

تکلیف اول

مجتبی ملائی
۴۰۱۳۱۳۸۳

۱

۱. اگر توابع فعال ساز را حذف کنیم، فرمول نهایی به شکل زیر خواهد بود:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^3 x_i w_{ij}^{(1)} + b_j^{(1)} \right) w_j^{(2)} + b_j^{(2)}$$

که میتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=1}^3 x_i w_{ij}^{(1)} w_j^{(2)} + b_j^{(1)} w_j^{(2)} \right) + b_j^{(2)}$$

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^3 \left(x_i \left(\sum_{j=1}^4 w_{ij}^{(1)} w_j^{(2)} \right) + \sum_{j=1}^4 \left(b_j^{(1)} w_j^{(2)} \right) \right) + \sum_{j=1}^4 b_j^{(2)}$$

حالا اگر قرار دهیم:

$$w'_i = \sum_{j=1}^4 w_{ij}^{(1)} w_j^{(2)}, b' = \sum_{j=1}^4 b_j^{(1)} w_j^{(2)} + b_j^{(2)}$$

خواهیم داشت:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^3 x_i w'_i + b'$$

که در واقع همان ساختار یک شبکه عصبی بدون لایه پنهان است.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} = -\frac{y}{\hat{y}} + \frac{(1-y)}{1-\hat{y}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial z^{(2)}} = \sigma(z^{(2)})(1 - \sigma(z^{(2)})) = \hat{y}(1 - \hat{y}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial z_j^{(1)}} = 1 - \tanh^2(z_j^{(1)}) = 1 - (a_j^{(1)})^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z^{(2)}} = \frac{\partial J}{\partial \mathcal{L}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial z^{(2)}} = \frac{1}{m} \left(-\frac{y}{\hat{y}} + \frac{(1-y)}{1-\hat{y}} \right) \hat{y}(1 - \hat{y}) = \frac{1}{m} (\hat{y} - y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial a_j^{(1)}} \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial z_j^{(1)}} \frac{\partial z_j^{(1)}}{\partial w_{ij}^{(1)}} = (\hat{y} - y)(w_j^{(2)})(1 - (a_j^{(1)})^2)(x_i^{(1)}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_j^{(1)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial a_j^{(1)}} \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial z_j^{(1)}} \frac{\partial z_j^{(1)}}{\partial b_j^{(1)}} = (\hat{y} - y)(w_j^{(2)})(1 - (a_j^{(1)})^2) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j^{(2)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial w_j^{(2)}} = (\hat{y} - y)a_j^{(1)} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{(2)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial b^{(2)}} = \hat{y} - y \quad (8)$$

forward propagation:

$$z_j^{(1)} = [-0.1425, 0.1036, 0.7293, -0.1154]$$

$$a_j^{(1)} = [-0.14154322, 0.10323094, 0.62263691, -0.11489045]$$

$$z^{(2)} = 0.31613438, \hat{y} = 0.57838188, \mathcal{L} = 0.54752093, J = 0.54752093$$

back-propagation:

$$\frac{\partial J}{\partial w_j^{(2)}} = \begin{bmatrix} -0.05967719 \\ 0.04352403 \\ 0.262515 \\ -0.04843989 \end{bmatrix}, \frac{\partial J}{\partial b^{(2)}} = 0.42161812$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.02375734 & -0.03357857 & 0.00890675 & 0.00478461 \\ 0.04648176 & -0.0656972 & 0.01742624 & 0.00936119 \\ 0.06920618 & -0.09781583 & 0.02594574 & 0.01393777 \end{bmatrix}, \frac{\partial J}{\partial b_j^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.1032928 \\ -0.14599378 \\ 0.03872499 \\ 0.02080264 \end{bmatrix}$$

updated parameters:

$$w_j^{(2)} = w_j^{(2)} - 0.01 * \frac{\partial J}{\partial w_j^{(2)}} = \begin{bmatrix} 0.25059677 \\ -0.35043524 \\ 0.14737485 \\ 0.0504844 \end{bmatrix}, b^{(2)} = b^{(2)} - 0.01 * \frac{\partial J}{\partial b^{(2)}} = 0.29578382$$

$$w_{ij}^{(1)} = w_{ij}^{(1)} - 0.01 * \frac{\partial J}{\partial w_{ij}^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.44976243 & -0.11966421 & 0.77991093 & 0.71995215 \\ 0.04953518 & 0.35065697 & -0.22017426 & -0.85009361 \\ -0.55069206 & 0.11097816 & 0.66974054 & 0.44986062 \end{bmatrix}$$

$$b_j^{(1)} = b_j^{(1)} - 0.01 * \frac{\partial J}{\partial b_j^{(1)}} = \begin{bmatrix} 0.09896707 \\ -0.09854006 \\ 0.19961275 \\ -0.20020803 \end{bmatrix}$$

۲

میتوانیم از نمونه‌برداری مجدد داده‌ها (Resampling) به دو صورت زیر استفاده کنیم

- **Oversampling (افزایش داده‌های اقلیت):** می‌توان داده‌های دارای برچسب ۰ را با تکرار داده‌های موجود یا ایجاد داده‌های مصنوعی افزایش داد.
- **Undersampling (کاهش داده‌های اکثریت):** می‌توان تعداد نمونه‌های دارای برچسب ۱ را کاهش داد تا تعادل برقرار شود.

۳

۱.

step	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	5.5	-7175	3867
1	9.3675	-26994	-5876
2	15.244	-53615	-1345
3	16.589	-53654	1409
4	15.179	-53525	-1459
5	16.638	-53582	1525

Table 1: $\alpha = 0.001$

step	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	5.500	-7175	-3867
1	15.556	-53946	-772
2	17.564	-51109	3880
3	7.476	-16320	-5272
4	21.185	-15350	16939
5	-22.858	-197967	-7377

Table 2: $\alpha = 0.0026$

sdfsdf .۲