

## HOJA 1: Momento Angular y Armónicos Esféricos

### Teoría General del Momento Angular

1. Considérense los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , donde  $\vec{u}^2 = \vec{v}^2 = 1$ , y las proyecciones del operador angular a lo largo de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :  $L_u = \vec{u} \cdot \vec{L}$ ,  $L_v = \vec{v} \cdot \vec{L}$ .
  - (a) Hallar el conmutador  $c = [L_u, L_v]$ .
  - (b) ¿Bajo qué condiciones puede ocurrir  $c = 0$ ? ¿Bajo cuáles  $c = i\hbar L_z$ ?
2. Mostrar que en un estado  $\psi$  tal que  $L_z\psi = m\hbar\psi$ , el valor medio de la proyección del momento angular sobre un eje  $z'$  que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $z$  es igual a su valor clásico  $m\hbar \cos \alpha$ .
3. Ya que las componentes del momento angular no conmutan, su medida simultánea es imposible. Demostrar que en un estado  $|j, m\rangle$  la mayor precisión en la medida de  $J_x$  y  $J_y$  se obtiene cuando  $|m| = j$ .
4. Sea un sistema de momento angular  $j = 1$ . Considérese una base de los estados tercera componente de momento angular bien definida.
  - (a) Escribir en dicha base el operador correspondiente a la proyección del momento angular sobre un eje caracterizado por los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ .
  - (b) Hallar el estado del sistema tal que la componente del momento angular sobre el eje sea  $+1$ .
  - (c) Dar la probabilidad de que al medir la proyección sobre el eje  $z$  nos dé cada uno los valores  $+1, 0$  y  $-1$ .
  - (d) ¿Cuáles son los resultados posibles de la medida de  $J_z^2$ ? Dar sus respectivas probabilidades y el valor medio de  $J_z^2$ .
5. Consideremos un sistema con momento angular  $\ell = 1$  cuyo espacio de estados está generado por la base  $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$  de autoestados simultáneos de  $L^2$  y  $L_z$ . El estado del sistema es  $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|-\rangle$ , con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ .
  - (a) Calcular el valor medio de  $\vec{L}$  en función de  $\alpha, \beta, \gamma$ .
  - (b) Calcular  $\langle L_x^2 \rangle, \langle L_y^2 \rangle, \langle L_z^2 \rangle$ .

## Armónicos Esféricos

6. Sea el operador paridad  $P$ , que realiza una inversión de coordenadas  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Su acción sobre una función arbitraria  $F(\vec{r})$  es:

$$PF(\vec{r}) = F(-\vec{r}).$$

- (a) Demostrar que la inversión de coordenadas en coordenadas polares implica

$$(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \phi),$$

- (b) Probar que  $[P, L_i] = 0$ .

- (c) Probar que los armónicos esféricos tienen paridad definida (*i.e.*, que son autoestados de  $P$ ), y que viene dada por

$$PY_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m Y_\ell^m(\theta, \phi).$$

7. Una forma alternativa a la vista en clase de obtener la forma explícita de los armónicos esféricos es la siguiente. Partimos de la solución a los autoestados de  $L_z$ , que nos da la dependencia en  $\phi$ :

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = F_\ell^m(\theta) e^{im\phi},$$

y usamos el hecho de que  $|m| \leq \ell$ , es decir

$$L_+ Y_\ell^\ell(\theta, \phi) = 0.$$

Entonces, se pide

- (a) Resolver esta ecuación para obtener  $Y_\ell^\ell(\theta, \phi)$  (debidamente normalizado).  
 (b) Aplicar  $L_-$  iterativamente para obtener  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  para cualquier  $m$ .  
 (c) Demostrar que se obtiene el mismo resultado partiendo de la solución  $L_- Y_\ell^{-\ell}(\theta, \phi) = 0$  y aplicando después  $L_+$ .
8. Sabiendo que

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi},$$

hallar los restantes armónicos esféricos correspondientes a  $\ell = 2$ .

9. Sea la función de ondas para una partícula en tres dimensiones:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{2\sqrt{14\pi}} (1 - r) e^{-r/2}, \quad r = |\vec{r}|.$$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir el momento angular se obtenga  $\ell = 0$ ? ¿Y  $\ell = 1$ ?

10. Sea una partícula caracterizada por la función de onda:

$$\phi(\vec{r}) = Ae^{-r^2} (z + 2iy).$$

Si se miden el momento angular y su tercera componente, ¿qué valores son posibles y cuál es la probabilidad para cada uno?

## HOJA 2: Potenciales Centrales. El Átomo de Hidrógeno.

1. Determinar la forma de las funciones de onda en coordenadas esféricas de una partícula en un pozo de potencial dado por

$$\begin{cases} V(r) = 0, & r < a \\ V(r) = \infty, & r > a \end{cases}$$

En término de dichas funciones estudiar cómo se pueden obtener los niveles de energía.

2. Un electrón en un átomo tiene una función de onda, en coordenadas esféricas, dada por

$$\Psi(\vec{r}) = \Phi(r) \left( \alpha Y_2^2(\theta, \phi) + \beta Y_2^{-1}(\theta, \phi) \right),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes complejas y  $\Phi(r)$  cumple:

$$\int_0^\infty r^2 dr \Phi(r)^* \Phi(r) = 1.$$

- (a) ¿Qué relación debe cumplirse entre  $\alpha$  y  $\beta$  para que  $\Psi(\vec{r})$  esté normalizada a la unidad?
  - (b) ¿Tiene el electrón definido por la función  $\Psi(\vec{r})$  una posición definida?
  - (c) ¿Cuáles son los posibles resultados de una medida de  $L^2$  y  $L_z$ , y con qué probabilidades?
  - (d) ¿Cuánto deben valer  $|\alpha|$  y  $|\beta|$  de modo que  $\langle L_z \rangle_\Psi = 0$ ? Averiguar, en dicho caso, cuál es la probabilidad de que la tercera componente del momento angular orbital del electrón tenga un valor de  $-\hbar$ .
  - (e) En el supuesto del apartado anterior, calcular  $\langle L_x \rangle$  y  $\langle L_y \rangle$ .
3. Calcular la probabilidad de que un electrón en un átomo de hidrógeno en el estado fundamental se encuentre a una distancia del núcleo superior a la máxima permitida clásicamente por la energía de dicho estado.

4. La función de onda normalizada de un estado de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{81} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_B^{-3/2} \left( \frac{r}{r_B} \right)^2 e^{-\frac{r}{3r_B}} \sin \theta \cos \theta \cos \phi.$$

- (a) ¿Es  $\Psi$  autoestado de los operadores  $H, L^2$  y  $L_z$ ?

Consideremos ahora que el átomo de hidrógeno se encuentra en un estado  $|\Phi\rangle$  del que se sabe lo siguiente:

- i.  $|\Phi\rangle$  es autoestado de  $L_z$  con autovalor  $\hbar$ .
  - ii. Al medir la energía sólo pueden obtenerse valores menores que -1 eV.
  - iii. La probabilidad de encontrarlo en el estado  $|\Psi\rangle$  es 1/4.
  - iv. La energía media es -2.455 eV.
- (b) ¿Cuál es la forma general de la función  $\Phi$  y su dependencia temporal?
- (c) ¿Variará en el tiempo la densidad de probabilidad? ¿Cómo?

5. Dada la función de onda del electrón excitado al nivel  $n = 3$  del átomo de hidrógeno:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Psi_{322}(\vec{r}) + \Psi_{32-1}(\vec{r}) \right),$$

donde  $\Psi_{322}$  y  $\Psi_{32-1}$  están normalizadas a la unidad:

- (a) Calcular los valores medios de  $L^2$  y  $L_z^2$ .
- (b) Hallar la probabilidad de obtener  $\hbar$  y la de obtener 0 al medir la tercera componente del momento angular orbital.
- (c) ¿Para qué valor de  $r$  es máxima la densidad de probabilidad radial?
- (d) Calcular el valor esperado de la coordenada radial.

### HOJA 3: Espín

1. En clase vimos que la representación matricial de una partícula con  $s = 1/2$  venía dada, en la base estándar  $|s, m\rangle$ , por

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Demostrar que son una representación del momento angular de  $s = 1/2$ , es decir, cumplen su álgebra

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k,$$

y que todos ellos tienen autovalores  $\pm\hbar/2$ .

- (b) Calcular las representaciones matriciales de  $S^2$  y  $S_{\pm}$ .

2. Calcular la representación matricial para una partícula de espín 1, expresando los operadores  $S_x, S_y, S_z, S^2$  y  $S_{\pm}$  en la base estándar  $|s, m\rangle$ .

3. En una cierta base el operador asociado a la tercera componente de spin para un sistema de spin 1/2 toma la forma:

$$S_z = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobar que dicho operador puede, en efecto, representar el observable  $S_z$ . Escoger, de entre las matrices siguientes, una tal que con el  $S_z$  dado pueda representar el observable  $S_y$ :

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix},$$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\hbar}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar, en la misma base en que están escritos  $S_z$  y  $S_y$ , la matriz asociada a  $S_x$ .

4. Estudiar el operador de helicidad, que describe la proyección del espín de una partícula en su dirección de movimiento:

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}$$

- (a) Demostrar que  $h$  es un observable escalar.
- (b) Demostrar que, para una partícula libre, la helicidad es una magnitud conservada.
- (c) Calcular la representación matricial de  $h$  en la base estándar  $|s, m\rangle$ .

5. Considerar la función de ondas un electron dada por:

$$|\Psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle,$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $|\pm\rangle \equiv |1/2, \pm 1/2\rangle$  los autoestados de  $S_z$ . Determinar  $\alpha$  y  $\beta$  sabiendo que:

$$\langle S_x \rangle = \hbar\sqrt{2}/4 \quad \text{y} \quad \langle S_y \rangle = -\hbar\sqrt{2}/4.$$

6. Sea  $|\Psi\rangle$  el estado de una partícula de espín  $1/2$ . Se mide el valor medio de  $S_z$  en ese estado y el resultado es  $\sqrt{3}/4\hbar$ .

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir  $S_z$  en el estado  $|\Psi\rangle$  obtengamos como resultado  $\hbar/2$ ? ¿Y  $-\hbar/2$ ?
- (b) Suponiendo que el valor medio de la proyección sobre el eje  $x$  es  $\langle S_x \rangle = g\hbar$  y que el coeficiente del estado  $|+\rangle$  es real y positivo, ¿entre qué límites puede variar  $g$ ?
- (c) Se mide  $S_x$  y se obtiene como resultados de la medida  $g = 0$  y  $g = 3/8$ , pero el aparato no puede decidir entre ambos estados. Escoger aquél de los dos valores que sea compatible con los límites encontrados en el apartado anterior.
- (d) Calcular los valores posibles que puede dar la medida del valor medio  $\langle S_y \rangle$  en el estado  $|\Psi\rangle$ .

7. Un chorro de electrones que se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

se hace pasar por un aparato tipo Stern-Gerlach que mide la tercera componente del spin.

- (a) ¿Qué porcentaje de electrones dará como resultado de la medida  $S_z = 1/2$ ? Si se gira el aparato de modo que mida la componente  $x$  del espín, ¿qué porcentaje de los electrones tendrá  $S_x = 1/2$ ?
- (b) Repetir el apartado anterior, pero ahora con un chorro de electrones en el que el 50% se hallan en el estado  $|+\rangle$  y el otro 50% en el  $|-\rangle$ .

8. Considerar una partícula con espín 1/2 dada por el siguiente espinor:

$$\psi(\vec{r}, s) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \psi_+(\vec{r}) &= f(r) \left[ Y_0^0(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^0(\theta, \phi) \right], \\ \psi_-(\vec{r}) &= \frac{f(r)}{\sqrt{3}} \left[ Y_1^1(\theta, \phi) - Y_1^0(\theta, \phi) \right]. \end{aligned}$$

- (a) ¿Qué condición debe cumplir  $f(r)$  para que la función de onda esté normalizada?
- (b) Si medimos  $S_z$ , ¿qué valores podremos obtener y con qué probabilidad? ¿Y si medimos  $S_x$ ? ¿Y  $S^2$ ?
- (c) Repetir el apartado anterior pero ahora para  $L_z$  o  $L^2$ .
- (d) Hemos medido  $L^2$  y obtenido 0, ¿cuál será la función de onda justo después de nuestra medida? Misma pregunta si hubiésemos la medida nos hubiese dado  $2\hbar^2$ .

## HOJA 4: Suma de Momentos Angulares

1. Construir la tabla de coeficientes Clebsch-Gordan correspondiente a la suma de dos momentos angulares que más os gusten.
2. Un sistema contiene dos partículas con momentos angulares  $\ell_1 = \ell_2 = 1$ . Si  $\vec{J}$  es el momento angular total, expresar los autoestados de  $J^2$  y  $J_z$  en términos de los autoestados de la tercera componente del momento angular de cada partícula. Podéis ayudaros de las tablas de coeficientes Clebsch-Gordan.
3. Considerar un átomo de deuterio, compuesto por núcleo de espín  $I = 1$  y un electrón con momento angular  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , donde  $\vec{L}$  es su momento angular orbital y  $\vec{S}$  su espín. El momento angular total del átomo es  $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$ .  
¿Cuáles son los valores posibles para los números cuánticos  $J$  y  $F$  para un átomo en el estado  $1s$ ? ¿Y para uno en el estado  $2p$ ?
4. Un sistema consta de tres partículas, con  $\ell_1 = 7, \ell_2 = 1, \ell_3 = 6, m_1 = -7, m_2 = 0$  y  $m_3 = -6$ . Si se mide el momento angular total, ¿qué valores son posibles?
5. Considerar el momento angular total de un sistema de tres partículas de espín  $1/2$ .  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ . Los estados  $\{|m_1 m_2 m_3\rangle\}$  serán los autoestados simultáneos de  $S_{1z}, S_{2z}$  y  $S_{3z}$ . Dar una base de autoestados comunes de  $S^2$  y  $S_z$  en términos de  $\{|m_1 m_2 m_3\rangle\}$ .



## HOJA 5: Partículas Idénticas

1. El postulado de simetrización (o el Teorema de Espín-Estadística en teoría cuántica de campos) nos dice que las partículas con espín entero son bosones y las de espín semientero son fermiones. Asumiendo que esto se cumple para las partículas fundamentales, demostrar que también se cumplirá para partículas compuestas (o sea, aquellas formadas por partículas fundamentales).
2. El barión  $\Delta^{++}$  es un fermión formado por 3 quarks, tiene carga eléctrica +2 y  $s=3/2$ . Demostrar que  $\Delta^{++}$  no puede existir, pero existe. What?
3. Considerar dos partículas en los estados  $|\phi\rangle$  y  $|\chi\rangle$ , sometidas a un experimento para medir un observable  $A$ , pero que por desgracia no es capaz de distinguir las cargas de las partículas. Llamaremos  $|a_i\rangle$  a los autoestados del observable  $A$ :

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

- (a) Asumir que las dos partículas son electrones ¿Cuál será la probabilidad de medir los valores  $(a_i, a_j)$  al medir  $A$ ? ¿Qué ocurre si  $a_i = a_j$ ?
  - (b) ¿Qué ocurre si las dos partículas son un electrón y un positrón?
  - (c) Repetir el ejercicio con piones cargados  $\pi^\pm$ , que uno es la antipartícula del otro igual que electrón y positrón, pero los piones son bosones (espín 0).
4. **Fuerza de intercambio.** Considerar un sistema de dos partículas idénticas con funciones de onda

$$\psi_\pm(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi(\vec{r}_1)\chi(\vec{r}_2) \pm \chi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2)] ,$$

con  $\phi$  y  $\chi$  dos funciones de onda normalizadas y ortogonales, y el signo  $\pm$  aplica a bosones o fermiones. Demostrar que el valor esperado de la posición relativa  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$  es mayor para fermiones que bosones, como si los fermiones sintiesen una *fuerza* de repulsión.

5. Sea  $H_0$  el Hamiltoniano de una partícula libre de espín  $s$ . Supongamos que actúa sólo sobre las variables espaciales y que sólo tiene tres niveles de energías, todos equidistantes:  $0$ ,  $\hbar\omega_0$  y  $2\hbar\omega_0$  (con  $\omega_0$  una constante real y positiva). Asumimos también que son no degenerados en el espacio orbital de estados, pero que tienen degeneración  $2s + 1$  en el espacio de espín.

(a) Considerar un sistema de 3 electrones cuyo Hamiltoniano es:

$$H = H_0(1) + H_0(2) + H_0(3)$$

Encontrar los niveles de energía de  $H$  y el grado de degeneración de cada uno de ellos.  
¿Cuál es el espín total de cada estado?

(b) Lo mismo para un sistema de bosones idénticos de espín  $0$ .

6. Considerar dos partículas de  $s=1/2$  que no interactúan entre sí sometidas a un potencial tipo pozo cuadrado unidimensional, infinito y de anchura  $L$ . Calcular las funciones de onda de los estados correspondientes a los tres valores más bajos de la energía.

7. La función de ondas de dos partículas idénticas de espín  $1/2$  viene dada por

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{L} \left( \sin \frac{\pi x_1}{L} \sin \frac{2\pi x_2}{L} - \sin \frac{2\pi x_1}{L} \sin \frac{\pi x_2}{L} \right) | - - \rangle$$

y es un autoestado de un Hamiltoniano que no contiene términos dependientes del espín.

- (a) Escribir el Hamiltoniano y la energía del estado.  
(b) Describir la forma del autoestado y el valor del espín.  
(c) A partir de este autoestado, obtener otro con la misma energía cuyo espín difiera en una unidad  $\hbar$ .
8. Considerar un átomo con tres electrones y supongamos que no existe interacción entre los electrones. ¿Cuál será la energía del estado fundamental y de los primeros estados excitados?

## HOJA 6: Teoría de Perturbaciones Estacionarias. Estructura Fina e Hiperfina del átomo de hidrógeno.

### Teoría de Perturbaciones Estacionaria

1. Demostrar que si nos quedamos a primer orden en teoría de perturbaciones, el error que estamos cometiendo será menor que  $(\Delta H_1)^2/\Delta E_{\min}$ , donde  $\Delta H_1$  es el error estándar de la perturbación  $H_1$  sobre el estado sin perturbar, y  $\Delta E_{\min}$  la diferencia de energía con el nivel más cercano.

2. Considerar una partícula en un potencial armónico:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

- (a) Añadimos una pequeña perturbación cuadrática:

$$H_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 \lambda x^2, \quad \lambda \ll 1.$$

Calcular las correcciones a la energía a primer y segundo orden en teoría de perturbaciones. ¿Cómo se comparan con las soluciones exactas? Calcular también con las correcciones a primer orden a los autoestados.

- (b) Considerar ahora que la perturbación es cúbica:

$$H_1 = \lambda \sqrt{\frac{m^3 \omega^5}{8\hbar}} x^3$$

Calcular las correcciones a la energía y a los autoestados igual que antes (aunque no tengamos solución analítica con la que comparar). ¿Qué tipo de efecto produce esta perturbación?

3. Una partícula que se encuentra en un pozo de potencial de paredes infinitas es sometida a la acción de otro potencial de la forma:

$$V(x) = \lambda \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Obtener la corrección a los niveles de energía a primer orden en teoría de perturbaciones.

4. Dos electrones se hallan confinados en una dimensión. Podemos aproximar el potencial confinante mediante un oscilador armónico de frecuencia  $\omega$ . Además, los electrones interactúan débilmente mediante un potencial:

$$V' = \beta(x_1 - x_2)^2 (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2).$$

- (a) Calcular las cuatro energías más bajas del sistema en primer orden de teoría de perturbaciones.
- (b) Escribir la función de onda perturbada del estado fundamental a primer orden.

5. Dado el Hamiltoniano

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix},$$

con las autofunciones

$$\phi_1 = (1, 0, 0), \quad \phi_2 = (0, 1, 0), \quad \phi_3 = (0, 0, 1),$$

y dada la perturbación

$$\lambda W = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

hallar las correcciones a la energía y a las autofunciones a primer orden en teoría de perturbaciones.

6. Una partícula está confinada en un potencial tridimensional de la forma:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

con  $2\omega_x = 2\omega_y = \omega_z$ .

- (a) Obtener los tres autovalores más bajos de la energía, su degeneración y la forma de las autofunciones asociadas.
- (b) Considerar ahora la perturbación:

$$V'(x, y, z) = \lambda xyz^2.$$

Calcular las correcciones a las energías anteriores a primer orden en teoría de perturbaciones.

- (c) Calcular la corrección más importante a la función de ondas del estado de energía más baja.

7. Una partícula se encuentra en el interior de un cubo de lado  $L$  (el potencial es cero dentro del cubo e infinito fuera de él). Calcular las correcciones a la energía de su estado fundamental debida a la perturbación:

$$V' = -\lambda \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right).$$

Escribir la corrección de la función de onda del estado fundamental a primer orden en teoría de perturbaciones.

8. Obtener a primer orden de teoría de perturbaciones la corrección de los niveles de energía de un pozo de potencial de paredes infinitas y anchura  $L$  producida por la acción de un potencial de la forma:

$$V'(x) = \lambda x.$$

9. **Átomo de helio.** Considerar el Hamiltoniano de los dos electrones en el átomo de helio, olvidándonos del espín de los electrones y demás efectos que hemos estudiado. Tenemos:

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_1} - \frac{Ze^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

- (a) Despreciando la interacción entre los electrones, calcular la energía del estado fundamental. Compararla con el resultado experimental de  $E_0^{\text{exp}} = -78.975$  eV.
- (b) Utilizando teoría de perturbaciones para incluir la interacción entre electrones, calcular la energía del estado fundamental a primer orden. ¿Se parece más al experimental?
10. **Método variacional.** La teoría de perturbaciones es útil cuando sabemos resolver el Hamiltoniano sin perturbar, pero qué ocurre si no? ¿O si no podemos separar la parte complicada como algo pequeño? Por suerte tenemos otros métodos aproximados, como el método variacional.

La idea básica consiste en proponer un conjunto de soluciones  $\psi_\alpha$  dependientes de un conjunto de parámetros desconocidos  $\alpha$ , calcular el valor esperado de  $H$  sobre estos estados y encontrar los  $\alpha$  que lo minimicen. Como sabemos que es imposible encontrar un estado con energía inferior al estado fundamental real del problema, el  $\langle H \rangle_{\psi_\alpha}$  que hemos encontrado nos dará una cota superior a la energía del estado fundamental real. Cuanto más se parezcan las  $\psi_\alpha$  a los autoestados reales, más se parecerá esta cota al valor real. Podéis estudiar este método en más detalle en el capítulo E<sub>XI</sub> del Cohen, pero aquí vamos a verlo con un ejemplo:

Considerad de nuevo el átomo de helio del problema anterior y aplicad el método variacional con las funciones:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, Z^*) = \psi_{100}(\vec{r}_1, Z^*) \psi_{100}(\vec{r}_2, Z^*),$$

es decir, como si tuviesemos dos electrones sin interacción pero sintiendo una carga efectiva del núcleo de  $Z^*e$ . Calculad el valor esperado de  $H$  sobre este estado y minimizar sobre  $Z^*$  para obtener el límite superior a la energía del estado fundamental. ¿Cómo se compara con la experimental? ¿y con la obtenida usando teoría de perturbaciones?

## Estructura Fina e Hiperfina

11. Estudiar la estructura fina del estado fundamental del átomo de hidrógeno.
12. **Línea de 21cm.** Considerar el espectro hiperfino del átomo de hidrógeno.
- (a) ¿Cuál es el estado fundamental y el primer estado excitado?
  - (b) ¿Cuál será la longitud de onda, en cm, del fotón emitido por un electrón al caer del primer estado excitado al fundamental? ¿Por qué importa este número?
13. **Efecto Stark.** Considerar un átomo de hidrógeno en el estado 1s y el operador momento dipolar  $q\vec{r}$ .
- (a) Demostrar que el momento dipolar es cero:

$$\vec{d} = \langle q\vec{r} \rangle_{1s} = 0.$$

- (b) El efecto Stark consiste en aplicar un campo eléctrico uniforme, de modo que añadimos al Hamiltoniano un nuevo término:

$$H_S = -q\vec{E}.$$

Demostrar que este campo induce un momento magnético del estado 1s en la dirección del campo eléctrico, y calcular su susceptibilidad eléctrica.

Nota: asumid que  $H_0 \gg H_S \gg H_F$ , de forma que podéis obviar la estructura fina para este ejercicio.

## HOJA 7: Teoría de Perturbaciones Dependiente del Tiempo.

1. Una partícula de masa  $m$  se mueve en un pozo de potencial infinito en una dimensión definido por  $V_0 = 0$  para  $0 \leq x \leq a$ , con  $V_0 = \infty$  para todo otro punto. Las autofunciones y autovalores de la energía vienen dados por

$$\phi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n^{(0)} = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2ma^2}.$$

En el instante  $t = 0$  aparece una perturbación  $H_1 = \hbar\omega_0$  para  $a/4 \leq x \leq 3a/4$ , con  $H_1$  nulo en todo otro punto y  $\omega_0$  una constante real y positiva. En dicho instante  $t = 0$  la partícula se encuentra en el estado  $\phi_3^{(0)}$ . Calcular la probabilidad de encontrarla en el estado  $\phi_1^{(0)}$  al cabo de un tiempo  $t$ .

2. Una partícula de masa  $m$  se encuentra en el estado fundamental  $\phi_0^{(0)}$  de un oscilador armónico en una dimensión de Hamiltoniano

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

En el instante  $t = 0$  aparece bruscamente una perturbación de tal forma que el nuevo Hamiltoniano para  $t > 0$  es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x - d)^2,$$

donde  $d$  es un parámetro real con dimensiones de longitud. Calcular cuál es la probabilidad de que en el instante posterior  $t$  la partícula se encuentre en el primer nivel excitado  $\phi_1^{(0)}$  del oscilador original.

3. Una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  se encuentra en un pozo de potencial infinito en una dimensión definido por  $V_0 = 0$  para  $0 \leq x \leq a$ , con  $V_0 = \infty$  para todo otro punto. En el instante  $t = 0$  la partícula tiene como función de onda  $\phi_n^0(x)$ . En dicho instante aparece un campo eléctrico constante  $E$ , generando la perturbación

$$H_1 = -eEx.$$

Calcular la probabilidad a primer orden en teoría de perturbaciones de que al cabo de un tiempo  $t$  la partícula pase a estar en un autoestado  $\phi_k^0$ , con  $k \neq n$ .

4. Derivar la regla de oro de Fermi para una perturbación sinusoidal. ¿Cómo se compara con la obtenida para la perturbación constante?

5. Una partícula  $C$  de masa  $2m$  sometida a una perturbación  $H_1$  puede desintegrarse de dos maneras:

$$C \rightarrow A + \gamma, \quad C \rightarrow B + \gamma,$$

donde  $A$  y  $B$  son partículas de masas  $m$  y  $1.5m$ , respectivamente, y  $\gamma$  es un fotón. Suponer que en el proceso las partículas masivas finales no tienen prácticamente energía cinética. Además, las amplitudes de transición relevantes se suponen iguales

$$\langle C|H_1|A + \gamma \rangle = \langle C|H_1|B + \gamma \rangle.$$

Calcular la probabilidad relativa de ambos modos de desintegración.

6. Al estudiar la interacción nuclear fuerte se define el isospín  $\vec{I}$ , asociado a cada partícula y que se comporta como un espín (es decir, es un momento angular y trabajamos en su base  $|I, I_3\rangle$ , con  $I_3$  su tercera componente). Desde éste punto de vista, el protón y el neutrón se describen como los dos componentes de un espinor, un doblete con  $I = 1/2$ :

$$\begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix},$$

donde el símbolo  $\sim$  esconde el resto de la función de onda que no dependa del isospín, pero que será común a ambos  $p$  y  $n$  (también esconde la aproximación de que la masa del protón y neutrón son iguales, tal y como asumiremos aquí).

Lo mismo aplica a mesones, aunque cada uno en su *multiplete*. Por ejemplo, los piones cargados  $\pi^\pm$  y neutro  $\pi^0$ , o los mesones  $\rho$  se representan como un triplete con  $I = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} |\pi^+\rangle \\ |\pi^0\rangle \\ |\pi^-\rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |\rho^+\rangle \\ |\rho^0\rangle \\ |\rho^-\rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} |1, 1\rangle \\ |1, 0\rangle \\ |1, -1\rangle \end{pmatrix},$$

los kaones como dobletes con  $I = 1/2$ :

$$\begin{pmatrix} |K^+\rangle \\ |K^0\rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |\bar{K}^0\rangle \\ |K^-\rangle \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} |1/2, 1/2\rangle \\ |1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix},$$

mientras que otros como el  $\omega$  son singletes de isospín ( $I = 0$ ). Y así para todas las partículas conocidas compuestas por quarks.

La motivación de todo esto es que la interacción fuerte conserva el isospín. Sabiendo esto, considerar una desintegración  $A \rightarrow B + C$  mediada por la interacción fuerte:

- Demstrar que la probabilidad de desintegración  $\Gamma(A \rightarrow B + C)$  es proporcional al cuadrado de los coeficientes Clebsch-Gordan entre el isospín de la partícula inicial  $A$  y las finales  $B + C$ .
- Despreciando las diferencias de masas de las partículas de cada multiplete, calcular los cocientes

$$\frac{\Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\Gamma(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma(\omega \rightarrow K^0 \bar{K}^0)}{\Gamma(\omega \rightarrow K^+ K^-)}.$$