Probability And Mathmatical Statistics
Homework 3

151220131 谢旻晖

习题一 36

设单位设立 n 条外线，则 $P(\text{分机不被占线}) = \sum_{i=0}^{n}\binom{100}{i}p^i(1-p)^{100-i}$,where $p = 5\%$, 上式大于 90%, 解出最小的 n 为 8.

习题二 7

(1)

$\frac{1}{\binom{8}{4}} = 1.43\%$

(2)

记 (1) 中的概率为 p, 猜对的概率为 $\binom{10}{3}p^3(1-p)^7 = 0.0316\%$, 概率十分小，应该确实有分辨能力。

习题二 8

$X{\sim}P(2.5)$

(1)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.2424$$

(2)

$$\arg\max_{i\in\mathbb{N}} P(X = i) = 2$$

$$P(X = 2) = 0.2565$$

(3)

$$\arg\min_{n\in\mathbb{N}} P(X \leq n) \leq 90\%$$

解得 $n = 5$

习题二 19

(1)

X	-4	-1	0	1	8
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

(2)

X	0	$\frac{1}{4}$	4	16
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$

(3)

X	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$

习题三 3

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=2)\\
&= P(X=1, Y=1 \cup X=2, Y=0 \cup X=3, Y=-1)\\
&= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=-1)\\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\\
&= \frac{5}{32}
\end{aligned}$$

2. 负二项分布

$$\begin{aligned}
&P(X=i)\\
&= P(\text{前 i-1 次出现 k-1 个正面, 第 i 次是正面})\\
&= P(\text{前 i-1 次出现 k-1 个正面})P(\text{第 i 次是正面})\\
&= \binom{i-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{i-k} * p\\
&= \binom{i-1}{k-1}p^{k}(1-p)^{i-k}
\end{aligned}$$

3. 蓄水池抽样

设数据流中数据的个数为 n.

(1)

记事件 A_i 为第 i 个数据到来时发生了替换，有 $P(A_i)=\frac{1}{i}$.

$$\begin{aligned}&P(\text{第 i 个数据最终留在了内存中})\\&=P(A_i\,\overline{A_{i+1}}\,\overline{A_{i+2}}\dots\overline{A_n})\\&=\frac{1}{i}\frac{i}{i+1}\frac{i+1}{i+2}\dots\frac{n-1}{n}\\&=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

上面的推导显示出了任何一个数据最终留在内存中的概率是一样的，与在数据流中的次序无关。算法是有效的。

(2)

记事件 A_i 为第 i 个数据到来时发生了替换，有 $P(A_i)=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}&P(\text{第 i 个数据最终留在了内存中})\\&=P(A_i\,\overline{A_{i+1}}\,\overline{A_{i+2}}\dots\overline{A_n})\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\dots\frac{1}{2}\quad(\text{n-i+1 个 2})\\&=\frac{1}{2^{n-i+1}}\end{aligned}$$

4.

$$E=\frac{6}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

调和级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ 发散，所以期望不存在.

5.

可以发现这样的事实，每一轮我们都从人群中剔除了一个“人”: 以两种情况考虑，如果选中的是一个人的双手，那这个人自成环以后就再也不会成环，相当于这个人被剔除了；如果选中的是两个人的分别一只手，我们就将这两个人打包为一个“人”，也相当于剔除了一个人。

在这种条件下，我们发现在每一轮中形成环当且仅当选中的是一个“人”的双手。

定义指示器随机变量 A_i 为

$$A_i=\begin{cases}1 & \text{第 i 轮选择生成了新的环}\\0 & \text{第 i 轮选择没有新的环生成}\end{cases}$$

由上面的讨论 $P(A_i=1)=\frac{n-i+1}{\binom{2n-2i+2}{2}}$，分母为从 $2n-2i+2$ 只手中选 2 只牵手，分子为选到的是一个“人”的两只手。

那么牵手形成环的期望值为

$$\begin{aligned}&E\\&=E\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}E(A_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i=1)*1\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i+1}{\binom{2n-2i+2}{2}}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n-2i+1}\end{aligned}$$

6.Jensen Inequality

首先证明对于下凸函数有对于任意 $x_1,x_2\dots x_n$,$p_1,p_2\dots p_n$,$0\le p_i\le 1$, 且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$. 有

$$f(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)\le\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)$$

使用数学归纳法证明，对 n 进行归纳.

当 $n=2$ 时，trivial.

假设 $n=k$ 时，有对于任意 $x_1,x_2\dots x_n$,$p_1,p_2\dots p_k$,$0\le p_i\le 1$, 且 $\sum_{i=1}^{k}p_i=1$. 有

$$f(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i)\le\sum_{i=1}^{k}p_if(x_i)$$

当 $n=k+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
& f(\sum_{i=1}^{k+1} p_i x_i) \\
& = f\left((1-p_{k+1}) \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i}{1-p_{k+1}} + p_{k+1} x_{k+1}\right) \\
& \leq (1-p_{k+1}) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i}{1-p_{k+1}}\right) + p_{k+1} f\left(x_{k+1}\right) \\
& \leq (1-p_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{1-p_{k+1}} f(x_i) + p_{k+1} f\left(x_{k+1}\right) \qquad \text{由假设} \\
& = \sum_{i=1}^{k+1} p_i f\left(x_i\right)
\end{aligned}
$$

归纳法证明成功。
再证明命题.
设 X 对应 n 个离散型随机变量 $x_1, x_2 \ldots x_n$, 对应的
概率分别为 $p_1, p_2 \ldots p_n$. 由概率完备性 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
由期望的定义 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

$$
\begin{aligned}
& f\left(E(X)\right) \\
& = f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\
& \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right) \\
& = E\left(f(x_i)\right)
\end{aligned}
$$

证毕。