1η σειρά ασκήσεων

Μαθηματικά ΙΙΙ

Σχολή Χημικών Μηχανικών

Ημερομηνία παράδοσης: 14/11/2018

Άσκηση 1

Να λύσετε τις Σ.Δ.Ε.:

$a)\ x^x y' + x^x(lnx+1)y = 5^{x+3}$ $\quad \beta)\ y' + 4y = xe^{-2x}$ $\quad \gamma)\ (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$

$\delta)\ y' = \dfrac{y+x}{x-y}$ $\quad \varepsilon)\ \dfrac{y}{x} + (y^3 + lnx)y' = 0$ $\quad \sigma\tau)\ xy' - y = x^2 e^{-x},\ x>0$

Άσκηση 2

Να λύσετε τα Π.Α.Τ.:

$a)\ \dfrac{x}{1+y} - \dfrac{y}{1+x}y' = 0,\ y(1) = \dfrac{3}{2}$ $\quad \beta)\ y' - xy = -xy^3,\ y(0) = 2$

$\gamma)\ xy + (x^2+y^2+1)y' = 0,\ y(1) = 2$ $\quad \delta)\ (2y - xe^x) + xy' = 0,\ y(1) = 2$

$\varepsilon)\ y' = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},\ y(0) = 1$ $\quad \sigma\tau)\ x^2y' + 2xy - y^3 = 0,\ y(1) = 2,\ x>0$

Άσκηση 3

Να λύσετε τη Σ.Δ.Ε.:

$$y' = \frac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$$

χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις $x = u+1, y = v+2$.

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι αν η παράσταση $\dfrac{M_y - N_x}{N-M} = f(x+y)$, τότε υπάρχει ολοκληρώνοντας παράγοντας

$$\mu(x+y) = e^{\int f(x+y)d(x+y)}$$

που μετατρέπει την εξίσωση $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ σε ακριβή.

Άσκηση 5

Να λύσετε τις Σ.Δ.Ε.:

$a)\ y'' - y' - 2y = 0$ $\quad \beta)\ y'' - 2y' - y = 0$ $\quad \gamma)\ y'' - 4y' + 4y = 0$

$\delta)\ y'' + 9y = 0$ $\quad \varepsilon)\ y'' - 3y' = 0$ $\quad \sigma\tau)\ y'' - 2y' + 2y = 0$

Άσκηση 6

Να λύσετε τα Π.Α.Τ.:

$a)$ $y'' - 5y' + 6y = 0,\ y(1) = 3,\ y'(1) = 4$ $\beta)$ $3y'' - 2y' - y = 0\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

$\gamma)$ $y'' + 3y = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 4$ $\delta)$ $y'' + 6y' + 9 = 0,\ y(2) = 0,\ y'(2) = 1$

$\varepsilon)$ $y'' + 5y' = 0,\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = 0$ $\sigma\tau)$ $y'' + 4y' + 5 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

Άσκηση 7

Να προσδιορίσετε το μέγιστο διάστημα στο οποίο το Π.Α.Τ.:

$$xy'' + 3y = x,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$$

είναι βέβαιο ότι έχει δύο φορές παραγωγίσιμη λύση. Να μην λύσετε το Π.Α.Τ.

Άσκηση 8

Αν οι συναρτήσεις y_1, y_2 συγκροτούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $y'' + py' + qy = 0$, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει μια ακριβώς ρίζα της y_2.

Άσκηση 9

Να βρείτε την ορίζουσα Wronski δύο λύσεων των Σ.Δ.Ε.:

$a)$ $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ $\beta)$ $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

Άσκηση 10

Να αποδείξετε ότι αν οι y_1, y_2 έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στο ίδιο σημείο του I, τότε δεν μπορούν να συγκροτούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων σε αυτό το διάστημα.