动态规划

最小编辑距离

目录

CONTENTS

第一部分

问题引入

论文查重--最小编辑距离

一

实际问题引入

选题背景与意义

- 论文抄袭现象严重
- 论文查重
- 通过求解文本编辑距离判断是否抄袭

俄罗斯科学家Vladimir Levenshtein在1965年提出最小编辑距离这个概念
因此最小编辑距离也叫Levenshtein Distance

问题抽象与模型建立

数学模型--最小编辑距离：

论文查重-->比较两段文本的相似程度-->由一段文字转化为另一段文字的操作步数

操作步数-->编辑距离

编辑距离-->抄袭者改动程度

操作步数越少，编辑距离越小，相似度越大

实际问题抽象

查重问题抽象为：

给定两个字符串A和B，求字符串A至少经过多少步操作才能转换成字符串B

操作包括：

（1）删除一个字符

（2）插入一个字符

（3）将一个字符改为另一个字符

通过最小编辑距离判断两个字符串的相似程度进而判断抄袭嫌疑

第二部分

模型与算法分析

动态规划--递归

模型描述

模型分析：

dis[i][j]：字符串A的前i个字符到字符串B的前j个字符的编辑距离

1.当字符串A和B都为空时

dis[i][j]=0

2.当字符串A为空，字符串B不为空时

循环将B的第i个字符插入A中

dis[0][j]=j

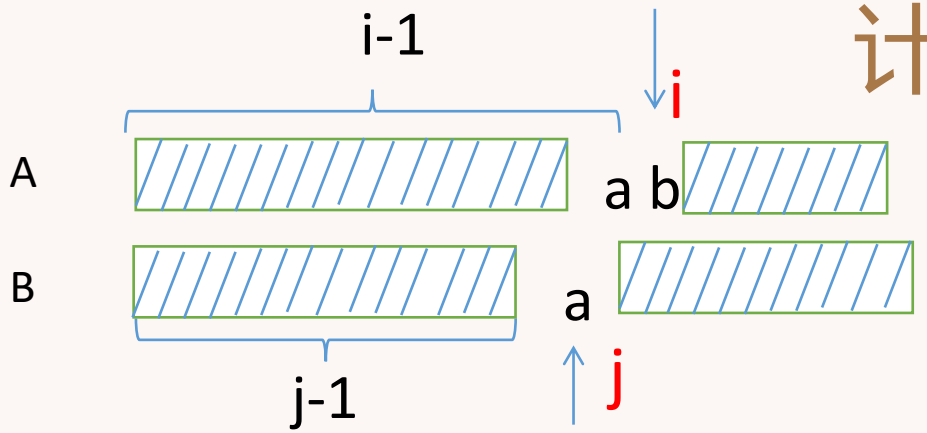
3.当字符串B为空，字符串A不为空时

循环删去A中的字符

dis[i][0]=i

一 计算模型

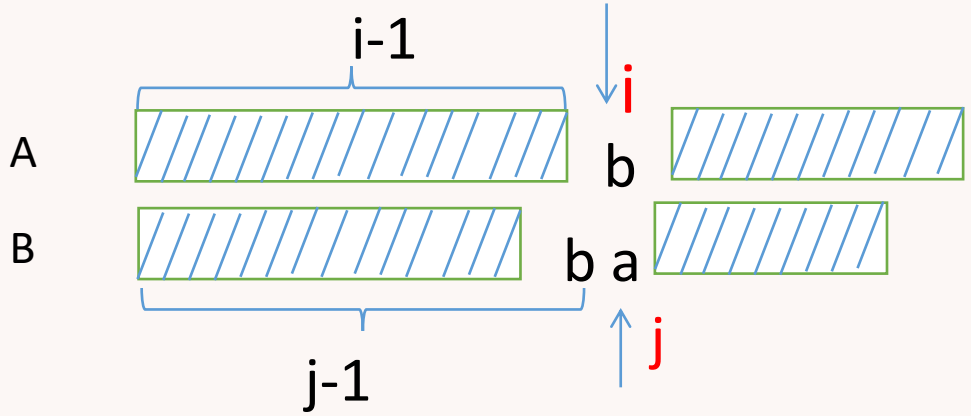
删除



A中i个和B中j-1个已比较结束，得出A中i个字符到B中j-1个字符的编辑距离

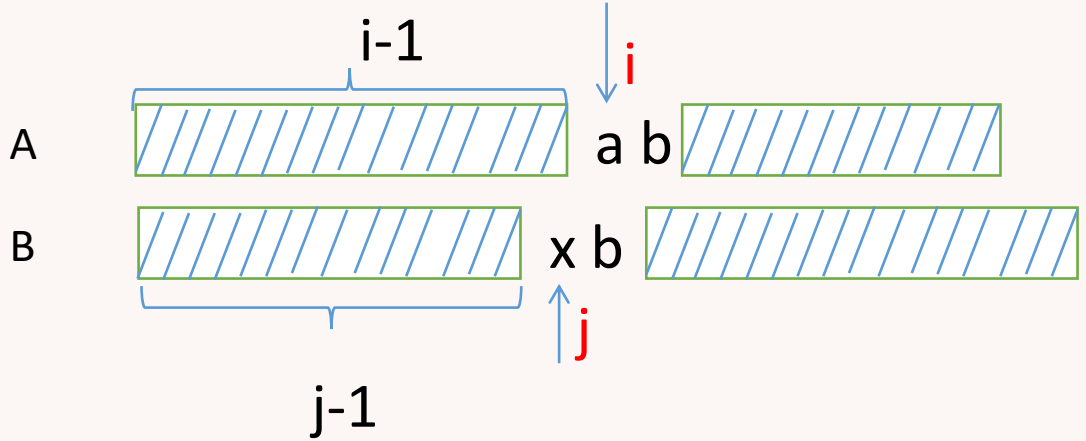
$$dis[i][j]=dis[i-1][j]+1$$

插入



$$dis[i][j]=dis[i][j-1]+1$$

替换



$$dis[i][j]=dis[i-1][j-1]+flag$$

$A[i-1]=B[j-1]$ $flag=0$

$A[i-1]\neq B[j-1]$ $flag=1$

计算模型

$$
Dis[i][j]=\begin{cases}0 & i=0,j=0\\ i & i>0,j=0\\ j & i=0,j>0\\ \min\{dis[i][j]=dis[i-1][j]+1,\ dis[i][j]=dis[i][j-1]+1,\ dis[i][j]=dis[i-1][j-1]+flag\} & i>0,j>0\end{cases}
$$

$$
Flag=\begin{cases}0 & A[i-1]=B[j-1]\\ 1 & A[i-1]\neq B[j-1]\end{cases}
$$

算法策略选择

01 递归算法

02 动态规划算法

递归：插入、删除、替换三种操作每一种都进行递归计算所有解法，比较后给出最小距离，浪费时间空间

动态规划：每次选择最优步骤

算法策略选择

多阶段逐步解决问题的策略——贪心算法、递推法、递归法和动态规划法

贪心算法：每一步都根据策略得到一个结果，并传递到下一步，自顶向下，一步一步地做出贪心决策。

动态规划算法：每一步决策得到的不是一个唯一结果，而是一组中间结果（且这些结果在以后各步可能得到多次引用），只是每一步都使问题的规模逐步缩小，最终得到问题的一个结果。

递推、递归法：注重每一步之间的关系，决策的因素较少。递推法是根据关系从前向后推导，从小规模问题的结论推解出大问题的解。而递归法是根据关系从后向前使大问题转化为小问题，最后同样由小规模问题的解推解出大问题的解。

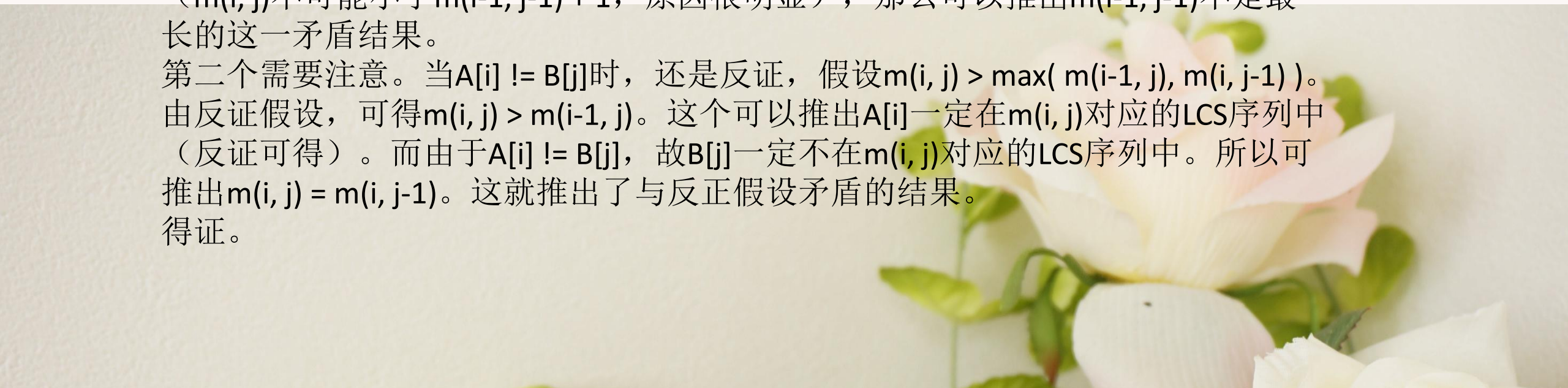



动态规划算法的正确性证明

假设有两个数组，A[],B[]。A[i]为A的第i个元素，A(i)为由A的第一个元素到第i个元素所组成的前缀。m(i, j)为A(i)和B(j)的最长公共子序列长度。
由于算法本身的递推性质，其实只要证明，对于某个i和j：

m(i, j) = m(i-1, j-1) + 1 （当A[i] = B[j]时）
m(i, j) = max(m(i-1, j), m(i, j-1)) （当A[i] != B[j]时）

第一个式子很好证明，即当A[i] = B[j]时。可以用反证，假设m(i, j) > m(i-1, j-1) + 1（m(i, j)不可能小于m(i-1, j-1) + 1，原因很明显），那么可以推出m(i-1, j-1)不是最长的这一矛盾结果。
第二个需要注意。当A[i] != B[j]时，还是反证，假设m(i, j) > max(m(i-1, j), m(i, j-1))。由反证假设，可得m(i, j) > m(i-1, j)。这个可以推出A[i]一定在m(i, j)对应的LCS序列中（反证可得）。而由于A[i] != B[j]，故B[j]一定不在m(i, j)对应的LCS序列中。所以可推出m(i, j) = m(i, j-1)。这就推出了与反正假设矛盾的结果。
得证。



算法

输入字符串s1，s2 输出最小编辑距离dis[len1][len2]

```
void MinDis()
{
        len1←s1.size();
        len2←s2.size();
        for  i←0 to len1 do
        dis[i][0]←i;
        for  j←0 to len2 do
        dis[0][j]←j;
        for i←1 to len1 do
        {
                for j←1 to len2 do
                {
                        //添加
                        If(s1[i - 1]
```

```
else
    add←1 + dis[i][j - 1];
//删除
    del←1 + dis[i - 1][j];

//替换
If(s1[i - 1] == s2[i - 1])
```

$$T(m,n) = 8 + \sum_{i=0}^{m} 3 + \sum_{j=0}^{n} 3 + \sum_{i=1}^{m} (4 + \sum_{j=1}^{n} 8)$$

$$= 8 + 3(m+1) + 3(n+1) + m(4+8n)$$

$$= 8mn + 7m + 3n + 14$$

$$= O(mn)$$

算法

```
int MinEditDistance(int i,int j,string s1,string s2)
{
    if(i==0)
        return j;
    if(j==0)
        return i;
    if(s1[i-1]==s2[j-1])
        return MinEditDistance(i-1,j-1,s1,s2);
    else
    {
        int add=MinEditDis
        int del=MinEditDis
        int rep=MinEditDis
        return ((add<del?a
    }

}
```

$$T(m,n) = T(m-1,n) + T(m-1,n-1) + T(m,n-1) + O(1)$$

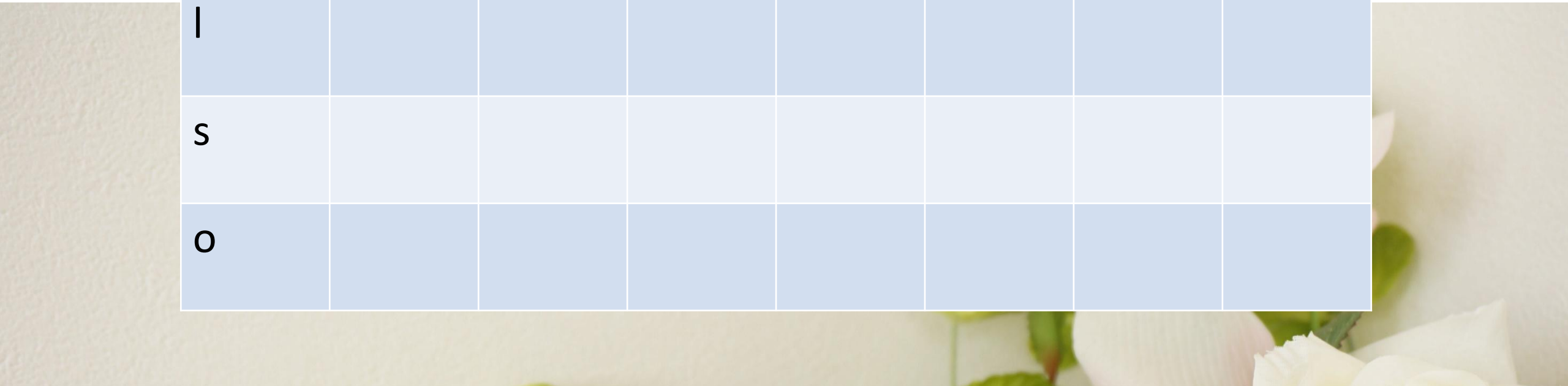
$$T(m,0) = O(1)$$

$$T(0,n) = O(1)$$

指数形式

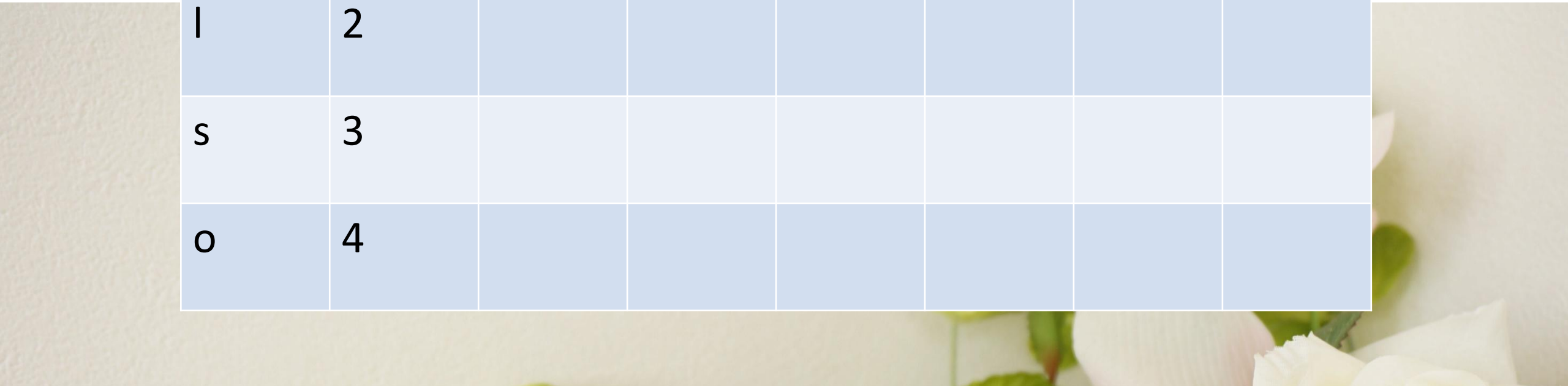
example

		a	l	m	o	s	t
a							
l							
s							
o							



example

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1						
l	2						
s	3						
o	4						



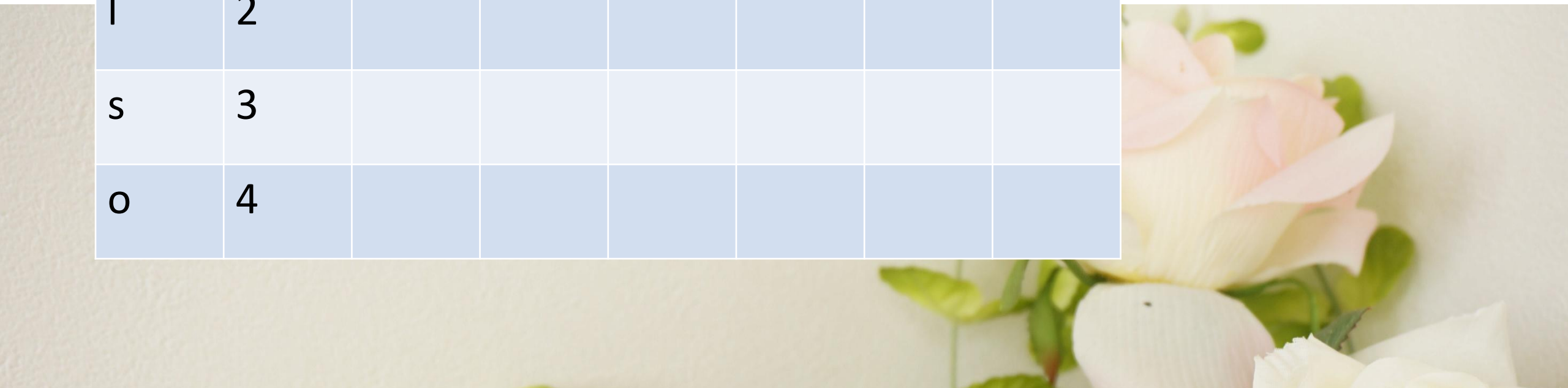
example

j ↓

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0					
l	2						
s	3						
o	4						

i →

a->a 0步操作



example

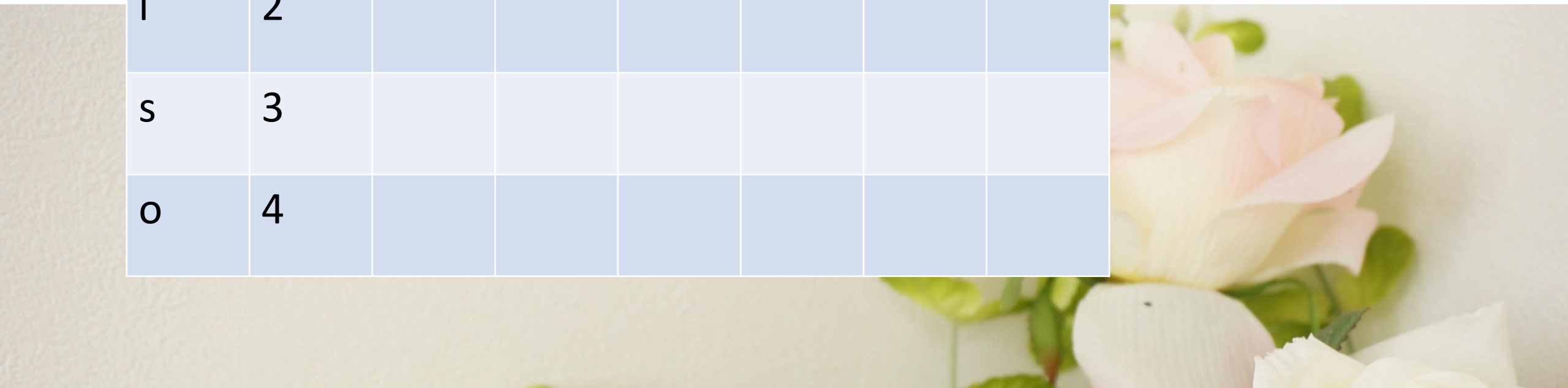
j

i

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1				
l	2						
s	3						
o	4						

a->a 0步操C作

a->l dis[i][j] = dis[i][j-1]+1



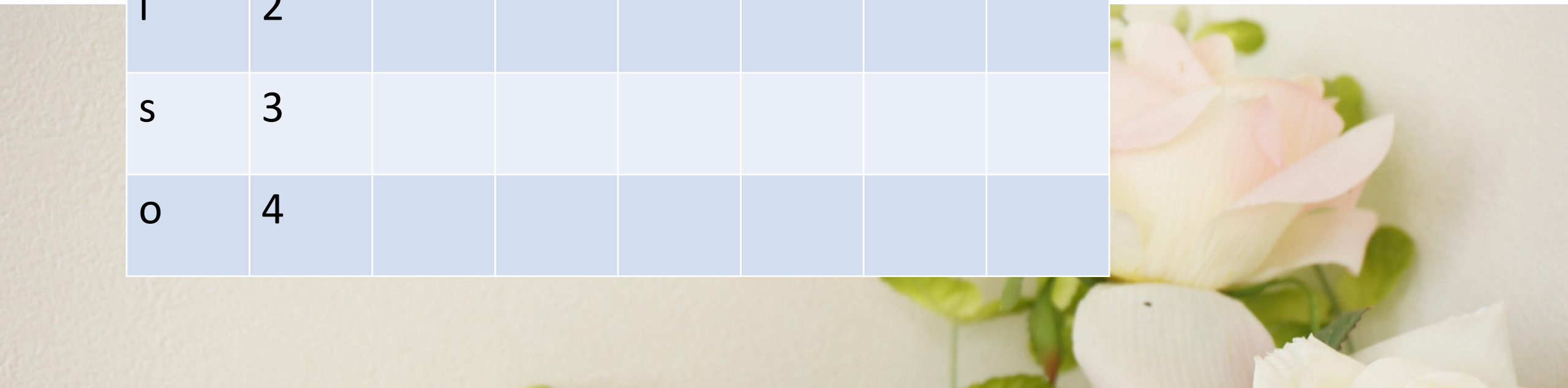
example

j

i

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	2			
l	2						
s	3						
o	4						

a->a 0步操作
a->l dis[i][j] = dis[i][j-1]+1
a->m dis[i][j] = dis[i][j-1]+1

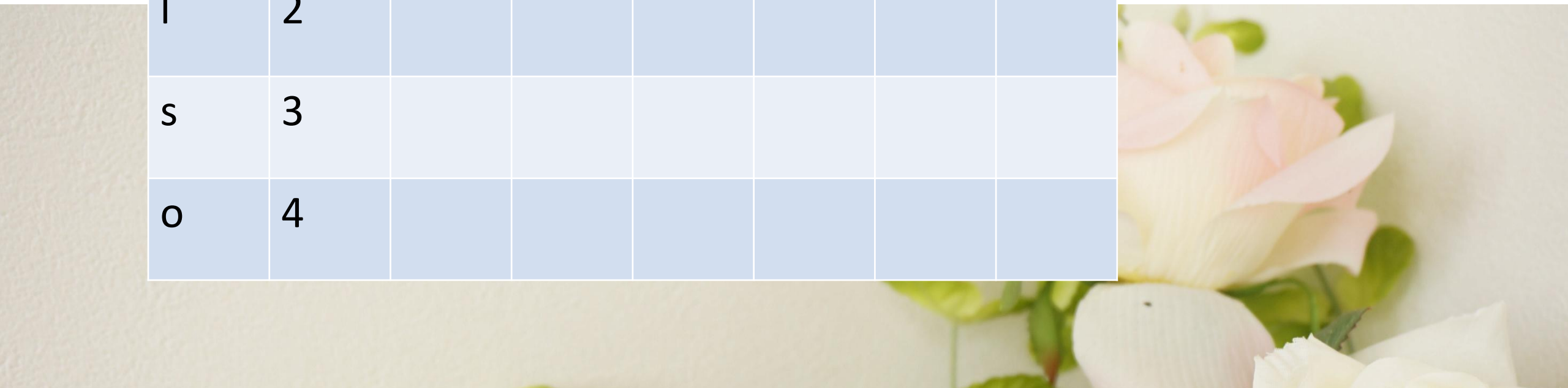


example

j

i

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	2	3	4	5
l	2						
s	3						
o	4						



example

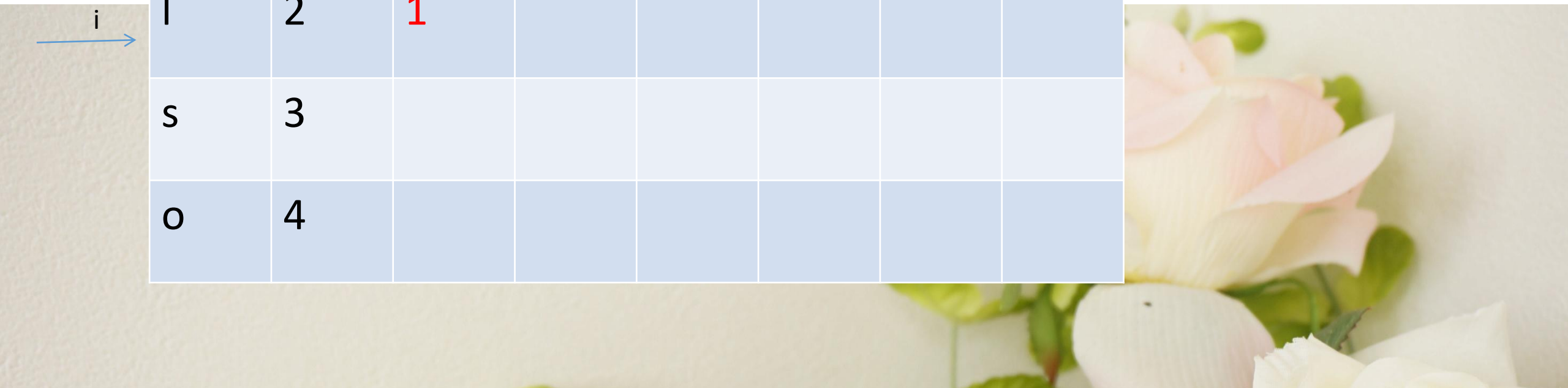
j

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	2	3	4	5
l	2	1					
s	3						
o	4						

i

l -> a dis[i][j] = dis[i-1][j]+1

l -> l dis[i][j] = dis[i-1][j-1]



example

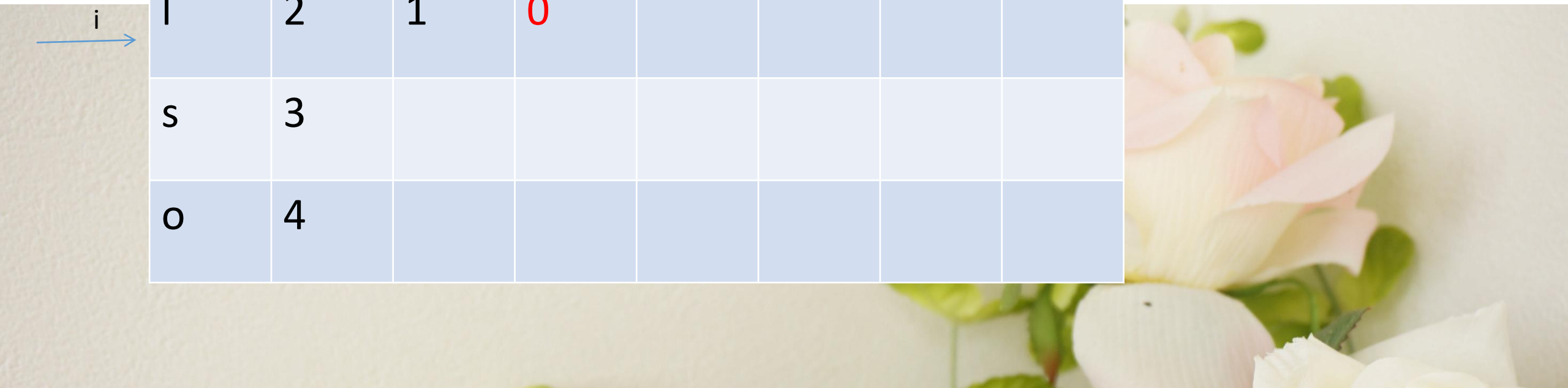
j

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	2	3	4	5
l	2	1	0				
s	3						
o	4						

i

l -> a

l -> l dis[i][j] = dis[i-1][j-1]



example

j

		a	l	m	o	s	t
	0	1	2	3	4	5	6
a	1	0	1	2	3	4	5
l	2	1	0	1	2	3	4
s	3	2	1	1	2	2	3
o	4	3	2	2	1	2	3

i

第三部分

代码与程序展示

代码演示

代码及测试数据

```
#include <iostream>
#include <string>
using namespace std;

int Min(int a,int b,int c)
{   /**返回a b c的最小值**/
    int temp=a<b?a:b;
    return temp<c?temp:c;
}

int MinEditDistance(string s1,string s2)
{
    int add,del,r;//添加,删除,替换 操作数

    int len1=s1.size();//字符串s1长度
    int len2=s2.size();

    int dis[len1][len2];

    for(int i=0;i<len1;i++){
        for(int j=0;j<len2;j++){

            if(i==0 && j==0)
                dis[i][j]=0;
            else if(i==0)
                dis[i][j]=j;
            else if(j==0)
                dis[i][j]=i;
            else{

                //添加
                if(s1[i]==s2[j]){
                    //若s1[i]与s2[j]相同 则不用添加
                    add=dis[i-1][j-1];
                }
                else{
                    //  s1[i]与s2[j]不相同 则在s1[i+1]处添加s2[j]
                    add=1+dis[i][j-1];
                }

                //删除
                del=dis[i][j]=1+dis[i-1][j];

                //替换(replace)
                if(s1[i]==s2[j]){
                    //若s1[i]与s2[j]相同 则不用替换
                    r=dis[i-1][j-1];
                }
                else{
                    //  s1[i]与s2[j]不相同 则将s1[i]位置处替换成s2[j]
                    r=1+dis[i-1][j-1];
                }

                dis[i][j]=Min(add,del,r);
                /*最后字符串s1[0..i]与s2[0..j]的最小操作数
                  为添加(add),删除(del)和替换(r)的最小值*/

            }
        }
    }
return dis[len1-1][len2-1];
}
int main()
{
    string s1,s2;
    cout<<"input two strings"<<endl;
    cout<<"string 1:";cin>>s1;
    cout<<"string 2:";cin>>s2;
    cout<<"---------------------------------"<<endl;
    cout<<"the Minimal Edit Distance is:"<<MinEditDistance(s1,s2)<<endl;
    cout<<"---------------------------------"<<endl;
    return 0;
```

代码及测试数据

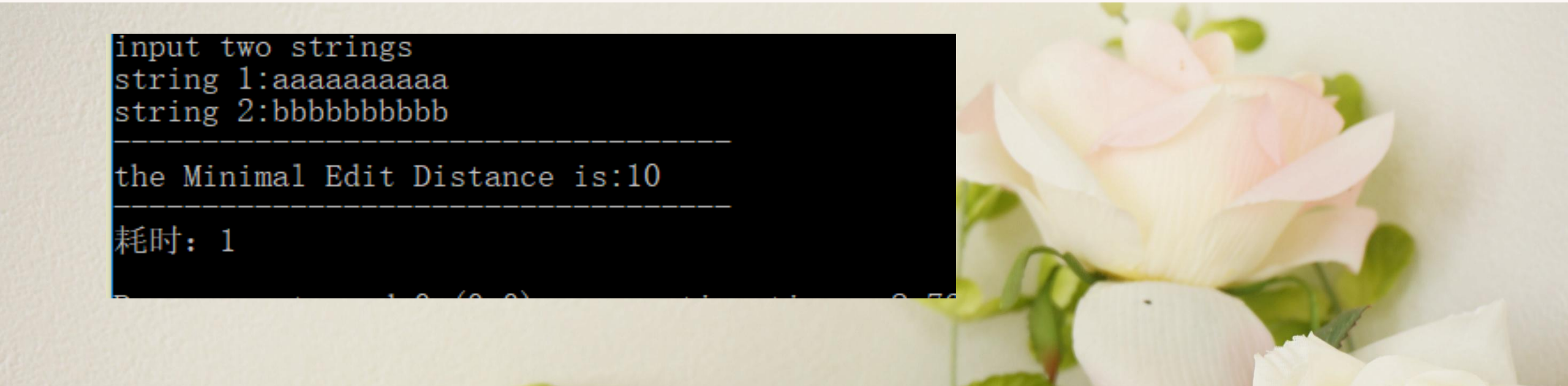
```
int Distance()
{
        int i, j;
        int length1 = strlen(A);
        int length2 = strlen(B);
        int flag,del,ins,change;
        int **dis = new int *[length1 + 1];
        for (i = 0; i <= length1; i++)
                dis[i] = new int[length2 + 1];
        for (i = 0; i <= length1; i++)
                dis[i][0] = i;
        for (j = 1; j <= length2; j++)
                dis[0][j] = j;
        for (i = 1; i <=length1; i++)
        {
                for (j = 1; j <=length2; j++)
                {
                        flag = A[i-1] == B[j-1] ? 0 : 1;
                        del = dis[i - 1][j] + 1;//删除后的距离
                        ins = dis[i][j - 1] + 1;//插入后的距离
                        change = dis[i - 1][j - 1] + flag;//替换后的距离
                        dis[i][j] = Min(del, ins, change);
                }
        }
        return dis[length1][length2];
}
```

程序及测试数据

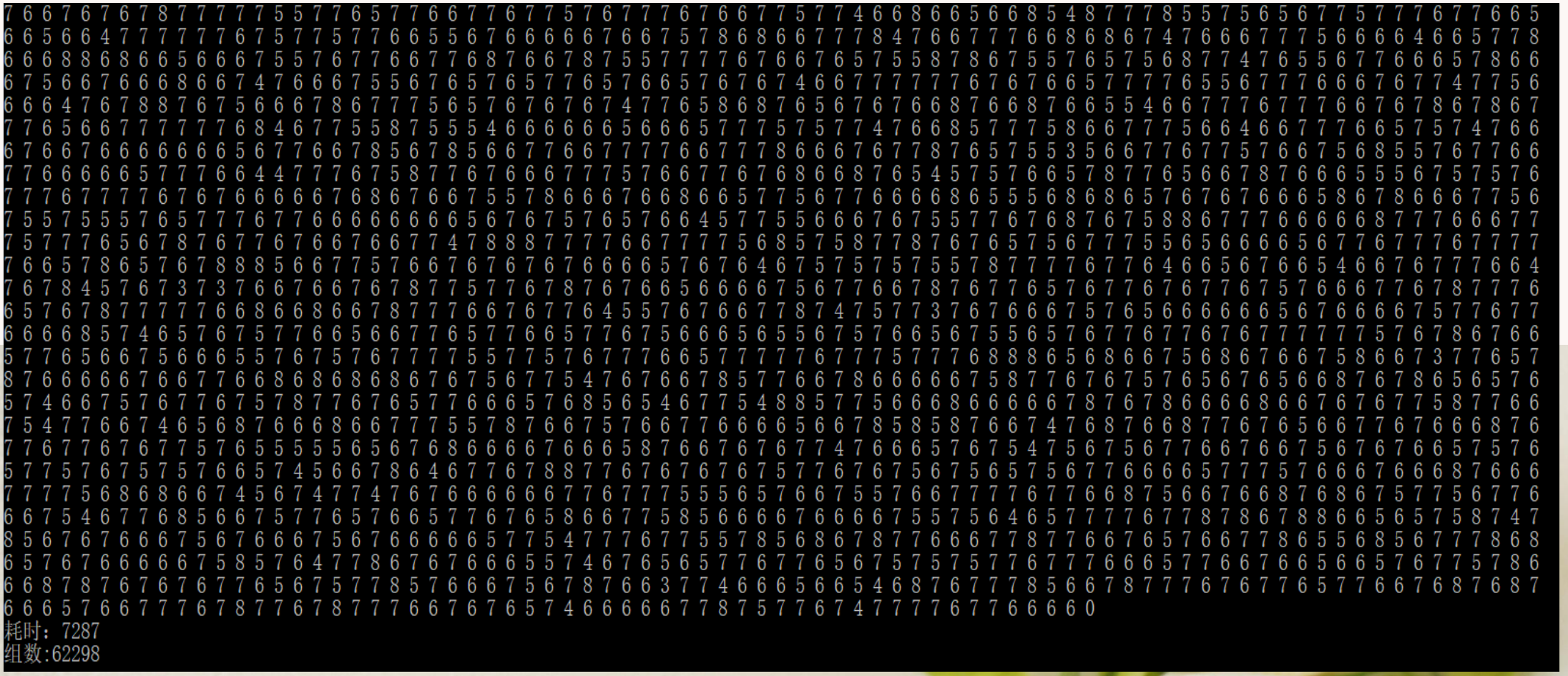
```
input two strings
string 1:aaaaaaaaaa
string 2:bbbbbbbbbb
--------------------------------
the Minimal Edit Distance is:10
--------------------------------
耗时: 5601

Process returned 0 (0x0)   execution time : 12.370 s
Press any key to continue.
```

```
input two strings
string 1:aaaaaaaaaa
string 2:bbbbbbbbbb
--------------------------------
the Minimal Edit Distance is:10
--------------------------------
耗时: 1
```



代码及测试数据



第四部分

总结与反思

收获：
学习建模过程
掌握最小编辑距离的动态规划算法

不足：
模型单一
与投入应用有一定差距