

# Seifert 流形的模 2 Thurston 范数

北京大学拓扑讨论班, 2024.5.23.

杜晓明, 华南理工大学数学学院

本讲稿可扫码下载:



## 1 背景

### 1.1 三个问题

**问题 1** 给定一个三维流形, 如何确定至少需要多少个四面体来粘成它? 所需四面体的最小数目称为该流形的 **最小剖分数**

注: 这里并不是单纯剖分。此时允许某个四面体的一个面粘到自身另一个面。

注: 有闭流形的版本与带尖端流形 (cusped manifold) 的版本。带尖端流形的版本需要用不带顶点的四面体。

**问题 2** 闭三维流形中给定一个 2 维同调类, 如何确定代表这个同调类的嵌入曲面的最小亏格?

注: 如果三维流形  $M$  带边, 则需要考虑  $H_2(M, \partial M) \cong H^1(M)$  中的元素。

注: 代表的曲面可能不连通。更准确的量应该是 Thurston 范数: 对  $\alpha \in H_2(M)$ , 令

$$\|\alpha\|_{\text{Th}} = \min_{[S]=\alpha} \left\{ \sum_{S \text{ 的全体连通分支 } S_i} \max\{0, -\chi(S_i)\} \right\}$$

对不可约流形其实不需要取  $\max$ 。以上的定义是针对  $H_2(M; \mathbb{Z})$  中的同调类的。在取倍数之下，该定义具有齐次性，从而可以连续地延拓到线性空间  $H_2(M; \mathbb{R})$  上。此时可以验证它的确能够成为一个范数，于是能做更多的运算。

---

**问题 3** 三维流形中给定一个模 2 系数的 2 维同调类，如何确定代表这个同调类的可定向或者不可定向的嵌入曲面的最小亏格？

例：  $H_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$  中唯一的非平凡元素被  $\mathbb{RP}^2$  代表，不可定向嵌入曲面的最小亏格为 1。

注：不可定向曲面的亏格定义成连通和分解中的  $\mathbb{RP}^2$  数目

注：同样可以考虑  $\mathbb{Z}_2$ -Thurston 范数（简称  $\mathbb{Z}_2$  范数）：对  $\alpha \in H_2(M; \mathbb{Z}_2)$ ，令

$$\|\alpha\|_{\mathbb{Z}_2\text{-Th}} = \min_{[S]=\alpha} \left\{ \sum_{S \text{ 的全体连通分支 } S_i} \max\{0, -\chi(S_i)\} \right\}$$

由于模 2 同调群的元素均是 2 阶的，故  $\mathbb{Z}_2$  范数其实并不算真正的范数，只是类比地借用一下名字。

---

注：模 2 系数的 2 维同调类有两个直和分解部分：

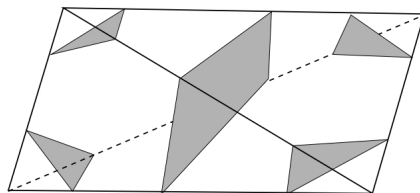
1. 来源于整系数的 2 维同调类，
2. 来源于 1 维同调群中的 2 阶元

第一部分的元素可以被可定向曲面代表，实现 Thurston 范数的那些可定向曲面必然也实现  $\mathbb{Z}_2$  范数。第二部分中的元素只能被不可定向曲面代表。

---

## 1.2 以上三个问题之间的联系

**定义（正规曲面）** 给定一个剖分之后，若一个关于该剖分处于一般位置的嵌入曲面与每个四面体的交都是如下类型的圆盘（称为这个四面体中的 **正规圆盘**，一共 7 种），则这个曲面称为关于该剖分的 **正规曲面（normal surface）**。



如果一个正规曲面可定向，则它与每个四面体的交被 14 个数字决定，分别对应于 7 类正规圆盘再加上定向。于是一共有  $14t$  个变量（ $t$  是剖分中的四面体数目）。每个四面体中后 3 类正规圆盘只能出现一类。此外各个四面体内的正规圆盘需要在边界上良好地拼接，因此又给出上述  $14t$  个变量之间的一些约束（对于闭三维流形来说这些约束有  $12t$  个：每个三角形面贡献 3 个约束，每个四面体贡献 4 个三角形面）。满足以上约束条件的  $14t$  个变量组成关于该剖分的 **正规曲面解空间**。

---

### 1.2.1 从剖分到 Thurston 范数

给定一个剖分之后，若代表一个 2 维同调类的一般位置的嵌入曲面达到最小亏格，则该曲面必然是一个正规曲面。为了确定各个同调类的 Thurston 范数，只需要在正规曲面解空间中逐个点检查。在给定带  $t$  个四面体的剖分之下，存在确定各同调类的 Thurston 范数的算法，算法复杂度关于  $t$  是指数增长的（Cooper-Tillmann, 2009）。

注：还有许多其它工具在比较广泛的条件下也能决定 Thurston 范数。比如：

- Seiberg-Witten 不变量（Kronheimer-Mrowka 1997）
- Heegaard-Floer 同调（Ozsvath-Szabo 2004）
- twisted Alexander 多项式（Friedl-Vidussi 2015）
- $L^2$ -torsion（Friedl-Lück 2019）
- 流形基本群的 profinite 完备化（Boileau-Friedl 2020）

然而，不管用哪种方法，在最一般的情形下 Thurston 范数问题是 NP hard 的（Lackenby 2021）。

---

### 1.2.2 从 $\mathbb{Z}_2$ 范数到最小剖分数

固定一个三维流形。假设已经取到最小剖分，则在各个四面体中的正规圆盘数目不能太多。这些正规圆盘的数目又与拼出来的曲面的欧拉数有关。从而各个模 2 同调类的  $\mathbb{Z}_2$  范数不能太大。利用这个想法，可以通过各个模 2 同调类的  $\mathbb{Z}_2$  范数来产生该流形最小剖分数的一些下界 (Jaco-Rubinstein-Tillmann 2013)。

注：只能用  $\mathbb{Z}_2$  范数，不能用原始的 Thurston 范数，原因是当正规圆盘的数目比较小时，没法保证拼接曲面的过程是整体保定向的。

如果还能对一个三维流形构造出某个剖分，满足四面体数刚好达到由各个模 2 同调类的  $\mathbb{Z}_2$  范数给出的下界，那么就确定这个流形的最小剖分数。对球几何三维流形中的两个无限族、 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  流形中的一些无限族、以及穿孔环面上的一些映射环面（看成带尖端的流形），人们正是这样得到它们的最小剖分数的 (Jaco-Rubinstein-Spreer-Tillmann 2020)。

---

## 1.3 对 $\mathbb{Z}_2$ 范数的估计

利用 Heegaard-Floer 同调，可以得到  $\mathbb{Z}_2$  范数的一个下界 (Ni-Wu 2015)。

注：对于模 2 系数的情形，Heegaard-Floer 同调并不像整系数时那么有效。此时只能得到下界，得不到精确值。

以上用 Heegaard-Floer 同调得到的下界，对有些例子的确就是  $\mathbb{Z}_2$  范数具体的值，但是对有些例子并不是：存在一个 Seifert 流形，其中某个模 2 同调类的最小亏格嵌入曲面的欧拉数不等于用 Heegaard-Floer 同调得到的下界 (Levine-Ruberman-Strle 2015)。

我们能对所有可定向 Seifert 流形中的全体模 2 同调类，给出一个精确计算它们的  $\mathbb{Z}_2$  范数的算法，并且算法的复杂度关于 Seifert 流形各条奇异纤维处的手术系数是多项式增长的 (D. 2022)。

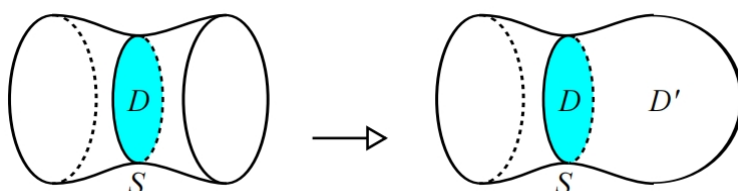
---

## 2 预备工具

**定义 (Seifert 流形)** 曲面  $\Sigma$  与圆周乘积挖去若干条圆周纤维的正则纤维化邻域然后再填充入实心环得到的流形称为 Seifert 流形, 记为  $(\Sigma, (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$ , 其中  $a_i, b_i$  记录了实心环填充时边界环面上的同胚。

注: 三维流形 Thurston-Perelman 几何化定理中八类几何化流形中的六类都是 Seifert 流形。尽管 Seifert 流形的数量远不如双曲流形, 但是一些三维流形的一般性理论都会先拿结构相对简单的 Seifert 流形作试验。

**定义 (几何不可压缩曲面)** 对三维流形  $M$ , 一个不同胚于球面的嵌入曲面  $S \subseteq M$  称为 **几何不可压缩 (geometrically incompressible)**, 如果对任意满足  $\partial D = D \cap S$  的嵌入圆盘  $D \subseteq M$  都有  $\partial D$  也在  $S$  上界定圆盘。



注: 当三维流形带边时, 几何不可压缩曲面可能带边并且边界落在三维流形的边界上。

注: 与代数不可压缩 (曲面的包含映射在基本群上诱导出嵌入) 区别开。对于可定向曲面, 两者等价; 对于不可定向曲面, 两者不等价。下面会说到, 在基本群有限的透镜空间中, 存在几何不可压缩的高亏格不可定向曲面。

### 2.1 核心想法

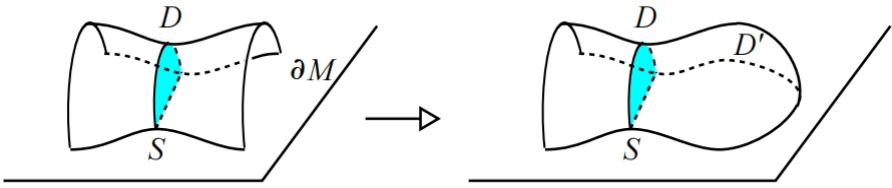
1, 达到最小亏格的曲面必然是几何不可压缩的, 因此只需找出几何不可压缩曲面的全部候选者, 然后逐个看是否代表给定的模 2 同调类, 并取能代表的那些的最小亏格。

2, 把三维流形沿着某个嵌入曲面切开。与该嵌入曲面横截相交的那些几何不可压缩曲面限制在切开后的每一块上之后, 仍然是几何不可压缩的。

因此我们只需把流形切开成许多较简单的小块, 逐块地分析其中的几何不可压缩曲面。

注：反过来，在切开的两块上的带边的几何不可压缩曲面拼起来，不一定能得到切开之前的流形中的不可压缩曲面。需要加上 **边界不可压缩** 的条件。若在切开的两块中的两个曲面不可压缩、但是边界可压缩，则这些边界压缩圆盘有可能会在切开之前拼出一个整体的压缩圆盘。

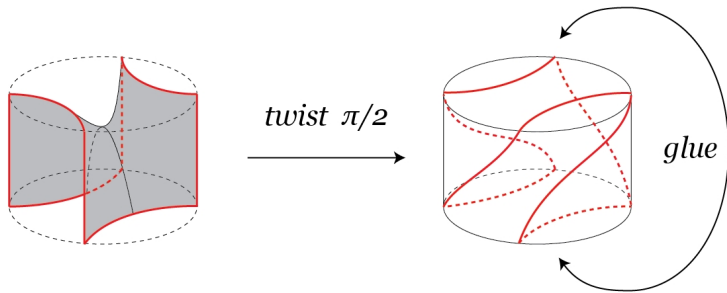
**定义（边界不可压缩）** 对带边三维流形  $M$ ，一个满足  $S$  与  $\partial M$  横截并且  $\partial S \subset \partial M$  的嵌入曲面  $S \subseteq M$  称为 **边界不可压缩（boundary incompressible）**，如果一旦有嵌入的圆盘  $D \subseteq M$  满足  $\partial D$  由两条弧  $a = \partial D \cap S$  与  $b = \partial D \cap \partial M$  组成，则  $a$  必然可以沿着  $S$  同伦到  $\partial S$  中。



## 2.2 实心环中的几何不可压缩曲面

实心环中 **可定向** 的几何不可压缩曲面只有两种可能，一是可以同伦到边界的环带，二是腰部圆盘。

实心环中 **不可定向** 的几何不可压缩曲面有非常多。



注：这些带边的不可定向曲面显然不是边界不可压缩的。

可以通过粘上另一个实心环来得到透镜空间中不可定向、高亏格的几何不可压缩曲面。

**定理 (Bredon-Wood 1969)** 给定实心环边界上的一条  $(2k, q)$  曲线，在相差同痕的意义下，存在唯一一个以该曲线为边界、不可定向、几何不可压缩的曲面，其亏格是用如下递推关系确定的函数  $N(2k, q)$ ：

1.  $N(2k, 1) = k$ ;
2.  $N(2k + 2hq, q) = h + N(2k, q) \ (h > 0)$ ;
3.  $N(2k, q + 2k) = N(2k, q)$ ;
4.  $N(2k, q) = N(2k, 2k - q)$ .

注：该递推关系与求最大公约数的欧几里得算法有几分相似，因此也有利用连分数的计算方法。

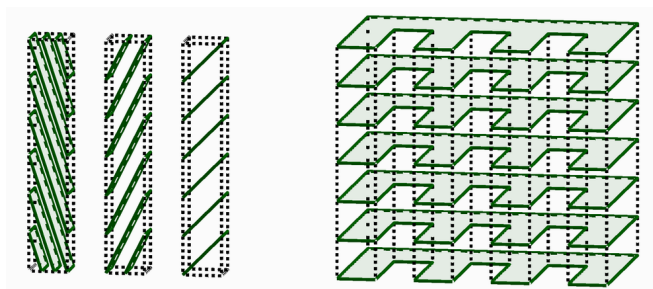
**定理 (Frohman 1986)** 实心环内任意不可定向的几何不可压缩曲面都被边界环面上的某条  $(2k, q)$  曲线界定。

## 2.3 带洞闭曲面与圆周乘积中的不可压缩曲面

**引理 (Waldhausen 1967, Jaco 1970)** 曲面（允许带边界）与圆周乘积中 **可定向** 的几何不可压缩曲面只有两种情况：竖直的和水平的。

**竖直** 指的是由正则纤维组成。分类成竖直环带（带边）与竖直环面（闭）。

**水平** 指的是与每根正则纤维都横截。



由此可得到 Seifert 流形中全体可定向的几何不可压缩曲面。

**引理 (Frohman 1986)** 曲面上的圆周丛上 **不可定向** 的几何不可压缩曲面必然是边界可压缩的。

注：边界可压缩的情况总可以通过同痕把边界压缩圆盘挤到外面去，使得同痕后剩下部分是边界不可压缩的。由该引理可知这些剩下部分的曲面必然可定向。因此 Seifert 流形中不可定向的几何不可压缩曲面一定有如下形状 (Frohman 1986)：在挖掉奇异纤维邻域之后的曲面与圆周乘积中是竖直或者水平的，在奇异纤维的实心环邻域中是形如 Bredon-Wood 构造那样的几何不可压缩曲面。这样的曲面称为 **伪竖直** 或者 **伪水平** 的。

注：给定一个 Seifert 流形，伪水平的曲面有无穷多，它们大部分并非几何不可压缩。伪竖直的曲面只有有限多个，但也不一定几何不可压缩，Frohman 就给出过例子。

### 3 对 Seifert 流形确定 $\mathbb{Z}_2$ 范数的多项式复杂度算法

Step 1. 每个给定的  $\mathbb{Z}_2$ -同调类都可以用具体的某些竖直、水平、伪竖直、或伪水平的曲面来代表。这给出  $\|\alpha\|_{\mathbb{Z}_2\text{-Th}}$  的上界，记为  $g_{\max} - 2$ 。

Step 2. 每个竖直、水平、伪竖直、伪水平曲面代表的  $\mathbb{Z}_2$ -同调类可以通过与 1 维  $\mathbb{Z}_2$ -同调类的相交数来探测。

Step 3. 竖直、水平、伪竖直曲面（在同伦类意义下）只有有限多个。

Step 4. 伪水平曲面被它们在带边曲面与圆周乘积的各个环面边界上的斜率决定。这些斜率的选择有无穷多，但是必须满足一定的条件。通过这些斜率以及环面边界的粘合同胚可以确定填充实心环内那些部分的亏格。

Step 5. 若带边曲面与圆周乘积的各个环面边界上斜率分母的最小公倍数超过  $2g_{\max} + 2$ ，则伪水平曲面的（不可定向）亏格会超过  $g_{\max} - 2$ ，从而分母只需在一个有限的范围内搜索。

Step 6. 尽管这些边界环面上的斜率的分母已经被控制住，但是分子还有许多选择。接下来证明当其中一个分子若超出某个界时，对应的实心环内的部分的亏格会呈现出以下行为之一：(1) 超过 Step 1 的上界，或者 (2) 随着分子的增大而周期变化（数值上的实验是赵学志老师先做的）。于是给出最小亏格的候选伪水平曲面也只有有限多个。



以上过程中用到的界或者周期关于 Seifert 流形各条奇异纤维处的手术参数都是多项式的。

---

例：对于 Levine-Ruberman-Strle 2015 构造的 Seifert 流形  $M = (S^2, (3, -1), (4, 1), (6, 1))$ ，有  $H_2(M; \mathbb{Z}_2) = \{0, \alpha\}$ 。Heegaard Floer 同调的方法只能得到非零模 2 同调类的最小嵌入亏格的下界是 3，而我们的算法能得到准确值等于 5，并且实现  $\alpha$  的最小嵌入亏格的是一个伪竖直曲面。

例：在球几何 Seifert 流形  $M = (S^2, (2, -1), (3, 1), (4, 1))$  中，存在一个伪水平曲面与伪竖直曲面相互同痕。它们均几何不可压缩，并且代表  $H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  中唯一的非零元素。

例：多数伪竖直曲面都能实现最小嵌入亏格。然而存在少数其中的伪竖直曲面并不能实现最小嵌入亏格的 Seifert 流形的例子：

1.  $(S^2, (2, -1), (2m + 1, m), (2n, 1))$  ( $n > 2m + 1$ )
  2.  $(S^2, (3, -1), (4, 1), (2n, 1))$  ( $n > 6$ )
  3.  $(S^2, (m, -1), (2n_2, 1), (2n_3, 1))$  ( $m \geq 2$ ,  $n_2 \geq m$ ,  $n_3 \geq m$ , and  $n_2 + n_3 > 2m$ )
- 

## 4 待做的问题

用目前的方法比较有望得到结果的方向（欢迎一起来做）

1. 图流形的  $\mathbb{Z}_2$  范数。图流形可以切开成 Seifert 的块。这些块上的几何不可压缩曲面在上面已经完全清楚。因此所有工具都已经齐备。
2. 双桥扭结 (2-bridged knot) 的 Dehn 填充。对于任何扭结或链环，只要知道补空间上的不可压缩、边界不可压缩曲面（包括可定向与不可定向），就自动能得到 Dehn 填充的流形中的不可压缩曲面。八字结补空间中的不可压缩、边界不可压缩曲面（包括可定向与不可定向）在 Thurston 的普林斯顿讲义第 4 章有完整分类。由此自然地就能够处理八字结补空间 Dehn 填充的流形中的不可定向嵌入不可压缩曲面 (Bartolini, 2012)。双桥扭结补空间中的不可压缩、边界不可压缩曲

面（包括可定向与不可定向）也已经有完整的分类（Hatcher-Thurston, 1985），可以尝试看它们的 Dehn 填充中的不可定向嵌入不可压缩曲面。

谢谢关注！