TD 9 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Principe de Donsker*

Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien réel standard, et $D := \sup\{t \in [0,1], B_t = 0\}$ le dernier instant de passage en 0. Montrer que le processus réfléchi à l'instant D, défini par

$$A_t := B_t \mathbb{1}_{t<D} - B_t \mathbb{1}_{t\geq D}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

est un mouvement brownien. Montrer qu'il en est de même du processus réfléchi à l'instant $E := \inf\{t \in [0,1], B_t = B_1\}$.

Exercice 2 — *Temps passé dans la demi-droite*

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ partant de 0 et $(X_n)_{n\geq 1} = (S_n - S_{n-1})_{n\geq 1}$ la suite des sauts de la marche (i.i.d et de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$).

1. Soit $A = (t_1, x_1),\ B = (t_2, x_2)$ avec $x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0, t_2 > t_1$, soit $A' = (t_1, -x_1)$ la réflection de A par rapport à l'axis t, on note $N(A,B)$ (resp. $N^0(A,B)$) le nombre de trajectoires admissibles de la marche simple de A à B (resp. qui touche l'axis t), montrer que
$$N^0(A,B) = N(A',B).$$
2. Montrer que $N_{n,x} := N((0,0),(n,x)) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$ (bien implicite que dans le cas cela a un sens), en déduire que $N^+_{n,x} = \frac{x}{n} N_{n,x}$, où $N^+_{n,x}$ le nombre de trajectoires de la marche simple de $(0,0)$ à (n,x) qui reste strictement positive pour $t > 0$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$, en déduire que
$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$
4. Montrer que
$$p_{2k,2n} := \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1}, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0)$$
en déduire avec la formule de Stirling que, pour $0 < x < 1$, $\sum_{k<xn} p_{2k,2n} \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$.
5. Soit $U_{2n} = \#\{k;\ 1 \leq k \leq 2n, S_k \geq 0 \cap S_{k-1} \geq 0\}$, i.e. le nombre de trait au dessus de l'axis t. Montrer que
$$\mathbb{P}(U_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1}, \ldots, S_{2n} \neq 0).$$

6. Montrer que

$$\mathbb{P}(\inf\{k,\ S_{2k} = S_{2n}\} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0, S_{2k+1}, \ldots, S_{2n} \neq 0)$$

7. Montrer que

$$\mathbb{P}(\inf\{k,\ S_k = \max_{0\leq i\leq 2n} S_i\} = l) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathbb{P}(U_{2n} = 2k) & 0 < l < 2n,\ l \in \{2k, 2k+1\} \\ \mathbb{P}(S_{2n} = 0) & l = 0 \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) & l = 2n \end{cases}$$

8. Montrer que le dernier visite en 0 et le temps où le mouvement brownien entre $[0,1]$ atteint son maximum suit la loi arcsinus. En déduire que $J := \mathrm{Leb}\{t \in [0,1],\ B_t > 0\}$ suit la loi arcsinus.

Exercice 3 — *Solution du problème de Dirichlet non continue*

Soit $D = B(o,1) \setminus \{o\}$, où o est l'origine du plan et $B(o,1)$ la boule de centre o et de rayon 1. Soit g la fonction qui vaut 1 sur le cercle $\partial B(o,1)$ et vaut 0 en o, montrer que la solution de ce problème de Dirichlet n'est pas continue sur $\bar{D}$.

On pourra utiliser le fait que le mouvement brownien 2-dimensionnel ne touche pas de point, i.e. pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}_x(y \in B_{(0,1]}) = 0$.