Homework 3: Theory (20 pts)
Programming Languages (CSCI 3300), Fall 2018
Due: Friday, Sept. 19 by 11:59pm

The following defines Functional Iffy:

Syntax:

$$\text{(Bool)} \quad b \quad ::= \quad x \mid 1 \mid 0 \mid b \land b \mid b \lor b \mid \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b\ \mathsf{else}\ b \mid \mathsf{fun}\ x \Rightarrow b \mid \mathsf{app}\ b_1\ b_2$$

Single-step reduction:

$$\frac{}{\mathsf{app}\,(\mathsf{fun}\ x \Rightarrow b)\ b' \rightsquigarrow [b'/x]b}\ \textsc{Beta} \qquad \frac{b \rightsquigarrow b'}{(\mathsf{fun}\ x \Rightarrow b) \rightsquigarrow (\mathsf{fun}\ x \Rightarrow b')}\ \textsc{Fun}$$

$$\frac{b_1 \rightsquigarrow b_1'}{\mathsf{app}\ b_1\ b_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\ b_1'\ b_2}\ \textsc{App1} \qquad \frac{b_2 \rightsquigarrow b_2'}{\mathsf{app}\ b_1\ b_2 \rightsquigarrow \mathsf{app}\ b_1\ b_2'}\ \textsc{App2} \qquad \frac{}{(1 \land 1) \rightsquigarrow 1}\ \textsc{AndTrue}$$

$$\frac{}{(0 \land 1) \rightsquigarrow 0}\ \textsc{AndFalse1} \qquad \frac{}{(1 \land 0) \rightsquigarrow 0}\ \textsc{AndFalse2} \qquad \frac{}{(0 \land 0) \rightsquigarrow 0}\ \textsc{AndFalse}$$

$$\frac{b_1 \rightsquigarrow b_1'}{(b_1 \land b_2) \rightsquigarrow (b_1' \land b_2)}\ \textsc{And1} \qquad \frac{b_2 \rightsquigarrow b_2'}{(b_1 \land b_2) \rightsquigarrow (b_1 \land b_2')}\ \textsc{And2} \qquad \frac{}{(1 \lor 1) \rightsquigarrow 1}\ \textsc{OrTrue}$$

$$\frac{}{(0 \lor 1) \rightsquigarrow 1}\ \textsc{OrTrue2} \qquad \frac{}{(1 \lor 0) \rightsquigarrow 1}\ \textsc{OrTrue1} \qquad \frac{}{(0 \lor 0) \rightsquigarrow 0}\ \textsc{OrFalse}$$

$$\frac{b_1 \rightsquigarrow b_1'}{(b_1 \lor b_2) \rightsquigarrow (b_1' \lor b_2)}\ \textsc{Or1} \qquad \frac{b_2 \rightsquigarrow b_2'}{(b_1 \lor b_2) \rightsquigarrow (b_1 \lor b_2')}\ \textsc{Or2} \qquad \frac{}{\mathsf{if}\ 1\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2 \rightsquigarrow b_1}\ \textsc{IfTrue}$$

$$\frac{}{\mathsf{if}\ 0\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2 \rightsquigarrow b_2}\ \textsc{IfFalse} \qquad \frac{b \rightsquigarrow b'}{\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2 \rightsquigarrow \mathsf{if}\ b'\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2}\ \textsc{If1}$$

$$\frac{b_1 \rightsquigarrow b_1'}{\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2 \rightsquigarrow \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b_1'\ \mathsf{else}\ b_2}\ \textsc{If2} \qquad \frac{b_2 \rightsquigarrow b_2'}{\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2 \rightsquigarrow \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ b_1\ \mathsf{else}\ b_2'}\ \textsc{If3}$$

Mutli-step reduction:

$$\frac{}{b \rightsquigarrow^* b}\ \textsc{Refl} \qquad \frac{b_1 \rightsquigarrow b_2}{b_1 \rightsquigarrow^* b_2}\ \textsc{Step} \qquad \frac{b_1 \rightsquigarrow^* b_2 \quad b_2 \rightsquigarrow^* b_3}{b_1 \rightsquigarrow^* b_3}\ \textsc{Mult}$$

1. (10 pt)

   i. Construct the parse trees for the expressions:

   $$\mathsf{if}\ (1 \wedge (0 \vee 1))\ \mathsf{then}\ (1 \wedge 1)\ \mathsf{else}\ (1 \vee 1)$$

   and

   $$\mathsf{fun}\ x \Rightarrow \mathsf{app}\ (\mathsf{fun}\ y \Rightarrow (x \vee y))\ (\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1)$$

   ii. Determine which variables are bound and which are free. Additionally, determine which binders are associated to which bound variables by drawing lines from the bound variable to its binder in the expression.

   $$\mathsf{if}\ y\ \mathsf{then}\ (\mathsf{fun}\ y \Rightarrow \mathsf{if}\ (0 \vee z)\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else}\ (y \wedge z))\ \mathsf{else}\ (\mathsf{fun}\ z \Rightarrow (z \vee (\mathsf{fun}\ z \Rightarrow (z \wedge y))))$$

2. (10 pt)

   i. Simplify: $[\mathsf{if}\ y\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1/x](\mathsf{fun}\ y \Rightarrow (x \vee y))$.

   ii. Determine if the following judgment is derivable using the evaluation rules (all work must be shown):

   $$\mathsf{app}\ (\mathsf{fun}\ y \Rightarrow (1 \wedge y))\ (\mathsf{if}\ 0\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1) \rightsquigarrow^* 1$$