Probability And Mathmatical Statistics
Homework 1

151220131 谢旻晖

1 习题一/1

某人向目标射击 3 次，设第 i 次命中的事件为 A_i, 用 A_i 的运算表示下列事件：（1）只有第一次命中，（2）目标被命中，（3）至多命中一次，（4）至多命中两次，（5）至少命中两次

解：

1.$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

2.$\cup_{i=1}^{3}A_i$

3.$\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2$

4.$\overline{A_1A_2A_3}$

5.$A_2A_3\cup A_1A_3\cup A_1A_2$

2 习题一/4

抛 2 枚骰子，以所抛数 m,n 为 A 的坐标，求点 A(m,n) 落入圆 $x^2+y^2=19$ 内的概率。

解：

样本点总数为所有的点数组合为 $6*6=36$ 种。

设事件 X 为点 $A(m,n)$ 落入上述圆内，则 X 涵盖的事件样本点有 11 个。

$$Pr(X)=\frac{|X|}{|\Omega|}=\frac{11}{36}$$

3 习题一/6

在 50 只柳丁中有 3 只强度太弱，如果这 3 只柳丁装在同一部件上，则这个部件强度就不合格，现有 10 个部件，每个部件装 3 个柳丁，若从 50 只柳丁中随机取用，问恰有 1 个部件强度不合格的概率是打算？

解:

我们考虑柳丁是互相不同的，部件也是互相不同的。但装在同一部件上的三个柳丁不区别顺序。我们将柳丁标上号为 1-50，三个坏的标为 1-3，将 10 个部件表示为一个长度为 10 的 list,list 中的每个元素类型是一个三元集合。现在我们就将问题建模为

$$[\{X,X,X\},\{X,X,X\},....\{X,X,X\}]$$

用 1-50 往上述 list 中的三元集中不重复的填充，恰有一个集合是 $\{1,2,3\}$ 的概率是多少。

样本点总数为从 50 个数中找 30 个数的排列依次填入，并消去三元集合内部的重复计数，即 $\frac{A_{50}^{30}}{(3!)^{10}}$

恰有 1 个部件不合格为恰有一个集合为 $\{1,2,3\}$ 的样本点个数为，首先确定一个集合是 $\{1,2,3\}$,C_{10}^{1},

然后再用剩下来的 47 个数填入剩下的集合，有 $\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}$，根据乘法原则总共有 $C_{10}^{1}\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}$.

由古典概型，

$$\begin{aligned}
&Pr(\text{恰有 1 个部件强度不合格})\\
&=\frac{C_{10}^{1}\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}}{\frac{A_{50}^{30}}{(3!)^{10}}}\\
&=\frac{C_{10}^{1}*3!*A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}}\\
&=\frac{C_{10}^{1}*3!*A_{50}^{30}}{50*49*48*A_{50}^{30}}\\
&=\frac{10}{C_{50}^{3}}
\end{aligned}$$

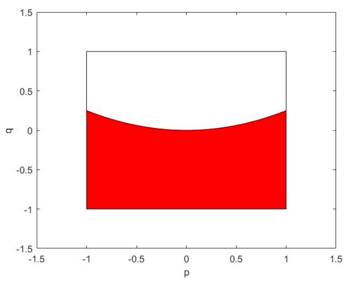
4 习题一/12

平面上点 (p,q) 在 $|p|\le 1$,$|q|\le 1$ 内等可能出现，求 $x^2+px+q=0$ 有实根的概率。

解:
样本空间 $\Omega=\{(p,q)||p|\le 1,|q|\le 1\}$, 设 A 为方程 $x^2+px+q=0$ 有实根。则

$$\Delta=p^2-4q\ge 0$$
$$q\le p^2/4$$

A 为图中的阴影区域，由几何概型



$$\begin{aligned}
&Pr(A)\\
&=\frac{2+\int_{-1}^{1}\frac{p^2}{4}dp}{2*2}\\
&=\frac{13}{24}
\end{aligned}$$

5 习题一/13

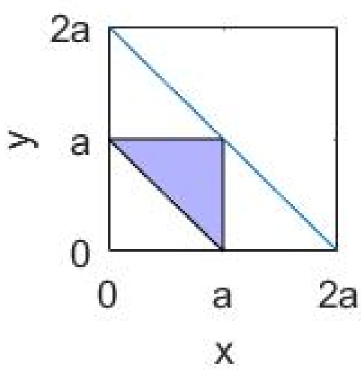
将线段 $(0,2a)$ 任意折成 3 折，求此 3 折线能构成三角形的概率。
解:

设三折的长度分别为 x,y,$2a-x-y$, 那么我们有约束 $x,y>0$,$x+y<2a$. s 则样本空间为 $\Omega=\{(x,y)|x,y>0,x+y<2a\}$.

其中能围成三角形的需要满足任意两边之和大于第三边:

$$\begin{cases} x+y>2a-x-y \\ x+2a-x-y>y \\ y+2a-x-y>x \end{cases}$$

即 $\{(x,y)|x+y>a,y<a,x<a\}$. 那么由古典概型，



$$Pr(3\text{ 折线能构成三角形})=\frac{1}{4}$$

6 补充 1

考虑一种心形线 $x^2+(y-\sqrt[3]{x^2})^2=1$(见图)，请通过蒙特卡洛法求围成的面积。

```
clear all
close all
% experiment result
count=0;              %# of samples drop inside curve
nr_iteration=10000000;%# of iterations
for i = 1:nr_iteration
        temp=rand(1,2)*4-2;
        x=temp(1);y=temp(2);
        if(y>=x^(2/3)-sqrt(1-x^2)&& y<=x^(2/3)+sqrt(1-x^2))
                count=count+1;
        end
end
disp(['The experiment result is ',num2str(count/nr_iteration*16)]);
```

代码运行结果:The experiment result is 3.1422.

7 补充 2

考虑抛一枚均匀的硬币 n 次, 给定一正整数 k, 考虑事件 A, 出现 $\log_2 n + k$ 个连续正面朝上（假定 $\log_2 n$ 为整数）, 证明

$$P(A) \leq 2^{-k}$$

设 A_i 为事件第 i 次硬币起连续 $\log_2 n + k$ 正面朝上的概率。

显然有

$$Pr(A_i) = \frac{1}{2^{\log_2 n + k}} = \frac{1}{n2^k}$$

然后

$$Pr(A) = Pr(\bigcup_{i=1}^{n} Pr(A_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n2^k} = \frac{1}{2^k}$$

8 补充 3

(非传递的骰子) 考虑三枚均匀的骰子 A, B, C，随机抛这三枚骰子，记它们的点数为 X, Y, Z

- 假设骰子各面的点数分别为 $A: 1, 1, 5, 5, 5, 5, B: 3, 3, 4, 4, 4, 6$ 和 $C: 2, 2, 3, 3, 6, 6$, 证明 $P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = \frac{5}{9}$.
- 设计三枚骰子（点数不超过 6），使得 $P(X > Y), P(Y > Z), P(Z > X)$ 均大于 $\frac{5}{9}$.

解:

(1)

样本空间 $\Omega = \{$A,B,C 结果三元组$\}$，认为相同数字但在不同面是不同的，共 6*6*6 个样本点。

很容易得到

$$P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = \frac{4*5*6}{6*6*6} = \frac{5}{9}$$

(2)

A: 1 4 4 4 4 4

B: 3 3 3 3 3 6

C: 2 2 2 5 5 5