Probability And Mathmatical Statistics
Homework 6

151220131 谢旻晖

1

p 均匀地分布在 [0,1] 之间, 考虑两枚非均匀硬币 1 和 2, 他们正面朝上的概率分别为 p_1 和 p_2.
$p < p_1$ 时, 硬币 1 正面朝上,$p < p_2$ 时，硬币 2 正面朝上. 因此，硬币 1 朝上时，必然有硬币 2 朝上.
P(硬币 1 朝上的次数 $\geq k$)<=P(硬币 2 朝上的次数 =$\geq k$) 即

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_1^i(1-p_1)^{n-i} \leq \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_2^i(1-p_2)^{n-i}$$

2

a)
反证法，若 $(v_1, v_2) \in E, v_1, v_2 \in S(\rho)$, 则在 ρ 中，v_2 既领先于 v_1，又落后于 v_1, 矛盾.
b)
设指示器随机变量 I_i 指示第 i 个点是否在独立集中，在为 1，不在为 0。$P(I_i = 1) = \frac{1}{d_i+1}$, 因为：考虑点 i 和他的邻居共 $1 + d_i$ 个点，当且仅当 i 在置换中的相对位置为 $1 + d_i$ 个点的最前面时，i 才会在独立集中。

$$\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{n} I_i) &= \sum_{i=1}^{|V|} E(I_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(I_i = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}
\end{aligned}$$

c)
由握手定理 $\sum_{i=1}^{n} d_i = nk$

$$\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{n} I_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1} \\
&\geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(d_i + 1)} \\
&= \frac{n^2}{nk + n} \\
&= \frac{n}{k + 1}
\end{aligned}$$

$E(\sum_{i=1}^{n} I_i) \geq \frac{n}{k+1}$, 由期望的性质，G 必定有不小于 $\frac{n}{k+1}$ 的独立集.

3

初始化 $A = \emptyset$
采样，以 $p > 0$ 的概率取点，加入集合 A 中.
修正，对于 V A 中那些点，若没有邻居在 A 中，就把他加入 A 中. 这样就构成了一个支配集.
下面分析 $E[A]$. 不妨设随机变量 X 为采样后的点数，Y 为修正时加入的点数.

$$\begin{aligned}
E[A] &= E[X + Y] \\
&= E[X] + E[Y] \\
&= np + E[Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n]
\end{aligned}$$

其中 Y_i 为指标随机变量, 定义如下. 易得 $P(Y_i = 1) = (1-p)^{d+1}$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{没被采样到，且需要被修正（加入集合）} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
E[A] &= np + \sum_{i=1}^{n} E[Y_i] \\
&= np + \sum_{i=1}^{n} P(Y_i = 1) \\
&= np + \sum_{i=1}^{n} (1-p)^{d+1} \\
&= np + n(1-p)^{d+1} \\
&\le np + e^{-p(d+1)}
\end{aligned}
$$

取 $p = \frac{ln(d+1)}{d+1}$, 代入

$$
E[A] \le \frac{n(1+ln(d+1))}{d+1}
$$

由期望论证，一定存在大小不超过 $\frac{n(1+ln(d+1))}{d+1}$ 的支配集.

4

在 K_n 中不断取与 G 同构的图进行边染色，一共染 k 轮，第 i 轮使用第 i 种颜色, 若染色时边已有颜色，则覆盖掉原来的颜色. 由于 G 中不含 H 子图，所以每轮染色中都不存在同色的 H 子图。下面只要证明 k 轮染色之后存在某种染色方案使得每条边都有颜色即可完成 $E \to [k]$。

令 X_i 为指示器随机变量指示第 i 条边最后有没有被染色, 有为 1, 没有为 0.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{存在边没有颜色}) \\
&= P\left(X_1 = 0 \cup X_2 = 0 \ldots \cup X_{\binom{n}{2}} = 0\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} P(X_i = 0) \\
&= \binom{n}{2}\left(1 - \frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^k \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\left(1 - \frac{2m}{n(n-1)}\right)^{\frac{n^2 lnn}{m}} \\
&\le \frac{n(n-1)}{2} e^{-\frac{2nlnn}{n-1}} \\
&\le \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \\
&< \frac{n^2}{2}\frac{1}{n}^n \\
&= \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}
$$

因此, $P(\text{边全都有颜色}) > 0$, 得证。

5

X_i 指示第 i 个点是否为孤点，$X = \sum X_i$. 使用条件期望不等式

$$
\begin{aligned}
P(\text{存在孤点}) = P(X > 0) \\
&\ge \sum_{i=1}^{n} \frac{P(X_i = 1)}{E[X|X_i = 1]} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)^{n-1}}{\sum_{j=1}^{n} P(X_j = 1|X_i = 1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-p)^{n-1}}{1 + (n-1)(1-p)^{n-2}} \\
&= \frac{n(1-p)^{n-1}}{1 + (n-1)(1-p)^{n-2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{n(1-p)^{n-1}}{1 + (n-1)(1-p)^{n-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)^{n-1}}{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1-p)^{n-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)^{n-1}}{(1-p)^{n-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - p \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
P(\text{存在孤点}) \ge 1^{-}, \text{when } n \to \infty
$$

所以该图存在孤点的概率至少为 $1 - \epsilon$.

6

a)

定义指示器随机变量 X_i 为第 i 组三个点是否构成

三角形，一共有 $\binom{n}{3}$ 组

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(\sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} E(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} P(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} p^3 \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{3*2*n^3} \\
&< \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

由马尔科夫不等式,X 非负:

$$
P(X \geq 1) \leq \frac{E(X)}{1} \leq \frac{1}{6}
$$

b)

利用条件期望不等式.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 1) \geq \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{P(X_i=1)}{E[X|X_i=1]} \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{P(X_i=1)}{\sum_{j=1}^{\binom{n}{3}} E[X_j|X_i=1]} \\
&= \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{P(X_i=1)}{\sum_{j=1}^{\binom{n}{3}} P(X_j=1|X_i=1)}
\end{aligned}
$$

下面计算 $\sum_{j=1}^{\binom{n}{3}} P(X_j=1|X_i=1)$. 考虑 j 和 i 的公共边条数分别为 0,1,3 时候对应的计数.

$$
\text{\# of common edges} \begin{cases} 0 & \begin{cases} \binom{n-3}{3} & \text{\# of common vertex } =0 \\ 3\binom{n-3}{2} & \text{\# of common vertex } =1 \end{cases} \\ 1 & 3\binom{n-3}{1} \\ 3 & 1 \end{cases}
$$

$$
\sum_{j=1}^{\binom{n}{3}} P(X_j=1|X_i=1) = p^3\left(\binom{n-3}{3} + 3\binom{n-3}{2}\right) + p^2 3\binom{n-3}{1} + 1
$$

$$
P(X \geq 1) \geq \sum_{i=1}^{\binom{n}{3}} \frac{p^3}{p^3\left(\binom{n-3}{3} + 3\binom{n-3}{2}\right) + p^2 3\binom{n-3}{1} + 1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(X \geq 1) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} \frac{1}{\frac{\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} + \frac{3(n-3)(n-4)}{2}}{n^3} + \frac{3(n-3)}{n^2} + 1} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{\frac{7}{6}} \\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$