

## 文科数学

## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x|x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$ , 集合  $B = \{x||2x - 1| > 3\}$ , 则集合  $A \cap B =$  ( )

- (A)  $\{x|2 \leq x \leq 3\}$  (B)  $\{x|2 \leq x < 3\}$   
 (C)  $\{x|2 < x \leq 3\}$  (D)  $\{x|-1 < x < 3\}$

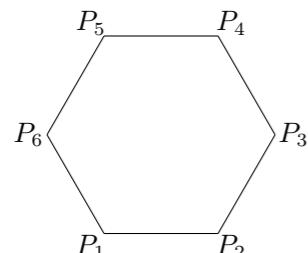
2. 函数  $f(x) = \ln(x-1)$  ( $x > 1$ ) 的反函数是 ( )

- (A)  $f^{-1}(x) = e^x + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (B)  $f^{-1}(x) = 10^x + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ )  
 (C)  $f^{-1}(x) = 10^x + 1$  ( $x > 1$ ) (D)  $f^{-1}(x) = e^x + 1$  ( $x > 1$ )

3. 曲线  $y = 4x - x^3$  在点  $(-1, -3)$  处的切线方程是 ( )

- (A)  $y = 7x + 4$  (B)  $y = 7x + 2$  (C)  $y = x - 4$  (D)  $y = x - 2$

4. 如图, 已知正六边形  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ , 下列向量的数量积中最大的是 ( )

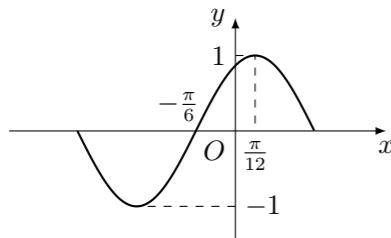


- (A)  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$  (B)  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_4}$  (C)  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_5}$  (D)  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_6}$

5. 甲校有 3600 名学生, 乙校有 5400 名学生, 丙校有 1800 名学生, 为统计三校学生某方面的情况, 计划采用分层抽样法, 抽取一个容量为 90 人的样本, 应在这三校分别抽取学生 ( )

- (A) 30 人, 30 人, 30 人 (B) 30 人, 45 人, 15 人  
 (C) 20 人, 30 人, 10 人 (D) 30 人, 50 人, 10 人

6. 下列函数中, 图象的一部分如图所示的是 ( )



- (A)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  (B)  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$   
 (C)  $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$  (D)  $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

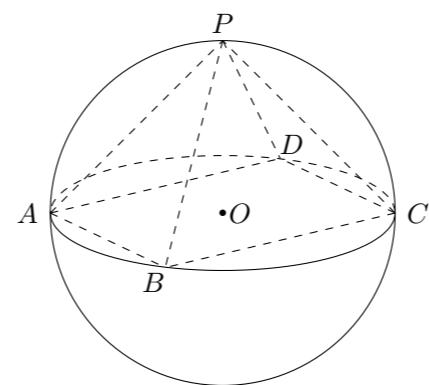
7. 已知二面角  $\alpha-l-\beta$  的大小为  $60^\circ$ ,  $m, n$  为异面直线, 且  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ , 则  $m, n$  所成的角为 ( )

- (A)  $30^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $90^\circ$  (D)  $120^\circ$

8. 已知两定点  $A(-2, 0), B(1, 0)$ , 如果动点  $P$  满足  $|PA| = 2|PB|$ , 则点  $P$  的轨迹所包围的图形的面积等于 ( )

- (A)  $9\pi$  (B)  $8\pi$  (C)  $4\pi$  (D)  $\pi$

9. 如图, 正四棱锥  $P-ABCD$  底面的四个顶点  $A, B, C, D$  在球  $O$  的同一个大圆上, 点  $P$  在球面上, 如果  $V_{P-ABCD} = \frac{16}{3}$ , 则球  $O$  的表面积是 ( )



- (A)  $4\pi$  (B)  $8\pi$  (C)  $12\pi$  (D)  $16\pi$

10. 直线  $y = x - 3$  与抛物线  $y^2 = 4x$  交于  $A, B$  两点, 过  $A, B$  两点向抛物线的准线作垂线, 垂足分别为  $P, Q$ , 则梯形  $APQB$  的面积为 ( )

- (A) 36 (B) 48 (C) 56 (D) 64

11. 设  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  所对的边, 则  $a^2 = b(b+c)$  是  $A = 2B$  的 ( )

- (A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件  
 (C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

12. 从 0 到 9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数, 这个数不能被 3 整除的概率为 ( )

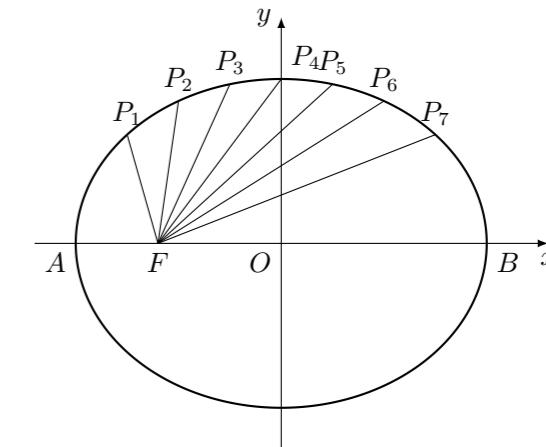
- (A)  $\frac{41}{60}$  (B)  $\frac{38}{54}$  (C)  $\frac{35}{54}$  (D)  $\frac{19}{54}$

## 二、填空题

13.  $(1-2x)^{10}$  展开式中的  $x^3$  的系数为 \_\_\_\_\_. (用数字作答)

14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$ , 则  $z = 2x - y$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 如图, 把椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的长轴  $AB$  分成 8 等分, 过每个分点作  $x$  轴的垂线交椭圆的上半部分于  $P_1, P_2, \dots, P_7$  七个点,  $F$  是椭圆的一个焦点, 则  $|P_1F| + |P_2F| + \dots + |P_7F| =$  \_\_\_\_\_.



16.  $m, n$  是空间两条不同直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同平面, 下面有四个命题:

- ①  $m \perp \alpha, n \parallel \beta, \alpha \parallel \beta \Rightarrow m \perp n$ ;  
 ②  $m \perp n, \alpha \parallel \beta, m \perp \alpha \Rightarrow n \parallel \beta$ ;  
 ③  $m \perp n, \alpha \parallel \beta, m \parallel \alpha \Rightarrow n \perp \beta$ ;  
 ④  $m \perp \alpha, m \parallel n, \alpha \parallel \beta \Rightarrow n \perp \beta$ .

其中真命题的编号是 \_\_\_\_\_. (写出所有真命题的编号)

## 三、解答题

17. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和记为  $S_n$ ,  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2S_n + 1$  ( $n \geq 1$ ).

- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 等差数列  $\{b_n\}$  的各项为正, 其前  $n$  项和为  $T_n$ , 且  $T_3 = 15$ , 又  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$  成等比数列, 求  $T_n$ .

18. 已知  $A, B, C$  是  $\triangle ABC$  三内角, 向量  $\mathbf{m} = (-1, \sqrt{3})$ ,  $\mathbf{n} = (\cos A, \sin A)$ , 且  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1$ .
- 求角  $A$ ;
  - 若  $\frac{1 + \sin 2B}{\cos^2 B - \sin^2 B} = -3$ , 求  $\tan C$ .
19. 某课程考核分理论和实验两部分进行, 每部分考核成绩只记“合格”与“不合格”, 两部分考核都“合格”则该课程考核“合格”. 甲、乙、丙三人在理论考核中合格的概率分别为 0.9、0.8、0.7; 在实验考核中合格的概率分别为 0.8、0.7、0.9. 所有考核是否合格互相之间没有影响.
- 求甲、乙、丙三人在理论考核中至少有两人合格的概率;
  - 求这三人该课程考核都合格的概率. (结果保留三位小数)
20. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, P$  分别是  $BC, A_1D_1$  的中点,  $M, N$  分别是  $AE, CD_1$  的中点,  $AD = AA_1 = a, AB = 2a$ .
- 求证:  $MN \parallel$  面  $ADD_1A_1$ ;
  - 求二面角  $P - AE - D$  的大小.
21. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax - 1, g(x) = f(x) - ax - 5$ , 其中  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数.
- 对满足  $-1 \leq a \leq 1$  的一切  $a$  的值, 都有  $g(x) < 0$ , 求实数  $x$  的取值范围;
  - 设  $a = -m^2$ , 当实数  $m$  在什么范围内变化时, 函数  $y = f(x)$  的图像与直线  $y = 3$  只有一个公共点.
22. 已知两定点  $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$ , 满足条件  $|\overrightarrow{PF_2}| - |\overrightarrow{PF_1}| = 2$  的点  $P$  的轨迹是曲线  $E$ , 直线  $y = kx - 1$  与曲线  $E$  交于  $A, B$  两点.
- 求  $k$  的取值范围;
  - 如果  $|\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{3}$ , 且曲线  $E$  上存在点  $C$ , 使  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OC}$ , 求  $m$  的值和  $\triangle ABC$  的面积  $S$ .

