TD 5 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 — *Processus de Poisson*

Soient $W_1, W_2, \ldots,$ des variables i.i.d. de loi exponentiel de paramètre λ, définissons $T_0 = 0,\ T_1 = W_1$ et $T_n = T_{n-1} + W_n$, pour tout $t \geq 0$ soit

$$N_t = \max\{n,\ T_n \leq t\}.$$

1. Décrire l'espace des trajectoires de $(N_t)_{t\geq 0}$.
2. Montrer que N_t est Markov et stationnaire.
3. Calculer la densité de T_n, puis la densité de N_t.
4. Montrer que N_t est à incréments indépendants.
5. Calculer le noyau de transition de N_t.

Exercice 2 — *Premier temps de passage*

Soit $B_t, t \geq 0$ un mouvement brownien standard, posons, pour $a \geq 0$

$$T_a = \inf\{t,\ B_t = a\}.$$

1. Montrer que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est Markov.
2. Montrer que $T_a = \frac{a^2}{B_1^2}$ en loi, en déduire le noyau de transition de $(T_a)_{a\geq 0}$.

Exercice 3 — *Markov mais pas fortement Markov*

Soit B un mouvement brownien unidimensionnel, calculer le noyau de transition de

$$X_t = \begin{cases} B_t & \text{si } B_0 \neq 0 \\ 0 & \text{si } B_0 = 0. \end{cases}$$

Montrer que X_t est Markov mais il ne vérifie pas la propriété de Markov forte.

Exercice 4 — *Processus de Cauchy*

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ un mouvement brownien en dimension deux, on note

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0,\ B_t^{(1)} = a\}.$$

1. Pour $t \geq 0$, calculer $\mathbb{P}(\tau_a < t)$, en déduire la densité de τ_a.
2. Soit $X_a = B_{\tau_a}^{(2)}$, calculer la loi de X_a.

3. Montrer que X_a est un processus de Markov et que son noyau de transition est

$$p(a, x, dy) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x-y)^2)} dy.$$

Exercice 5 — *Processus d'Ornstein-Uhlenbeck*

Soit (B_t) un mouvement brownien standard, montrer que

$$X_t = e^{-t} B_{e^{2t}}$$

est un processus stationnaire et Markov, calculer son noyau de transition, montrer que $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(X_{-t})_{t \geq 0}$ ont la même loi.

Exercice 6 — *Théorème M-B de Levy*

Soit B un mouvement brownien, soit $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$, soit $x \geq 0$,

1. Montrer que, $x \vee M_t - B_t$ a la même loi que $|x + B_t|$.
2. Montrer que $X = (M_t - B_t)_{t \geq 0}$ est Markov.
3. Montrer que X est un mouvement brownien réfléchi.