2017 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

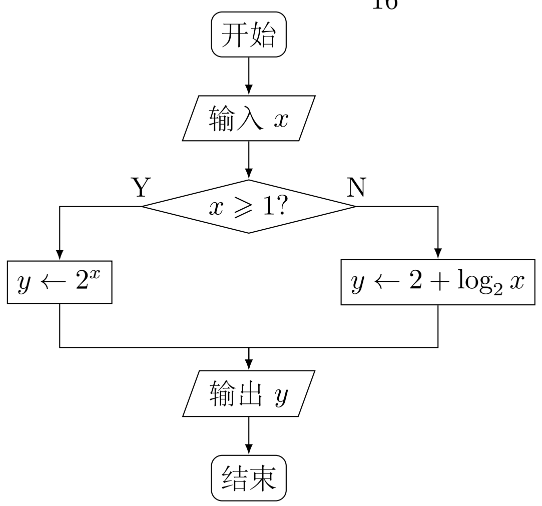
一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{a,a^2+3\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则实数 a 的值为______.

2. 已知复数 $z=(1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的模是______.

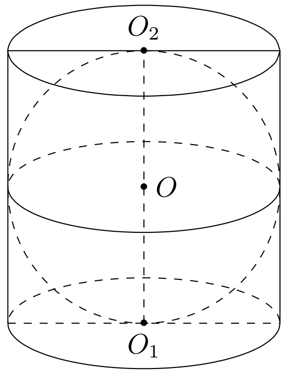
3. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品, 产量分别为 200, 400, 300, 100 件. 为检验产品的质量, 现用分层抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验, 则应从丙种型号的产品中抽取______件.

4. 如图是一个算法流程图: 若输入 x 的值为 $\frac{1}{16}$, 则输出 y 的值是______.



5. 若 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6}$, 则 $\tan\alpha=$______.

6. 如图, 在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O, 该球与圆柱的上、下底面及母线均相切, 记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1, 球 O 的体积为 V_2, 则 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值是______.



7. 记函数 $f(x)=\sqrt{6+x-x^2}$ 定义域为 D. 在区间 $[-4,5]$ 上随机取一个数 x, 则 $x\in D$ 的概率是______.

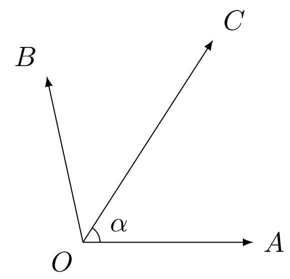
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右准线与它的两条渐近线分别交于点 P, Q, 其焦点是 F_1, F_2, 则四边形 F_1PF_2Q 的面积是______.

9. 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 其前 n 项为 S_n, 已知 $S_3=\frac{7}{4}$, $S_6=\frac{63}{4}$, 则 $a_8=$______.

10. 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 x 的值是______.

11. 已知函数 $f(x)=x^3-2x+\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$, 其中 e 是自然对数的底数. 若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$. 则实数 a 的取值范围是______.

12. 如图, 在同一个平面内, 向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ 的模分别为 1, 1, $\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 α, 且 $\tan\alpha=7$, $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $45°$. 若 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 则 $m+n=$______.

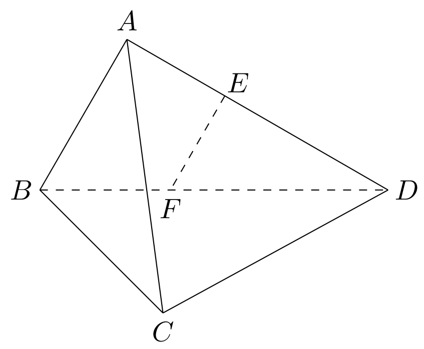


13. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-12,0)$, $B(0,6)$, 点 P 在圆 $O:x^2+y^2=50$ 上. 若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant 20$, 则点 P 的横坐标的取值范围是______.

14. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 1 的函数, 在区间 $[0,1)$ 上, $f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\in D\\ x,\ x\notin D\end{cases}$, 其中集合 $D=\left\{x\mid x=\frac{n-1}{n},n\in\mathbf{N}^*\right\}$, 则方程 $f(x)-\lg x=0$ 的解的个数是______.

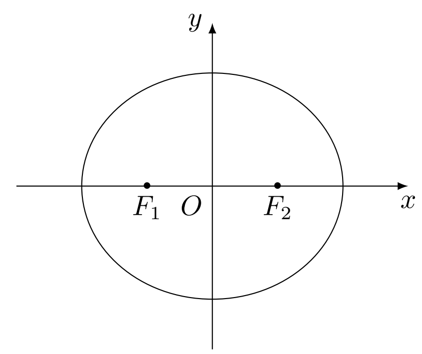
二、解答题

15. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB\perp AD$, $BC\perp BD$, 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD, 点 E, F (E 与 A, D 不重合) 分别在棱 AD, BD 上, 且 $EF\perp AD$. 求证:
(1) $EF\parallel$ 平面 ABC;
(2) $AD\perp AC$.

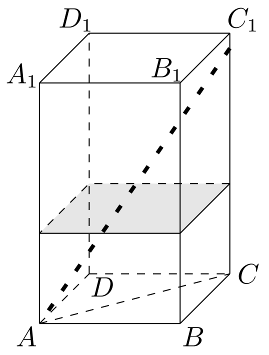


16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x,\sin x)$, $\boldsymbol{b}=\left(3,-\sqrt{3}\right)$, $x\in[0,\pi]$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 求 x 的值;
(2) 记 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值以及对应的 x 的值.

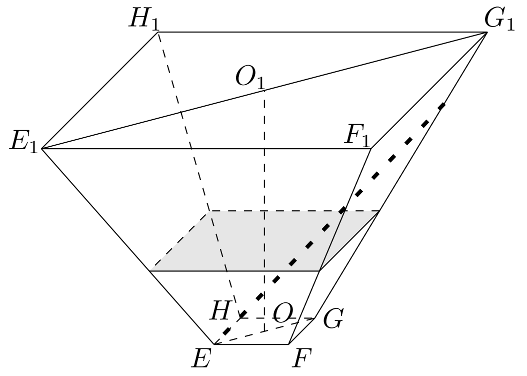
17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 两准线之间的距离为 8. 点 P 在椭圆 E 上, 且位于第一象限, 过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1, 过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2.
(1) 求椭圆 E 的标准方程;
(2) 若直线 l_1, l_2 的交点 Q 在椭圆 E 上, 求点 P 的坐标.



18. 如图, 水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 32 cm, 容器 I 的底面对角线 AC 的长为 $10\sqrt{7}$ cm, 容器 II 的两底面对角线 EG, E_1G_1 的长分别为 14 cm 和 62 cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水, 水深均为 12 cm. 现有一根玻璃棒 l, 其长度为 40 cm. (容器厚度, 玻璃棒粗细均忽略不计)
(1) 将 l 放在容器 I 中, l 的一端置于点 A 处, 另一端置于侧棱 CC_1 上, 求 l 没入水中部分的长度;
(2) 将 l 放在容器 II 中, l 的一端置于点 E 处, 另一端置于侧棱 GG_1 上, 求 l 没入水中部分的长度.



容器 I



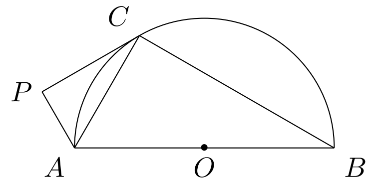
容器 II

19. 对于给定的正整数 k, 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n-k}+a_{n-k+1}+\cdots+a_{n-1}+a_{n+1}+\cdots+a_{n+k-1}+a_{n+k}=2ka_n$ 对任意正整数 n $(n>k)$ 总成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 是"$P(k)$ 数列".
(1) 证明: 等差数列 $\{a_n\}$ 是"$P(3)$ 数列";
(2) 若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(2)$ 数列", 又是"$P(3)$ 数列", 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列.

20. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ $(a>0,\ b\in\mathbf{R})$ 有极值, 且导函数 $f'(x)$ 的极值点是 $f(x)$ 的零点. (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)
(1) 求 b 关于 a 的函数关系式, 并写出定义域;
(2) 证明: $b^2>3a$;
(3) 若 $f(x)$, $f'(x)$ 这两个函数的所有极值之和不小于 $-\dfrac{7}{2}$, 求 a 的取值范围.

21. 四选二.

【A】如图, AB 为半圆 O 的直径, 直线 PC 切半圆 O 于点 C, $AP\perp PC$, P 为垂足. 求证:
(1) $\angle PAC=\angle CAB$;
(2) $AC^2=AP\cdot AB$.

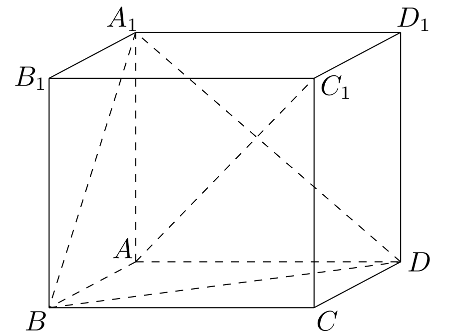


【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$.
(1) 求 $\boldsymbol{AB}$;
(2) 若曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 对应的变换作用下得到另一曲线 C_2, 求 C_2 的方程.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-8+t\\ y=\dfrac{t}{2}\end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2s^2\\ y=2\sqrt{2}s\end{cases}$ (s 为参数). 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

【D】已知 a, b, c, d 为实数, 且 $a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=16$, 证明 $ac+bd\leqslant 8$.

22. 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$, 且 $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$, $\angle BAD=120^\circ$.
(1) 求异面直线 A_1B 与 AC_1 所成角的余弦值;
(2) 求二面角 $B-A_1D-A$ 的正弦值.



23. 已知一个口袋有 m 个白球, n 个黑球 $(m,\ n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$, 这些球除颜色外全部相同. 现将口袋中的球随机的逐个取出, 并放入如图所示的编号为 $1, 2, 3, \cdots, m+n$ 的抽屉内, 其中第 k 次取出的球放入编号为 k 的抽屉 $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m+n)$.

1	2	3	$\cdots$	$m+n$

(1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率 p;
(2) 随机变量 X 表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数, $E(X)$ 是 X 的数学期望, 证明: $E(X)<\dfrac{n}{(m+n)(n-1)}$.