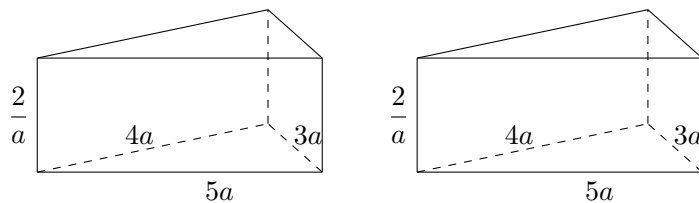


理科数学

一、填空题

- 函数 $f(x) = \log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 方程 $4^x + 2^x - 2 = 0$ 的解是_____.
- 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1, 2)$ 与动点 $P(x, y)$ 满足 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 4$, 则点 P 的轨迹方程是_____.
- 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数是 15, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 3x$, 它的一个焦点是 $(\sqrt{10}, 0)$, 则双曲线的方程是_____.
- 将参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程, 所得方程是_____.
- 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^n}{3^n + 2^{n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是_____. (结果用分数表示)
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 120^\circ$, $AB = 5$, $BC = 7$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 函数 $f(x) = \sin x + 2|\sin x|$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象与直线 $y = k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是_____.
- 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\frac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ ($a > 0$). 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是_____.



- 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, \dots, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, 记 $b_i = -a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} + \dots + (-1)^n a_{in}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1 + b_2 + \dots + b_6 = -12 + 2 \times 12 - 3 \times 12 = -24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1 + b_2 + \dots + b_{120} = \underline{\hspace{2cm}}$.

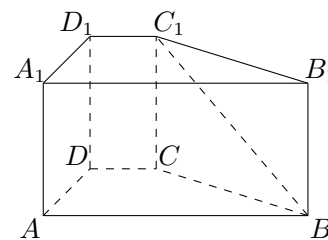
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

二、选择题

- 若函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$, 则该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 ()
(A) 单调递减无最小值 (B) 单调递减有最小值
(C) 单调递增无最大值 (D) 单调递增有最大值
- 已知集合 $M = \{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \left\{x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 $M \cap P$ 等于 ()
(A) $\{x | 0 < x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ (B) $\{x | 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$
(C) $\{x | -1 \leq x \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$ (D) $\{x | -1 \leq x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$
- 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A 、 B 两点, 它们的横坐标之和等于 5, 则这样的直线 ()
(A) 有且仅有一条 (B) 有且仅有两条
(C) 有无穷多条 (D) 不存在
- 设定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ()
(A) $b < 0$ 且 $c > 0$ (B) $b > 0$ 且 $c < 0$
(C) $b < 0$ 且 $c = 0$ (D) $b \geq 0$ 且 $c = 0$

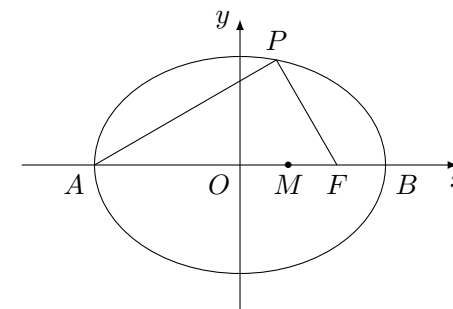
三、解答题

- 如图, 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 是直角, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 2$, $DC = 1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



- 证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2 + (1-i)\bar{z} - (1+i)z = \frac{5-5i}{2+i}$ (i 为虚数单位) 无解.

- 如图, 点 A 、 B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点, 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA \perp PF$.
(1) 求点 P 的坐标;
(2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|MB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.



20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,
- (1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?
- (2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 对定义域是 D_f 、 D_g 的函数 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$, 规定: 函数
- $$h(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \in D_g \\ f(x), & \text{当 } x \in D_f \text{ 且 } x \notin D_g \\ g(x), & \text{当 } x \notin D_f \text{ 且 } x \in D_g \end{cases}.$$
- (1) 若函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;
- (2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;
- (3) 若 $g(x) = f(x + \alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha \in [0, \pi]$, 请设计一个定义域为 \mathbf{R} 的函数 $y = f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x) = \cos 4x$, 并予以证明.

22. 在直角坐标平面中, 已知点 $P_1(1, 2)$, $P_2(2, 2^2)$, $P_3(3, 2^3)$, \dots , $P_n(n, 2^n)$, 其中 n 是正整数, 对平面上任一点 A_0 , 记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点, A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点, \dots , A_n 为 A_{n-1} 关于点 P_n 的对称点.
- (1) 求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标;
- (2) 当点 A_0 在曲线 C 上移动时, 点 A_2 的轨迹是函数 $y = f(x)$ 的图象, 其中 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数, 且当 $x \in (0, 3]$ 时, $f(x) = \lg x$. 求以曲线 C 为图象的函数在 $(1, 4]$ 上的解析式;
- (3) 对任意偶数 n , 用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标.