas définie, soir r son rang; montrer que le support de Y (càd. le plus petit fermé contenant Y p.s.) est un sous-espace strict de $\mathbb{R}^n$ de dimension r, et déterminer ce sous-espace.

Exercice 3

Soit $X=(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance identité. Soient a, b deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Donner une CNS pour que (a, X) soit indépendant de (b, X).

Exercice 4

Soit X_1, X_2, X_3 trois v.a.i. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $V = \begin{pmatrix} X_1+X_2+X_3 \\ X_1-X_2 \\ X_2-X_3 \\ X_3-X_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la loi de V.

2. En déduire que les v.a. $X_1+X_2+X_3$ et $(X_1-X_2)^2+(X_2-X_3)^2+(X_3-X_1)^2$ sont indépendantes.