

理科数学

一、选择题

1. 与直线 $2x - y + 4 = 0$ 平行的抛物线 $y = x^2$ 的切线方程是（ ）
(A) $2x - y + 3 = 0$ (B) $2x - y - 3 = 0$
(C) $2x - y + 1 = 0$ (D) $2x - y - 1 = 0$
2. 复数 $\frac{(-1 + \sqrt{3}i)^5}{1 + \sqrt{3}i}$ 的值是（ ）
(A) -16 (B) 16 (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$
3. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为（ ）
(A) $\frac{x}{1+x^2}$ (B) $-\frac{2x}{1+x^2}$ (C) $\frac{2x}{1+x^2}$ (D) $-\frac{x}{1+x^2}$
4. 已知 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为非零的平面向量. 甲: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, 乙: $\vec{b} = \vec{c}$, 则()
(A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件
(B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件
(C) 甲是乙的充要条件
(D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
5. 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式① $a + b < ab$; ② $|a| > |b|$; ③ $a < b$; ④ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ 中, 正确的不等式有（ ）
(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个
6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆上, 若 P, F_1, F_2 是一个直角三角形的三个顶点, 则点 P 到 x 轴的距离为（ ）
(A) $\frac{9}{5}$ (B) 3 (C) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$ (D) $\frac{9}{4}$
7. 函数 $f(x) = a^x + \log_a(x + 1)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 a 的值为（ ）
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4
8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] - b\left[2 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ ($n = 1, 2, \dots$), 其中 a, b 是非零常数. 则存在数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 使得()
(A) $a_n = x_n + y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列
(B) $a_n = x_n + y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等差数列
(C) $a_n = x_n \cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 为等差数列, $\{y_n\}$ 为等比数列
(D) $a_n = x_n \cdot y_n$, 其中 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都为等比数列
9. 函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 有极值的充要条件是（ ）
(A) $a > 0$ (B) $a \geq 0$ (C) $a < 0$ (D) $a \leq 0$

10. 设集合 $P = \{m | -1 < m < 0\}$, $Q = \{m \in \mathbf{R} | mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 则下列关系中成立的是（ ）
(A) $P \subsetneq Q$ (B) $Q \subsetneq P$ (C) $P = Q$ (D) $P \cap Q = \emptyset$
11. 已知平面 α 与 β 所成的二面角为 80° , P 为 α, β 外一定点, 过点 P 的一条直线与 α, β 所成的角都是 30° , 则这样的直线有且仅有（ ）
(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
12. 设 $y = f(t)$ 是某港口水的深度 y (米) 关于时间 t (时) 的函数, 其中 $0 \leq t \leq 24$, 下表是该港口某一天从 0 时至 24 时记录的时间 t 与水深 y 的关系:

t	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	12	15.1	12.1	9.1	11.9	14.9	11.9	8.9	12.1

- 经长期观察, 函数 $y = f(t)$ 的图象可以近似地看成函数 $y = k + A \sin(\omega t + \varphi)$ 的图象. 下面的函数中, 最能近似表示表中数据间对应关系的函数是（ ）
- (A) $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{6}t, t \in [0, 24]$
- (B) $y = 12 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{6}t + \pi\right), t \in [0, 24]$
- (C) $y = 12 + 3 \sin \frac{\pi}{12}t, t \in [0, 24]$
- (D) $y = 12 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, 24]$

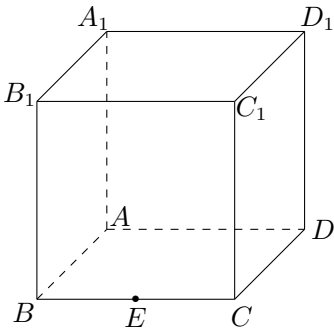
二、填空题

13. 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi = k) = \frac{a}{5^k}$, a 为常数, $k = 1, 2, \dots$, 则 $a =$ _____.
14. 将标号为 $1, 2, \dots, 10$ 的 10 个球放入标号为 $1, 2, \dots, 10$ 的 10 个盒子内, 每个盒内放一个球, 则恰好有 3 个球的标号与其所在盒子的标号不一致的放入方法共有_____种. (以数字作答)
15. 设 A, B 为两个集合. 下列四个命题:
① $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 对任意 $x \in A$, 有 $x \notin B$;
② $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
③ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow A \not\supseteq B$;
④ $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 存在 $x \in A$, 使得 $x \notin B$.
其中真命题的序号是_____. (把符合要求的命题序号都填上)
16. 某日中午 12 时整, 甲船自 A 处以 16 km/h 的速度向正东行驶, 乙船自 A 的正北 18 km 处以 24 km/h 的速度向正南行驶, 则当日 12 时 30 分时两船之距离对时间的变化率是_____km/h.

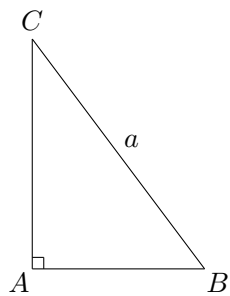
三、解答题

17. 已知 $6 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha = 0$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 求 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 BC 的中点, 点 F 是棱 CD 上的动点.
(1) 试确定点 F 的位置, 使得 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F ;
(2) 当 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F 时, 求二面角 $C_1 - EF - A$ 的大小. (结果用反三角函数值表示)



19. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = a$, 若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点, 问 \overrightarrow{PQ} 与 \overrightarrow{BC} 的夹角 θ 取何值时 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 的值最大? 并求出这个最大值.



20. 直线 $l: y = kx + 1$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A 、 B .
- (1) 求实数 k 的取值范围;
 - (2) 是否存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F ? 若存在, 求出 k 的值. 若不存在, 说明理由.

21. 某突发事件, 在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3; 一旦发生, 将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元, 采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别是 0.9 和 0.85. 若预防方案允许甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用, 请确定预防方案使总费用最少.

注: 总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值.

22. 已知 $a > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \dots$.
- (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零, 求 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (将 A 用 a 表示);
 - (2) 设 $b_n = a_n - A, n = 1, 2, \dots$, 证明: $b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$;
 - (3) 若 $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ 对 $n = 1, 2, \dots$ 都成立, 求 a 的取值范围.