# Probability And Mathmatical Statistics
# Homework 1

151220131 谢旻晖

## 1 习题一/1

某人向目标射击 3 次，设第 $i$ 次命中的事件为 $A_i$, 用 $A_i$ 的运算表示下列事件：（1）只有第一次命中，（2）目标被命中，（3）至多命中一次，（4）至多命中两次，（5）至少命中两次

解：

1.$A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$

2.$\cup_{i=1}^{3}A_i$

3.$\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2$

4.$\overline{A_1A_2A_3}$

5.$A_2A_3 \cup A_1A_3 \cup A_1A_2$

## 2 习题一/4

抛 2 枚骰子，以所抛数 $m$,$n$ 为 $A$ 的坐标，求点 A(m,n) 落入圆 $x^2 + y^2 = 19$ 内的概率。

解：

样本点总数为所有的点数组合为 $6 * 6 = 36$ 种。

设事件 $X$ 为点 $A(m, n)$ 落入上述圆内，则 $X$ 涵盖的事件样本点有 11 个。

$$Pr(X) = \frac{|X|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$$

## 3 习题一/6

在 50 只柳丁中有 3 只强度太弱，如果这 3 只柳丁装在同一部件上，则这个部件强度就不合格，现有 10 个部件，每个部件装 3 个柳丁，若从 50 只柳丁中随机取用，问恰有 1 个部件强度不合格的概率是打算？

解:

我们考虑柳丁是互相不同的，部件也是互相不同的。但装在同一部件上的三个柳丁不区别顺序。我们将柳丁标上号 150，三个坏的标为 1 3，将 10 个部件表示为一个长度为 10 的 list,list 中的每个元素类型是一个三元集合。现在我们就将问题建模为

$$[\{X, X, X\}, \{X, X, X\}, ....\{X, X, X\}]$$

用 1 50 往上述 list 中的三元集中不重复的填充，恰有一个集合是 $\{1, 2, 3\}$ 的概率是多少。

样本点总数为从 50 个数中找 30 个数的排列依次填入，并消去三元集合内部的重复计数，即 $\frac{A_{50}^{30}}{(3!)^{10}}$

恰有 1 个部件不合格为恰有一个集合为 $\{1, 2, 3\}$ 的样本点个数为，首先确定一个集合是 $\{1, 2, 3\}$,$C_{10}^{1}$,

然后再用剩下来的 47 个数填入剩下的集合，有 $\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}$，根据乘法原则总共有 $C_{10}^{1}\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}$.

由古典概型，

$$
\begin{aligned}
&Pr(\text{恰有 1 个部件强度不合格})\\
&=\frac{C_{10}^{1}\frac{A_{47}^{27}}{(3!)^9}}{\frac{A_{50}^{30}}{(3!)^{10}}}\\
&=\frac{C_{10}^{1}*3!*A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}}\\
&=\frac{C_{10}^{1}*3!*A_{50}^{30}}{50*49*48*A_{50}^{30}}\\
&=\frac{10}{C_{50}^{3}}
\end{aligned}
$$

# 4 习题一/12

平面上点 $(p,q)$ 在 $|p|\le 1$,$|q|\le 1$ 内等可能出现，求 $x^2+px+q=0$ 有实根的概率。

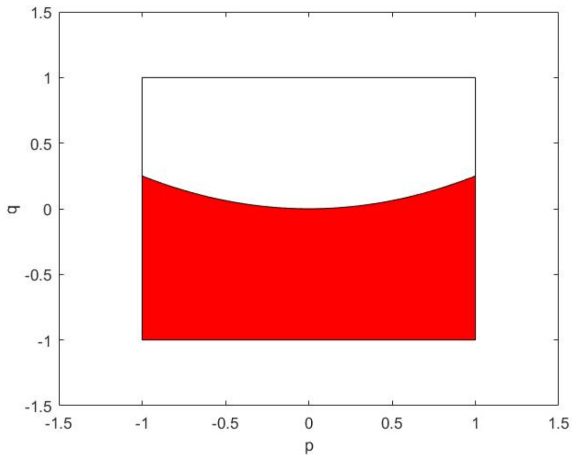
解:

样本空间 $\Omega=\{(p,q)||p|\le 1,|q|\le 1\}$, 设 A 为方程 $x^2+px+q=0$ 有实根。则

$$\Delta=p^2-4q\ge 0$$

$$q\le p^2/4$$

A 为图中的阴影区域，由几何概型




$$
\begin{aligned}
&Pr(A)\\
&=\frac{2+\int_{-1}^{1}\frac{p^2}{4}dp}{2*2}\\
&=\frac{13}{24}
\end{aligned}
$$

# 5 习题一/13

将线段 $(0, 2a)$ 任意折成 3 折，求此 3 折线能构成三角形的概率。

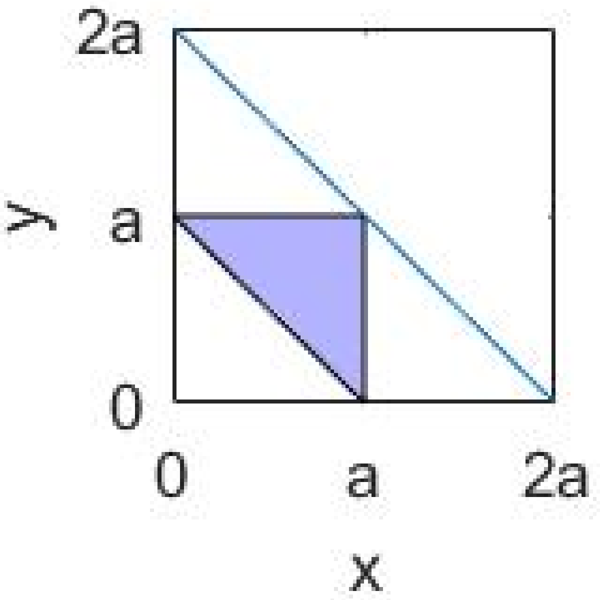
解:

设三折的长度分别为 $x$,$y$,$2a-x-y$, 那么我们有约束 $x, y > 0$,$x+y < 2a$. s 则样本空间为 $\Omega = \{(x, y)|x, y > 0, x + y < 2a\}$.

其中能围成三角形的需要满足任意两边之和大于第三边:

$$\begin{cases} x + y > 2a - x - y \\ x + 2a - x - y > y \\ y + 2a - x - y > x \end{cases}$$

即 $\{(x, y)|x + y > a, y < a, x < a\}$. 那么由古典概型，




$$Pr(3\text{ 折线能构成三角形}) = \frac{1}{4}$$

# 6 补充 1

考虑一种心形线 $x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$(见图)，请通过蒙特卡洛法求围成的面积。

# 7 补充 2

考虑抛一枚均匀的硬币 $n$ 次, 给定一正整数 $k$, 考虑事件 $A$, 出现 $\log_2 n + k$ 个连续正面朝上（假定 $\log_2 n$ 为整数）, 证明

$$P(A) \leq 2^{-k}$$