ENS de Lyon - M1 **2016 Printemps**

TD 8 de processus stochastiques et mouvement brownien

Exercice 1 – *Martingale vectorielle*

Soit $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)})$ un mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^3$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul.

1. Montrer que $M_t = e^{-\lambda \cdot B - \frac{1}{2}\|\lambda\|^2 t}$ est une martingale.
2. Soit T le temps d'arrêt défini par
$$T = \inf\{t \geq 0 : \ B_t^{(1)} + 2B_t^{(2)} + 3B_t^{(3)} = 6\}.$$
Calculer la fonction $a > 0 \mapsto \mathbb{E}(e^{-aT})$, en déduire la loi de T.
3. Retrouver le résultat avec l'invariance du mouvement brownien.

Exercice 2 – *Donsker, premières applications*

Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche simple issue de 0, on note $M_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$. Soit a un entier positive. Comme d'habitude B_t est un mouvement brownien et M_t le maximum du B.

1. Montrer que $\mathbb{P}(M_n \geq a, \ S_n < a) = \mathbb{P}(M_n \geq a, \ S_n > a)$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(M_n \geq a) = 2\mathbb{P}(S_n > a) + \mathbb{P}(S_n = a)$.
3. En appliquant le théorème du Donsker, montrer que $\mathbb{P}(M_t \geq \alpha) = 2\mathbb{P}(B_t \geq \alpha)$

Exercice 3 – *Théorème de Donsker pour le pont Brownien*

On munit de l'espace $C = C([0,1])$ de la norme $|f| = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$ et sa tribu borélienne. Rappelons que le pont brownien est défini par
$$X_t = B_t - tB_1, \ t \in [0,1]$$
où B_t est un mouvement brownien standard issu de 0.

1. Montrer que le pont brownien est caractérise en tant qu'un processus gaussien centré X à trajectoire continue telle que
$$X_0 = X_1 = 0, \ \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t - st.$$
2. Montrer que B_1 est indépendant de $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ pour tout $0 \leq t_1 < \cdots < t_k < 1$.
3. Soit $\mathbb{P}_\varepsilon$ la probabilité définie par
$$\mathbb{P}_\varepsilon(\cdot) = \mathbb{P}((B_t)_{0\leq t\leq 1} \in \cdot \mid 0 \leq B_1 \leq \varepsilon).$$
Montrer que $\mathbb{P}_\varepsilon$ converges vers la loi du pont brownien quand $\varepsilon \downarrow 0$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de porte manteau, i.e. une suite de probabilité $\mathbb{P}_n$ converge faiblement vers $\mathbb{P}$ si et seulement si pour tout fermé F,
$$\limsup_n \mathbb{P}_n(F) \leq \mathbb{P}(F).$$