IAM 2020/2021 **Test 1** **24. 3. 2021**

Jméno a příjmení:	Login:	1	2	3	Σ

Výsledky musí být v souladu s výpočty nebo zdůvodněním na pomocném papíře, jinak je řešení neplatné.

Část 1 — Logika

1. Pomocí metody sémantického argumentu pro predikátovou logiku prvního řádu dokažte nebo vyvraťte platnost následující formule v teorii celých čísel $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ danou signaturou a axiomy uvedenými níže:
$$\forall s \forall t(0 \leq t \ \rightarrow \ s + 0 \leq s + t)$$
Teorie $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$:
   - Signatura: $\langle \mathcal{F} = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, -_{/1}\}, \mathcal{P} = \{\leq_{/2}\}\rangle$
   - Axiomy (postačující podmnožina):
     A1: $\forall x \forall y\big((x \leq y \wedge y \leq x) \quad \rightarrow \quad x = y\big)$
     A2: $\forall x \forall y \forall z\big((x \leq y \wedge y \leq z) \quad \rightarrow \quad x \leq z\big)$
     A3: $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$
     A4: $\forall x \forall y \forall z\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$
     A5: $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \quad \rightarrow \quad z + x \leq z + y)$
     A6: $\forall x(x + 0 = x)$
     A7: $\forall x(x + (-x) = 0)$
     A8: $\forall x \forall y(x + y = y + x)$
     ...

(4 body)

2. Převeďte následující formuli na ekvivalentní formuli v prenexní normální formě:
$$\forall x\Big(\exists y\big(R(x, y) \wedge \forall z(\neg S(x, z))\big) \rightarrow \neg \exists y(R(x, y))\Big)$$
(3 body)

3. Medvídek Pú uspořádal oslavu svých narozenin, na kterou pozval zvířátka z různých zemí. Několik dnů po oslavě se zjistilo, že všechna zvířátka byla nakažena novým virem neznámého původu. Medvídkovo vyšetřování nákazy zjistilo následující:
   (a) Na oslavě byl právě jeden pacient nula.
   (b) Pacient nula nebyl na oslavě nikým nakažen.
   (c) Každé zvířátko bylo nakaženo maximálně jedním jiným zvířátkem.
   (d) Každé zvířátko nakazilo maximálně dvě jiná zvířátka.
   (e) Žádné zvířátko nenakazilo sama sebe.
   (f) Zvířátka, která na oslavě pila tvrdý alkohol, nebyla nakažena jinými zvířatky, která pila tvrdý alkohol.
   (g) Zvířátka se nenakazila v cyklu (tj. např. pokud Prasátko nakazilo Ijáčka a Ijáček nakazil Tygra, pak Tygr už nemohl nakazit Prasátko).

   Formalizujte pomocí axiomů výsledky Medvídkova vyšetřování. Uvažujte jazyk $\mathcal{L}$ predikátové logiky prvního řádu s pěti predikátovými symboly $pac\_nula_{/1}$, $nakazil_{/2}$ (nechť $nakazil(x, y)$ značí, že x nakazil y), $pijan_{/1}$ a „vestavěným" predikátovým symbolem rovnosti $=_{/2}$, který je interpretován jako identita prvků.

   Použijte základní syntaxi predikátové logiky prvního řádu.

   Nápověda: ke každému z bodů (a)–(g) vytvořte jeden axiom či schéma axiomů. **(6 bodů)**

Jméno a příjmení:	Login:	4	5	6	Σ

Část 2 — Rozhodovací procedury

4. Eliminujte kvantifikátor z formule φ níže, nad $\mathbb{Z}$, Cooperovým algoritmem. Je formule splnitelná (a proč)?

$$\varphi : \exists x(x < 1 \wedge (z = 2x \vee z > 3) \wedge x < z)$$

(4 bodů)

5. Demonstrujte běh automatové procedury pro rozhodování splnitelnosti Presburgerovy aritmetiky na následující formuli φ:

$$\varphi : \exists y(x - y = 2 \wedge \neg(x - y = 2))$$

Co procedura odpoví a proč (jak odpověď souvisí s výsledným automatem)? **(5 bodů)**

6. Na následující formuli φ demonstrujte algoritmus Nelson-Oppen pro kombinaci rozhodovacích procedur. Řešte nad kombinovanou teorií $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} \cup \mathcal{T}_{\mathsf{E}}$ (racionální čísla a rovnosti/neinterpretované funkce).

$$\varphi : 1 \leq z - f(x) \wedge f(x) > z \wedge f(y) \leq z \wedge y \leq x \wedge x \leq y$$

(3 body)