ANALISI NUMERICA

ESERCITAZIONE n.5 giovedì 12/5/16

1. Derivazione Numerica: Confronto tra le diverse formule

x	f (x)
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

Sono dati in tabella i valori, per i punti x elencati, della funzione $f(x) = x \cdot e^{x}$. Calcolare un valore approssimato per $f'(2.0)$ usando tutte le formule disponibili (2 punti in avanti e indietro, 3 punti centrale ed estremo, 5 punti centrale). In ogni caso, valutare l'errore massimo previsto dalla formula del resto e confrontare con l'errore effettivo rispetto al valore analitico esatto.

(NB uso consigliato di MATLAB: assegnare a variabili i valori numerici ad es. F19=12.703199)

2 punti: $f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right] - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0+h)$

3 punti centrale: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0-h, x_0+h)$

3 punti estremo: $f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[-3 \cdot f(x_0) + 4 \cdot f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0+2h)$

5 punti centrale:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h) - 8 \cdot f(x_0-h) + 8 \cdot f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right] + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in (x_0-2h, x_0+2h)$$

formula	h	sost. valori	$f'(x_0)$	errore assoluto	max err. teorico
…	…	…	…	…	…

2. Derivazione Numerica: Variazione per h decrescente, valore ottimale di h

Sono dati in tabella i valori, per i punti x elencati, della funzione $f(x) = \sin(x)$. Calcolare un valore approssimato per $f'(x)$ per $x = 0.900$ tramite la formula a 3 punti centrale, usando tutti i possibili valori di h decrescenti (h = 0.1 - 0.05 - 0.02 - 0.01 - 0.005 - 0.002 - 0.001).
Confrontare con il valore analitico esatto e con il limite massimo teorico per l'errore. Per quale valore di h si ottiene l'approssimazione migliore? Commentare. Confrontare con il valore teorico di h ottimale.

x	sin(x)	x	sin(x)
0.800	0.71736	0.901	0.78395
0.850	0.75128	0.902	0.78457
0.880	0.77074	0.905	0.78643
0.890	0.77707	0.910	0.78950
0.895	0.78021	0.920	0.79560
0.898	0.78208	0.950	0.81342
0.899	0.78270	1.000	0.84147

h	$f'(0.900)$	errore assoluto
0.001		
0.002		
0.005		
0.010		
0.020		
0.050		
0.100		

NB valore esatto: cos(0.9)=0.62160997 ≅ 0.62161 – (calcoli svolti a 5 cifre significative)

3. Derivazione Numerica: Esercizio

Usare le formule appropriate per completare i valori mancanti nelle seguenti tabelle (più possibilità per ogni valore, confrontare).
Sapendo che le funzioni $f(x)$ sono rispettivamente le seguenti:
(a): $f(x) = e^{x} - 2x^2 + 3x - 1$, (b): $f(x) = x \cdot \cos x - x^2 \sin x$,

calcolare in ogni caso l'errore assoluto effettivo e confrontare con il limite massimo teorico previsto per la formula corrispondente.

(a)

x	f (x)	f ' (x)
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

(b)

x	f (x)	f ' (x)
2.9	-4.827866	
3.0	-4.240058	
3.1	-3.496909	
3.2	-2.596792	

4. Integrazione Numerica: Formule Base - Confronto

Valutare l'integrale definito $\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con la Regola del Trapezio e con la Regola di Simpson. Confrontare i risultati ottenuti. Determinare in ogni caso il limite massimo teorico per l'errore. Sapendo che il valore analitico esatto è pari a 2,958, commentare sui valori ottenuti per l'errore in ogni caso.

(NB uso consigliato di MATLAB: disegnare il grafico delle funzioni derivate per controllare i valori massimi nell'intervallo)

Regola del Trapezio: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \quad , \quad \xi \in (a,b)$

Regola di Simpson: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \quad , \quad \xi \in (a,b)$

$$\left(= \frac{f^{(4)}(\xi)\cdot h^5}{90} \ , \ \text{con } h = \frac{b-a}{2} \right)$$

5. Integrazione Numerica: Formule Base - Esercizio

Valutare l'integrale definito $\int_{0.5}^1 x^4\,dx$ usando la Regola del Trapezio e la Regola di Simpson.

In ogni caso effettuare la stima del limite massimo per l'errore, e confrontare con l'errore realmente commesso rispetto al valore analitico esatto. Commentare.

6. Integrazione Numerica: Formule Composte - Confronto

Valutare l'integrale definito $\int_0^4 e^x\,dx$ usando le Regole Composte di Simpson e del Trapezio, con valori di n = 2, 4, 8, 16. Confrontare i risultati ottenuti. In ogni caso effettuare la stima del limite massimo per l'errore, e confrontare con l'errore realmente commesso rispetto al valore analitico esatto.

NB Esplicitare e svolgere i calcoli manualmente. Poi, eventualmente, script di MATLAB o routine in altro programma / linguaggio.

Formula di Simpson Composta:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\cdot\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4\cdot\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] - \frac{(b-a)\cdot h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \quad , \quad \xi \in (a,b)$$

Formula dei Trapezi Composta: $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right] - \frac{(b-a)\cdot h^2}{12} f''(\xi) \quad , \quad \xi \in (a,b)$