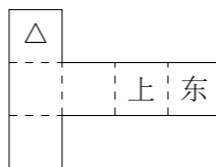


理科数学

一、选择题

- $\frac{10i}{2-i} =$ ()
(A) $-2+4i$ (B) $-2-4i$ (C) $2+4i$ (D) $2-4i$
- 设集合 $A = \{x|x > 3\}$, $B = \left\{x|\frac{x-1}{x-4} < 0\right\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) \emptyset (B) $(3, 4)$ (C) $(-2, 1)$ (D) $(4, +\infty)$
- 已知 $\triangle ABC$ 中, $\cot A = -\frac{12}{5}$, 则 $\cos A =$ ()
(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $-\frac{5}{13}$ (D) $-\frac{12}{13}$
- 曲线 $y = \frac{x}{2x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 ()
(A) $x - y - 2 = 0$ (B) $x + y - 2 = 0$
(C) $x + 4y - 5 = 0$ (D) $x - 4y - 5 = 0$
- 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, E 为 AA_1 中点, 则异面直线 BE 与 CD_1 所成的角的余弦值为 ()
(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ (D) $\frac{3}{5}$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5\sqrt{2}$, 则 $|\mathbf{b}| =$ ()
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 25
- 设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 ()
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$
- 若将函数 $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y = \tan\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 ()
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 已知直线 $y = k(x+2)$ ($k > 0$) 与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 相交于 A 、 B 两点, F 为 C 的焦点. 若 $|FA| = 2|FB|$, 则 $k =$ ()
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 甲、乙两人从 4 门课程中各选修 2 门, 则甲、乙所选的课程中至少有 1 门不相同的选法共有 ()
(A) 6 种 (B) 12 种 (C) 30 种 (D) 36 种
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的右焦点为 F , 过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A 、 B 两点, 若 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$. 则 C 的离心率为 ()
(A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{9}{5}$

- 纸制的正方体的六个面根据其方位分别标记为上、下、东、南、西、北. 现有沿该正方体的一些棱将正方体剪开、外面朝上展平, 得到如图的平面图形, 则标“△”的面的方位是 ()



- (A) 南 (B) 北 (C) 西 (D) 下

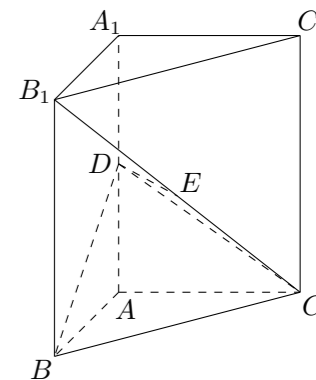
二、填空题

- $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为_____.
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_5 = 5a_3$, 则 $\frac{S_9}{S_5} =$ _____.
- 设 OA 是球 O 的半径, M 是 OA 的中点, 过 M 且与 OA 成 45° 角的平面截球 O 的表面得到圆 C . 若圆 C 的面积等于 $\frac{7\pi}{4}$, 则球 O 的表面积等于_____.
- 已知 AC, BD 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M(1, \sqrt{2})$, 则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为_____.

三、解答题

- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c , $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$, $b^2 = ac$, 求 B .

- 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, D, E 分别为 AA_1, B_1C 的中点, $DE \perp$ 平面 BCC_1 .
(1) 证明: $AB = AC$;
(2) 设二面角 $A - BD - C$ 为 60° , 求 B_1C 与平面 BCD 所成的角的大小.



- 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $S_{n+1} = 4a_n + 2$.
(1) 设 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 某车间甲组有 10 名工人, 其中有 4 名女工人; 乙组有 5 名工人, 其中有 3 名女工人. 现采用分层抽样方法 (层内采用不放回简单随机抽样) 从甲、乙两组中共抽取 3 名工人进行技术考核.
- (1) 求从甲、乙两组各抽取的人数;
- (2) 求从甲组抽取的工人中恰有 1 名女工人的概率;
- (3) 记 ξ 表示抽取的 3 名工人中男工人数, 求 ξ 的分布列及数学期望.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过右焦点 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 当 l 的斜率为 1 时, 坐标原点 O 到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (1) 求 a , b 的值;
- (2) C 上是否存在点 P , 使得当 l 绕 F 转到某一位置时, 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立? 若存在, 求出所有的 P 的坐标与 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

22. 设函数 $f(x) = x^2 + a \ln(1+x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.
- (1) 求 a 的取值范围, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 证明: $f(x_2) > \frac{1-2\ln 2}{4}$.