

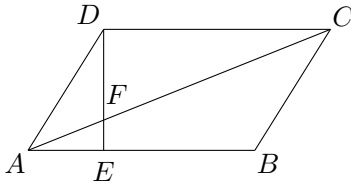
文科数学

一、选择题

1. 已知集合  $M = \{2, 3, 4\}$ ,  $N = \{0, 2, 3, 5\}$ , 则  $M \cap N$  ( )  
(A)  $\{0, 2\}$  (B)  $\{2, 3\}$  (C)  $\{3, 4\}$  (D)  $\{3, 5\}$
2. 已知复数  $z$  满足  $(3 - 4i)z = 25$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $-3 - 4i$  (B)  $-3 + 4i$  (C)  $3 - 4i$  (D)  $3 + 4i$
3. 已知向量  $\boldsymbol{a} = (1, 2)$ ,  $\boldsymbol{b} = (3, 1)$ , 则  $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} =$  ( )  
(A)  $(-2, 1)$  (B)  $(2, -1)$  (C)  $(2, 0)$  (D)  $(4, 3)$
4. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最大值等于 ( )  
(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11
5. 下列函数为奇函数的是 ( )  
(A)  $2^x - \frac{1}{2^x}$  (B)  $x^3 \sin x$  (C)  $2 \cos x + 1$  (D)  $x^2 + 2^x$
6. 为了解 1000 名学生的学习情况, 采用系统抽样的方法, 从中抽取容量为 40 的样本, 则分段的间隔为 ( )  
(A) 50 (B) 40 (C) 25 (D) 20
7. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对应的边分别为  $a, b, c$ , 则“ $a \leq b$ ”是“ $\sin A \leq \sin B$ ”的 ( )  
(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件  
(C) 必要非充分条件 (D) 非充分非必要条件
8. 若实数  $k$  满足  $0 < k < 5$ , 则曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5-k} = 1$  与曲线  $\frac{x^2}{16-k} - \frac{y^2}{5} = 1$  的 ( )  
(A) 实半轴长相等 (B) 虚半轴长相等 (C) 离心率相等 (D) 焦距相等
9. 若空间中四条两两不同的直线  $l_1, l_2, l_3, l_4$ , 满足  $l_1 \perp l_2, l_2 \parallel l_3, l_3 \perp l_4$ , 则下列结论一定正确的是 ( )  
(A)  $l_1 \perp l_4$  (B)  $l_1 \parallel l_4$   
(C)  $l_1, l_4$  既不垂直也不平行 (D)  $l_1, l_4$  的位置关系不确定
10. 对任意复数  $w_1, w_2$ , 定义  $w_1 * w_2 = w_1 \overline{w_2}$ , 其中  $\overline{w_2}$  是  $w_2$  的共轭复数, 对任意复数  $z_1, z_2, z_3$  有如下四个命题:  
①  $(z_1 + z_2) * z_3 = (z_1 * z_3) + (z_2 * z_3)$ ; ②  $z_1 * (z_2 + z_3) = (z_1 * z_2) + (z_1 * z_3)$ ;  
③  $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$ ; ④  $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ .  
则真命题的个数是 ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

11. 曲线  $y = -5e^x + 3$  在点  $(0, -2)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.
12. 从字母  $a, b, c, d, e$  中任取两个不同字母, 则取到字母  $a$  的概率为\_\_\_\_\_.
13. 等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 且  $a_1 a_5 = 4$ , 则  $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \log_2 a_4 + \log_2 a_5 =$ \_\_\_\_\_.
14. 在极坐标系中, 曲线  $C_1$  和  $C_2$  的方程分别为  $2\rho \cos^2 \theta = \sin \theta$  和  $\rho \cos \theta = 1$ , 以极点为平面直角坐标系的原点, 极轴为  $x$  轴的正半轴, 建立平面直角坐标系, 则曲线  $C_1$  和  $C_2$  的交点的直角坐标为\_\_\_\_\_.
15. 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $E$  在  $AB$  上, 且  $EB = 2AE$ ,  $AC$  与  $DE$  交于点  $F$ , 则  $\frac{\triangle CDF \text{ 的周长}}{\triangle AEF \text{ 的周长}} =$ \_\_\_\_\_.



三、解答题

16. 已知函数  $f(x) = A \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 且  $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .  
(1) 求  $A$  的值;  
(2) 若  $f(\theta) - f(-\theta) = \sqrt{3}$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $f\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$ .

17. 某车间 20 名工人年龄数据如下表:

年龄 (岁)	工人数 (人)
19	1
28	3
29	3
30	5
31	4
32	3
40	1
合计	20

- (1) 求这 20 名工人年龄的众数与极差;
- (2) 以十位数为茎, 个位数为叶, 作出这 20 名工人年龄的茎叶图;
- (3) 求这 20 名工人年龄的方差.

18. 如图 1, 四边形  $ABCD$  为矩形,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB = 1$ ,  $BC = PC = 2$ , 作如图 2 折叠, 折痕  $EF \parallel DC$ . 其中点  $E, F$  分别在线段  $PD, PC$  上, 沿  $EF$  折叠后点  $P$  叠在线段  $AD$  上的点记为  $M$ , 并且  $MF \perp CF$ .  
(1) 证明:  $CF \perp$  平面  $MDF$ ;  
(2) 求三棱锥  $M - CDE$  的体积.

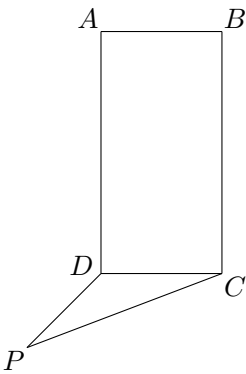


图 1

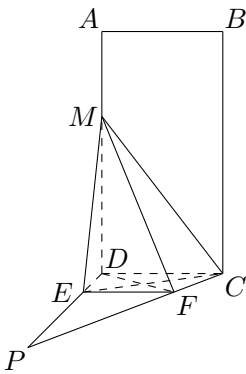


图 2

19. 设各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n$  满足  $S_n^2 - (n^2 + n - 3)S_n - 3(n^2 + n) = 0, n \in \mathbf{N}^*$ .  
(1) 求  $a_1$  的值;  
(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(3) 证明: 对一切正整数  $n$ , 有  $\frac{1}{a_1(a_1 + 1)} + \frac{1}{a_2(a_2 + 1)} + \cdots + \frac{1}{a_n(a_n + 1)} < \frac{1}{3}$ .
20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $(\sqrt{5}, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .  
(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;  
(2) 若动点  $P(x_0, y_0)$  为椭圆  $C$  外一点, 且点  $P$  到椭圆  $C$  的两条切线相互垂直, 求点  $P$  的轨迹方程.
21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + 1 (a \in \mathbf{R})$ .  
(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 当  $a < 0$  时, 试讨论是否存在  $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得  $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ .