Probability And Mathmatical Statistics
Homework 2

151220131 谢旻晖

习题一 15

由条件概率公式，

$$\because \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A)$$
$$\therefore P(AB) = \frac{1}{12}$$
$$\because \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B)$$
$$\therefore P(B) = \frac{1}{6}$$
$$P(\overline{A}\ \overline{B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(AB))$$
$$= \frac{2}{3}$$

习题一 16

设事件 A 为从中取 2 件至少有一件为次品，事件 B 为两件都是次品，则本题需要求 $P(B|A)$.
易得 $P(A) = \frac{C_4^2 + C_6^1 * C_4^1}{C_{10}^2}$,$P(B) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$.
由条件概率公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

又因为 $B \subseteq A$, 所以 $P(AB) = P(B)$, 上式可化为

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{C_4^2}{C_4^1 * C_6^1 + C_4^2} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

习题一 20

设事件 $A_i (0 \le i \le 2)$ 为一盒中分别有 i 只次品，由 $\sum_{i=0}^{2} P(A_i) = 1$, 且 A_i 之间互斥，所以 A_0,A_1,A_2 构成一个完备事件组。
设事件 B 为该盒可以出厂。
(1)
由全概率公式

$$P(B)$$
$$= \sum_{i=0}^{2} P(B|A_i)P(A_i)$$
$$= 0.8 + \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} * 0.1 + \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} * 0.1$$
$$= 0.943$$

(2)
题意欲求 $P(A_0|B)$. 由条件概率公式.

$$P(A_0|B) = \frac{P(A_0B)}{P(B)}$$
$$\because A_0 \subseteq B$$
$$\therefore P(A_0B) = P(A_0)$$
$$\therefore P(A_0|B) = \frac{P(A_0)}{P(B)} = 0.848$$

补充 1

随机变量 X 为抛 10 次硬币正面朝上的次数，$X\ B(10, \frac{1}{2})$.
(1)

$$P(X=5) = C_{10}^5 (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^5 = 0.246$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=6}^{10} P(X=i) \\
&= \frac{C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}}{2^{10}} \\
&= 0.377
\end{aligned}
$$

(3)
样本空间为抛硬币 10 次出现的结果序列全集，事件 A 为所有 $i = 1, ...5$, 第 i 次抛硬币的结果和 $11 - i$ 次的结果相同。$|\Omega| = 2^{10}$,$|A| = 2^5$

$$
P(A) = \frac{|A|}{\Omega} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}
$$

(4)
分类讨论，我们用 0 代表反面向上，用 1 代表正面向上，那么 10 次抛硬币的结果可以表示为一个 10bit 的序列。
(1) 从第一个 bit 开始的连续 4 个及以上的正面朝上：有 $2^6 = 64$ 种.
(2) 非第一个 bit 开始的连续 4 个及以上的正面朝上：将 [0 1 1 1 1] 捆绑起来，它一共有 6 种放法，其余位置可以随意填入 0 与 1，有 $6 * 2^5 = 192$. 其中 [0 1 1 1 1 0 1 1 1 1] 被重复计算。$192 - 1 = 191$
(3)1 和 2 中其实有重复计数，[1 1 1 1 ? [0 1 1 1 1]] 和 [1 1 1 1 [0 1 1 1 1] ?]，4 种情况被计算了两次。
综上共有 251 种。

$$
P = \frac{251}{2^{10}} = 0.245
$$

补充 2

采用数学归纳法，对 n 进行归纳。

$n = 3$ **时**，trivial.

假设 $n = k$ **时**，盒子中存在 n 个球时停止操作，白球数目等可能的为 1 到 $n - 1$ 中的某个数。

当 $n = k + 1$ **时**，在盒中有 $n - 1$ 个球时，考虑完备事件组 $\{A_i, 1 \le i \le n - 2\}$, 其中 A_i 代表在盒中有 $n - 1$ 个球时白球数量为 i. 由假设，他们是等可能的, 即 $P(A_i) = \frac{1}{n-2}, 1 \le i \le n - 2$.

设事件 $B_i, 1 \le i \le n - 1$ 代表在盒中有 n 个球时白球数量为 i.

那么, 对于任意的 $i \in [1, n - 1], i \in Z$

$$
\begin{aligned}
P(B_i) &= \sum_{j=1}^{n-2} P(A_j) P(B_i | A_j) \\
&= P(A_i) P(B_i | A_i) + P(A_{i-1}) P(B_i | A_{i-1}) \\
&= \frac{1}{n-2} \frac{n-1-i}{n-1} + \frac{1}{n-2} \frac{i-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n-1}
\end{aligned}
$$

即 $P(B_1) = P(B_2) = ... = P(B_{n-1}) = \frac{1}{n-1}$. 假设对 $n = k + 1$ 仍然成立。

综上，证毕。

补充 3

应用推迟决定原则.

设事件 A_i 为 $0 \le i \le 5$ 为前 9 次投扔骰子的点数和模 6 为 i. 显然这是一个完备事件组。事件 B 为 10 次投扔骰子的和为 6 的倍数。

无论前 9 次点数和如何，最终 10 个骰子点数和取决于最后一个骰子的点数，且 6 种结果中只会有一种使得和为 6 的倍数. 即 $P(B|A_i) = \frac{1}{6}$.
应用全概率公式:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=0}^{5} P(B|A_i) * P(A_i) \\
&= \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{6} P(A_i) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

补充 4

定义 A, B, C 分别表示事件 A,B,C 会被释放，$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$，定义 W 表示事件牢头说 B 会被处决. 由全概率公式，

$$
\begin{aligned}
&P(W) \\
&= P(A)P(W|A) + P(B)P(W|B) + P(C)P(W|C) \\
&= \frac{1}{3} * p + \frac{1}{3} * 0 + \frac{1}{3} * 1 \\
&= \frac{p+1}{3}
\end{aligned}
$$