

天文观测积分时间与星等的关系讨论

许睿安

北京大学物理学院 2017 级 4 班 学号: 1700011453^{*}

(日期: 2019 年 11 月 20 日)

关键词: 信噪比, 观测积分时间, AB 星等, u'g'r'i'z' 系统

^{*} [juianhsu@pku.edu.cn](mailto:juiansu@pku.edu.cn); (+86)13021150508

I. 引言

我们知道想要观测越暗的天体，所需要的曝光时间（或称为观测积分时间）越长。同时望远镜的口径越大、环境视宁度（seeing）越好、背景天光越暗在相同的观测积分时间下都有利于看见更暗的天体。本文试着综合考虑各种实际因素，结合理论分析，给出观测积分时间与星等的关系，并在以简单实例中具体显示。

II. 理论

A. 物理量

表 I 列出本文所用到的所有物理量及其单位。

表 I: 本文所用到的所有物理量及其单位。

物理量	意义	单位
S_N	信噪比 (信号除以噪声)	无量纲
N_R	读出噪声 (每次读出的光电子数不一样)	e^-
i_{DC}	暗电流 (电子随机运动产生光电流)	e^-/s
Q_e	量子效率 (光子转换成电子的效率)	无量纲
F	目标流量 (来自目标的信号)	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$
f	每单位频率的流量 (积分波长即为 F) ^a	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$
F_β	背景流量 (单位立体角的流量)	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{arcsec}^{-2}$
Ω	对应的立体角 (与 F_β 相乘才是流量量纲) ^b	arcsec^2
ϵ	望远镜效率 (接收光子的效率)	无量纲
τ	观测积分时间 (曝光时间)	s
A	望远镜集光面积	cm^2
D	望远镜口径	m
m_{AB}	以 AB 星等表示的星等大小	无量纲
$seeing$	视宁度 (衡量大气稳定性)	arcsec

^a 虽然 f 和 F 的量纲不同，但有时候也把 f 直接称为流量。

^b 如果范围不是很大，实际应用时可以取 $seeing^2$ 。

B. AB 星等

AB 星系统的绝对流量定标基于 Vega 的 V 波段流量，即 AB 星系统的任何波段的零等星流量皆是 3631 Jy. 因此容易得到 AB 星等 m_{AB} 和流量 f_ν 的关系如式 1 和 2.

$$m_{AB} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_\nu}{3631 \text{Jy}} \right) \quad (1)$$

$$f_\nu = 3631 \exp(-0.4m_{AB}) \quad (2)$$

其中

$$1\text{Jy} = 10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{Hz} \cdot \text{m}^2} = 10^{-23} \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} \quad (3)$$

同时我们知道光子能量可以表示成

$$E = \frac{1.99\text{\AA}}{\lambda} \times 10^{-8} \text{erg} \quad (4)$$

因此流量就和实际观测到的光子数关联在一起了

$$1\text{Jy} = \frac{10^{-23}}{\frac{1.99\text{\AA}}{\lambda} \times 10^{-8}} \frac{\text{photon}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} = \frac{\lambda}{1.99\text{\AA}} \times 10^{-15} \frac{\text{photon}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} \quad (5)$$

C. u'g'r'i'z' 系统

u'g'r'i'z' 系统是 Sloan 巡天计划 (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) 所使用的测光系统，有 5 种波段的滤镜 u', g', r', i', z'，详细参数如表 II 所示.

表 II: u'g'r'i'z' 系统滤镜参数.

	u'	g'	r'	i'	z'
$\lambda_{eff}/\text{\AA}^{\text{a}}$	3557	4825	6261	7672	9097
$\Delta\lambda/\text{\AA}^{\text{b}}$	468	988	955	1064	1248

^a 有效波长，具体说明见 [2].

^b 等效高斯分布的半高全宽，具体说明见 [2].

D. 信号

望远镜接收的来自星体的信号大小可以表示为

$$S = F\tau A\epsilon Q_e \quad (6)$$

单位为光电子数，符号定义及单位见表 I.

E. 噪声

1. 信号噪声

光子数遵从 poisson 分布，因此信号本身就存在噪声

$$N_S = \sqrt{S} \quad (7)$$

2. 暗电流

暗电流起因于电子的随机运动，导致得到的光电子除了信号之外还有一部分噪声

$$N_{DC} = \sqrt{S_{DC}} = \sqrt{i_{DC}\tau} \quad (8)$$

3. 背景噪声

背景天光存在一定亮度，可以形式上写成与式 6 相同的等式

$$S_\beta = F_\beta \Omega \tau A \epsilon Q_e \quad (9)$$

注意到 F_β 和 Ω 的量纲，使得 $F_\beta \Omega$ 和式 6 的 F 有相同的物理意义.

4. 读出噪声

读出噪声是在读出的时候产生的噪声，读出时间越短噪声越大，与曝光时间的长短没关系。

F. 信噪比

综上所述，噪声可以分成与时间有关的部分 N_{time} 和无关的部分 N_R

$$N_{time} = \sqrt{S + S_{DC} + S_\beta} = \sqrt{F\tau A_\epsilon Q_e + i_{DC}\tau + F_\beta\Omega\tau A_\epsilon Q_e} = \sqrt{\tau N_T} \quad (10)$$

其中

$$N_T = FA_\epsilon + i_{DC} + F_\beta\Omega A_\epsilon \quad (11)$$

定义 A_ϵ 为有效集光面积

$$A_\epsilon = A_\epsilon Q_e \quad (12)$$

因此信噪比可以表示成

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{N_R^2 + N_{time}^2}} = \frac{F\tau A_\epsilon}{\sqrt{N_R^2 + \tau N_T}} \sim \sqrt{\tau} \quad (13)$$

由此可以发现信噪比大致上与 $\sqrt{\tau}$ 成正比. 从式 14 可以写出

$$\tau = \frac{S_N^2 N_T}{2F^2 A_\epsilon^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4F^2 A_\epsilon^2 N_R^2}{S_N^2 N_T^2}} \right] \quad (14)$$

值得注意的是，以上对于信噪比的讨论指的是望远镜观测时的信噪比，但是更多时候关心的是信号处理的信噪比，差别在于我们并不能知道真正的信号，信号总是和噪声叠加，因此考虑到统计上的估计问题 [3]，信噪比应该修正为

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{N_S^2 + 2N_n^2}} = \frac{FA_\epsilon\sqrt{\tau}}{\sqrt{FA_\epsilon + 2\left(\frac{N_R^2}{\tau} + i_{DC} + F_\beta\Omega A_\epsilon\right)}} \quad (15)$$

其中, N_S 是信号噪声, N_n 是信号噪声以外的噪声.

III. 例题

考虑最简单的情况, 忽略读出噪声 N_R 、暗电流 i_{DC} 、和望远镜效率 ϵ , 在表 III 条件下观察积分时间与星等的关系.

表 III: 例题参数.

物理量	大小	单位
S_N	10	无量纲
Q_e	0.5	无量纲
$m_{AB,g}^a$	16~28	无量纲
F_β	19,21,23	$m_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$
D	1, 4, 10	m
$seeing$	3, 1, 0.5, 0.1	arcsec

^a 表示在 u'g'r'i'z' 系统中的 g' 波段的星等.

此条件下, 式 16 简化为

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{F A_\epsilon \sqrt{\tau}}{\sqrt{F A_\epsilon + 2 F_\beta \Omega A_\epsilon}} \quad (16)$$

则

$$\tau = \frac{S_N^2 N_T}{F^2 A_\epsilon^2} \quad (17)$$

其中

$$N_T = F A_\epsilon + 2 F_\beta \Omega A_\epsilon \quad (18)$$

只要利用式 5 和式 17 就能把积分时间和星等关联在一起, 得到以下结果.

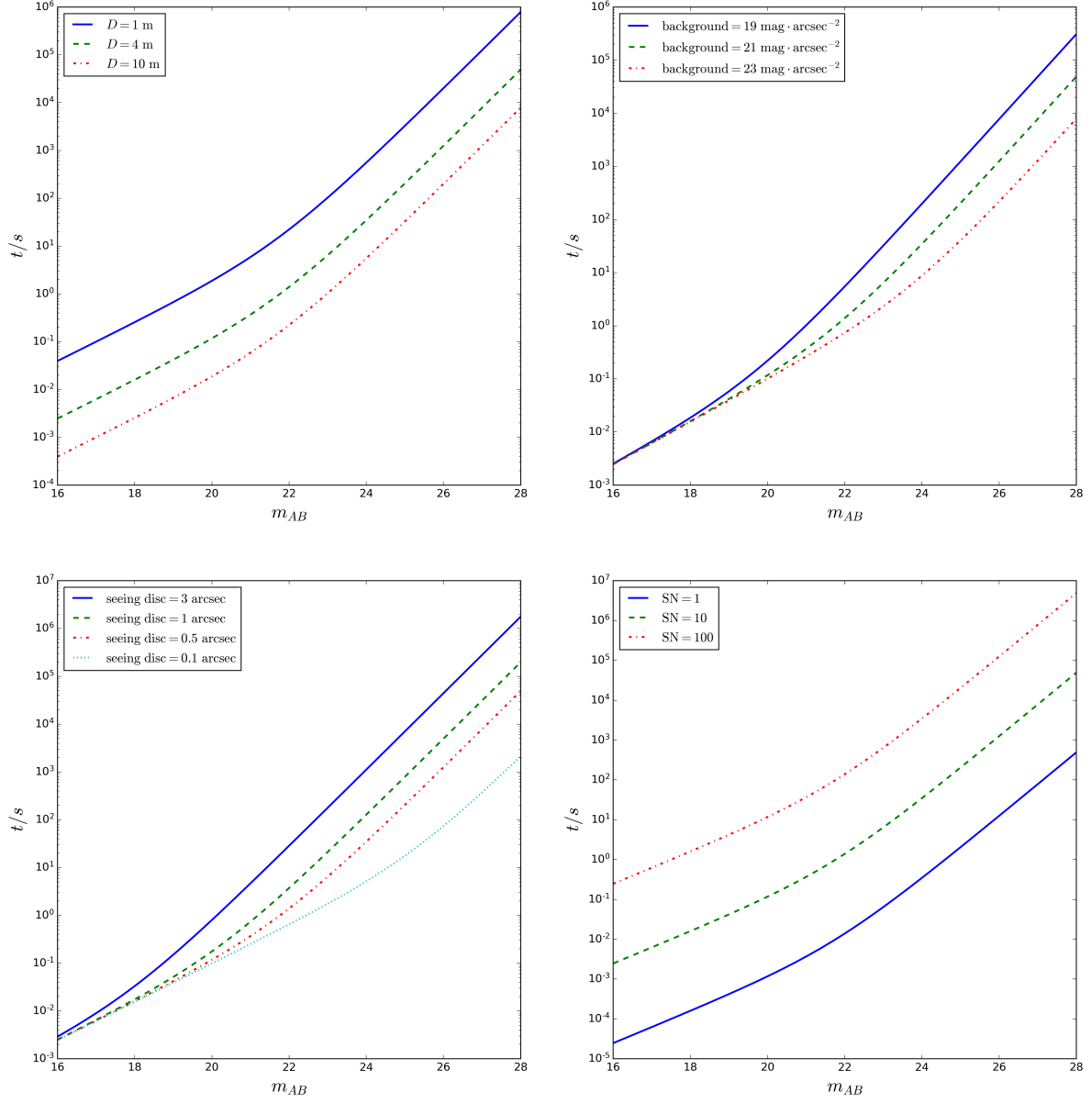


图 1: 在不同的望远镜口径 (左上)、背景噪声 (右上)、大气视宁度 (左下)、信噪比 (右下) 下, 观测积分时间与星等的关系.

若固定观测积分时间 $\tau = 3600\text{s}$, 可观测到的极限星等如表 IV 所示, 表中没有特别指出的参数皆以 $D = 4\text{ m}$ 、 $seeing = 0.5\text{ arcsec}$ 、 $F_{\beta} = 21\text{ m}_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$ 代入

表 IV: 固定观测积分时间 $\tau = 3600\text{s}$, 在不同条件下可观测到的极限星等.

D/m	$m_{AB,g}$	$seeing/\text{m}$	$m_{AB,g}$	$F_{\beta}/m_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$	$m_{AB,g}$
1	25.418	3	25.012	19	25.956
4	26.950	1	26.202	21	26.950
10	27.951	0.5	26.950	23	27.937
		0.1	28.662		

-
- [1] Wikipedia2019AB magnitude, 地址 https://en.wikipedia.org/wiki/AB_magnitude
- [2] Fukugita, M., Ichikawa, T., Gunn, J. E., Doi, M., Shimasaku, K., Schneider, D. P. 1996
Astronomical Journal 111 1748
- [3] 皮埃尔·莱纳, 丹尼尔·鲁昂, 弗朗索瓦·勒布伦, 弗朗索瓦·米尼亚尔, 迪迪埃·佩拉
2015 观测天体物理学 (第一版) 伍可, 孙维新, 胡景耀译 (北京: 中国科学技术出版社) 第
459-460 页.