

天文觀測積分時間與星等的討論

許睿安

北京大學物理學院 2017 級 4 班 學號: 1700011453^{*}

(日期: 2019 年 11 月 21 日)

關鍵詞: 信噪比, 觀測積分時間, AB 星等, u'g'r'i'z' 系統

^{*} juiansu@pku.edu.cn; (+86)13021150508

I. 引言

我們知道想要觀測越暗的天體，所需要的曝光時間（或稱作觀測積分時間）越長。同時望遠鏡的口徑越大、環境視寧度（seeing）越好、背景天光越暗在相同的觀測積分時間下都有利於看見更暗的天體。本文試著綜合考慮各種實際因素，結合理論分析，給出極限星等是如何依賴於觀測積分時間的公式，最後在以簡單實例具體顯示。

II. 理論

A. 物理量

表 I 列出本文所用到的所有物理量及其單位。

表 I: 本文所用到的所有物理量及其單位。

物理量	意義	單位
S_N	信噪比 (信號除以噪聲)	無量綱
N_R	讀出噪聲 (每次讀出的光電子數不一樣)	e^-
i_{DC}	暗電流 (電子隨機運動導致光電流)	e^-/s
Q_e	量子效率 (光子轉成電子的效率)	無量綱
F	目標流量 (來自目標的信號)	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$
f	每單位頻率的流量 (積分波長即 F) ^a	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$
F_β	背景流量 (單位立體角的流量)	$\text{photon} \cdot s^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{arcsec}^{-2}$
Ω	對應的立體角 (與 F_β 相乘才是流量量綱) ^b	arcsec^2
ϵ	望遠鏡效率 (接收光子的效率)	無量綱
τ	觀測積分時間 (曝光時間)	s
A	望遠鏡集光面積	cm^2
D	望遠鏡口徑	m
m_{AB}	以 AB 星等表示的星等大小	無量綱
$seeing$	視寧度 (衡量大氣穩定性)	arcsec

^a 雖然 f 和 F 的量綱不同，但有時候也把 f 直接稱作流量。

^b 如果範圍不是很大，實際應用時可以取 $seeing^2$ 。

B. AB 星等

AB 星系統的流量定標基於 Vega 的 V 波段流量，即 AB 星系統的任何波段的零等星流量皆是 3631 Jy. 因此容易得到 AB 星等 m_{AB} 和流量 f_ν 的關聯如式式 1 和 2.

$$m_{AB} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{f_\nu}{3631 \text{ Jy}} \right) \quad (1)$$

$$f_\nu = 3631 \exp(-0.4 m_{AB}) \quad (2)$$

其中

$$1 \text{ Jy} = 10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{Hz} \cdot \text{m}^2} = 10^{-23} \frac{\text{erg}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} \quad (3)$$

同時我們知道光子能量可以表示成

$$E = \frac{1.99 \text{ \AA}}{\lambda} \times 10^{-8} \text{ erg} \quad (4)$$

因此流量就和實際觀測到的光子數關聯在一起了

$$1 \text{ Jy} = \frac{10^{-23}}{\frac{1.99 \text{ \AA}}{\lambda} \times 10^{-8}} \frac{\text{photon}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} = \frac{\lambda}{1.99 \text{ \AA}} \times 10^{-15} \frac{\text{photon}}{\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^2} \quad (5)$$

C. u'g'r'i'z' 系統

u'g'r'i'z' 系統是 Sloan 巡天計劃 (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) 所使用的測光系統，有 5 種波段的濾鏡 u', g', r', i', z'，詳細參數如表 II 所示.

D. 信號

望遠鏡接收的來自星體的信號大小可以表示成

$$S = F \tau A \epsilon Q_e \quad (6)$$

表 II: $u'g'r'i'z'$ 系統濾鏡參數.

	u'	g'	r'	i'	z'
$\lambda_{eff}/\text{\AA}^{\text{a}}$	3557	4825	6261	7672	9097
$\Delta\lambda/\text{\AA}^{\text{b}}$	468	988	955	1064	1248

^a 有效波長，詳細見 [2].

^b 等效高斯分布的半高全寬，詳細見 [2].

單位是光電子數，符號定義及單位見表 I.

E. 噪聲

1. 信號噪聲

光子數遵從 poisson 分布，因此信號本身就存在噪聲

$$N_S = \sqrt{S} \quad (7)$$

2. 暗電流

暗電流起因於電子的隨機運動，導致得到的光電子除了信號之外還有一部分噪聲

$$N_{DC} = \sqrt{S_{DC}} = \sqrt{i_{DC}\tau} \quad (8)$$

3. 背景噪聲

背景天光存在一定亮度，可以形式上寫成與式 6 相同的等式

$$S_\beta = F_\beta \Omega \tau A \epsilon Q_e \quad (9)$$

注意到 F_β 和 Ω 的量綱，使得 $F_\beta \Omega$ 和式 6 的 F 有相同的物理意義.

4. 讀出噪聲

讀出噪聲是在讀出的時候導致的噪聲，讀出時間越短噪聲越大，與曝光時間的長短無關。

F. 信噪比

綜上所述，噪聲可以分成與時間有關的部分 N_{time} 和無關的部分 N_R

$$N_{time} = \sqrt{S + S_{DC} + S_\beta} = \sqrt{F\tau A_\epsilon Q_e + i_{DC}\tau + F_\beta\Omega\tau A_\epsilon Q_e} = \sqrt{\tau N_T} \quad (10)$$

其中

$$N_T = FA_\epsilon + i_{DC} + F_\beta\Omega A_\epsilon \quad (11)$$

定義有效集光面積 A_ϵ

$$A_\epsilon = A\epsilon Q_e \quad (12)$$

因此信噪比可以表示成

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{N_R^2 + N_{time}^2}} = \frac{F\tau A_\epsilon}{\sqrt{N_R^2 + \tau N_T}} \sim \sqrt{\tau} \quad (13)$$

由此可以發現信噪比大致上與 $\sqrt{\tau}$ 成正比。從式 14 可以寫出

$$\tau = \frac{S_N^2 N_T}{2F^2 A_\epsilon^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4F^2 A_\epsilon^2 N_R^2}{S_N^2 N_T^2}} \right] \quad (14)$$

值得注意的是，以上對於信噪比的討論指的是望遠鏡觀測時的信噪比，但是更多時候關心的是信號處理的信噪比，我們不能知道真正的信號，信號總是和噪聲混合，因此考慮到統計上的估計問題 [3]，信噪比應該修正成

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{N_S^2 + 2N_n^2}} = \frac{FA_\epsilon\sqrt{\tau}}{\sqrt{FA_\epsilon + 2\left(\frac{N_R^2}{\tau} + i_{DC} + F_\beta\Omega A_\epsilon\right)}} \quad (15)$$

其中， N_S 是信號噪聲， N_n 是信號噪聲以外的噪聲.

III. 例題

考慮最簡單的情 \boxplus ，忽略讀出噪聲 N_R 、暗電流 i_{DC} 、和望遠鏡效率 ϵ ，在表 III 條件下觀察積分時間與星等的關聯.

表 III: 例題參數.

物理量	大小	單位
S_N	10	無量綱
Q_e	0.5	無量綱
$m_{AB,g}$ ^a	16~28	無量綱
F_β	19,21,23	$m_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$
D	1, 4, 10	m
$seeing$	3, 1, 0.5, 0.1	arcsec

^a 表示在 u'g'r'i'z' 系統中的 g' 波段的星等.

此條件下，式 16 簡化成

$$S_N \equiv \frac{S}{N} = \frac{F A_\epsilon \sqrt{\tau}}{\sqrt{F A_\epsilon + 2 F_\beta \Omega A_\epsilon}} \quad (16)$$

則

$$\tau = \frac{S_N^2 N_T}{F^2 A_\epsilon^2} \quad (17)$$

其中

$$N_T = F A_\epsilon + 2 F_\beta \Omega A_\epsilon \quad (18)$$

只要利用式 5 和式 17 就能把積分時間和星等關聯在一起，得到以下結果.

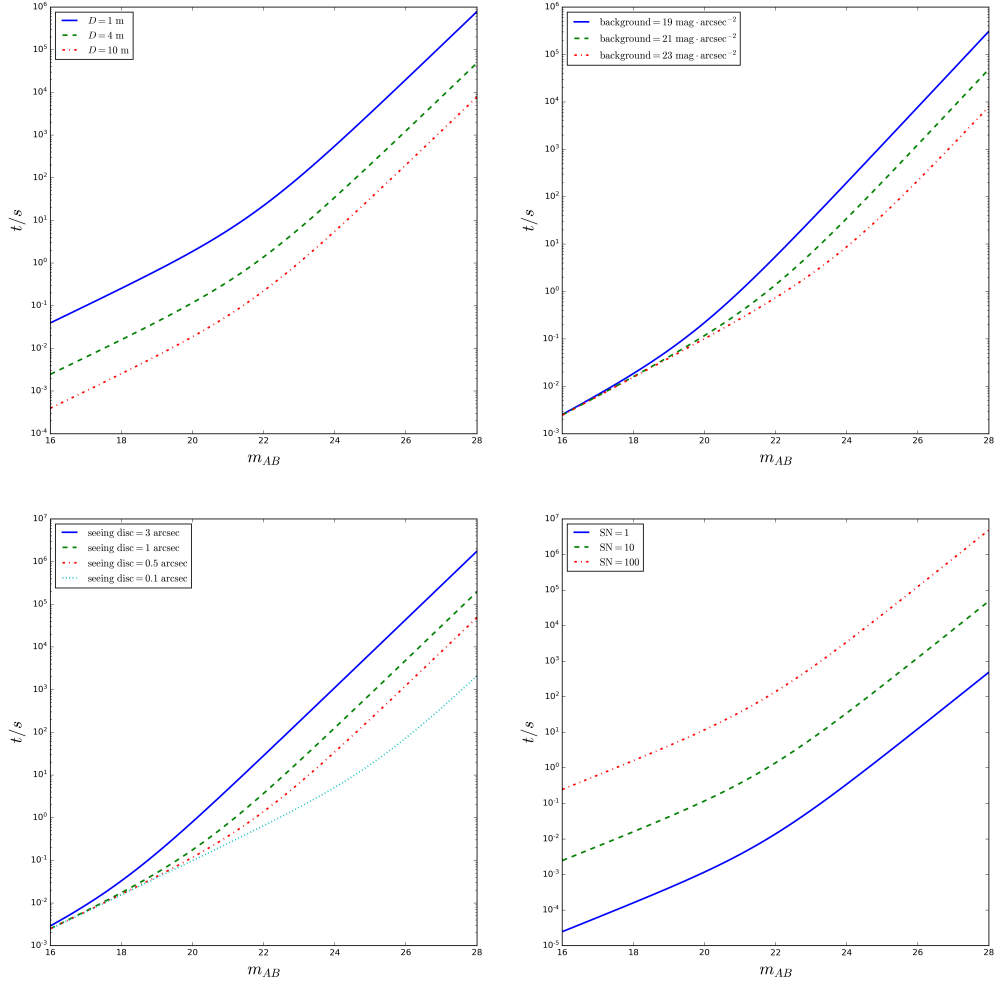


圖 1: 在不同的望遠鏡口徑 (左上)、背景噪聲 (右上)、大氣視寧度 (左下)、信噪比 (右下) 下，觀測積分時間與星等的關聯。

若固定觀測積分時間 $\tau = 3600\text{s}$ ，可觀測到的極限星等如表 IV 所示，表中未指出的參數皆以 $D = 4\text{ m}$ 、 $seeing = 0.5\text{ arcsec}$ 、 $F_{\beta} = 21\text{ m}_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$ 代入

表 IV: 固定觀測積分時間 $\tau = 3600\text{s}$, 在不同條件下可觀測到的極限星等.

D/m	$m_{AB,g}$	$seeing/\text{m}$	$m_{AB,g}$	$F_{\beta}/m_{AB,g} \cdot \text{arcsec}^{-2}$	$m_{AB,g}$
1	25.052	3	24.637	19	25.580
4	26.576	1	25.827	21	26.576
10	27.575	0.5	26.577	23	27.567
		0.1	28.299		

-
- [1] Wikipedia2019AB magnitude, 地址 https://en.wikipedia.org/wiki/AB_magnitude
- [2] Fukugita, M., Ichikawa, T., Gunn, J. E., Doi, M., Shimasaku, K., Schneider, D. P. 1996
Astronomical Journal 111 1748
- [3] 皮埃爾·萊納, 丹尼爾·魯昂, 弗朗索瓦·勒布倫, 弗朗索瓦·米尼亞爾, 迪迪埃·佩拉
2015 觀測天體物理學 (第一版) 伍可, 孫維新, 胡景耀譯 (北京: 中國科學技術出版社) 第
459-460 頁.