ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Φυσικής

ΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Μαμαλούκας Χριστόφορος-Μάριος

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών - Τμήμα Φυσικής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το έγγραφο αυτό έχει ως στόχο να παρουσιάσει ορισμένες μαθηματικές έννοιες ανυσμάτων με συνεκτικό τρόπο. Εδώ, παρουσιάζονται έννοιες που θεωρώ είναι σημαντικές να γνωρίζει κάποιος για να μελετήσει την Φυσική σύμφωνα με τον σύγχρονό της φορμαλισμό. Όσες προτάσεις για τις οποίες η απόδειξη θεωρείται προφανής, θα αποκαλούνται «πορίσματα». Για τις προτάσεις με απόδειξη, οι οποίες θα αποκαλούνται «θεωρήματα», η τελευταία θα παρατίθεται στο υπόμνημα.

1 ΣΩΜΑΤΑ

Ορισμός 1.0.1. *Έστω καλώς ορισμένο σύνολο $\mathbb{F}$. Το σύνολο $\langle \mathbb{F}, +, \times \rangle$ ονομάζεται -αλγεβρικό- σώμα (field) αν οι πράξεις $+$ (την οποία θα την ονομάζουμε **πρόσθεση**) και $\times$ (την οποία θα ονομάζουμε **πολλαπλασιασμό**) είναι ορισμένες έτσι ώστε να ικανοποιούν τα κάτωθι αξιώματα:*

1. *Πρόσθεση:*
   - $\forall a, b \in \mathbb{F} \exists! c \in \mathbb{F}(a + b = c)$ *(Κλειστότητα)*
   - $\forall a, b \in \mathbb{F}(a + b = b + a)$ *(Μεταθετικότητα)*
   - $\forall a, b, c \in \mathbb{F}[(a + b) + c = a + (b + c)]$ *(Προσεταιριστικότητα)*
   - $\exists! e_0 \in \mathbb{F} \forall a \in \mathbb{F}(a + e_0 = e_0 + a = a)$ *(Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης)*
   - $\forall a \in \mathbb{F} \exists! (-a) \in \mathbb{F}[a + (-a) = (-a) + a = e_0]$ *(Αντίθετος)*
2. *Πολλαπλασιασμός:*
   - $\forall a, b \in \mathbb{F} \exists! c \in \mathbb{F}(a \times b = c)$ *(Κλειστότητα)*
   - $\forall a, b \in \mathbb{F}(a \times b = b \times a)$ *(Μεταθετικότητα)*
   - $\forall a, b, c \in \mathbb{F}[(a \times b) \times c = a \times (b \times c)]$ *(Προσεταιριστικότητα)*
   - $\exists! e_1 \in \mathbb{F} \forall a \in \mathbb{F}(a \times e_1 = e_1 \times a = a)$ *(Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού)*
   - $\forall a \in \mathbb{F} \exists! a^{-1} \in \mathbb{F}[a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = e_1]$ *(Αντίστροφος)*

Επιπλέον, και για τις δύο πρέπει να ισχύει το κάτωθι αξίωμα:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{F}[c \times (a + b) = c \times a + c \times b] \text{ (Επιμερισμός)}$$

Σημείωση. *Πρέπει για τα ουδέτερα στοιχεία των δύο πράξεων να ισχύει $e_1 \neq e_0$.*

Για συντομία, θα χρησιμοποιείται το σύμβολο του ιδίου του συνόλου του σώματος για να αναφερθεί στο σώμα.

Διαισθητικά, τα ανωτέρω σημαίνουν ότι ένα σώμα $\mathbb{F}$ είναι *κάτι* του οποίου τα στοιχεία του έχουν πράξεις οι οποίες θυμίζουν, στις **ιδιότητές** τους, αυτές των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ (πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, αφαίρεση, διαίρεση). Μάλιστα, αυτός είναι ένας τρόπος ορισμού των πραγματικών αριθμών: *Οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα σύνολο $\mathbb{R}$, το οποίο είναι σώμα, είναι διατεταγμένο και κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$.*

Δεν είναι απαραίτητο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σε ένα σώμα $\mathbb{F}$ να είναι πανομοιότυπες με αυτές των πραγματικών αριθμών. Ούτε τα στοιχεία του να είναι αριθμοί. Αρκεί να έχουν ιδιότητες που ορίζονται από τα ανωτέρω αξιώματα.

Τα συνηθέστερα παραδείγματα αλγεβρικών σωμάτων είναι οι ρητοί $\mathbb{Q}$, οι πραγματικοί $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί $\mathbb{C}$.

Η έννοια του αλγεβρικού σώματος είναι σημαντική έτσι ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε το **άνυσμα**.

2 ΑΝΥΣΜΑΤΑ

Όπως και με τα σώματα, τα ανύσματα ορίζονται μέσω ενός συνόλου.

Ορισμός 2.0.1. *Ένας διανυσματικός χώρος V (vector space) επί αλγεβρικού σώματος $\mathbb{F}$ ονομάζεται κάθε σύνολο του οποίου στοιχεία είναι **δομές** κατασκευασμένες με στοιχεία του $\mathbb{F}$ και έχουν δύο πράξεις, την **ανυσματική πρόσθεση** (vector addition) και τον **βαθμωτό πολλαπλασιασμό** (scalar multiplication), οι οποίες ικανοποιούν τα κάτωθι αξιώματα:*

1. *Ανυσματική Πρόσθεση:*
   - $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V \exists! \boldsymbol{w} \in V(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w})$ *(Κλειστότητα)*
   - $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ *(Μεταθετικότητα)*
   - $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V[(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})]$ *(Προσεταιριστικότητα)*
   - $\forall \boldsymbol{v} \exists! \mathbf{0}(\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v})$ *(Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης)*
   - $\forall \boldsymbol{v} \exists! (-\boldsymbol{v})[\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}]$ *(Αντίθετος)*
2. *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:*
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V \forall a \in \mathbb{F} \exists! \boldsymbol{u} \in V(a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})$ *(Κλειστότητα)*
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V \forall a, b \in \mathbb{F}[(ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})]$ *(Προσεταιριστικότητα)*
   - $\forall \boldsymbol{v} \in V(e_1 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v})$ *(Ο βαθμωτός πολ/σμός με το ουδέτερο του πολ/σμού δεν μεταβάλλει το άνυσμα)*

Επιπλέον, μεταξύ ανυσματικής πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού πρέπει να ισχύουν τα αξιώματα:

- $\forall a, b \in \mathbb{F} \forall \boldsymbol{v} \in V[(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}]$ *(Επιμερισμός βαθμωτών)*
- $\forall a \in \mathbb{F} \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V[a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{u}]$ *(Επιμερισμός ανυσμάτων)*

Οι πράξεις αυτές θυμίζουν πολύ τις πράξεις διανυσμάτων τα οποία ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}^3$. Και πράγματι, αυτή υπήρξε η βάση για την γενίκευση των διανυσμάτων. Αλλά ένα άνυσμα δεν χρειάζεται να είναι n-άδα αριθμών για να θεωρηθεί άνυσμα. Κάθε δομή στοιχείων του $\mathbb{F}$ στο οποίο είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος αποτελεί διάνυσμα, αρκεί να έχουμε ορίσει τις δύο άνω πράξεις. Όπως και στην περίπτωση των σωμάτων, δεν είναι απαραίτητο οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού να θυμίζουν τις πράξεις των τυπικών διανυσμάτων. Τα σύμβολα και οι ονομασίες είναι καθαρά τυπικές.

Ορισμένα παραδείγματα διανυσματικών χώρων είναι:

- $\mathbb{R}^n$: Τα ανύσματα του χώρου αυτού είναι n-άδες πραγματικών αριθμών που μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες-στήλες.

- $\mathbb{C}^n$: Τα ανύσματα του χώρου αυτού θυμίζουν τα προηγούμενα, αλλά είναι n-άδες μιγαδικών, αυτήν την φορά, αριθμών.

- $P_n^{\mathbb{F}} \equiv \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i : i \leq n, x \in \mathbb{F}\}$: Τα ανύσματα του χώρου αυτού είναι πολυώνυμα τάξης **το πολύ** n. Αυτός ο χώρος είναι ένα άμεσο παράδειγμα του πόσο αφηρημένη είναι η έννοια του ανύσματος. Δεν χρειάζεται να είναι n-άδα αριθμών. Η διανυσματική πρόσθεση είναι η $R(x) = P(x) + Q(x)$ και ο βαθμωτός πολ/σμός ο $Q(x) = aP(x)$.

- $C[a, b] \equiv \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$: Τα ανύσματα του χώρου αυτού είναι όλες οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Όπως και με τα πολυώνυμα, αποτελούν ένα άλλο παράδειγμα αφηρημένου διανύσματος, τα οποία είναι μάλιστα *απειροδιάστατα* (η διάσταση θα εξηγηθεί ύστερα). Οι πράξεις μεταξύ διανυσμάτων ορίζονται όπως και με τα πολυώνυμα.

- $\mathbb{F}$: Ένα αλγεβρικό σώμα είναι το ίδιο διανυσματικός χώρος, όπως φαίνεται πολύ απλά: η πρόσθεση στα σώματα είναι πανομοιότυπη με την διανυσματική πρόσθεση και η πράξη του πολλαπλασιασμού επίσης ικανοποιεί τα αξιώματα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (δεν μας πειράζει το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός στα σώματα έχει και αντιστρόφους. Τα αξιώματα των διανυσματικών πράξεων δεν μας απαγορεύουν την ιδιότητα αυτήν).

Ορισμός 2.0.2. *Κάθε σύνολο $U \subseteq V$ ονομάζεται* ***υπόχωρος*** *(subspace) του V, αν τα στοιχεία του τηρούν το αξίωμα της κλειστότητας.*

Τώρα λοιπόν έχουμε μια αρχική διαίσθηση του τι πα να πει διανυσματικός χώρος. Γενικά, βλέπουμε ότι η αφηρημένη έννοια έχει «εμπνευσθεί» από τα διανύσματα τα οποία γνωρίζουμε από τον λογισμό πολλών μεταβλητών. Αλλά οι ομοιότητες δεν παύουν εκεί!

Σημείωση. *Για βραχύτητα, τα ανύσματα είναι πάντοτε γραμμένα με έντονα γράμματα και τα βαθμωτά με αχνά. Αν δεν αναφέρομαι πού ανήκει ένα άνυσμα, τότε εννοώ ότι ανήκει στον «κύριο» χώρο στον οποίο ορίζεται. Προφανώς, τα βαθμωτά ανήκουν πάντοτε στο σώμα επί του οποίου ορίζεται ο διανυσματικός χώρος. Επίσης, τα ανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$ θα αποκαλούνται διανύσματα για διαφοροποίηση, αλλά γενικά δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των όρων «άνυσμα» και «διάνυσμα»*

2.1 Γραμμικοί συνδυασμοί, βάσεις, διαστάσεις, συντεταγμένες

Ορισμός 2.1.1. *Ονομάζουμε ένα άνυσμα $\boldsymbol{u} \in V$* ***γραμμικό συνδυασμό*** *(linear combination) ανυσμάτων του χώρου V αν εκφράζεται με σχέση της μορφής:*

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$$

Παράδειγμα:

- $\mathbb{R}^2$: Το διάνυσμα $\boldsymbol{u} = (8, 11)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1 = (3, 5)$ και $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1)$ ($\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$)
- $P_3^{\mathbb{C}}$: Το πολυώνυμο $\boldsymbol{P}(z) = 5iz^2 + 3z^3$ είναι γραμμικός συνδυασμός των πολυωνύμων $\boldsymbol{Q}_1(z) = -2i + (5/3)z + z^2$ και $\boldsymbol{Q}_2 = 3 + (i-1)z^2$ ($\boldsymbol{P}(z) = 3i\boldsymbol{Q}_1(z) - 2\boldsymbol{Q}_2(z)$)

Ορισμός 2.1.2. *Αν για ένα σύνολο ανυσμάτων $S \subset V$ ισχύει:*

$$\forall \boldsymbol{v} \in V (\boldsymbol{v} \text{ γραμμικός συνδυασμός των } \boldsymbol{u} \in S)$$

Τότε ο χώρος V ***απλώνεται*** *(is spanned) από τα ανύσματα του S. Αντιστρόφως, ο υπόχωρος*

$$U \equiv \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \right\} \subseteq V$$

ονομάζεται ***άπλωμα*** *(span) των $\boldsymbol{v} \in S$.*

Ορισμός 2.1.3. *Αν για ένα σύνολο ανυσμάτων $S \subset V$ ισχύει ότι:*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\forall i \leq n)(a_i = 0)$$

Τότε τα ανύσματα του S ονομάζονται ***γραμμικώς ανεξάρτητα*** *(linearly independent).*

Διαισθητικά, η γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι τα ανύσματα του S δεν είναι πάνω στην ίδια «ευθεία». Παράδειγμα:

- $\mathbb{R}^3$: Τα διανύσματα $(4, 6, 0)$ και $(0, 3, 12)$ είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα.
- $P_2^{\mathbb{C}}$: Τα μονώνυμα z^2 και z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αφού δεν υπάρχουν σταθερές $a, b \neq 0$ τέτοιες ώστε $(\forall z \in \mathbb{C})(az + bz^2 = 0)$

Ορισμός 2.1.4. *Έστω σύνολο $S \subset V$. Αν ισχύει ότι το S είναι άπλωμα του V και επίσης αποτελείται μόνο από γραμμικώς ανεξάρτητα ανύσματα, τότε το S ονομάζεται* ***βάση*** *(base) του V.*

Τα διανύσματα μιας βάσης θα συμβολίζονται ως $\boldsymbol{e}_i$, όπου $i \in \mathbb{N}$ δείκτης.
Παραδείγματα βάσεων:

- $\mathbb{R}^3$: Τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1 = (5, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 2, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 7)$ είναι βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$
- $C[a, b]$: Προφανώς, όλες οι συναρτήσεις $\boldsymbol{e}_n(x) = \sin(nx), n \in \mathbb{N}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και από ανάπτυγμα Fourier, ξέρουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε όλες τις συναρτήσεις του χώρου $C[a, b]$ ως άπειρα αθροίσματα των $\boldsymbol{e}_n$. Ως εκ τούτου, το σύνολο $S = \{\boldsymbol{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση του χώρου $C[a, b]$.

Η βάση ενός χώρου προφανώς δεν είναι μοναδική.

Ορισμός 2.1.5. *Έστω $S \subset V$ βάση του χώρου V. Η πληθικότητα (ή πληθάριθμος) $|S|$ του S ονομάζεται* ***διάσταση*** *(dimension) του χώρου V και συμβολίζεται* $\mathtt{dim}(V)$.

Θεώρημα 2.1.1. *Όλες οι βάσεις του χώρου V έχουν ίση πληθικότητα. (αποδεικνύεται επαγωγικά)*

Δηλαδή ένας χώρος δεν γίνεται να έχει δύο ή περισσότερες διαφορετικές διαστάσεις. Έχει μοναδική διάσταση.

Αν ισχύει:

- $\exists n \in \mathbb{N}(\mathtt{dim}(V) = n)$, τότε ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης. Παράδειγμα ο χώρος $\mathbb{R}^4$, ο οποίος είναι τετραδιάστατος ή ο χώρος $P_n^{\mathbb{C}}$, ο οποίος έχει $n+1$ διαστάσεις, όπου n η μέγιστη δυνατή τάξη που μπορούν να έχουν τα πολυώνυμα του χώρου.

- $\mathtt{dim}(V) = \aleph_0 = \beth_0$, ο χώρος είναι απειροδιάστατος, αλλά με διακριτές διαστάσεις. Παράδειγμα τέτοιου χώρου $C[a,b]$, δηλαδή ο χώρος των συνεχών πραγματικών διαστάσεων σε πεπερασμένο χωρίο του $\mathbb{R}$.

- $\mathtt{dim}(V) = \beth_1$, ο χώρος είναι απειροδιάστατος αλλά με συνεχείς διαστάσεις. Σε τέτοιους χώρους, δηλαδή, μπορεί κάποιος να μιλήσει, για παράδειγμα, για την π-οστή διάσταση. Παράδειγμα τέτοιου χώρου είναι ο $C[-\infty, +\infty]$, ο χώρος των συνεχών πραγματικών διαστάσεων ορισμένων σε όλον τον $\mathbb{R}$. Οι γραμμικοί συνδυασμοί σε τέτοιους χώρους αλλάζουν από διακριτά αθροίσματα σε ολοκληρώματα (δηλαδή συνεχή αθροίσματα).

Όταν έχουμε μία βάση S του χώρου V, τότε για έναν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S είναι κουραστικό να γράφουμε κάθε φορά την σχέση του ορισμού $2.1.1$. Ως πρώτη σκέψη, φαίνεται ότι μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύνολο με τους συντελεστές του γραμμικού αυτού του συνδυασμού, ως κάποιου είδους «συντομογραφία». Το πρόβλημα είναι πως τα σύνολα εξ ορισμού δεν έχουν κάποιου είδους οργάνωση. Αυτό σημαίνει ότι αν είχαμε δύο γραμμικούς συνδυασμούς όπως κάτωθι:

$$\boldsymbol{u}_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{u}_2 = 7\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3$$

τότε το σύνολο $\{3,6,7\}$ εκφράζει και τα δύο ανύσματα ($\{3,6,7\} = \{7,3,6\}$). Ως εκ τούτου, θέλουμε να θέσουμε μία σειρά στα στοιχεία της βάσης S, έτσι ώστε να έχει νόημα μια τέτοια συντομογραφία.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω βάση S του χώρου V. Αν ορίσουμε μία σχέση $< \subset S \times S$, μεταβατική και καλώς ορισμένη ώστε να ισχύει $\boldsymbol{e}_1 < \boldsymbol{e}_2 < \ldots < \boldsymbol{e}_n < \ldots$, $(\forall i < \mathtt{dim}(V))(\boldsymbol{e}_i \in S)$, τότε για έναν γραμμικό συνδυασμό*

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{dim(V)} a_i \boldsymbol{e}_i$$

τα στοιχεία της πλειάδας $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)_S$ ονομάζονται ***συντεταγμένες*** *(coordinates) του $\boldsymbol{u}$ στην βάση S. Η S θα αποκαλείται* ***διατεταγμένη*** *(ordered).*

Σημείωση. *Από εδώ και στο εξής, θα υπονοείται ότι κάθε βάση είναι διατεταγμένη. Η σειρά με την οποία αναγράφονται τα στοιχεία της βάσης είναι και η εννοούμενη διάταξη.*

Έστω διατεταγμένη βάση $S = \{e_i\}$ του χώρου V.

Θεώρημα 2.1.2. *Το σύνολο $S' = \{(\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{u}_i)\}$ είναι επίσης βάση του χώρου V, αν* det$(U) \neq 0$*, όπου U ο πίνακας με στοιχεία $U_{ji} = u_{ij} + \delta_{ij}$, u_{ij} οι συντεταγμένες των $\boldsymbol{u}_i$ και δ_{ij} το δέλτα του Κρόνεκερ.*

Για τα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^3$, όπως και να στρίψουμε τα διανύσματα μιας βάσης, θα αποτελούν και πάλι βάση, αρκεί να μην πέσουν τουλάχιστον δύο σε μια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων. Αυτή η ιδέα γενικεύεται, λοιπόν, με το ανωτέρω θεώρημα και σε ανύσματα άλλων χώρων. Παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος:

Στον χώρο $\mathbb{R}^2$, έστω η βάση $S = \{(1,0),\ (0,1)\}$.

Έστωσαν διανύσματα $\boldsymbol{u}_1 = (5,3),\ \boldsymbol{u}_2 = (-3,8)$

$$U = \begin{pmatrix} 5+1 & 3 \\ -3 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

det$(U) = 6 \cdot 9 + 9 = 35 \neq 0$

Άρα το σύνολο $S' = \{(1,0) + \boldsymbol{u}_1,\ (0,1) + \boldsymbol{u}_2\} =$

$= \{(6,3),\ (-3,9)\}$

είναι επίσης βάση.

Από την άλλη, έστωσαν τα διανύσματα $\boldsymbol{u}'_1 = (0,1)$ $\boldsymbol{u}'_2 = (2,1)$

$$U' = \begin{pmatrix} 0+1 & 1 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Προφανώς det$(U') = 0$

Άρα $S'' = \{(1,0) + \boldsymbol{u}'_1,\ (0,1) + \boldsymbol{u}'_2\} =$

$= \{(1,1),\ (2,2)\}$ δεν είναι βάση.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν κάποιος αντιστρέψει τα στοιχεία της βάσης ($S = \{(0,1)\ (1,0)\}$)

η $S^{(3)} = \{(0,1) + \boldsymbol{u}'_1,\ (1,0) + \boldsymbol{u}'_2\}$ είναι βάση.

Αλλά τότε αλλάζει και ο πίνακας U και ισχύει det$(U) \neq 0$ αφού οι συντεταγμένες των $\boldsymbol{u}'_i$ θα αλλάξουν.

Δηλαδή δεν παύει να ισχύει το θεώρημα.

Πόρισμα 2.1.1. *Το σύνολο $S' = \{b_i \boldsymbol{e}_i\}$ είναι βάση του χώρου V, αν $\forall i (b_i \neq 0)$.*

Διαισθητικά μιλώντας, η «αλλαγή κλίμακας» δίνει πάλι βάση. Παράδειγμα:

Στον χώρο $\mathbb{R}^3$, έστω η βάση $S = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

Το σύνολο $S' = \{(5,0,0),\ (0,3,0),\ (0,0,-10)\}$ είναι επίσης βάση.

2.2 Νόρμα, βασική τοπολογία, χώροι Banach

Μια άλλη χρήσιμη ιδιότητα του Ευκλείδειου χώρου που θα θέλαμε να γενικεύσουμε είναι αυτή της απόστασης και του μέτρου.

Ορισμός 2.2.1. *Έστω ανυσματικός χώρος V επί σώματος $\mathbb{F}$. Ορίζουμε συνάρτηση $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, η οποία τηρεί τα κάτωθι αξιώματα:*

- $\forall \boldsymbol{u}[(\|\boldsymbol{u}\| \geq 0) \wedge (\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0})]$*, η συνάρτηση δίνει μη αρνητική ποσότητα και μηδενική ποσότητα ΜΟΝΟ για το μηδενικό άνυσμα.*
- $\forall \boldsymbol{u}(\|\boldsymbol{u}\| < \infty)$*, η συνάρτηση δεν απειρίζεται για κανένα άνυσμα.*
- $\forall a, \boldsymbol{u}(\|a\boldsymbol{u}\| = |a|\|\boldsymbol{u}\|)$*, το βαθμωτό στοιχείο «βγαίνει απέξω» (το μέτρο αυτού).*
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)$*, ισχύει η τριγωνική ανισότητα.*

*Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **νόρμα** (norm) του χώρου V.*

Αν για μια συνάρτηση δεν ισχύει ότι $\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, αλλά ικανοποιεί όλα τα υπόλοιπα αξιώματα της νόρμας, ονομάζεται **ημινόρμα** (seminorm)

Σημείωση. *Όπως και με τους όρους «άνυσμα»-«διάνυσμα», οι όροι «μέτρο» και «νόρμα» είναι πανομοιότυποι. Αλλά, για διαφοροποίηση, ο όρος «μέτρο» θα χρησιμοποιείται κατ' αποκλειστικότητα για τα διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$, αλλά και για τα στοιχεία σωμάτων, ενώ ο όρος «νόρμα» για ένα γενικό άνυσμα.*

Παραδείγματα νόρμας:

- $\mathbb{R}^n$: Για ένα διάνυσμα $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, η συνάρτηση $\|\boldsymbol{u}\| = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας και άρα αποτελεί μέτρο του χώρου.
- $C[a,b]$: Το ολοκλήρωμα $\|\boldsymbol{f}(x)\| = \left|\int_a^b f^2(x)dx\right|$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας και άρα αποτελεί νόρμα του χώρου.
- $C[-\infty, +\infty]$: Το ολοκλήρωμα $\|\boldsymbol{f}(x)\| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)w(x)dx\right|$, όπου $w(x)$ μια *συνάρτηση βάρους* καταλλήλως ορισμένη έτσι ώστε να μην απειρίζεται το ολοκλήρωμα για καμμία $f(x)$, ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας και άρα αποτελεί νόρμα του χώρου.

Πόρισμα 2.2.1. *Η νόρμα ενός χώρου δεν είναι μοναδική.*

Τώρα που έχουμε λάβει μια ιδέα για το πόσο «μακρύ» είναι ένα άνυσμα του χώρου μας, είναι χρήσιμο να ξέρουμε πόσο απέχουν δύο σημεία του χώρου.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$. Αν ισχύει ότι $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, δηλαδή:*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}^+ \forall \boldsymbol{u}(m\|\boldsymbol{u}\|_2 \leq \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq M\|\boldsymbol{u}\|_2)$$

*τότε λέμε ότι οι δύο νόρμες είναι **ανάλογες** (equivalent).*

Ορισμός 2.2.3. *Ονομάζουμε **μετρική** (metric) ενός χώρου V την συνάρτηση* $\mathrm{dist}_V : V \times V \to \mathbb{R}$ *με έκφραση:*

$$\mathrm{dist}_V(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$$

όπου $\|\cdot\|$ μία νόρμα του V.

Όπως και με την νόρμα, η μετρική δεν είναι μοναδική. Κανονικά, η μετρική δεν είναι απαραίτητο να ορισθεί μέσω της νόρμας. Μάλιστα, υπάρχουν χώροι με μετρική (μετρικοί χώροι), στους οποίους μπορεί να μην μπορεί να ορισθεί νόρμα. Προφανώς, ένας χώρος με νόρμα, από την άλλη, έχει πάντοτε και μετρική. Την μετρική που ορίζεται μέσω νόρμας την ονομάζουμε συγκεκριμένα **μετρική εκ μέτρου επαγόμενη** (norm induced metric).

Θεώρημα 2.2.1. *Η μετρική ενός ανυσματικού χώρου V είναι συμμετρική. Δηλαδή:*

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}(\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \mathtt{dist}_V(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}))$$

Μια έννοια που χρησιμοποιούμε συχνά αλλά ανεπαίσθητα στην Φυσική είναι αυτή της ισομετρίας.

Ορισμός 2.2.4. ***Ισομετρία*** *(isometry) ονομάζεται κάθε «1 προς 1» και επί συνάρτηση f από μετρικό χώρο V μετρικής* $\mathtt{dist}_V$ *σε μετρικό χώρο W μετρικής* $\mathtt{dist}_W$ *για την οποία ισχύει:*

$$(\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V)[\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \mathtt{dist}_W(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2))]$$

Με άλλα λόγια, η ισομετρία είναι μια συνάρτηση που διατηρεί την απόσταση μεταξύ των σημείων της περιοχής στην οποία δρα. Πώς σχετίζεται όμως η έννοια αυτή με την Φυσική; Η απάντηση είναι τα σχετικά διανύσματα. Θα γίνει αναφορά συγκεκριμένα στην Νευτώνεια Μηχανική.

Όταν θέλουμε να μελετήσουμε τον χώρο ως προς ένα νέο σημείο αυτού, πρέπει να κάνουμε κάποιου είδους «αλλαγή» στον χώρο. Η πρώτη σκέψη θα ήταν ο μετασχηματισμός της βάσης του εν λόγω χώρου. Όμως, αυτό δεν είναι δυνατόν· ο Ευκλείδειος χώρος, τον οποίο χρησιμοποιεί η Νευτώνεια Μηχανική, αποτελείται από διανύσματα που λαμβάνουν την μορφή τριάδων πραγματικών αριθμών. Δεν υπάρχει τρόπος να κωδικοποιήσουμε στις τριάδες αυτές καθ' αυτές την ιδέα ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα άνυσμα πέρα της τριάδας $(0, 0, 0)$. Αντ' αυτού, αλλάζουμε την θέση των πάντων στον χώρο χρησιμοποιώντας μια ισομετρία $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να μελετήσουμε τον χώρο ως προς το σημείο $(4, 2, 9)$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (4, 2, 9)$$

Σημείωση. *Στο επόμενο χωρίο θα αναφέρω ορισμένους βασικούς και στοιχειώδεις όρους τοπολογίας, καθώς θεωρώ είναι απαραίτητοι για την πλήρη γνώση των ανυσματικών χώρων. Δεν είναι απαραίτητο η τοπολογία να περιορίζεται σε ανυσματικούς χώρους. Κάθε σύνολο με μετρική είναι «δόκιμο». Για συνέπεια, όμως, θα περιοριστούμε στους ανυσματικούς χώρους.*

Στους ανυσματικούς χώρους με μετρική δυνάμεθα να ορίσουμε έννοιες παρόμοιες με τα διαστήματα του $\mathbb{R}$:

Ορισμός 2.2.5. *Σε χώρο V με μετρική* $\mathtt{dist}_V$*, ορίζουμε τα σύνολα:*

- $B(\boldsymbol{u}_o, r) = \{\boldsymbol{u} : \mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_o, \boldsymbol{u}) < r\}$: ***Ανοιχτή μπάλα*** *(Open ball) κέντρου $\boldsymbol{u}_o$ και ακτίνας r*
- $\bar{B}(\boldsymbol{u}_o, r) = \{\boldsymbol{u} : \mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_o, \boldsymbol{u}) \leq r\}$: ***Κλειστή μπάλα*** *(Closed ball) κέντρου $\boldsymbol{u}_o$ και ακτίνας r*
- $S(\boldsymbol{u}_o, r) = \{\boldsymbol{u} : \mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_o, \boldsymbol{u}) = r\}$: ***Σφαίρα*** *(Sphere) κέντρου $\boldsymbol{u}_o$ και ακτίνας r*

όπου $r > 0$

Με άλλα λόγια, μία σφαίρα ορίζεται όπως ακριβώς και στην Ευκλείδια γεωμετρία: όλα τα σημεία ενός χώρου που ισαπέχουν από ένα κέντρο. Η ανοιχτή μπάλα είναι τα σημεία μέσα στην σφαίρα και η κλειστή μπάλα είναι η ένωση της σφαίρας και της ανοιχτής μπάλας.

Μπορούμε τις έννοιες αυτές να τις επεκτείνουμε σε ένα σύνολο $D \subseteq V$ «τυχαίου σχήματος».

Ορισμός 2.2.6. *Ονομάζουμε **ανοιχτό σύνολο** (open set) ένα σύνολο $D \subseteq V$, όπου V ανυσματικός χώρος με μετρική, αν ισχύει:*

$$\forall \boldsymbol{u} \in D : \exists \epsilon > 0 [B(\boldsymbol{u}, \epsilon) \subseteq D]$$

*Δηλαδή αν υπάρχει μία **ε-γειτονία** με κέντρο το $\boldsymbol{u}$ η οποία να ανήκει στο D.*

Ορισμός 2.2.7. *Ονομάζουμε **κλειστό σύνολο** (closed set) ένα σύνολο $D \subseteq V$ αν το συμπληρωματικό του είναι ανοικτό.*

Παράδειγμα: Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^2$ με μετρική $\|(a_1, a_2)\| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$.

- Ο ίδιος ο χώρος είναι ανοιχτό σύνολο. Κάθε μπάλα με κέντρο οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^2$ είναι προφανώς υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
- Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι κλειστό σύνολο, αφού το συμπληρωματικό του, ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό, όπως αναγράφεται άνω.

Ενδιαφέρον είναι πως για τα άνω παραδείγματα, ισχύει ότι το $\emptyset$ είναι επίσης ανοιχτό, αφού δεν ανήκει κανένα στοιχείο σε αυτό και άρα δεν υπάρχει στοιχείο τέτοιο ώστε να μην ικανοποιεί την συνθήκη του ανοιχτού συνόλου. Ως εκ τούτου, το $\mathbb{R}^2$ είναι επίσης κλειστό.

Προφανώς, αυτός ο ορισμός του κλειστού συνόλου δεν είναι πάντοτε εύχρηστος. Έτσι, χρειάζεται να σχηματίσουμε έναν νέο «ορισμό», ο οποίος είναι καλύτερος στην χρήση.

Ορισμός 2.2.8. *Ονομάζουμε το σημείο $\boldsymbol{u}$ **σημείο συσσώρευσης** (accumulation point) ενός συνόλου $D \subseteq V$ αν κάθε γειτονία του $\boldsymbol{u}$ περιέχει ένα σημείο του D. Με μαθηματική γραφή:*

$$(\boldsymbol{u} \text{ σημείο συσσώρευσης του } D) \Leftrightarrow [\forall \epsilon > 0 : \exists \boldsymbol{v} \in D(\boldsymbol{v} \in B(\boldsymbol{u}, \epsilon))]$$

*Το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του D το ονομάζουμε **κλειστότητα** (closure) του D και συμβολίζεται $\bar{D}$*

Με την έννοια του σημείου συσσώρευσης, μπορούμε πλέον να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό του κλειστού συνόλου.

Θεώρημα 2.2.2. *Ένα σύνολο D είναι κλειστό αν και μόνο αν $\bar{D} = D$*

Ορισμός 2.2.9. *Ένα σύνολο D ονομάζεται **συμπαγές** (dense) σε έναν ανυσματικό χώρο V αν και μόνο αν $\bar{D} = V$*

Με άλλα λόγια, ένα συμπαγές σύνολο ενός χώρου V είναι αυτό του οποίου δεν του λείπουν παρά μόνο σημεία (και γενικότερα δομές μικρότερης διάστασης από τον ίδιο τον χώρο) από τον χώρο V.

Ορισμός 2.2.10. *Ένας ανυσματικός χώρος είναι **διαχωρίσιμος** (separable) αν υπάρχει τουλάχιστον ένα συμπαγές αλλά και αριθμήσιμο ($|D| \leq \aleph_0$) υποσύνολο.*

Παράδειγμα: Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμοι και το υποσύνολό των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι συμπαγές στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτό διαφαίνεται εύκολα, καθώς κάθε ακολουθία ρητών συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό και άρα κάθε πραγματικός αριθμός έχει τουλάχιστον έναν ρητό αριθμό οσοδήποτε κοντά του. Αυτό κάνει τους ρητούς αριθμούς ένα συμπαγές σύνολο, στους πραγματικούς αριθμούς, και, αφού είναι αριθμήσιμοι οι ρητοί, σύμφωνα με τον ορισμό της διαχωρισημότητας, τους πραγματικούς αριθμούς διαχωρίσιμους.

Στην τοπολογία, υπάρχει μία έννοια που θυμίζει αυτήν του δυναμοσυνόλου.

Ορισμός 2.2.11. *Ονομάζουμε* $\mathfrak{T}$ ***τοπολογικό χώρο*** *(topological space) του ανυσματικού χώρου* V *το σύνολο:*

$$\mathfrak{T} = \{D \subseteq V : D \text{ ανοιχτό σύνολο}\}$$

Τώρα, θέλουμε να επεκτείνουμε τις ιδέες του ορίου, της σύγκλισης ακολουθιών και της συνέχειας από την ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων σε έναν γενικό ανυσματικό χώρο.

Ορισμός 2.2.12. *Ονομάζουμε το σημείο* $\boldsymbol{u} \in D$ ***εσωτερικό*** *(interior point) ενός συνόλου* $D \subseteq V$ *αν ισχύει ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο* $M \subseteq D$ *το οποίο να περιέχει το* $\boldsymbol{u}$*.*

Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του D *θα συμβολίζεται* $\mathtt{int}(D)$*.*

Ορισμός 2.2.13. *Έστω ακολουθία* $\boldsymbol{u}_n$ *ενός χώρου* V *μετρικής* $\mathtt{dist}_V$*. Η ακολουθία αυτή* ***συγκλίνει*** *(converges) σε ένα σημείο* $\boldsymbol{u}$ *του* V *αν και μόνο αν:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N[\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}) < \epsilon]$$

θα συμβολίζουμε την σύγκλιση ως $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$

Με άλλα λόγια, μια ακολουθία ανυσμάτων συκλίνει σε ένα άνυσμα ενός ανυσματικού χώρου αν συγκλίνει η ακολουθία των αποστάσεών τους στο σημείο αυτό στο 0. Δηλαδή

$$(\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}) \Leftrightarrow (a_n \to 0), \text{ όπου } a_n = \mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u})$$

Μια ακολουθία δεν είναι απαραίτητο να είναι ακολουθία ανυσμάτων, με την έννοια ότι πρέπει για κάθε n να παίρνουμε συγκεκριμένο άνυσμα. Μπορεί αντ' αυτού, να έχουμε ακολουθία συναρτήσεων. Για αυτές τις ακολουθίες μπορούμε να ορίσουμε δύο ειδών συγκλίσεις:

Ορισμός 2.2.14. *Έστωσαν ακολουθία* f_n *συναρτήσεων* $f_n : X \to V$ *και συνάρτηση* $f : X \to V$ *(δεν μας ενδιαφέρει το όρισμα των συναρτήσεων, παρά μόνον το ότι το αντιστοιχεί σε ένα άνυσμα του μετρικού χώρου* V*). Ορίζουμε τις εξής συγκλίσεις:*

$$(f_n \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στην } f) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X : (\mathtt{dist}_V(f_n(x), f(x)) < \epsilon)$$
$$(f_n \text{ συγκλίνει κατά σημεία στην } f) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \forall x \in X : \exists N = N(\epsilon, x) : (\mathtt{dist}_V(f_n(x), f(x)) < \epsilon)$$

Αρχικά, αυτοί οι δύο ορισμοί φαίνονται πανομοιότυποι. Απλά αλλάξαμε την σειρά των προτάσεων του ορισμού. Αλλά αυτή η αλλαγή έχει τεράστια σημασία. Η ομοιόμορφη σύκλιση μας λέει ότι μια ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σε μια συνάρτηση με τον ίδιο ρυθμό για όλες τις δυνατές τιμές του ορίσματός της, εξού και η ονομασία **ομοιόμορφη** (uniform). Από την άλλη, η **κατά σημεία σύγκλιση** (pointwise) έχει ασθενέστερα κριτήρια, και απλά απαιτεί ότι η κάθε ακολουθία ανυσμάτων $\boldsymbol{u}_n = f_n(c)$, όπου c μια σταθερά που ανήκει στο X θα συγκλίνει κάποτε στο άνυσμα $f(c)$. Η διαφορά αυτή μεταξύ ομοιόμορφης και κατά σημεία σύγκλισης είναι και ο λόγος που εμφανίζεται το φαινόμενο Gibbs στους μετασχηματισμούς Fourier.

Μια άλλη ιδιότητα που μπορούμε να μεταφέρουμε από την ανάλυση είναι η έννοια των φραγμένων συνόλων.

Ορισμός 2.2.15. *Ένα υποσύνολο ενός χώρου V με μετρική ονομάζεται **φραγμένο** (bounded) αν*

$$\delta(D) = \sup_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in D} [\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})] < \infty$$

*όπου $\delta(D)$ ονομάζεται **διάμετρος** (diameter) του D*

Ορισμός 2.2.16. *Μία ακολουθία ονομάζεται **Cauchy** αν ισχύει:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N [\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_m) < \epsilon]$$

Ο ορισμός αυτός θυμίζει πολύ τον ορισμό της σύγκλισης, αλλά λέει κάτι διαφορετικό. Μας λέει ότι οι ακολουθίες Cauchy είναι αυτές που καθώς πηγαίνουμε προς το άπειρο, τόσο λιγότερο αλλάζει η τιμή της ακολουθίας. Αλλά αυτό δεν υπονοεί σύγκλιση, καθώς η σύγκλιση μιας ακολουθίας σε έναν χώρο V **προϋποθέτει** ότι το σημείο σύγκλισης βρίσκεται μέσα στον V. Παράδειγμα:
Στον χώρο $\mathbb{Q}$ με μετρική $\mathtt{dist}_{\mathbb{Q}}(p, q) = |p - q|$, προφανώς υπάρχει μια ακολουθία ρητών p_n που πλησιάζουν σε έναν άρρητο, έστω $\sqrt{2}$. Όμως, αυτός ο αριθμός δεν ανήκει στον $\mathbb{Q}$. Οπότε, δεν είναι ορθό να μιλήσουμε για σύγκλιση της ακολουθίας p_n στον αριθμό αυτόν, αφού δεν γίνεται να οριστεί η μετρική των ρητών αριθμών με ένα εκ των δύο ανυσμάτων να είναι ο $\sqrt{2}$. Αλλά, η ακολουθία αυτή είναι μια ακολουθία **Cauchy**.

Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι οι δύο ορισμοί είναι ασύμβατοι. Πράγματι υπάρχει μια σχέση μεταξύ τους:

Πόρισμα 2.2.2. *Έστω ακολουθία $\boldsymbol{u}_n$ σε χώρο V με μετρική.*

$$(\boldsymbol{u}_n \text{ συγκλίνει στον } V) \Rightarrow (\boldsymbol{u}_n \text{ είναι ακολουθία Cauchy})$$

Τι συμβαίνει όμως όταν ισχύει και το αντίστροφο; Τότε λέμε ότι ένας χώρος είναι πλήρης.

Ορισμός 2.2.17. *Ένας ανυσματικός χώρος V αποκαλείται **πλήρης** (complete) αν και μόνο αν ισχύει ότι για κάθε ακολουθία $\boldsymbol{u}_n$ του χώρου αυτού*

$$(\boldsymbol{u}_n \text{ ακολουθία Cauchy}) \Rightarrow (\boldsymbol{u}_n \text{ συγκλίνει στον } V)$$

Με άλλα λόγια, ένας χώρος είναι πλήρης άμα δεν έχει «τρύπες». Παράδειγμα: Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ είναι πλήρης καθώς κάθε συγκλίνουσα πραγματική ακολουθία που μπορούμε να σκεφτούμε θα συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό. Από την άλλη, η ευθεία των ρητών $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρης, καθώς κάποιες ακολουθίες της μπορούν να συγκλίνουν μόνο σε πραγματικούς αριθμούς.

Ορισμός 2.2.18. *Ένας **χώρος Banach** είναι οποιοσδήποτε ανυσματικός χώρος διαθέτει νόρμα και είναι πλήρης.*

Μια πολύ χρήσιμη έννοια είναι αυτή του ορίου.

Ορισμός 2.2.19. *Ονομάζουμε **όριο** (limit) μιας συνάρτησης $f : D \to W$, όπου $D \subseteq V$, V και W ανυσματικοί χώροι με μετρική, σε **σημείο συσσώρευσης** $\boldsymbol{v}_o \in V$ του D, μια τιμή $\boldsymbol{l} \in W$, για την οποία ισχύει:*

$$\forall \delta > 0 : \exists \epsilon > 0 : \forall \boldsymbol{u} \in ([B(\boldsymbol{u}_o, \epsilon) \cap D] \setminus \{\boldsymbol{u}_o\})[\mathtt{dist}_W(f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{l}) < \delta]$$

θα συμβολίζουμε το όριο ως $\lim\limits_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_o} (f(\boldsymbol{u})) = l$

Ορισμός 2.2.20. *Μια συνάρτηση $f : D \to W$ από υποσύνολο D μετρικού χώρου V σε μετρικό χώρο W αποκαλείται **συνεχής** (continuous) σε ένα σημείο συσσώρευσης $\boldsymbol{u}_o \in D$ του D αν ισχύει:*

$$\lim_{\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}_o} (f(\boldsymbol{u})) = f(\boldsymbol{u}_o)$$

2.3 Εσωτερικό Γινόμενο και χώροι Hilbert

Έχουμε σχεδόν τελειώσει με την πλήρη γεωμετρική περιγραφή ενός ανυσματικού χώρου. Όμως, δεν έχουμε μεταφράσει μία ακόμη έννοια της Ευκλείδιας γεωμετρίας· την γωνία. Αυτή η έννοια απαιτεί τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός 2.3.1. *Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) ενός ανυσματικού χώρου V μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ η οποία ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:*

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}[\langle \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}\rangle]$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} : \forall a \in \mathbb{F}[\langle a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle]$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}[\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle^*]$, *το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι συμμετρικό, αλλά η αντιστροφή των ορισμάτων δίνει τον συζυγή αριθμό του.*
- $\forall \boldsymbol{u}\{(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \in \mathbb{R}^+) \wedge [(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 0) \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}]\}$, *το εσωτερικό γινόμενο ενός ανύσματος με τον εαυτό του δίνει μη αρνητικό αριθμό κσι μηδέν αν και μόνο αν το διάνυσμα αυτό είναι το μηδενικό.*

Τα πρώτα δύο αξιώματα υπονοούν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι μία διγραμμική απεικόνιση. Με άλλα λόγια, είναι γραμμικό ως προς κάθε όρισμά του. Όταν μια συνάρτηση δεν ικανοποιεί το αξίωμα $(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0})$, αλλά ικανοποιεί όλα τα υπόλοιπα αξιώματα του εσωτερικού γινομένου, τότε ονομάζεται η συνάρτηση αυτή **ημιεσωτερικό γινόμενο** (semi-inner product).

Παραδείγματα εσωτερικού γινομένου:

- $\mathbb{R}^n$: Για δύο διανύσματα $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ και $\boldsymbol{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, η συνάρτηση $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του εσωτερικού γινομένου.
- $C[a, b]$: Το ολοκλήρωμα $\langle \boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{g}(x)\rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας και άρα αποτελεί νόρμα του χώρου. Θεωρούμε εδώ ότι οι συναρτήσεις είναι μιγαδικές, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε την συζυγή της συνάρτηση στο εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 2.3.2. *Ένας χώρος ονομάζεται **χώρος Hilbert** όταν διαθέτει εσωτερικό γινόμενο και είναι πλήρης.*

Όπως και με την νόρμα, δεν είναι μοναδικό το εσωτερικό γινόμενο.

Με την εισαγωγή της συνάρτησης του εσωτερικού γινομένου μπορούμε πλέον να ορίσουμε τις έννοιες του μέτρου και της απόστασης μονοσήμαντα.

Ορισμός 2.3.3. *Έστω ανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο. Ορίζουμε μονοσήμαντα τις συναρτήσεις νόρμας $\|\cdot\|$ και απόστασης $\mathtt{dist}_V(\cdot,\cdot)$ ως εξής:*

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}$$
$$\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$$

Πριν, αναφέραμε πως η έννοια του εσωτερικού γινομένου είναι χρήσιμη ώστε να μπορέσουμε να μιλήσουμε για γωνίες. Μπορούμε να μιλήσουμε, για παράδειγμα, για καθετότητα, ορμόμενοι από το εσωτερικό γινόμενο της τρισδιάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας:

Ορισμός 2.3.4. *Ονομάζουμε δύο ανύσματα $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο, όπου ισχύει $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$, **κάθετα** (perpendicular) αν ισχύει:*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$$

Η έννοια αυτή είναι πολύ χρήσιμη για τον ορισμό μιας ιδιαίτερης κατηγορίας βάσης:

Ορισμός 2.3.5. *Έστω ανυσματικός χώρος V με βάση $S = \{\boldsymbol{e}_i\}$. θα αποκαλούμε την βάση αυτήν **ορθοκανονική** (orthogonal and normalized) εάν ισχύει:*

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Με άλλα λόγια, μια βάση είναι ορθοκανονική αν τα ανύσματά της είναι κάθετα μεταξύ τους αλλά και έχουν μέτρο $\|\boldsymbol{e}_i\|^2 = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = 1$.

Γιατί όμως να μας νοιάζει μια τέτοια βάση; Έστω άνυσμα $\boldsymbol{u}$. Τότε, στην βάση S, η οποία είναι ορθοκανονική, το άνυσμα αυτό θα γραφεί ως:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{\mathtt{dim}(V)} a_i \boldsymbol{e}_i$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{u}$ με ένα άνυσμα της βάσης S θα είναι:

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} a_j \boldsymbol{e}_j \rangle \overset{\text{διγραμμικότητα}}{\Leftrightarrow}$$

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} \langle \boldsymbol{e}_i, a_j \boldsymbol{e}_j \rangle \overset{\text{διγραμμικότητα}}{\Leftrightarrow}$$

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} a_j \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \overset{\text{ορισμός}}{\Leftrightarrow}$$

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} a_j \delta_{ji} = a_i$$

Έχουμε καταφέρει κάτι πολύ σημαντικό: Έχουμε βρει μέθοδο με την οποία μπορούμε να βρούμε τις συνιστώσες ενός ανύσματος στην ορθοκανονική βάση· αρκεί να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων βάσης και του διανύσματος του οποίου θέλουμε να βρούμε τις συνιστώσες.

Όμως τώρα έχουμε ένα νέο πρόβλημα. Πώς θα βρούμε μια ορθοκανονική βάση; Φαίνεται αρχικά ότι απλά θα πρέπει δια μαγείας να βρούμε μία. Αλλά στην πραγματικότητα, κάθε βάση S μπορεί να γίνει ορθοκανονική.

Θεώρημα 2.3.1. *(Μέθοδος Gram-Schmidt) Έστω χώρος V με βάση S. Τότε, η βάση S μπορεί να μετασχηματιστεί σε βάση S', η οποία είναι ορθοκανονική, με την αναδρομική σχέση:*

$$\boldsymbol{e}'_1 = \frac{\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{e}_1\|}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}'_n = \boldsymbol{e}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}_n \rangle \boldsymbol{e}'_i$$

$$\boldsymbol{e}'_n = \frac{\boldsymbol{\epsilon}'_n}{\|\boldsymbol{\epsilon}'_n\|}$$

με $n \leq \mathtt{dim}(V)$

Παράδειγμα: (Πολυώνυμα Legendre) Όπως αναφέρθηκε στο πρώτο μέρος της ενότητας των ανυσμάτων, στον ανυσματικό χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, έστω $C[0,1]$, τα μονώνυμα $\boldsymbol{p}(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ είναι βάση του χώρου αυτού. Έστω ότι ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο ως $\langle \boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{g}(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Είναι πασίδηλο ότι η βάση των μονωνύμων ΔΕΝ είναι ορθοκανονική. Π.χ.:

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{1}\| &= 2 \\
\langle x, x^3 \rangle &= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

Με βάση το ανωτέρω θεώρημα, μπορούμε να την μετατρέψουμε σε ορθοκανονική:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_0(x) &= \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|} = 1 \\
\boldsymbol{P}_1(x) &= \frac{x}{\|\boldsymbol{x}\|} = x \\
\boldsymbol{P}_2(x) &= \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\|x^2 - \frac{2}{3}\|} = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Τελικά, καταλήγουμε στην γενική σχέση:

$$
\boldsymbol{P}_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell
$$

Τα ανωτέρω πολυώνυμα ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre** (Legendre polynomials) και είναι ιδιαιτέρως σημαντικά στην Φυσική, καθώς προκύπτουν στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Τα μονώνυμα x^n είναι γεννήτορες και των πολυωνύμων Laguerre, στον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στην ημιευθεία $[0, +\infty)$, και των πολυωνύμων Hermite, στον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων σε όλο το $\mathbb{R}$. Τα πολυώνυμα αυτά προκύπτουν με διαδικασία πανομοιότυπη με την ανωτέρω, με την εξαίρεση ότι το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών χώρων είναι ολοκλήρωμα με κατάλληλο βάρος (π.χ. το εκθετικό), έτσι ώστε να μην έχουμε απειρισμό.

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου είναι τόσο ισχυρή που αρκεί για να περιγράψει εξ ολοκλήρου έναν ανυσματικό χώρο

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ακόλουθο εδάφιο δεν είναι απαραίτητο για την κατανόηση των ανυσματικών χώρων και είναι αποκλειστικά για λόγους ενδιαφέροντος.

2.4 Περί συντεταγμένων, γενίκευση λογισμού

Στο εδάφιο 2.1 κάναμε αναφορά στις συντεταγμένες. Για σύνοψη, συντεταγμένες ονομάζουμε τους συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού ενός ανύσματος σε μια βάση την οποία έχουμε διατάξει.

Στην ανάλυση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, για τον χώρο, π.χ., $\mathbb{R}^3$, καταχρηστικά χρησιμοποιούσαμε τον συμβολισμό $f(x, y, z) = \dots$ όταν αναφερόμασταν σε μια συνάρτηση της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες του χώρου. Καταχρηστικά, για τον εξής λόγο:

- Ο χώρος $\mathbb{R}^3$ δεν «ξέρει» τι θα πει x, y και z άξονας. Οι άξονες είναι το αποτέλεσμα επιλογής βάσης του χώρου (ορθοκανονική συγκεκριμένα) και συγκεκριμένα διατεταγμένης. Με άλλα λόγια, οι τιμές x, y, z είναι οι συντεταγμένες του χώρου και είναι πλήρως εξαρτημένες από την βάση που επιλέξαμε. Από την άλλη, οι τριάδες του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ μένουν αμετάβλητες. Ατυχώς, ο συμοβλισμός των τριάδων αυτών και ο συμβολισμός των συντεταγμένων συμπίπτουν.

Τι είναι τελικά όμως αυτά τα x, y και z; Η απάντηση είναι απλή:

Ορισμός 2.4.1. *Για μία διατεταγμένη βάση S ανυσματικού χώρου V, διάστασης* $\dim(V)$, *μπορούμε να ορίσουμε σύνολο συναρτήσεων $\{e^i : V \to \mathbb{F}\}$ τέτοιες ώστε να ισχύει:*

$$e^i(\boldsymbol{u}) = a_i$$

*όπου a_i η i-ωστή συνιστώσα του $\boldsymbol{u}$ όταν γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στην βάση S. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **συναρτήσεις συντεταγμένων** (coordinate functions). Την συνιστώσα a_i πλέον θα την συμβολίζουμε πλέον u^i. Δηλαδή θα χρησιμοποιούμε το όνομα του ανύσματος και, ως εκθέτη, την ανάλογη συντεταγμένη.*

Εφόσον η συνάρτηση $e^i(\boldsymbol{u})$ δίνει πραγματικό αριθμό, βγάζει νόημα να ορίσουμε μία απειρωστή ποσότητα.

Ορισμός 2.4.2. *Ορίζουμε ως απειρωστή μεταβολή της i-ωστής συντεταγμένης ανύσματος $\boldsymbol{u}$ ανυσματικού χώρου V, σε βάση S την ποσότητα:*

$$du^i \equiv de^i(\boldsymbol{u})$$

και ως παράγωγο στην i-ωστή συνιστώσα του ανύσματος $\boldsymbol{u}$, μίας τυχούσης συνάρτησης $f : V \to W$ (όπου W ανυσματικός χώρος) ως προς την i-ωστή συντεταγμένη την ποσότητα:

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(\boldsymbol{u}) \equiv \lim_{\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{u}} \frac{f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u})}{e^i(\boldsymbol{v}) - e^i(\boldsymbol{u})}$$

Το αντικείμενο $\frac{\partial}{\partial u^i}$ είναι σημαντικό και είναι μια συνάρτηση που παίρνει μία συνάρτηση $f : V \to W$ και την αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση $f' : V \to W$, που αποκαλείται **μερική παράγωγος της f ως προς την i-ωστή συντεταγμένη**. Αυτό το αντικείμενο ονομάζεται **γραμμικός τελεστής**.

3 ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Αν και τα ανύσματα μας δίνουν μια ωραία γεωμετρική οπτική διαφόρων μαθηματικών δομών, δεν φαίνεται αρχικά να είναι πολύ ισχυρά ως έννοιες. Όμως, η Γραμμική Άλγεβρα ισχυρίζεται κάτι αλλόκοτο αλλά και πολύ όμορφο: Κάθε δομή η οποία εκφράζεται από γραμμικότητα μπορεί να αναχθεί σε πράξεις αριθμών. Αλλά για να φθάσουμε στο σημείο αυτό, πρέπει να εισαγάγουμε μία νέα έννοια:

Ορισμός 3.0.1. *Έστω ανυσματικός χώρος V. Ονομάζουμε **δυϊκό χώρο** (dual space) του V το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\{f : V \to \mathbb{F} : f \text{ γραμμική}\}$ και τον συμβολίζουμε V^*. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **γραμμικά συναρτησοειδή** (linear functionals).*

Παραδείγματα γραμμικών συναρτησοειδών:

- χώρος $\mathbb{R}^3$: η συνάρτηση μέτρου $(\|\vec{r}\|)$, η συνάρτηση απόκλισης $(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})$, η συνάρτηση συντεταγμένων $(x \text{ ή } y \text{ ή } z)$
- χώρος $P_5^{\mathbb{C}}$: το ολοκλήρωμα $(\int_a^b P(z)dz)$, συνάρτηση που δίνει τον συντελεστή μηδενικής τάξης του πολυωνύμου $(f(P) = P(0))$

Πόρισμα 3.0.1. *Ο V^* είναι ανυσματικός χώρος.*

Αυτό είναι πολύ απλό να δειχθεί. Δείτε παρακάτω:

Έστωσαν $f,\ g \in V^*$

Τότε

$$f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u}) = (f+g)(\boldsymbol{u})$$
$$af(\boldsymbol{u}) = (af)(\boldsymbol{u})$$

Τα ανωτέρω είναι προφανή και προκύπτουν από το πώς λειτουργούν οι συναρτήσεις. Η συνάρτηση $0 : V \to \mathbb{F}$, με σχέση $0(\boldsymbol{u}) = e_0$, δρα ως το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των στοιχείων αυτού του χώρου, και προφανώς κάθε συνάρτηση έχει αντίθετη.

Εφόσον, λοιπόν, τα στοιχεία του V^* είναι ανύσματα, τότε μπορούμε να βρούμε για αυτά μία βάση S^* και να τα γράψουμε ως γραμμικό συνδυασμό των ανυσμάτων αυτής της βάσης. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n} f_i \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{u})$$

Όταν πλέον γράφουμε έναν συντελεστή με δείκτη κάτω (Π.χ. u_i), θα υπονοούμε ότι είναι συνιστώσα συναρτησοειδούς, σε αντιδιαστολή με τους συντελεστές με δείκτη πάνω (Π.χ. u^i), οι οποίοι θα αναφέρονται σε συνιστώσες ανυσμάτων.

Όμως, εδώ έχουμε δύο προβλήματα:

- Δεν γνωρίζουμε το n, δηλαδή την διάσταση του δυϊκού χώρου, και χειρότερα
- Δεν γνωρίζουμε τις βάσεις $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{u})$

Στα προβλήματα αυτά ευτυχώς υπάρχει λύση. Ας θυμηθούμε ότι τα ανύσματα του χώρου V^* είναι γραμμικές συναρτήσεις, ως προς τα ανύσματα του V. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε βάση S του χώρου, μπορούμε να γράψουμε τον ανωτέρω συνδυασμό ως:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} f_i u^j \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j)\ (1)$$

Εφόσον η συνάρτηση $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ μας δίνει βαθμωτό, και οι συντελεστές $f_i u^j$ είναι βαθμωτά, σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια βάση S^* τέτοια ώστε να ισχύει το εξής:

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j = \delta_{ij}$$

Αυτές οι βάσεις ονομάζονται **συναρτήσεις συντεταγμένων**. Είναι πανομοιότυπες με αυτές που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο (2.4.1), αφού η $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{u})$ δίνει, προφανώς, αποτέλεσμα u^i.

Πόρισμα 3.0.2. *Έστω ανυσματικός χώρος V. Ο δυϊκός του χώρος V^* έχει διάσταση $\mathtt{dim}(V^*) = \mathtt{dim}(V)$.*

Ένα καταπληκτικό αποτέλεσμα από τα ανωτέρω είναι ότι μπορούμε να αναγράψουμε κάθε γραμμικό συναρτησοειδές ως απλό άθροισμα αριθμών. Συγκεκριμένα, απλοποιείται στην μορφή.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=0}^{\mathtt{dim}(V)} f_i u^i\ (2)$$

Ορισμός 3.0.2. *Η ποσότητα u^i ονομάζεται **ανταλλοίωτο** (contravariant) και η ποσότητα f_i **συναλλοίωτο** (covariant)*

Την ανωτέρω γραφή θα την απλοποιήσουμε, καθώς θα εμφανίζεται συχνά, στην **αθροιστική σύμβαση του Einstein**:

Ορισμός 3.0.3. *Ορίζουμε ως **αθροιστική σύμβαση του Einstein** (Einstein sum notation) την συντομογραφία:*

$$a_i b^i \equiv \sum_{i \in I} a_i b^i,\ I \text{ σύνολο δεικτών}$$

Η ανωτέρω γραφή, λοιπόν, έχει νόημα όταν:

- Το αντικείμενο με τον δείκτη **κάτω** είναι βάση ανύσματος και το αντικείμενο με τον δείκτη **πάνω** είναι ανταλλοίωτο. Η αθροιστική σύμβαση τότε αναφέρεται σε γραμμικό συνδυασμό ανύσματος.
- Το αντικείμενο με τον δείκτη **κάτω** είναι συναλλοίωτο και το αντικείμενο με τον δείκτη **πάνω** είναι ανταλλοίωτο. Η αθροιστική σύμβαση τότε αναφέρεται στην τιμή ενός συναρτησοειδούς που δρα σε ένα άνυσμα.

Λογικό είναι η επιλογή βάσης που επιλέχθηκε να φανεί αυθαίρετη και ίσως ουρανοκατέβατη σε πολλούς. Αλλά υπάρχει απόλυτο μαθηματικό νόημα για αυτήν την κίνηση. Καθώς οι συντεταγμένες ενός ανύσματος $\boldsymbol{u}$ είναι... τεταγμένες, αυτό σημαίνει ότι δυνάμεθα να αναπαραστήσουμε το άνυσμα ως έναν πίνακα $\mathtt{dim}(V) \times 1$ με στοιχεία τις συντεταγμένες του:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

Με έναν πίνακα μπορούμε να αναπαραστήσουμε και τα συναρτησοειδή, αφού είναι ανύσματα και αυτά. Το πρόβλημα είναι ότι δεν είναι πίνακες $\mathtt{dim}(V) \times 1$. Αλλά η σχέση (1) μας δίνει την μορφή του πίνακα. Η σχέση $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ δίνει αριθμό ως αποτέλεσμα. Ποια πράξη μεταξύ δύο πινάκων γνωρίζουμε η οποία να δίνει αριθμό ως αποτέλεσμα; Η απάντηση είναι ο πολλαπλασιασμός ενός οριζόντιου πίνακα με έναν κάθετο. Ο κάθετος έχει ήδη ορισθεί να είναι ο $\boldsymbol{u}$ άρα έχουμε τον οριζόντιο πίνακα $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f}^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{u}$$

απ' όπου προκύπτει ότι η επιλογή βάσης συναρτησοειδούς ως $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ είναι δόκιμη επιλογή.

Το ανωτέρω δεν αφορά μόνο διανύσματα του χώρου $\mathbb{R}^n$. Γίνεται υπενθύμιση ότι οι συντεταγμένες είναι αριθμοί σε οποιονδήποτε ανυσματικό χώρο, οπότε έχει νόημα να ορίσουμε πίνακα με αυτές για οποιονδήποτε χώρο. Για χώρους με $\mathtt{dim}(V) = \aleph_0$ (πεπερασμένους απειροδιάστατους), ο πίνακας είναι και αυτός απειροδιάστατος. Για χώρους με $\mathtt{dim}(V) = \beth_1$ (συνεχείς απειροδιάστατους), τα πράγματα αλλάζουν λίγο. Οι συναρτήσεις συντεταγμένων αλλάζουν στην κάτωθι μορφή:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}; i) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(k)\delta(i-k)dk = u(i)$$

Άρα ο γραμμικός συνδυασμός ενός συναρτησοειδούς συνεχούς απειροδιάστατου χώρου γράφεται ως:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u};k)dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\int_{-\infty}^{+\infty} u(k')\delta(k-k')dk'dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)u(k)dk\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε ακόμη την όμορφη αριθμητική σχέση που βρήκαμε με τους πεπερασμένους χώρους. Εδώ απλά το διακριτό άθροισμα γίνεται συνεχές. Για τα επόμενα, θα αγνοήσουμε, ως επί το πλείστον, τους συνεχείς απειροδιάστατους χώρους.

Ένα ερώτημα που ίσως τεθεί είναι αν υπάρχει ένα συναρτησοειδές αντίστοιχο για κάθε άνυσμα του χώρου V. Η απάντηση είναι πως το ερώτημα αυτό είναι πολύ γενικό για να απαντηθεί. Αλλά, με την εισαγωγή του εσωτερικού γινομένου και κατ'επέκτασιν της νόρμας, μπορούμε να δώσουμε νόημα σε αυτό το ερώτημα.

Η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι προφανώς συναρτησοειδές και άρα μπορεί κάποιος να την γράψει στην μορφή

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 \equiv u_i u^i$$

Κατ'αντιστοιχίαν με την γραφή $\boldsymbol{u}^2$ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Όμως τι είναι το συναλλοίωτο u_i; Την απάντηση την δίνει το εσωτερικό γινόμενο. Αν θυμηθούμε τα προηγούμενα, η νόρμα ορίζεται, ως προς το εσωτερικό γινόμενο, ως $\|\boldsymbol{u}\| \equiv \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle$.

Το εσωτερικό γινόμενο ανήκει σε έναν χώρο $\mathcal{T}^2(V)$ που ονομάζεται χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων, το σύνολο, δηλαδή, $\{\tau : V \times V \to \mathbb{F} | \ \tau \text{ διγραμμική}\}$, και ο οποίος είναι επίσης ανυσματικός χώρος, όπως απλά φαίνεται. Ως εκ τούτου, μπορούμε να βρούμε και για τα ανύσματα του χώρου αυτού μία βάση:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=0}^{n} \tau_i \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

Και με πανομοιότυπα επιχειρήματα με τα συναρτησοειδή, καταλήγουμε στην μορφή:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)}\sum_{k=0}^{\mathtt{dim}(V)} \tau_i u^j v^k \boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k)$$

Εδώ παρατηρούμε μία απόκλιση από την προηγούμενη διαδικασία. Το νέο $\boldsymbol{e}^i$ πλέον εξαρτάται και από το $\boldsymbol{e}_j$ και από το $\boldsymbol{e}_k$. Δηλαδή, στην πραγματικότητα, το i είναι δύο δείκτες, και μπορούμε να αναγράψουμε την βάση του χώρου των διγραμμικών απεικονίσεων ως το γινόμενο:

$$\boldsymbol{e}^{k\ell}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \delta_i^k \delta_j^\ell = \delta_{ki}\delta_{\ell j}$$

Και άρα, καταλήγουμε σε ένα ακόμη εκπληκτικό, αν και πλέον αναμενόμενο αποτέλεσμα: οι διγραμμικές απεικονίσεις μπορούν να αναγραφούν ως αριθμητικό άθροισμα. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \tau_{ij}u^i v^j$$

Πόρισμα 3.0.3. *Η διάσταση του χώρου* $\mathcal{T}^2(V)$ *είναι* $\mathtt{dim}(\mathcal{T}^2(V)) = (\mathtt{dim}(V))^2$

Προφανώς και το εσωτερικό γινόμενο αναγράφεται έτσι. Πλέον, θα συμβολίζουμε έτσι το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = g_{ij} u^i v^j$$

Αν απομονώσουμε το πρώτο κομμάτι της σχέσης αυτής, παρατηρούμε ότι εκφράζει συναρτησοειδές (άθροιση ως προς i και ένας ελεύθερος δείκτης, ο j, ο οποίος είναι κάτω). Ως εκ τούτου, ορίζουμε την ακόλουθη πράξη:

Ορισμός 3.0.4. *Ονομάζουμε* ***καταβίβαση δείκτη*** *(lowering of the index) την πράξη:*

$$u_i = g_{ji} u^j$$

όπου g_{ij} είναι η μετρική του χώρου V.

Τώρα λοιπόν ξέρουμε πώς μπορεί να εκφραστεί η νόρμα με την απλή αλγεβρική μορφή:

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = g_{ij} u^i u^j = u_j u^j$$

Οι διγραμμικές απεικονίσεις επεκτείνονται σε περισσότερες «διαστάσεις»

Ορισμός 3.0.5. *Έστω ανυσματικός χώρος V. Ονομάζουμε k-γραμμική απεικόνιση κάθε απεικόνιση της μορφής $\tau : \prod_k^{i=1} V \to \mathbb{F}$ (όπου $\prod_k^{i=1} V \equiv V \times V \times \overset{k\ \text{φορές}}{\cdots}$), η οποία ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:*

- $\forall i \leq k [\tau(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)_i, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = \tau(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) + \tau(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k)]$
- $\forall i \leq k [\tau(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, a\boldsymbol{u}_i, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = a\tau(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_i, \ldots, \boldsymbol{u}_k)]$

δηλαδή την απεικόνιση η οποία είναι γραμμική ως προς κάθε όρισμά της. Τον χώρο όλων αυτών των απεικονίσεων των συμβολίζουμε $\mathcal{T}^k(V)$

Και πάλι, ο χώρος των k-γραμμικών απεικονίσεων είναι ανυσματικός χώρος.

Πόρισμα 3.0.4. *Η διάσταση του χώρου $\mathcal{T}^k(V)$ είναι $\mathtt{dim}(\mathcal{T}^k(V)) = (\mathtt{dim}(V))^k$*

Για τις k-γραμμικές απεικονίσεις, η γραφή τους ως αριθμητικό άθροισμα γενικεύεται εύκολα από την μορφή της γραφής για την διγραμμική απεικόνιση. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{z}) = \tau_{i_1 i_2 \ldots i_k} a^{i_1} b^{i_2} \ldots z^{i_k}$$

Ορισμός 3.0.6. *Το αντικείμενο $\tau_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ονομάζεται* ***τανυστής*** *(tensor) τάξης $(0, k)$ ή, αλλιώς,* ***συναλλοίωτος τανυστής*** *(cotensor) τάξης k*

Πόρισμα 3.0.5. *Τα συναλλοίωτα είναι τανυστές τάξης $(0, 1)$*

Υπενθύμιση ότι έχει μεγάλη σημασία το αν ο δείκτης (ή οι δείκτες) είναι πάνω ή κάτω, καθώς δηλώνει την προέλευση του αντικειμένου με τον δείκτη. Σε ύστερο κομμάτι αυτού του φυλλαδίου, θα δούμε ότι υπάρχουν και αναμίξεις των θέσεων των δεικτών. Δεν θα είναι απαραίτητο να είναι όλοι πάνω ή κάτω. Επίσης, ο ορισμός (3.0.6) δεν είναι επίσημος ορισμός του τανυστή. Αυτός θα δωθεί αργότερα.

Κάτι που πρέπει επίσης να θυμηθούμε σχετικά με τα ανωτέρω είναι το εξής: Τα ανταλλοίωτα και οι τανυστές είναι ποσότητες πλήρως εξαρτημένες από τον ανυσματικό χώρο και την βάση του. **Δεν έχει νόημα** να μιλάμε για τα προαναφερθέντα αν δεν έχουμε **ορίσει** τον χώρο στον οποίο αναφέρονται. Εκτός αυτού, καθώς κρύβουν μέσα τους συντεταγμένες, αυτό σημαίνει ότι αλλάζουν αν αλλάξει η βάση. Οπότε, τώρα τίθεται το ερώτημα; Πώς μετασχηματίζονται τα ανταλλοίωτα και οι τανυστές, όταν μετασχηματιστεί μια βάση;

Από το θεώρημα $(2.1.2)$ γνωρίζουμε ότι, υπό προϋποθέσεις, αν έχουμε βάση S ενός ανυσματικού χώρου, τότε το σύνολο $S' = \{\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{u}_i\}$, με $\boldsymbol{e}_i \in S$, είναι επίσης βάση του χώρου. Μπορούμε τις βάσεις του S' να τις εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των βάσεων του S:

$$\boldsymbol{e}'_i = \sum_{j=1}^{dim(V)} C_i^j \boldsymbol{e}_j$$

όπου $C_j^i \in \mathbb{F}$ ένας αριθμός. Για ένα άνυσμα $\boldsymbol{u}$, πώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες του από την βάση S στην βάση S'; Το γράφουμε ως γραμμικό συνδυασμό και των δύο βάσεων:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{dim(V)} u'^i \boldsymbol{e}'_i = \sum_{i=1}^{dim(V)} u^i \boldsymbol{e}_i \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{dim(V)} u'^i \sum_{j=1}^{dim(V)} C_i^j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{dim(V)} u^i \boldsymbol{e}_i \Leftrightarrow \\
\sum_{i=1}^{dim(V)} \sum_{j=1}^{dim(V)} C_i^j u'^i \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{dim(V)} u^i \boldsymbol{e}_i \Leftrightarrow \\
\sum_{j=1}^{dim(V)} \sum_{i=1}^{dim(V)} C_i^j u'^i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{dim(V)} u^i \boldsymbol{e}_i \Leftrightarrow \\
C_j^i u'^j = u^i
\end{gathered}$$

Παρατηρούμε ότι το αντικείμενο που μετασχηματίζει τις βάσεις από την S στην S' είναι το αντικείμενο που -παραδόξως- μετασχηματίζει τα ανταλλοίωτα από την βάση S' στην βάση S.

Ορισμός 3.0.7. *Τα αντικείμενα T_j^i ονομάζονται **γραμμικοί μετασχηματισμοί** (linear transformations).*

Φυσικά, θέλουμε να ξέρουμε πώς να μετασχηματίσουμε τα ανταλλοίωτα βάσης S σε S'. Μία απρόσεκτη σκέψη που μπορεί κάποιος να κάνει είναι να διαιρέσουμε με την ποσότητα C_j^i. Όμως, αυτό είναι μεγάλο ατόπημα, καθώς οι εκφράσεις της μορφής $C_j^i u^j$ κρύβουν μέσα τους άθροισμα (ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης πάνω και κάτω). Το πρόβλημά μας πάλι θα λυθεί με την βοήθεια των πινάκων.

Οι αριθμοί C_j^i μπορούν να γραφούν με την μορφή πίνακα ως κάτωθι:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_{\mathtt{dim}(V)}^1 \\ C_1^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_1^{\mathtt{dim}(V)} & C_2^{\mathtt{dim}(V)} & \dots & C_{\mathtt{dim}(V)}^{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

Άρα, η σχέση στην οποία καταλήξαμε πριν αναγράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο πίνακας $\boldsymbol{C}$ είναι ο πίνακας U_{ij} στον οποίο αναφέρεται το θεώρημα $(2.1.2)$. Ως εκ τούτου, ξέρουμε ότι η ορίζουσά του είναι μη μηδενική και, άρα, έχει αντίστροφο πίνακα:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{u} \Leftrightarrow\\ \boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{u} \Leftrightarrow\\ \boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, ο πίνακας που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες (τα ανταλλοίωτα) από την βάση S στην βάση S' είναι ο αντίστροφος του πίνακα που μετασχηματίζει τα ανύσματα της βάσης S στην βάση S'.

Θεώρημα 3.0.1. *Έστω ανυσματικός χώρος V. Τα ανταλλοίωτά του αλλάζουν από βάση S σε βάση S' ως εξής:*

$$u'^i = T^i_j u^j$$

όπου T^i_j ο γραμμικός μετασχηματισμός ανταλλοιώτων από την βάση S στην βάση S' και σχετίζεται με τον μετασχηματισμό βάσης C^i_j ως εξής:

$$T^i_k C^k_j = \delta_{ij}$$

Δηλαδή είναι ο αντίστροφος πίνακας του μετασχηματισμού βάσεων.

Τώρα πρέπει να βρούμε πώς να μετασχηματίσουμε τους τανυστές από την βάση S στην βάση S'. Έστω μετασχηματισμός ανταλλοιώτων T^i_j μεταξύ των δύο βάσεων. Ισχύει:

$$\begin{aligned}\tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} a'^{i_1} b'^{i_2} \dots z'^{i_k} &= \tau_{i_1 i_2 \dots i_k} a^{i_1} b^{i_2} \dots z^{i_k} \Leftrightarrow\\ \tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} T^{i_1}_{j_1} a^{j_1} T^{i_2}_{j_2} b^{j_2} \dots T^{i_k}_{j_k} z^{j_k} &= \tau_{i_1 i_2 \dots i_k} a^{i_1} b^{i_2} \dots z^{i_k} \Leftrightarrow\\ T^{i_1}_{j_1} T^{i_2}_{j_2} \dots T^{i_k}_{j_k} \tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} a^{j_1} b^{j_2} \dots z^{j_k} &= \tau_{i_1 i_2 \dots i_k} a^{i_1} b^{i_2} \dots z^{i_k} \Rightarrow\\ T^{i_1}_{j_1} T^{i_2}_{j_2} \dots T^{i_k}_{j_k} \tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} &= \tau_{j_1 j_2 \dots j_k} \overset{\text{αντίστροφος μετ/σμός}}{\Leftrightarrow}\\ \tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} &= (T^{-1})^{j_1}_{i_1} (T^{-1})^{j_2}_{i_2} \dots (T^{-1})^{j_k}_{i_k} \tau_{j_1 j_2 \dots j_k}\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο κάτωθι:

Θεώρημα 3.0.2. *Ένας συναλλοίωτος τανυστής τάξης k, που προκύπτει από ανυσματικό χώρο V, μετασχηματίζεται από βάση S σε βάση S' ως κάτωθι:*

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_k} = (T^{-1})^{j_1}_{i_1} (T^{-1})^{j_2}_{i_2} \dots (T^{-1})^{j_k}_{i_k} \tau_{j_1 j_2 \dots j_k}$$

όπου T^{-1} συμβολίζει τον αντίστροφο γραμμικό μετασχηματισμό ανταλλοίωτων από την βάση S στην βάση S'.

3.1 Γραμμικοί τελεστές

Ορισμός 3.1.1. *Ονομάζουμε **γραμμικούς τελεστές** (linear operators), ενός ανυσματικού χώρου V, συναρτήσεις $\hat{F} : V \to V$ για τις οποίες ισχύει:*

- $\hat{F}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \hat{F}(\boldsymbol{u}) + \hat{F}(\boldsymbol{v})$
- $\hat{F}(a\boldsymbol{u}) = a\hat{F}(\boldsymbol{u})$

δηλαδή είναι γραμμικές ως προς τα ανύσματα του χώρου V.

Το συνηθέστερο παράδειγμα γραμμικού τελεστή είναι η παράγωγος. Πράγματι, παρατηρούμε ότι, π.χ., στον χώρο $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \vec{f}_t$$

Δηλαδή ο τελεστής $\frac{\partial}{\partial t}$ παίρνει ένα διανυσματικό πεδίο και δίνει ένα άλλο διανυσματικό πεδίο.

Επίσης συχνό παράδειγμα γραμμικού τελεστή, και το οποίο ήδη είδαμε, είναι οι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

Παραδείγματα λίγο πιο «κρυμμένων» γραμμικών τελεστών είναι η ροπή αδράνειας I που εμφανίζεται στην μηχανική των στερεών και ο τανυστής ροής Π της Ρευστομηχανικής.

Πόρισμα 3.1.1. *Ο χώρος των γραμμικών τελεστών $\mathcal{L}^1(V)$ είναι ανυσματικός χώρος.*

Ως εκ τούτου, όπως και τα υπόλοιπα αντικείμενα που έχουμε δει ως τώρα, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\boldsymbol{u}) &= \sum_{i=1}^{n} F^i \hat{e}_i(\boldsymbol{u}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\mathtt{dim}(V)} F^i u^j \hat{e}_i(\boldsymbol{e}_j)\end{aligned}$$

Τώρα πρέπει να βρούμε έκφραση για την $\hat{e}_i(\boldsymbol{e}_j)$ Γνωρίζουμε ότι η έκφραση αυτή πρέπει να δίνει ως απάντηση άνυσμα. Θα χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα παρόμοια με την βάση του δυϊκού χώρου. Όπως και πριν, η απάντηση θα δοθεί από τους πίνακες. Ήδη έχουμε θέσει τις συντεταγμένες του ανύσματος $\boldsymbol{u}$ να σχηματίζουν έναν κάθετο πίνακα. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός ενός τετραγωνικού πίνακα με ένα κάθετο πίνακα δίνει πάλι κάθετο πίνακα. Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι το i είναι στην πραγματικότητα δύο δείκτες και μια κατάλληλη επιλογή βάσης του χώρου των γραμμικών τελεστών θα ήταν:

$$\hat{e}_k^\ell(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{\ell j} \boldsymbol{e}_k$$

άρα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\boldsymbol{u}) &= \sum_{k=1}^{\mathtt{dim}(V)} \sum_{\ell=0}^{\mathtt{dim}(V)} \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(V)} F_\ell^k u^j \delta_{\ell j} \boldsymbol{e}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{\mathtt{dim}(V)} \sum_{\ell=0}^{\mathtt{dim}(V)} F_\ell^k u^\ell \boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση του Einstein, έχουμε ότι η k συνιστώσα του ανύσματος $\hat{F}\boldsymbol{u}$ είναι:

$$F_\ell^k u^\ell$$

Προφανώς, εφόσον ο δυϊκός χώρος V^* του V είναι επίσης ανυσματικός χώρος, έχει εξίσου νόημα να μιλήσουμε για τους γραμμικούς τελεστές $\tilde{F} : V^* \to V^*$, δηλαδή αυτούς που δρουν πάνω σε συναρτησοειδή. Ένα παράδειγμα είναι, πάλι, η παράγωγος.

Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία με τους τελεστές του χώρου V, καταλήγουμε ότι k συνιστώσα ενός συναρτησοειδούς $\tilde{F}\boldsymbol{f}$ είναι:

$$F_k^\ell f_\ell$$

Και οι δύο έχουν ακριβώς την ίδια τάξη αλλά και την ίδια διάσταση

Πόρισμα 3.1.2. *Έστωσαν ανυσματικός χώρος V και ο δυϊκός του χώρος V^*. Οι χώροι των γραμμικών τους τελεστών $\mathcal{L}^1(V)$ και $\mathcal{L}^1(V^*)$ έχουν διάσταση* $\mathtt{dim}(\mathcal{L}^1(V)) = \mathtt{dim}(\mathcal{L}^1(V^*)) = (\mathtt{dim}(V))^2 = (\mathtt{dim}(V^*))^2$

Όπως και με τις γραμμικές απεικονίσεις, μπορούμε να γενικεύσουμε τους γραμμικούς τελεστές:

Ορισμός 3.1.2. *Ονομάζουμε **k-γραμμικό τελεστή** (k-linear operator), κάθε συνάρτηση $f : \prod_{i=1}^{k} V \to V$ ή $f : \prod_{i=1}^{k} V^* \to V^*$, η οποία είναι γραμμική ως προς κάθε της όρισμα.*

Για τους πολυγραμμικούς τελεστές των ανταλλοιώτων και των συναλλοιώτων, καταλήγουμε, πάλι μέσω γραμμικών συνδυασμών, στα αθροίσματα:

$$F^{\mu}_{i_1 i_2 \dots i_k} u^{i_1} u^{i_2} \dots u^{i_k} \text{ πολυγραμμικός τελεστής ανταλλοιώτων}$$
$$F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{\mu} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} \text{ πολυγραμμικός τελεστής συναλλοιώτων}$$

Τα αντικείμενα $F^{\mu}_{i_1 i_2 \dots i_k}$ και $F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{\mu}$ ανήκουν στους χώρους $\mathcal{L}^k(V)$ και $\mathcal{L}^k(V^*)$ αντιστοίχως.

Πόρισμα 3.1.3. *Έστωσαν ανυσματικός χώρος V και ο δυϊκός του χώρος V^*. Οι χώροι των πολυγραμμικών τους τελεστών $\mathcal{L}^k(V)$ και $\mathcal{L}^k(V^*)$ έχουν διάσταση*
$\mathtt{dim}(\mathcal{L}^k(V)) = \mathtt{dim}(\mathcal{L}^k(V^*)) = (\mathtt{dim}(V))^{k+1} = (\mathtt{dim}(V^*))^{k+1}$

Το επόμενο βήμα που ενδεχομένως κάποιος να σκεφτόταν είναι τι θα πάρουμε αν συνδυάσουμε ένα συναρτησοειδές πάνω στο οποίο έχει δράσει ένας τελεστής (τάξης $(k,1)$) του και ένα άνυσμα στο οποίο επίσης έχει δράσει τελεστής (τάξης $(1,\ell)$). Θα έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}\boldsymbol{f}(\hat{F}\boldsymbol{u}) = \\
&F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{\mu} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} \boldsymbol{e}^{\mu}(F^{\nu}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} u^{j_1} u^{j_2} \dots u^{j_\ell} \boldsymbol{e}_{\nu}) = \\
&F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{\mu} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} F^{\nu}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} u^{j_1} u^{j_2} \dots u^{j_\ell} \boldsymbol{e}^{\mu}(\boldsymbol{e}_{\nu})
\end{aligned}$$

Όμως, πριν, ορίσαμε την βάση $\boldsymbol{e}^{\mu}(\boldsymbol{e}_{\nu})$ ως $\delta_{\mu\nu}$. Άρα, καταλήγουμε στο άθροισμα:

$$F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{\mu} F^{\mu}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} u^{j_1} u^{j_2} \dots u^{j_\ell}$$

Επειδή οι δείκτες μ αθροίζονται, μπορούμε να συμπτήξουμε το πρώτο μέρος στο εξής αντικείμενο:

$$F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell}$$

Αυτό το αντικείμενο ονομάζεται **μεικτός τανυστής τάξης** (k,l). Παρατηρούμε ότι η πράξη $\tilde{F}\boldsymbol{f}(\hat{F}\boldsymbol{u})$ καταλήγει σε μια μορφή που θυμίζει αυτήν των συναλλοίωτων τανυστών. Πράγματι, αυτή είναι η σχέση μίας πολυγραμμικής απεικόνισης, μόνον που αυτήν την φορά έχουμε ανάμειξη συναλλοιώτων και ανταλλοιώτων ποσοτήτων, εξού και η ονομασία «μεικτός». Με άλλα λόγια, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Ορισμός 3.1.3. *Έστωσαν ανυσματικός χώρος V και ο δυϊκός του χώρος V^*. Ορίζουμε ως χώρο $\mathcal{T}^k_\ell(V)$ των πολυγραμμικών απεικονίσεων του χώρου V το σύνολο των συναρτήσεων $\{\tau : \prod_{i=0}^{k} V^* \prod_{j=0}^{\ell} V \to \mathbb{F} : \tau \text{ γραμμικές ως προς κάθε όρισμα}\}$. Οι συναρτήσεις που ανήκουν στον χώρο $\mathcal{T}^k_\ell(V)$ ονομάζονται **μεικτοί τανυστές τάξης** (mixed tensors of rank) (k,l)*

(Για λόγους φορμαλισμού, ορίζουμε $\prod_{i=0}^{0} V^* \prod_{j=0}^{\ell} V = \prod_{j=0}^{\ell} V$, $\prod_{i=0}^{k} V^* \prod_{j=0}^{0} V = \prod_{i=0}^{k} V^*$ και $\prod_{i=0}^{0} V^* \prod_{j=0}^{0} V = \mathbb{F}$)

Δεν θα έπρεπε να εκπλήξει κανέναν το γεγονός ότι ο χώρος των μεικτών τανυστών είναι επίσης ανυσματικός χώρος. Ο χώρος αυτός έχει διάσταση $\mathtt{dim}(\mathcal{T}^k_\ell(V)) = [\mathtt{dim}(V)]^{k+l}$.

Έχοντας πλέον ορίσει συναλλοίωτους και μεικτούς τανυστές, φυσικό επόμενο είναι ο ορισμός των ανταλλοίωτων τανυστών:

Ορισμός 3.1.4. *Ονομάζουμε **ανταλλοίωτο τανυστή** (contravariant tensor) έναν τανυστή τάξης $(k,0)$, δηλαδή μία πολυγραμμική απεικόνιση $\tau : \prod_{i=0}^{k} V^* \to \mathbb{F}$*

Κάποιος μπορεί να διαπιστώσει ότι οι ανταλλοίωτοι τανυστές προκύπτουν από πράξεις της μορφής $\widetilde{F}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$, δηλαδή από την δράση ενός τελεστή συναλλοίωτου σε αυτό. Βέβαια, είναι πιθανό να γίνει η συσχέτιση ότι τότε οι πολυγραμμικοί τελεστές $\mathcal{L}^k(V^*)$ είναι επίσης ανταλλοίωτοι τανυστές. Αυτό είναι **ΛΑΘΟΣ**. Αρχικά, ένας τανυστής πρέπει να είναι απεικόνιση **στο αλγεβρικό σώμα στο οποίο ορίζονται οι ανυσματικοί χώροι με τους οποίους ασχολούμαστε**. Οι τελεστές, αντ' αυτού, δεν μας στέλνουν στο αλγεβρικό σώμα, μας στέλνουν σε έναν γενικό ανυσματικό χώρο. Φορμαλιστικά μιλώντας, ο τελεστής αυτός καθ'αυτός του συναλλοίωτου ήταν «τυφλός» στο όρισμα του. Με άλλα λόγια, δεν ήξερε αν αυτό που μετασχηματίζεται είναι ανταλλοίωτο ή συναλλοίωτο άνυσμα. Το γεγονός ότι γράψαμε τους δείκτες πάνω ή κάτω είναι καθαρά για λόγους συνέπειας, καθώς δεν υπάρχει καμμιά ποιοτική διαφορά στην συμπεριφορά μεταξύ των τελεστών $\mathcal{L}^k(V)$ και των τελεστών $\mathcal{L}^k(V^*)$.

Πόρισμα 3.1.4. *Το ανταλλοίωτο είναι τανυστής $(1,0)$ τάξης.*

Αρκετά πριν, είχαμε ορίσει την καταβίβαση δείκτη ως την πράξη $u_i = g_{ij}u^j$, όπου g_{ij} η μετρική του ανυσματικού χώρου V. Προφανώς, θα ήταν χρήσιμο αν μπορούσαμε να κάνουμε το αντίστροφο, δηλαδή να βρούμε μία πράξη $u_i \to u^i$.

Εφόσον θέλουμε να λάβουμε ένα ανταλλοίωτο, η πράξη αυτή θα είναι της μορφής

$$u^i = g^{ij}u_j$$

Το ερώτημα είναι λοιπόν «τί είναι το g^{ij}»;

$$\begin{aligned} u^i &= g^{ij}u_j \Leftrightarrow \\ u^i &= g^{ij}g_{jk}u_k \end{aligned}$$

Από αυτό, λοιπόν, παρατηρούμε ότι πρέπει να ισχύει η κάτωθι σχέση μεταξύ των ποσοτήτων g^{ij} και g_{ij}

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$$

Παρατηρούμε ότι, **αριθμητικά**, ο ανταλλοίωτος τανυστής g^{ij} είναι ίσος με τον αντίστροφο πίνακα της μετρικής.

Ορισμός 3.1.5. *Ονομάζουμε **αναβίβαση δείκτη** (raising of the index) την πράξη:*

$$u^i = g^{ij}u_j$$

όπου g^{ij} είναι ένας ανταλλοίωτος τανυστής τάξης 2, ο οποίος σχετίζεται με την μετρική g_{ij} του χώρου V ως εξής:

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k = \delta_{ik}$$

Αυτό που απομένει να πούμε είναι πώς μετασχηματίζεται ένας τανυστής τάξης (k,l). Θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με τον συναλλοίωτο τανυστή:

$$\begin{aligned} F'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} f'_{i_1} f'_{i_2} \dots f'_{i_k} u'^{j_1} u'^{j_2} \dots u'^{j_\ell} &= F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} u^{j_1} u^{j_2} \dots u^{j_\ell} \\ (T^{-1})^{\mu_1}_{i_1} (T^{-1})^{\mu_2}_{i_2} \dots (T^{-1})^{\mu_k}_{i_k} T^{j_1}_{\nu_1} T^{j_2}_{\nu_2} \dots T^{j_\ell}_{\nu_\ell} F'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} f_{\mu_1} f_{\mu_2} \dots f_{\mu_k} u^{\nu_1} u^{\nu_2} \dots u^{\nu_\ell} &= F^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k} u^{j_1} u^{j_2} \dots u^{j_\ell} \\ (T^{-1})^{\mu_1}_{i_1} (T^{-1})^{\mu_2}_{i_2} \dots (T^{-1})^{\mu_k}_{i_k} T^{j_1}_{\nu_1} T^{j_2}_{\nu_2} \dots T^{j_\ell}_{\nu_\ell} F'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} &= F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} \overset{\text{αντίστροφος μετ/σμός}}{\Leftrightarrow} \\ F'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} &= T^{i_1}_{\mu_1} T^{i_2}_{\mu_2} \dots T^{i_k}_{\mu_k} (T^{-1})^{\nu_1}_{j_1} (T^{-1})^{\nu_2}_{j_2} \dots (T^{-1})^{\nu_\ell}_{j_\ell} F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} \end{aligned}$$

Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

Θεώρημα 3.1.1. *Έστωσαν ανυσματικός χώρος V και ο δυϊκός χώρος του V^*. Ένας μεικτός τανυστής τάξης (k,l) των χώρων αυτών μετασχηματίζεται ως εξής:*

$$F'^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} = T^{i_1}_{\mu_1} T^{i_2}_{\mu_2} \dots T^{i_k}_{\mu_k} (T^{-1})^{\nu_1}_{j_1} (T^{-1})^{\nu_2}_{j_2} \dots (T^{-1})^{\nu_\ell}_{j_\ell} F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell}$$

όπου T^i_j και $(T^{-1})^i_j$ ο μετασχηματισμός ανταλλοίωτου και ο αντίστροφός του αντιστοίχως.

Αυτή η πρόταση συχνά χρησιμοποιείται ως ο ορισμός ενός τανυστή. Και είναι ικανοποιητικός για αρκετές εφαρμογές στην Φυσική. Μπορεί να φανεί περίεργο το γεγονός ότι ορίζονται με βάση το πώς συμπεριφέρονται, αλλά αυτό είναι συχνό φαινόμενο στα Μαθηματικά. Ούτως ή άλλως, τα αλγεβρικά σώματα και τα ανύσματα και αυτά ορίζονται μέσω της συμπεριφοράς τους. Και αυτό είναι που τα κάνει έννοιες χρήσιμες και την Άλγεβρα τόσο ισχυρό εργαλείο.

3.2 Φτιάχνοντας τανυστές - Το τανυστικό γινόμενο

Έχουμε μιλήσει σε ικανοποιητικό επίπεδο για αρκετές αλγεβρικές ιδιότητες των ανυσματικών χώρων και έχουμε κάνει μια εισαγωγή στους τανυστές, αλλά ο ορισμός των τανυστών ως πολυγραμμικές απεικονίσεις είναι δύσχρηστος· θα πρέπει να κατεβάζουμε συναρτήσεις από το μυαλό μας και να ελέγχουμε αν ικανοποιούν τα αξιώματα. Ή θα πρέπει να εμφανίζουμε «τυχαίες» ποσότητες κάτω από πολλαπλές βάσεις και να δούμε αν σχετίζονται όπως πρέπει κάτω από μετασχηματισμούς. Προφανώς, αυτό δεν είναι δυνατόν, ιδιαίτερα όταν έχουμε να κάνουμε με τανυστές μεγάλης τάξης. Ευτυχώς, η Άλγεβρα μας δίνει την λύση και, όπως θα δούμε, μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν τανυστή απλά με σειρές συναλλοιώτων και ανταλλοιώτων.

Ορισμός 3.2.1. *Έστωσαν ανυσματικοί χώροι V και W πεπερασμένης διάστασης, με βάσεις S_V και S_W.*

*Ονομάζουμε **ευθύ άθροισμα** (direct sum) τον ανυσματικό χώρο $V \oplus W = V \times W$ με ανύσματα τα οποία εκφράζονται ως κάτωθι:*

$$(\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$$

όπου $\boldsymbol{u} \in V$ και $\boldsymbol{w} \in W$ και με την πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό να ορίζονται ως:

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)$$
$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = (a\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{w})$$

Γιατί η ονομασία ευθύ άθροισμα; Η ονομασία οφείλεται στο πώς λειτουργούν η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Συγκεκριμένα, δρουν πάνω στο $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ σαν να αθροίζονταν τα στοιχεία του μεταξύ τους.

Έχοντας ορίσει μία πράξη που μοιάζει με άθροισμα, θέλουμε τώρα να ορίσουμε μια πράξη η οποία μοιάζει με γινόμενο. Αυτή η πράξη είναι το τανυστικό γινόμενο.

Ορισμός 3.2.2. *Ορίζουμε ως **τανυστικό γινόμενο** (tensor product) δύο ανυσματικών χώρων V και W πεπερασμένης διάστασης τον ανυσματικό χώρο $V \otimes W$, ο οποίος είναι το σύνολο αφίξεως της πράξης $\otimes : V \times W \to V \otimes W$, η οποία ικανοποιεί τις κάτωθι συνθήκες:*

- *Είναι διγραμμική ως προς τα ορίσματά της*
- *Για κάθε **διγραμμική** απεικόνιση $\tau : V \times W \to Z$ υπάρχει μοναδική **γραμμική** απεικόνιση $\tilde{\tau} : V \otimes W \to Z$ για την οποία να ισχύει το εξής: $\forall \boldsymbol{u} \in V, \boldsymbol{w} \in W [\tau(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = \tilde{\tau}(\otimes(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}))]$*

θα συμβολίζουμε την πράξη $\otimes(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ ως $(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w})$

Γιατί συμπεριφέρεται αυτή η πράξη ως γινόμενο; Σύμφωνα με τον ορισμό του, οι πράξεις της ανυσματικής πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι οι κάτωθι:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}_1 \otimes \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}_2 \otimes \boldsymbol{w}) &= [(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \otimes \boldsymbol{w}] \\ (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}_2) &= [\boldsymbol{u} \otimes (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2)] \\ a(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}) = [(a\boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{w}] &= [\boldsymbol{u} \otimes (a\boldsymbol{w})]\end{aligned}$$

Αυτά θυμίζουν αρκετά την επιμεριστική και την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, εξού και η ονομασία.

Εφόσον η πράξη του τανυστικού γινομένου είναι πολυγραμμική, αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να κάνουμε την εξής διαδικασία:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w}) &= \left(\left(\sum_{i=0}^{\mathtt{dim}(V)} u^i \boldsymbol{e}_i^V\right) \otimes \left(\sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(W)} w^j \boldsymbol{e}_j^W\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\mathtt{dim}(V)} \sum_{j=0}^{\mathtt{dim}(W)} u^i w^j (\boldsymbol{e}_i^V \otimes \boldsymbol{e}_j^W)\end{aligned}$$

Άρα, για δεδομένες βάσεις S_V και S_W των δύο ανυσματικών χώρων, το τανυστικό τους γινόμενο έχει βάση $\{(\boldsymbol{e}_i^V \otimes \boldsymbol{e}_j^W)\}$ και συντεταγμένες $u^i w^j$ πάνω σε αυτήν την βάση.

Πόρισμα 3.2.1. *Το τανυστικό γινόμενο δύο ανυσματικών χώρων έχει διάσταση* $\mathtt{dim}(V \otimes W) = \mathtt{dim}(V) \cdot \mathtt{dim}(W)$

Το τανυστικό γινόμενο μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε περισσότερους από δύο ανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 3.2.3. *Για ανυσματικούς χώρους V_i, $i \in \mathbb{N}$, ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο ως το σύνολο αφίξεως της πράξης $\bigotimes : \prod_{i=1}^n V_i \to \bigotimes_{i=1}^n V_i$, η οποία είναι πολυγραμμική και για κάθε πολυγραμμική απεικόνιση που δρα πάνω σε όλα τα V_i υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση που δρα πάνω στο τανυστικό γινόμενο και δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.*

Η διάσταση του χώρου αυτού είναι $\mathtt{dim}(\bigotimes_{i=1}^n V_i) = \prod_{i=1}^n \mathtt{dim}(V_i)$ και για βάσεις S_i των ανυσματικών χώρων V_i, η βάση και οι συντεταγμένες του τανυστικού γινομένου προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_{i_1 i_2 \dots i_n}^{\oplus} &= \left(\bigotimes_{j=1}^n \boldsymbol{e}_{i_j}\right) \\ \left(\bigotimes_{j=1}^n \boldsymbol{u}_j\right)_{i_1 i_2 \dots i_n} &= u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_n}\end{aligned}$$

Εμάς μας ενδιαφέρουν δύο ανυσματικοί χώροι: Ο κύριος χώρος με τον οποίο δουλεύουμε, ο V, και ο δυϊκός του χώρος, V^*. Έτσι, το τανυστικό γινόμενο θα αποτελείται από τους δύο αυτούς χώρους.

Πρέπει να τονισθεί εδώ κάτι. Δεν έχει γίνει λόγος περί μεταθετικότητας για το τανυστικό γινόμενο. Οπότε η σειρά των δεικτών **ΕΧΕΙ ΣΗΜΑΣΙΑ**. Και επειδή εδώ δουλεύουμε με συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα, όπου οι δείκτες μπορούν να βρίσκονται πάνω και κάτω, αυτό σημαίνει ότι γραφές της μορφής:

$$F_{j_1 j_2 \dots j_\ell}^{i_1 i_2 \dots i_k}$$

από εδώ και στο εξής ΔΕΝ θα είναι αποδεκτές. Αντ' αυτού, πρέπει να είναι καθαρή η σειρά των δεικτών, οπότε πρέπει να γράφουμε τέτοια αντικείμενα με έναν νέο τρόπο. Για παράδειγμα:

$$F^{i_1 i_2}{}_{i_3}{}^{i_4}$$

είναι το τανυστικό γινόμενο $V \otimes V \otimes V^* \otimes V$, ενώ το αντικείμενο

$$F_{i_1}{}^{i_2}{}_{i_3}{}^{i_4}$$

είναι το τανυστικό γινόμενο $V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V$.

Τώρα, λοιπόν, πρέπει να μεταφράσουμε αυτά που κάναμε στο προηγούμενο εδάφιο. Θα αρχίσουμε με τις διγραμμικές απεικονίσεις.

Όπως έχουμε πει, οι διγραμμικές απεικονίσεις είναι συναρτήσεις της μορφής $\tau : V \times V \to \mathbb{F}$, οι οποίες όταν δρουν σε δύο ανύσματα, δίνουν το παρακάτω αριθμητικό άθροισμα

$$\tau_{ij} u^i v^j$$

Τα u^i και v^j είναι ανταλλοίωτα, αφού έχουν πάνω τους δείκτες. Στο χωρίο όπου αιτολογήσαμε την αριθμητική/αλγεβρική μορφή της δράσης ενός συναρτησοειδούς πάνω σε ένα άνυσμα, είδαμε πώς τα ανταλλοίωτα μπορούν να συμβολισθούν ως κάθετοι πίνακες και τα συναρτησοειδή ως πολλαπλασιασμός πινάκων. Εδώ, λοιπόν, έχουμε δύο κάθετους πίνακες. Οπότε το ερώτημα είναι: Τι είναι αυτό που πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με δύο κάθετα ανύσματα ώστε να πάρουμε αριθμό; Η απάντηση είναι αυτή:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{\texttt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{\texttt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{\texttt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^{\texttt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι το ανωτέρο δίνει αριθμό που γράφεται ως το άθροισμα:

$$a_i b_j u^i v^j$$

Άρα, από το πώς ορίσαμε το τανυστικό γινόμενο, βλέπουμε ότι θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία διγραμμική απεικόνιση ως ένα τανυστικό γινόμενο συναρτησοειδών ($\tau \in V^* \otimes V^*$), με συντεταγμένες:

$$\tau_{ij} = a_i b_j$$

Αυτό εύκολα το επεκτείνουμε σε πολυγραμμικές απεικονίσεις:

Πόρισμα 3.2.2. *Μία πολυγραμμική απεικόνιση $\tau : \prod_{i=1}^{k} V \to \mathbb{F}$ μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο:*

$$\tau \in \bigotimes_{i=1}^{k} V^*$$

Τώρα μένει να μεταφράσουμε τους τανυστές της μορφής $\tau : \prod_{i=1}^{\ell} V^* \to \mathbb{F}$, αλλά αυτό είναι πλέον τετριμμένο. Με επιχειρήματα όπως τα ανωτέρω, καταλήγουμε στο εξής:

Πόρισμα 3.2.3. *Μία πολυγραμμική απεικόνιση $\tau : \prod_{i=1}^{k} V^* \to \mathbb{F}$ μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο:*

$$\tau \in \bigotimes_{i=1}^{k} V$$

Λιγότερο τετριμμένη αλλά και πάλι απλή είναι η περίπτωση των μεικτών τανυστών ($\tau : \prod_{i=0}^{k} V^* \prod_{j=0}^{\ell} V \to \mathbb{F}$). Θα αρχίσουμε με την απλή περίπτωση $\tau : V^* \times V \to \mathbb{F}$. Αυτή η περίπτωση γράφεται με αλγεβρικό άθροισμα ως εξής:

$$C^i_j f_i u^j$$

Ο προφανέστερος τρόπος να γράψει κανείς το ανωτέρω ως γινόμενο πινάκων είναι αυτός:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^1_1 & C^1_2 & \dots & C^1_{\mathtt{dim}(V)} \\ C^2_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C^{\mathtt{dim}(V)}_1 & C^{\mathtt{dim}(V)}_2 & \dots & C^{\mathtt{dim}(V)}_{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

Αυτό το γινόμενο δίνει αριθμό, όπως θέλουμε. Όμως, υπάρχει και ένα άλλο γινόμενο που μπορεί να δώσει ακριβώς το ίδιο:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ \dots \\ A^{\mathtt{dim}(V)}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^{\mathtt{dim}(V)} \end{bmatrix}$$

και άρα, ο τανυστής C^i_j μπορεί να αναγραφεί ως ένα ανταλλοίωτο και ένα συναλλοίωτο (ΜΕ ΑΥΤΗΝ ΤΗΝ ΣΕΙΡΑ) και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι τανυστές της μορφής $\tau : V^* \times V \to \mathbb{F}$ μπορούν να γραφούν ως τανυστικά γινόμενα $\tau \in V \otimes V^*$. Για τανυστές μεγαλύτερης τάξης, (k, l), παρατηρούμε ότι μπορεί να εκφραστεί από k ανταλλοίωτα αριστερά και l συναλλοίωτα δεξιά.

Πόρισμα 3.2.4. *Μία πολυγραμμική απεικόνιση $\tau : \prod_{i=1}^{k} V^* \prod_{j=1}^{\ell} V \to \mathbb{F}$ μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο:*

$$\tau \in \bigotimes_{i=1}^{k} V \bigotimes_{j=1}^{\ell} V^*$$

Όπως είπαμε, στον χώρο του τανυστικού γινομένου κάθε πολυγραμμική απεικόνιση τ των χώρων V και V^* αντιστοιχεί σε μία μοναδική γραμμική απεικόνιση $\tilde{\tau}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\tau = \tilde{\tau} \circ \otimes$$

Τώρα, εφόσον οι τανυστές κρύβουν μέσα τους συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα, μπορούμε να γενικεύσουμε την αναβίβαση και καταβίβαση δείκτη σε μεικτούς τανυστές:

Ορισμός 3.2.4. *Ονομάζουμε **καταβίβαση δείκτη** την πράξη:*

$$\tau^{i_1 \dots i_{m-1}}{}_{i_m}{}^{i_{m+1} \dots i_k} = g_{i_m j_m} \tau^{i_1 \dots j_m \dots i_k}$$

*και **αναβίβαση δείκτη** την πράξη:*

$$\tau_{i_1 \dots i_{m-1}}{}^{i_m}{}_{i_{m+1} \dots i_k} = g^{i_m j_m} \tau_{i_1 \dots j_m \dots i_k}$$

όπου g_{ij} η μετρική του χώρου.

Προφανώς, μπορούμε να «στοιβάξουμε» τις αναβιβάσεις και τις καταβιβάσεις, ακόμα και να τις αναμείξουμε. Υπενθύμιση ότι δεν έχει σημασία η σειρά των όρων, μόνο των δεικτών, καθώς οι όροι είναι βαθμωτά και άρα ισχύει η μεταθετική ιδιότητα.

3.3 Το σύμβολο Levi-Civita

Μία πράξη που χρησιμοποιούμε συχνά με τα διανύσματα του γεωμετρικού χώρου είναι το εξωτερικό γινόμενο. Παρατηρούμε με το εξωτερικό γινόμενο ότι:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

δηλαδή είναι μία διγραμμική απεικόνιση, όμως μία η οποία μας δίνει άνυσμα ως αποτέλεσμα. Είναι, δηλαδή, ένας πολυγραμμικός τελεστής που δρα σε ανύσματα. Άρα, μπορεί να γραφεί μία σχέση της μορφής $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ως γινόμενο βαθμωτών:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = X^{\mu}_{ij} a^i b^j \boldsymbol{e}_\mu$$

Τι είναι το X^{μ}_{ij} όμως; Ας θυμηθούμε τον μνημονικό κανόνα του εξωτερικού γινομένου στις 3 διαστάσεις:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix} = (a^y b^z - a^z b^y)\boldsymbol{e}_x + (a^z b^x - a^x b^z)\boldsymbol{e}_y + (a^x b^y - a^y b^x)\boldsymbol{e}_z$$

Παρατηρούμε μία κυκλική εναλλαγή των συντεταγμένων των ανυσμάτων αλλά και γενικά ένα μοτίβο στην σχέση. Συγκεκριμένα:

- Με την εναλλαγή των συμβόλων των συντεταγμένων ($a^i b^j \leftrightarrow a^j b^i$) αλλάζει το πρόσημο.
- Καμμία συντεταγμένη δεν εμφανίζεται διπλή.
- Αν θεωρήσουμε ως την «μητρική» σειρά των συμβόλων των συντεταγμένων την $x - y - z$ ($a^x b^x \boldsymbol{e}_z$), τότε, κάθε μετάθεση (ij) («το i στην θέση του j και το j στην θέση του i», περιττή μετάθεση) αλλάζει πρόσημο, ενώ κάθε μετάθεση (ijk) («το i στην θέση του j, το j στην θέση του k και το k στην θέση του i», άρτια μετάθεση) το διατηρεί ως έχει.

Τα ανωτέρω συνοψίζονται στο επονομαζόμενο **σύμβολο Levi-Civita** (Levi-Civita symbol):

$$\epsilon^i_{jk} = \begin{cases} +1, \text{αν } \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} = \sigma(x, y, z) \text{ άρτια μετάθεση} \\ -1, \text{αν } \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} = \sigma(x, y, z) \text{ περιττή μετάθεση} \\ 0, (i = j) \vee (j = k) \vee (k = i) \end{cases}$$

Φυσικά, το ανωτέρω ισχύει μόνον στις 3 διαστάσεις, αφού το εξωτερικό γινόμενο ορίζεται μόνον εκεί. Όμως, μπορούμε να το γενικεύσουμε ως κάτωθι:

Ορισμός 3.3.1. *Ονομάζουμε **σύμβολο Levi-Civita** στις k διαστάσεις την συνάρτηση:*

$$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_k} = \begin{cases} +1, \text{αν } \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{bmatrix} = \sigma(1, 2, \dots, k) \text{ άρτια μετάθεση} \\ -1, \text{αν } \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{bmatrix} = \sigma(1, 2, \dots, k) \text{ περιττή μετάθεση} \\ 0, \exists m, n \in \{1, 2 \dots k\} : i_m = i_n \end{cases}$$

με την ιδιότητα:

$$\forall m, n \in \{1, 2, \dots, k\} : \epsilon^{\dots i_m \dots i_n \dots} = -\epsilon^{\dots i_n \dots i_m \dots}$$

Θα παρατηρήσατε ότι πλέον γράψαμε όλους τους δείκτες πάνω, αντί τον έναν μόνον πάνω. Αυτό έγινε γιατί πλέον δεν έχει το σύμβολο αυτό την έννοια τελεστή, καθώς δεν ορίζεται το εξωτερικό γινόμενο εκτός των τριών διαστάσεων. Αντ’ αυτού, το σύμβολο Levi-Civita παριστάνει έναν **ψευδοτανυστή** (pseudotensor). Γιατί όμως ονομάζεται ψευδοτανυστής;

Η απάντηση είναι επειδή το σύμβολο αυτό δεν μετασχηματίζεται όπως οι τανυστές. Στην πραγματικότητα **μένει αμετάβλητος** σε όλες τις αλλαγές βάσης, καθώς η τιμή του δεν εξαρτάται από τις βάσεις αυτές καθ’αυτές, αλλά την σειρά τους. Παρ’όλα αυτά, μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε σαν τανυστή. Μάλιστα, μπορούμε να καταβιβάσουμε τους δείκτες του, όπως με τους πραγματικούς τανυστές:

$$\text{Έστω } g_{ij} \text{ μετρική του χώρου } V\text{, διάστασης } k$$
$$\epsilon^{i_1 \dots i_{m-1}}{}_{i_m}{}^{i_{m+1} \dots i_k} = g_{i_m j_m} \epsilon^{i_1 \dots j_m \dots i_k}$$
$$\epsilon_{i_1 \dots i_k} = g_{i_1 j_1} \dots g_{i_k j_k} \epsilon^{j_1 \dots j_k}$$

Εκτός αυτού, η μαθηματική υπόσταση του συμβόλου Levi-Civita δεν είναι σύμφωνη με τον μαθηματικό ορισμό του τανυστή. Στον τρισδιάστατο χώρο συμπεριφέρεται ως τελεστής και όχι πολυγραμμικό συναρτησοειδές!

Χρήσιμες ιδιότητες του συμβόλου Levi-Civita:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{j_1 \dots j_k} &= \delta^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} \\ \epsilon_{i_1 \dots i_n \dots i_k} \epsilon^{j_1 \dots j_n \dots j_k} &= n! \delta^{j_{n+1} \dots j_k}_{i_{n+1} \dots i_k} \\ \epsilon_{i_1 \dots i_k} \epsilon^{i_1 \dots i_k} &= k! \end{aligned}$$

4 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

4.1 Αποδείξεις θεωρημάτων

Θεώρημα. *(2.1.1) Έστω βάση $S = e_j$ του χώρου V. Το σύνολο $S' = \{(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{u}_j)\}$ είναι επίσης βάση του χώρου V, αν* det$(U) \neq 0$*, όπου U ο πίνακας με στοιχεία $U_{ji} = u_{ji} + \delta_{ji}$, u_{ji} οι συνιστώσες των $\boldsymbol{u}_j$ στην βάση S και δ_{ij} το δέλτα του Κρόνεκερ.*

Απόδειξη. Τα ανύσματα $\boldsymbol{u}_j$ γράφονται ως κάτωθι:

$$\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=0}^{n} u_{ji} \boldsymbol{e}_i$$

Γενικά, θέλουμε να ισχύει η ισοδυναμία:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{u}_j) = 0 \Leftrightarrow \forall j \leq n (a_n = 0)$$

Από το δεξιό μέλος της ισοδυναμίας

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\boldsymbol{e}_j + \sum_{i=0}^{n} u_{ji} \boldsymbol{e}_i \right) = 0 \\
\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=0}^{n} (u_{ji} + \delta_{ji}) \boldsymbol{e}_i = 0 \\
\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_j (u_{ji} + \delta_{ji}) \boldsymbol{e}_i = 0 \\
\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j (u_{ji} + \delta_{ji}) \boldsymbol{e}_i = 0
\end{aligned}
$$

Προφανώς, αφού $S = \{\boldsymbol{e}_n\}$ βάση, τότε ισχύει:

$$
\forall i \leq n \left(\sum_{j=0}^{n} a_j (u_{ji} + \delta_{ji}) = 0 \right) \ (a)
$$

Αυτό είναι σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους.

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές, αν θεωρήσουμε τις a_j ως τις μεταβλητές, παριστάνουν ευθείες που τέμνουν την αρχή των αξόνων. Όπως είναι προφανές, δύο ευθείες μη παράλληλες τέμνουν η μία την άλλη σε πολύ ένα σημείο. Οπότε, έτσι ώστε να επάγεται από την (a) μόνον ότι $\forall j \leq n (a_j = 0)$, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι δεν υπάρχουν ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

Δύο ευθείες της μορφής $bx = y,\ ax = y$ είναι παράλληλες, αν $b \propto a$. Στις εξισώσεις της (a), αν ίσχυε αυτό, τότε η τυχούσα σταθερά αναλογίας απαλοίφεται. Ως εκ τούτου, πρέπει απλά να εξασφαλίσουμε ότι κανένας όρος $u_{ji} + \delta_{ji}$ είναι ίσος με άλλον. Αυτό συμβαίνει μόνον όταν:

$$
\texttt{det}(U) \neq 0
$$

όπου $U_{ji} = u_{ji} + \delta_{ji}$. ∎

5 ΣΥΝΟΨΗ

Έστω ανυσματικός χώρος V, μετρικής g_{ij}

- u^i: Ανταλλοίωτο, συνιστώσα ανύσματος χώρου V
- u_i: Συναλλοίωτο, συνιστώσα συναρτησοειδούς χώρου V^*
- $a_i b^i = \sum_{i=1}^{\mathtt{dim}(V)} a_i b^i$: Αθροιστική σύμβαση Αϊνστάιν
- $g^{ij} g_{ij} = \delta_{ij}$: Μετρική και η αντίστροφή της
- $u_i = g_{ij} u^j$: Καταβίβαση δείκτη
- $u^i = g^{ij} u_j$: Αναβίβαση δείκτη
- ${F'}^{i_1 i_2 \dots i_k}{}_{j_1 j_2 \dots j_\ell} = T^{i_1}{}_{\mu_1} T^{i_2}{}_{\mu_2} \dots T^{i_k}{}_{\mu_k} (T^{-1})^{\nu_1}{}_{j_1} (T^{-1})^{\nu_2}{}_{j_2} \dots (T^{-1})^{\nu_\ell}{}_{j_\ell} F^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell}$: Μετασχηματισμός τανυστή
- $\langle u, v \rangle = u_i v^i = g_{ij} u^j v^i$: Εσωτερικό γινόμενο
- $\|\boldsymbol{u}\|^2 = u_i u^i = g_{ij} u^j u^i$: Νόρμα
- $[\mathtt{dist}_V(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})]^2 = u_i u^i + v_i v^i - u_i v^i - v_i u^i$: Απόσταση