NA 第二次编程作业代码报告

高凌溪 3210105373 *

(数应 2102), Zhejiang University

Due time: 2024 年 10 月 29 日

I. 程序设计思路

1. 为了定义多项式和更好的输出输出 Newton 法和 Hermite 法的结果，首先定义了抽象类`Polynomial`，其中包含了以下功能：

```
class Polynomial{
    private:
    vector<double> coefficients={0.0}; //记录多项式系数,按照升幂排列
    int n=0;  //记录最高次数
    public:
    Polynomial(){};
    Polynomial(vector<double> _coefficients):coefficients(_coefficients){
        n=coefficients.size()-1;
    }
    int Degree() const {}       //返回多项式次数
    Polynomial operator+(const Polynomial &p1 ) const{} //实现多项式的加法
    Polynomial operator-()const{}  //实现多项式加负号
    Polynomial operator-(const Polynomial &p1){} //实现多项式减法
    Polynomial operator*(const Polynomial &p1)const{} //实现多项式乘法
    double operator()(double(x))const{} //多项式求值
    Polynomial derivative()const{}  //多项式求导
    void print(ostream &out=cout) const{}   //输出结果到文件, 输出格式为a+bx+...
    void printforpy(ostream &out=cout) const{}//输出结果到文件, 输出格式为系数按幂从
        低到高排列, 便于python作图
};
```

2. 为了解决 A,B,C,D,E，需要实现 Newton 插值法和 Hermite 插值法。为了实现 Newton 插值法和 Hermite 插值法，我设计了抽象基类`Interpolation`，从中继承了`Newtoninterpolation`和`Hermiteinterpolation`，这个抽象基类实现了以下几个功能：

```
class Interpolation
{
    protected:
    vector<double> x, y;  //x 用于存储给定的插值点, y用于存储在给定点上的函数值
    int k=0; //k表示插值点个数
```

*Electronic address: `3210105373@zju.edu.cn`

```
        vector<vector<double>> table; //记录差商表
        public:
        virtual void settable()=0; //构造差商表
        virtual Polynomial  getpolynomial()=0; //最终返回多项式
        vector<vector<double>> gettable(){
            settable();
            return table;
        }
        void print(){}       //打印差商表
        virtual ~Interpolation()=default;
    };
```

其中，差商表的具体构造方法完全参考了讲义中的方法。

3. 为了解决 F 题，参考算法 2.74，使用极坐标参数化点的坐标，$x(t)=\sqrt{3}\cos t$,$y(t)=\frac{2}{3}(\sqrt{3}\sin t+\sqrt{|x|})$, 然后分别生成 x y 关于 t 的多项式。为了对参数求导更方便，使用了数值导数。观察得到曲线上的点仅在横坐标为 0 时不是 C^1 的，只要取点时避开即可。具体如下：

```
        class Function {
            public:
            virtual double operator() (double x) const = 0;
            virtual double derivative(double x) const {
                double h=1e-6;
                return ((*this)(x+h)-(*this)(x))/h;
            }
        };
        class Curve{
            protected:
            const Function &F;  //F代表x(t) y(t)的具体表达式
            private:
            vector<double> x={0.0};  //记录取的点pj的坐标
            public:
            Curve(const Function &F, vector<double>x):F(F),x(x){}
            vector<double> Cubic_Bezier(const vector<double> &_v){}
            //根据输入的点生成控制点

            Polynomial get_piecewise_curve(){} //生成每一段的bezier曲线
        };

        //在曲线上取点, 我使用的取点方法是均匀的取点
        vector<double> Get_points(int n){
            double step =2*pi/n;
            vector<double>v(n+1);
            for(int i=0; i<=n; ++i){
                v[i]=i*step;
            }
            return v;
        };
        void save(int n){};将不同取点数目的结果写入不同的文件夹中
```

II. 运行结果

F 的图像结果为 output 文件夹中的 F.png。

B

$n=2$ 插值多项式 $p(x)$:

$1x^0 - 0.0384615x^2$

$n=4$ 时插值多项式 $p(x)$:

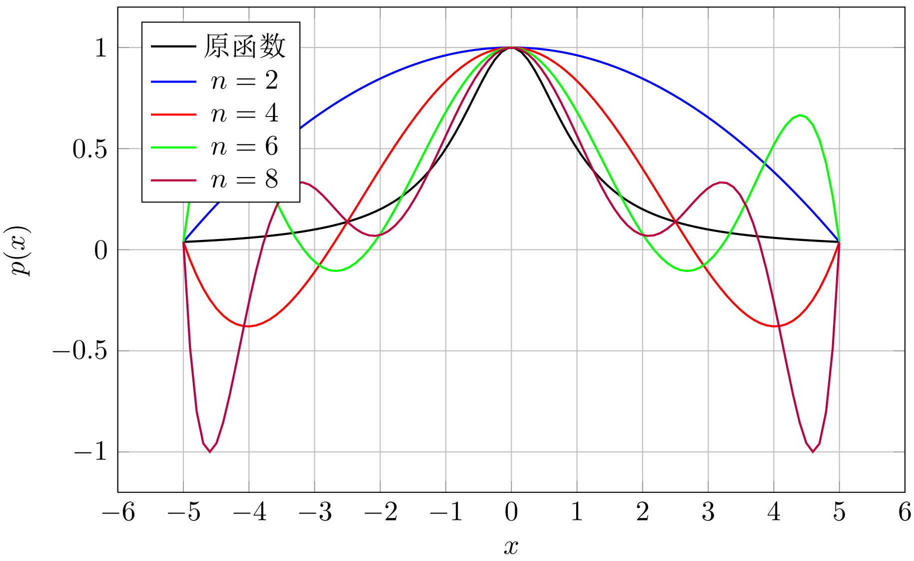
$1x^0 - 0.171088x^2 + 0.00530504x^4$

$n=6$ 插值多项式 $p(x)$:

$1x^0 - 0.351364x^2 + 0.0335319x^4 - 0.000840633x^6$

$n=8$ 插值多项式 $p(x)$:

$1x^0 - 0.528121x^2 + 0.0981875x^4 - 0.00658016x^6 + 0.000137445x^8$



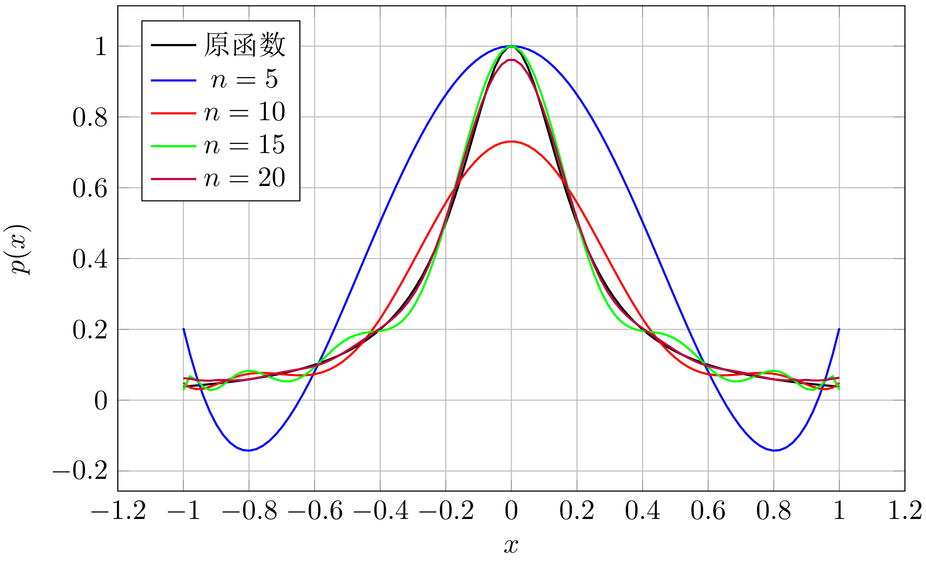
C

$1x^0 - 3.54298x^2 + 2.7465x^4$

$0.730822x^0 - 4.81162x^2 + 12.6193x^4 - 14.0024x^6 + 5.51277x^8$

$1x^0 - 17.3641x^2 + 149.027x^4 - 646.864x^6 + 1510.61x^8 - 1927.18x^{10} + 1264.42x^{12} - 333.619x^{14}$

$0.96241x^0 - 16.5422x^2 + 165.458x^4 - 960.825x^6 + 3379.02x^8 - 7413.45x^{10} + 10195.5x^{12} - 8534.89x^{14} + 3973.16x^{16} - 788.326x^{18}$



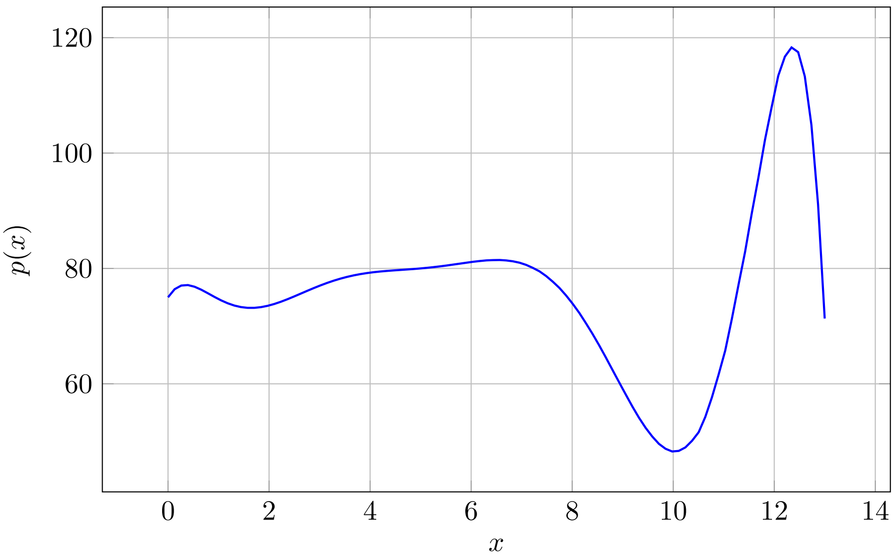
D

displacement(t=10 s)= 742.503

velocity(t=10 s) = 48.3817

在 0∼13 秒内，速度 (feet/second) 的函数大致为：$75x^0 + 14.3238x^1 - 30.2859x^2 + 22.0325x^3 - 7.69148x^4 + 1.45825x^5 - 0.15313x^6 + 0.00832472x^7 - 0.000182013x^8$

由图像很容易看出已经超过 81feet/second



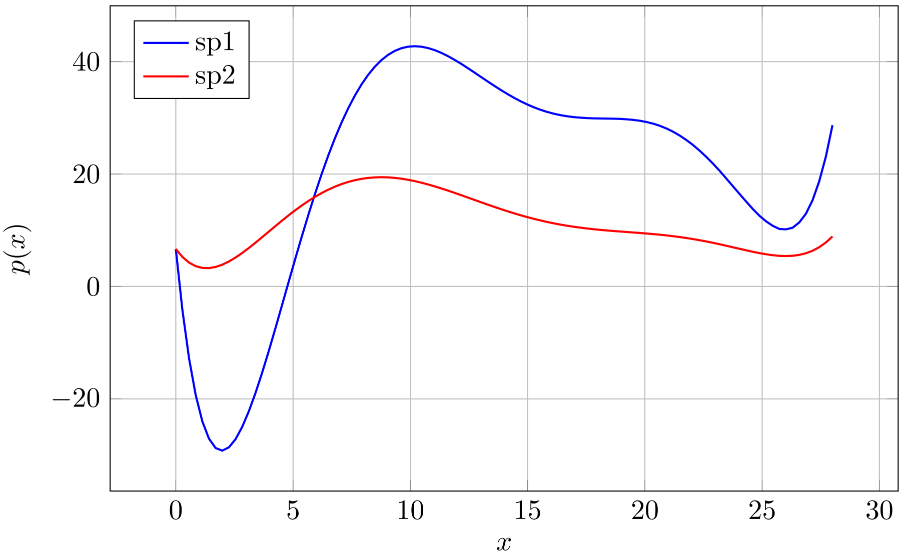
E

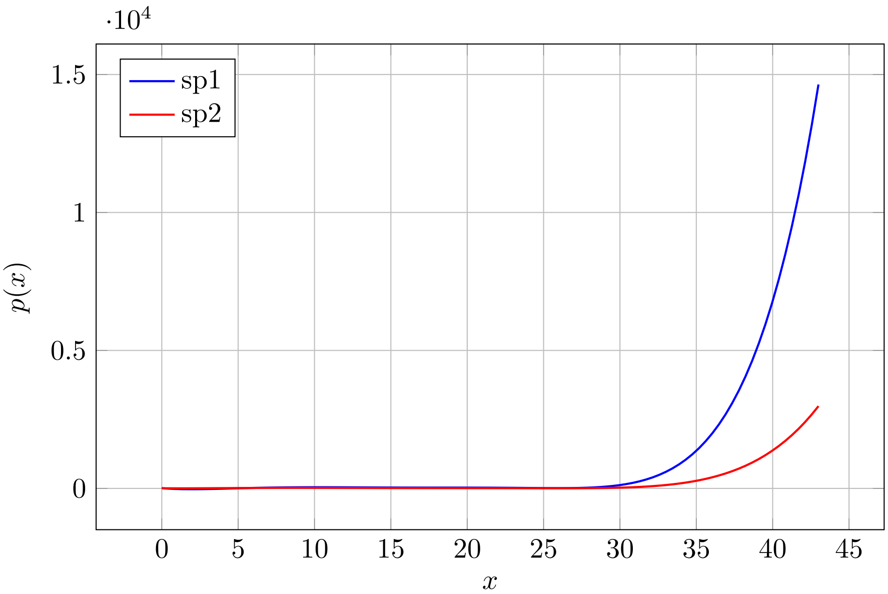
$6.67x^0 - 43.0127x^1 + 16.2855x^2 - 2.11512x^3 + 0.128281x^4 - 0.00371557x^5 + 4.1477 \times 10^{-5}x^6$

$6.67x^0 - 5.85018x^1 + 2.98227x^2 - 0.424283x^3 + 0.0265858x^4 - 0.000777473x^5 + 8.6768 \times 10^{-6}x^6$

14640.3

2981.48





F

用 python 作图后得到结果如下：

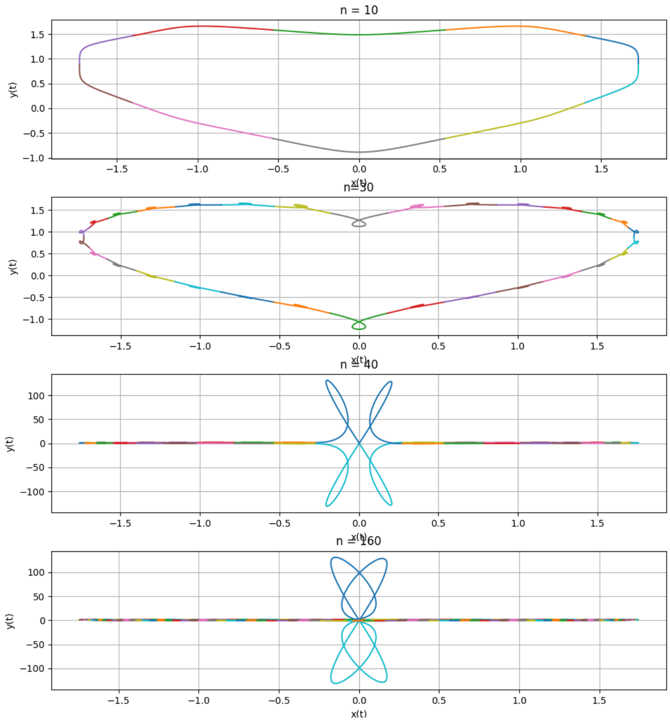


图 1: Plot of F

III. 结果分析

B C

首先从 B C 的结果不难发现，当原函数是一个偶函数且取的插值点是关于 y 轴对称时，用 Newton 插值得到的插值多项式也是一个偶函数。
从 B 的结果可以看出，即使插值点变多，插值多项式的拟合效果也只是在区间 $[-2,2]$ 上变好，但是在靠近 -5 和 5 的位置，会出现剧烈的震荡，一致误差反而随之插值点的增多而增大。
C 中的结果展示了第一类切比雪夫多项式可以更好的拟合 $\frac{1}{1+25x^2}$ 这个函数，在插值点数目为 20 的时候，从图像上看拟合效果已经很好，插值多项式虽然仍然在靠近 -1 和 1 的部分有一定的震荡，但是误差的一致范数已经可以被控制住并且不大。

E

E 中的结果显然与显示不符，事实上作出 E 中的插值多项式图像可以看到，插值多项式在区间 [28 43] 上迅速增长，根据讲义定理 2.7 插值多项式的误差 $R_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, 带入这个公式可以发现当 x 很大时，误差也会很大，因此使用插值多项式预测 $x = 43$ 时,$f(x)$ 的值并不合理，应该使用其他方法。

F

通过用 python 作图可以发现，在使用角度作为参数的时候，在 $[0, 2\pi]$ 上均匀的取点生成控制点并不是一个好的方式。在取点数 n 比较小的时候，bezier 曲线不会自交，拟合效果一般，但 n 很大时，曲线自交会非常严重，无法拟合曲线。按照我取点的方式，我认为拟合效果最好的是 $n = 30$ 的情况。
分析：曲线自交的原因是由于在 p_j 和 p_{j+1} 处的切线模长太大。假设 $x(t) = \sqrt{3}\cos t$,$y(t) = \frac{2}{3}(\sqrt{3}\sin t + \sqrt{|x|})$，求导得到 $x'(t) = -\sqrt{3}\sin t$，$y'(t) = \frac{2}{3}(\sqrt{3}\cos t + \frac{-\sqrt{3}\sin t}{2\sqrt{\sqrt{3}\cos t}})$，从导数可以看出，当 $t \to \frac{\pi}{2}$ 时，切线的模长会非

常大，这也能解释 $n = 160$ 时图像产生的原因。因此在取点的时候应该避开 y 轴附近的点。而通过观察 $n = 30$ 的图像可以发现，几乎每一段 bezier 曲线都有自相交的情况，因此我认为这个图形并不适合用三次 bezier 曲线分段拟合。

Acknowledgement

Give your acknowledgements here(if any).

If you are not familiar with `bibtex`, it is acceptable to put a table here for your references.