1 Clarification du TD1

Remarks 1 (Exo 1-3)**.** *On suppose que I non dénombrable, considérons l'ensemble*

$$A = \{f \in \mathbb{R}^I : \exists x \in I,\ f(x) \in (-1,1)\}.$$

A est ouvert entant que l'union (indénombrable) sur tout $y \in I$ des cylindres $(-1,1) \times \prod_{x \in I \setminus \{y\}} \mathbb{R}$, en particulier $A \in \sigma(\mathcal{O}^I)$. Supposons par absurde que $A \in \mathcal{B}^I$, alors pour certain J dénombrable, $A \in \mathcal{B}^J$ d'après question 2. Mais les éléments de $\mathcal{B}^J$ sont obligatoirement de la forme

$$\prod_{x \in J} B_x \times \prod_{y \in I \setminus J} \mathbb{R}$$

où B_x sont des boréliens de $\mathbb{R}$. (Pour s'en convaincre, commencer par regarder $\mathcal{B}^{\{x\}}$ par exemple.) Impossible car

$$A = \bigcup_{y \in I} \left((-1,1) \times \prod_{x \in I \setminus \{y\}} \mathbb{R} \right).$$

Remarks 2 (Exo 1-4)**.** *Nous calculons le cardinal de $C(\mathbb{R})$, l'application*

$$T : f \in C(\mathbb{R}) \mapsto (f(q))_{q \in \mathbb{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$

est injective par continuité. Donc on a (on note $\mathscr{N}_0 = \operatorname{card} \mathbb{N}$)

$$\operatorname{card}(C(\mathbb{R})) \le \operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}) = (2^{\mathscr{N}_0})^{\mathscr{N}_0} = 2^{\mathscr{N}_0 \times \mathscr{N}_0} = 2^{\mathscr{N}_0}.$$

D'autre part si on suppose que $C(\mathbb{R})$ soit mesurable, alors il existe un $J \in \mathbb{R}$ dénombrable et un borélien non vide $A \subset \mathbb{R}^J$ tel que $C(R) = A \times \mathbb{R}^{\mathbb{R} \setminus J}$. Contradiction car

$$\operatorname{card}(A \times \mathbb{R}^{\mathbb{R} \setminus J}) \ge \operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R} \setminus J}) = 2^{2^{\mathscr{N}_0}} > 2^{\mathscr{N}_0}.$$

En fait on a la dichotomie suivante: un ensemble $\mathcal{B}^{\mathbb{R}}$-mesurable A est soit de cardinal 0, soit de cardinal $2^{2^{\mathscr{N}_0}}$.

Voici un argument qui n'utilise pas des cardinaux: Soit $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{R}}$, montrons que $A \neq C(\mathbb{R})$. Si $A = \emptyset$ ou A contient au moins une fonction non continue, on est content. Sinon, comme il existe J au plus dénombrable tel que $A = B \times \mathbb{R}^{\mathbb{R} \setminus J}$, soit $f \in A$ continue, prend $y \in \mathbb{R} \setminus J$, la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 1 & x = y \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue mais on a $g \in A$.

Remarks 3 (Exo 5)**.** *Vérifier que $B : t \mapsto B^{(\lfloor t \rfloor)}_{t - \lfloor t \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} B^{(i)}_1$ est un mouvement brownien, c'est vérifier que B est à trajectoires continues et que B a les bonnes marginales de dimension finie.*

Pour tout ω et tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue sur $]n, n+1[$: en effet, $B^{(n)}$ est un processus à trajectoires continues. Par ailleurs, B est continu en chaque entier naturel n car $B^{(n-1)}$ (s'il existe) est continu, $B^{(n)}$ est continu et $B^{(n)}(0) = 0$.

Soit $(t_1, \ldots, t_k)$ un uplet de réels strictement positifs tel que $t_1 < \cdots < t_k$. Il s'agit de montrer que B a la bonne loi en restriction aux instants $\{t_1, \ldots, t_k\}$. Il suffit de le montrer pour un ensemble d'instants $T' = \{t'_1, \ldots, t'_K\}$ contenant $\{t_1, \ldots, t_k\}$. On choisit pour T' l'union de $\{t_1, \ldots, t_k\}$ et *des entiers naturels non-nuls inférieurs à t_k. Les t'_i ($i \geq 1$) sont les éléments de T' énumérés dans l'ordre croissant. On pose $A_i := B_{t'_i} - B_{t'_{i-1}}$, avec la convention $t'_0 := 0$. Il s'agit de montrer que les A_i sont indépendantes, gaussiennes, centrées, et de variance respective $t'_i - t'_{i-1}$.*

Par construction de T' et de B, l'accroissement A_i est l'accroissement de $B^{(\lfloor t'_{i-1} \rfloor)}$ entre $t'_i - \lfloor t'_{i-1} \rfloor$ et $t'_{i-1} - \lfloor t'_{i-1} \rfloor$. L'accroissement A_i est donc bien gaussien, centré et de bonne variance.

Reste à établir l'indépendance de ces accroissements. On va pour cela utiliser le lemme suivant : si $(X_1^{(1)}, \ldots, X_{k_1}^{(1)})$, ..., $(X_N^{(N)}, \ldots, X_{k_N}^{(N)})$ sont des vecteurs indépendants et si pour tout n, les variables $X_1^{(n)}$,..., $X_{k_n}^{(n)}$ sont indépendantes, alors les variables aléatoires $X_j^{(n)}$ sont indépendantes. On regroupe les accroissements selon la valeur de la partie entière de $\lfloor t'_i \rfloor$. Plus précisément, on définit $(t_1^{(n)}, \ldots, t_{k_m}^{(n)})$ comme l'énumération croissante de l'ensemble des éléments de la famille T' de partie entière égale à n. On pose $X_j^{(n)} := A_i$, où i est défini par $t_j^{(n)} = t_i$. Les vecteurs $(X_1^{(n)}, \ldots, X_{k_n}^{(n)})$ sont indépendants, par indépendance des $B^{(n)}$. D'autre part, à n fixé, les $X_j^{(m)}$ sont indépendants, car $B^{(n)}$ est un mouvement brownien. En vertu du lemme énoncé ci-dessus, les $X_j^{(n)}$ sont bien indépendantes.

2 TD3

Remarks 4 (Exo 5). *Soit $j > 0$, et H l'ensemble des trajectoires du mouvement Brownien $\frac{1}{2}$ Holderienne avec constante d'Holder j, i.e.*

$$H = \{\omega \in \Omega : \ \forall t > 0, h > 0, \ |B_{t+h} - B_t| < j\sqrt{h}\}.$$

Montrons que $\mathbb{P}(H) = 0, \ \forall j$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $j^2 < m$, soit $1 < c < \sqrt{2 \ln 2}$, on note

$$A_{k,n} = \{\omega \in \Omega, \ |B_{\frac{k+1}{2^n}} - B_{\frac{k}{2^n}}| > \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{2}^n}\}$$

de façon que

$$H \subset \bigcap_{n \geq m} \bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c.$$

Il suffit que $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq m} \bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c) = 0$, pour cela, on utilise l'indication, on a

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) \geq \frac{c\sqrt{n}}{c^n + 1} e^{-c^2 n/2}$$

donc $\lim_{n \to \infty} 2^n \mathbb{P}(A_{k,n}) = \infty$, il résulte que

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{2^n} A_{k,n}^c) = (1 - \mathbb{P}(A_{k,n}))^{2^n} \leq e^{-2^n \mathbb{P}(A_{k,n})} \to 0.$$

3 TD4

Remarks 5 (Ex-2). *On se rappelle que $(T, B_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable veut dire que l'application*

$$(T, B_{t \wedge T})_{t \geq 0} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

soit mesurable pour la tribu $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, par la continuité de la trajectoire du mouvement brownien, il suffit de démontrer que, pour tout $t \geq 0$ fixé, $(T, B_{t \wedge T})$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

Par la définition de $\mathcal{F}_T$, montrons que pour tout $a \geq 0,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et que pour tout $s \geq 0$,

$$\{T \leq a,\ B_{t\wedge T} \in A\} \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s.$$

Il est claire que $\{T \leq a,\ T \leq s\} \in \mathcal{F}_{a\wedge s} \subset \mathcal{F}_s$, pour $B_{t\wedge T}$, encore par la continuité de la trajectoire, on écrit

$$B_{t\wedge T} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{T<\frac{k+1}{2^n}} \mathbb{1}_{T\geq \frac{k}{2^n}} B_{\frac{k}{2^n}}$$

Suffit de remarquer que

$$\{B_{\frac{k}{2^n}} \mathbb{1}_{\frac{k}{2^n}\leq T} \in A\} \cap \{T \leq s\} = \begin{cases} \emptyset & s < \frac{k}{2^n} \\ \{B_{\frac{k}{2^n}} \in A\} \cap \{\frac{k}{2^n} \leq T \leq s\} \in \mathcal{F}_s & s \geq \frac{k}{2^n}. \end{cases}$$

4 TD5

Remarks 6 (Ex-1.4). *On cherche à démontrer que pour tout $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, les variables aléatoires $N_{t_2} - N_{t_1}$ et $N_{t_4} - N_{t_3}$ sont indépendantes. Cette propriété peut être compris de façon intuitive, comme les temps de séjour (i.e. écarte entre les sauts) sont tous exponentielles de même paramètre, le nombre de sauts dans l'intervalle (t_3, t_4) est indépendant de nombre de sauts avant t_3, en particulier indépendant du nombre de sauts dans (t_1, t_2).*

Pour une preuve plus convaincante, d'après le même calcul que dans Ex-1.3, on sait que la densité jointe de $(T_1, \ldots, T_{m+1})$ est

$$\lambda^{m+1} e^{-\lambda t_{m+1}} \mathbb{1}_{0\leq t_1<\cdots<t_{m+1}}.$$

Pour $t_1, \ldots, t_m, t$ fixé, soit $A_m = \{0 < T_1 < t_1 < T_2 < t_2 \cdots t_{m-1} < T_m < t_m < t < T_{m+1}\}$, alors par intégration,

$$\mathbb{P}(A_m) = \lambda^m t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_m - t_{m-1})e^{-\lambda t}.$$

Il vient que $\mathbb{P}(A_m|N_t = m) = \frac{\mathbb{P}(A_m)}{\mathbb{P}(N_t=m)} = t_1(t_2-t_1)\cdots(t_m-t_{m-1})\frac{m!}{t^m}$, donc par dérivation, la densité jointe de $T_1, \ldots, T_m$ conditionné à $N_t = m$ est

$$\frac{m!}{t^m} \mathbb{1}_{0\leq t_1<t_2<\cdots<t_m<t}$$

qui n'est rien d'autre que la densité de statistiques d'ordre de m variables uniforme sur $[0, t]$.

Maintenant on fixe $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, soit $a, b > 0$, en écrivant $U = N_{t_2} - N_{t_1},\ V = N_{t_4} - N_{t_3}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-aU-bV}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{-aU-bV}|N_{t_4})) \\ &= \sum_{M\geq 0} \mathbb{P}(N_{t_4} = M)\mathbb{E}(e^{-aU-bV}|N_{t_4} = M) \end{aligned}$$

Sachant $N_{t_4} = M$, les temps de sauts $T_1, \ldots, T_M$ sont des statistiques d'ordre de M v.a. uniforme sur $[0, t_4]$, donc on a

$$\mathbb{P}(U = k, V = l|N_{t_4} = M) = \binom{M}{k, l, M-k-l} (\frac{t_2 - t_1}{t_4})^k (\frac{t_4 - t_3}{t_4})^l (\frac{t_1 + t_3 - t_2}{t_4})^{M-k-l},$$

donc par formule de multinome de Newton,

$$\mathbb{E}(e^{-aU-bV}|N_{t_4} = M) = (\frac{t_2 - t_1}{t_4}e^{-a} + \frac{t_4 - t_3}{t_4}e^{-b} + \frac{t_1 + t_3 - t_2}{t_4})^M$$

par stationnarité, on sait que U est Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$ et 'idem' pour V, ainsi

$$\mathbb{E}(e^{-aU-bV}) = e^{\lambda[(e^{-a}-1)(t_2-t_1)+(e^{-b}-1)(t_4-t_3)]} = \mathbb{E}(e^{-aU})\mathbb{E}(e^{-bV}).$$

Remarks 7 (Ex-4). *On sait que $\tau_a < \infty$ p.s.*[1]*, la propriété de Markov fort de $B^{(1)}$ appliqué au τ_a donne*

$$(B_t^{(\tau_a)})_{t\geq 0} := (B^{(1)}_{\tau_a+t} - B^{(1)}_{\tau_a})_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a}$, de plus on sait que

$$\{B_t^{(\tau_a)}, t \geq 0\} \text{ et } \{-B_t^{(\tau_a)}, t \geq 0\}$$

sont des mouvements browniens et indépendants de $\{B_t^{(1)}, t \in [0, \tau_a]\}$, ainsi la concaténation de ce dernier avec l'un ou l'autre ont la même loi, la première est juste notre brownien de départ $B^{(1)}$, la second est appelé brownien réfléchi en τ_a, on le note

$$B_t^\star := B_t^{(1)} \mathbb{1}_{t\leq\tau_a} + (2a - B_t^{(1)})\mathbb{1}_{t>\tau_a}.$$

Une fois on a fixé ces notations classiques, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau_a < t) &= \mathbb{P}(B_t^{(1)} > a) + \mathbb{P}(\tau_a < t, B_t^{(1)} \leq a)\\ &= \mathbb{P}(B_t^{(1)} > a) + \mathbb{P}(B_t^\star \geq a) = 2\mathbb{P}(B_t^{(1)} > a).\end{aligned}$$

où on a utilisé égalité des événements suivante:

$$\{\tau_a < t,\ B_t^{(1)} \leq a\} = \{B_t^\star \geq a\}.$$

Un 'petit' calcul nous donne

$$\mathbb{P}(\tau_a < t) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{a^2}{2s})\mathbb{1}_{s>0} ds.$$

Calculons maintenant la loi de $X_a = B^{(2)}_{\tau_a}$, remarquons d'abord que $(B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ et τ_a sont indépendant. La machinerie décrire ci dessous est utilisé de façon systématique dans la manipulation des lois conditionnelles.

Definition 1. *Une application $\nu : E \times \mathcal{F}_F \to [0,1]$ est appelé noyau de transition si*

1. *$\forall x \in E$, $\nu(x, \cdot)$ est une probabilité sur F,*
2. *$\forall A \in \mathcal{F}_F$, $\nu(\cdot, A)$ est $\mathcal{F}_E$-mesurable.*

Soit μ une probabilité sur E et ν un noyau de transition sur $E \times \mathcal{F}_F$, l'application

$$\mu.\nu : A \times B \mapsto \int_A \nu(x, B)\mu(dx)$$

peut être prolongé en une unique probabilité sur $E \times F$ muni de sa tribu produit, on note encore $\mu.\nu$.

Definition 2. *Soit X, Y des v.a. à valeurs dans E, F, on appelle la loi conditionnelle de Y sachant X, le noyau de transition ν sur $E \times F$ telle que $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X.\nu$, où $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi conjointe de X et Y, $\mathbb{P}_X$ la loi marginal de X.*

[1] voir le cours

Dans la pratique on note souvent $\nu(x, A) = \mathbb{P}_{Y|X=x}(A)$, ainsi la loi conditionnelle de Y sachant X est une famille (indexé par E) de probabilité sur F. Écrierons le théorème de Fubini dans ce cadre et voyons ces conséquences:

Theorem 1. *Soit $f : E \times F \to \mathbb{R}$ mesurable.*

1. *Si f est positive, l'application $x \mapsto \int f(x,y)\mathbb{P}_{Y|X=x}(dy)$ est $\mathcal{F}_E$ mesurable et*

$$\int_{E\times F} f d\mathbb{P}_{(X,Y)} = \int_E \left[\int_F f(x,y)\mathbb{P}_{Y|X=x}(dy)\right] \mathbb{P}_X(dx). \tag{1}$$

2. *Si f est $P_{(X,Y)}$ intégrable, alors $f(x,\cdot)$ est $\mathbb{P}_{Y|X=x}$-intégrable pour $\mathbb{P}_X$ p.t. x, et (1) reste vraie.*

Corollary 1. *Soit X un processus et Y une variable aléatoire indépendant de X, on note μ la loi de X et ν la loi de Y, soit $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, où D est l'ensemble des trajectoires de X. Soit φ une fonction teste, on a*

$$\mathbb{E}(\varphi(f(X,Y))) = \int \mathbb{E}_\mu(\varphi(f(X,y)))\nu(dy).$$

Preuve du corollaire. Vu l'indépendance, la loi conditionnelle de X sachant Y est juste la loi de X,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(f(X,Y))) &= \int\int \varphi(f(x,y))\mu(dx)\nu(dy) \\ &= \int \mathbb{E}_\mu(\varphi(f(X,y)))\nu(dy).\end{aligned}$$

□

Je vous laisse à (re)voir l'extension naturelle du théorème de transfert conditionnelle et la fameuse formule de densité conditionnelle dans le cas elle aurait lieu.

Appliquons cette corollaire avec $X = (B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ et $Y = \tau_a$, avec la fonction $f : (\omega, s) \mapsto \omega_s$ où $\omega = (\omega_t)_{t\geq 0}$ la trajectoire du brownien. On obtient que la densité de X_a est

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp(-\frac{x^2}{2s}) \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{a^2}{2s}) ds = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$$

Le calcul est fait avec la changement de variable $y = \frac{1}{2s}(a^2+x^2)$.

Pour montrer que le processus $(X_a)_{a\geq 0}$ est Markov, on va montrer qu'il est un processus à incrément indépendant. Pour cela, soit $a, b > 0$, appliquons la Markov forte au temps τ_a avec le processus bi-dimensionnel B_t, on trouve que

$$\tilde{B}_t := B_{\tau_a+t} - B_{\tau_a}$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a}$, on note $\tilde{\tau}_b$ le temps d'arrêt: $\inf\{t \geq 0,\ \tilde{B}_t^{(1)} = b\}$, alors par définition, on a $\tau_{a+b} = \tau_a + \tilde{\tau}_b$, et ensuite, $X_{a+b} - X_a = \tilde{B}_{\tilde{\tau}_b}^{(2)}$, ce dernier est indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_a}$ d'après Markov fort. Comme $\mathcal{F}_a^X \subset \mathcal{F}_{\tau_a}$, il est aussi indépendant de $\mathcal{F}_a^X$.

Pour finir, on va calculer le noyau de transition en utilisant sa définition:

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{a+b})|X_a) = \int \varphi(y)p(b, X_a, dy)$$

et d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X_{a+b})|X_a) &= \mathbb{E}(\varphi(X_a + \tilde{B}^{(2)}_{\tilde{\tau}_b})) \\
&= \int \varphi(X_a + z)\frac{b}{\pi(b^2 + z^2)}dz \\
&= \int \varphi(y)\frac{b}{\pi(b^2 + (X_a - y)^2)}dy.
\end{aligned}$$