Probability And Mathmatical Statistics
Homework 2

151220131 谢旻晖

习题一 15

由条件概率公式，

$$\begin{aligned}
&\because \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A) \\
&\therefore P(AB) = \frac{1}{12} \\
&\because \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B) \\
&\therefore P(B) = \frac{1}{6} \\
&P(\overline{A}\ \overline{B}) \\
&= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

习题一 16

设事件 A 为从中取 2 件至少有一件为次品，事件 B 为两件都是次品，则本题需要求 $P(B|A)$.
易得 $P(A) = \frac{C_4^2 + C_6^1 * C_4^1}{C_{10}^2}$,$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$.
由条件概率公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

又因为 $B \subseteq A$, 所以 $P(AB) = P(B)$, 上式可化为

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(B)}{P(A)} \\
&= \frac{C_4^2}{C_4^1 * C_6^1 + C_4^2} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

习题一 20

设事件 $A_i (0 \leq i \leq 2)$ 为一盒中分别有 i 只次品，由 $\sum_{i=0}^{2} P(A_i) = 1$, 且 A_i 之间互斥，所以 A_0,A_1,A_2 构成一个完备事件组。
设事件 B 为该盒可以出厂。
(1)
由全概率公式

$$\begin{aligned}
&P(B) \\
&= \sum_{i=0}^{2} P(B|A_i)P(A_i) \\
&= 0.8 + \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} * 0.1 + \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} * 0.1 \\
&= 0.943
\end{aligned}$$

(2)
题意欲求 $P(A_0|B)$. 由条件概率公式.

$$\begin{aligned}
&P(A_0|B) = \frac{P(A_0B)}{P(B)} \\
&\because A_0 \subseteq B \\
&\therefore P(A_0B) = P(A_0) \\
&\therefore P(A_0|B) = \frac{P(A_0)}{P(B)} = 0.848
\end{aligned}$$

补充 1

随机变量 X 为抛 10 次硬币正面朝上的次数，$X\ B(10, \frac{1}{2})$.
(1)

$$P(X = 5) = C_{10}^5 (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^5 = 0.246$$

(2)

对称性，正面向上比反面向上多&反面向上比正面向上多对称。
因此(1-第一题)/2

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=6}^{10} P(X=i) \\
&= \frac{C_{10}^{6}+C_{10}^{7}+C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}}{2^{10}} \\
&= 0.377
\end{aligned}
$$

(3)
样本空间为抛硬币 10 次出现的结果序列全集，事件 A 为所有 $i=1,...5$, 第 i 次抛硬币的结果和 $11-i$ 次的结果相同。$|\Omega|=2^{10}$,$|A|=2^5$

$$
P(A)=\frac{|A|}{\Omega}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}
$$

(4)
分类讨论，我们用 0 代表反面向上，用 1 代表正面向上，那么 10 次抛硬币的结果可以表示为一个 10bit 的序列。
(1) 从第一个 bit 开始的连续 4 个及以上的正面朝上：有 $2^6=64$ 种.
(2) 非第一个 bit 开始的连续 4 个及以上的正面朝上：将 [0 1 1 1 1] 捆绑起来，它一共有 6 种放法，其余位置可以随意填入 0 与 1，有 $6*2^5=192$. 其中 [0 1 1 1 1 0 1 1 1 1] 被重复计算。$192-1=191$
(3)1 和 2 中其实有重复计数，[1 1 1 1 ? [0 1 1 1 1]] 和 [1 1 1 1 [0 1 1 1 1] ?]，4 种情况被计算了两次。
综上共有 251 种。

$$
P=\frac{251}{2^{10}}=0.245
$$

补充 2

采用数学归纳法，对 n 进行归纳。

$n=3$ 时，trivial.

假设 $n=k$ **时**，盒子中存在 n 个球时停止操作，白球数目等可能的为 1 到 $n-1$ 中的某个数。

当 $n=k+1$ **时**，在盒中有 $n-1$ 个球时，考虑完备事件组 $\{A_i, 1\le i\le n-2\}$, 其中 A_i 代表在盒中有 $n-1$ 个球时白球数量为 i. 由假设，他们是等可能的, 即 $P(A_i)=\frac{1}{n-2}, 1\le i\le n-2$.

设事件 $B_i, 1\le i\le n-1$ 代表在盒中有 n 个球时白球数量为 i.

那么, 对于任意的 $i\in[1,n-1], i\in Z$

$$
\begin{aligned}
P(B_i) &= \sum_{j=1}^{n-2} P(A_j)P(B_i|A_j) \\
&= P(A_i)P(B_i|A_i)+P(A_{i-1})P(B_i|A_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n-2}\frac{n-1-i}{n-1}+\frac{1}{n-2}\frac{i-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n-1}
\end{aligned}
$$

即 $P(B_1)=P(B_2)=......=P(B_{n-1})=\frac{1}{n-1}$. 假设对 $n=k+1$ 仍然成立。

综上，证毕。

补充 3

应用推迟决定原则.

设事件 A_i 为 $0\le i\le 5$ 为前 9 次投掷骰子的点数和模 6 为 i. 显然这是一个完备事件组。事件 B 为 10 次投掷骰子的和为 6 的倍数。

无论前 9 次点数和如何，最终 10 个骰子点数和取决于最后一个骰子的点数，且 6 种结果中只会有一种使得和为 6 的倍数. 即 $P(B|A_i)=\frac{1}{6}$.
应用全概率公式:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=0}^{5} P(B|A_i)*P(A_i) \\
&= \sum_{i=0}^{5}\frac{1}{6}P(A_i) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

补充 4

定义 A,B,C 分别表示事件 A,B,C 会被释放，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，定义 W 表示事件牢头说 B 会被处决. 由全概率公式，

$$
\begin{aligned}
&P(W) \\
&= P(A)P(W|A)+P(B)P(W|B)+P(C)P(W|C) \\
&= \frac{1}{3}*p+\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*1 \\
&= \frac{p+1}{3}
\end{aligned}
$$