2013 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 z 满足 $(z-3)(2-\mathrm{i})=5$ (i 为虚数单位), 则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为(　)

(A) $2+\mathrm{i}$　(B) $2-\mathrm{i}$　(C) $5+\mathrm{i}$　(D) $5-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{0,1,2\}$, 则集合 $B=\{x-y\mid x\in A, y\in A\}$ 中元素的个数是(　)

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 9

3. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$, 则 $f(-1)=$(　)

(A) -2　(B) 0　(C) 1　(D) 2

4. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, 体积为 $\dfrac{9}{4}$, 底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心, 则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为(　)

(A) $\dfrac{5\pi}{12}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

5. 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位后, 得到一个偶函数的图象, 则 φ 的一个可能取值为(　)

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) 0　(D) $-\dfrac{\pi}{4}$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为不等式组 $\begin{cases}2x-y-2\geqslant 0\\ x+2y-1\geqslant 0\\ 3x+y-8\leqslant 0\end{cases}$ 所表示的区域上一动点, 则直线 OM 斜率的最小值为(　)

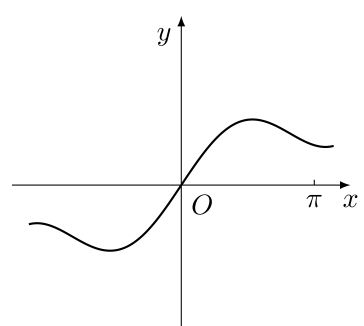
(A) 2　(B) 1　(C) $-\dfrac{1}{3}$　(D) $-\dfrac{1}{2}$

7. 给定两个命题 p、q, 若 $\neg p$ 是 q 的必要而不充分条件, 则 p 是 $\neg q$ 的(　)

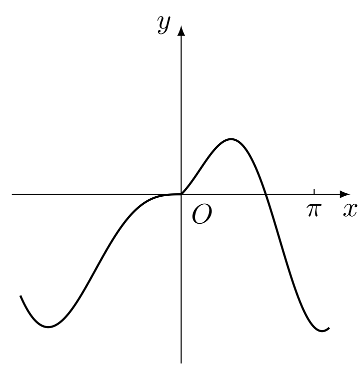
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

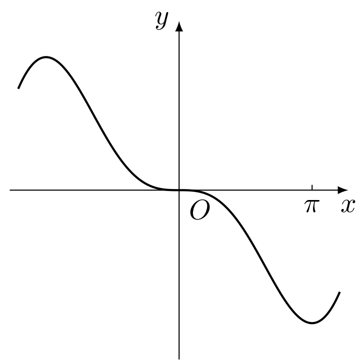
8. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 的图象大致为(　)



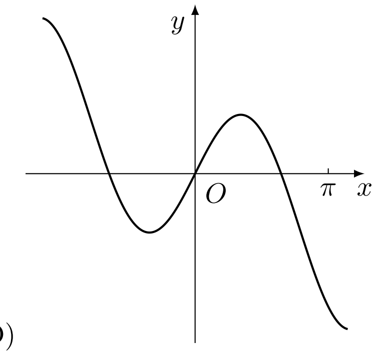
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 过点 $(3,1)$ 作圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B, 则直线 AB 的方程为(　)

(A) $2x+y-3=0$ (B) $2x-y-3=0$ (C) $4x-y-3=0$ (D) $4x+y-3=0$

10. 用 0, 1, $\cdots$, 9 十个数字, 可以组成有重复数字的三位数的个数为(　)

(A) 243　(B) 252　(C) 261　(D) 279

11. 抛物线 $C_1: y=\dfrac{1}{2p}x^2\ (p>0)$ 的焦点与双曲线 $C_2: \dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点的连线交 C_1 于第一象限的点 M. 若 C_1 在点 M 处的切线平行于 C_2 的一条渐近线, 则 $p=$(　)

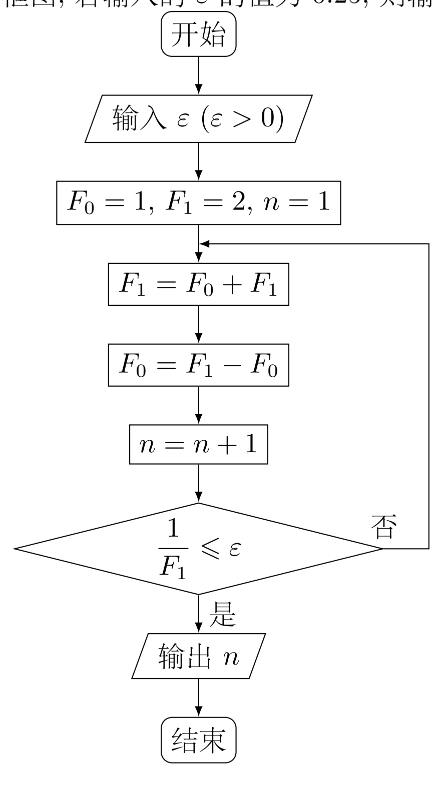
(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 设正实数 x, y, z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$, 则当 $\dfrac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}$ 的最大值为(　)

(A) 0　(B) 1　(C) $\dfrac{9}{4}$　(D) 3

二、填空题

13. 执行如下的程序框图, 若输入的 ε 的值为 0.25, 则输出的 n 的值为______.



14. 在区间 $[-3,3]$ 上随机取一个数 x, 使得 $|x+1|-|x-2|\geqslant 1$ 成立的概率为______.

15. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120°, 且 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2$. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$, 则实数 λ 的值为______.

16. 定义“正对数”: $\ln^+x=\begin{cases}0,\ 0<x<1\\ \ln x,\ x\geqslant 1\end{cases}$, 现有四个命题:

① 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a^b)=b\ln^+a$;

② 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(ab)=\ln^+a+\ln^+b$;

③ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+\left(\dfrac{a}{b}\right)\geqslant\ln^+a-\ln^+b$;

④ 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\ln^+(a+b)\leqslant\ln^+a+\ln^+b+\ln 2$.

其中真命题有______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $a+c=6$, $b=2$, $\cos B=\dfrac{7}{9}$.

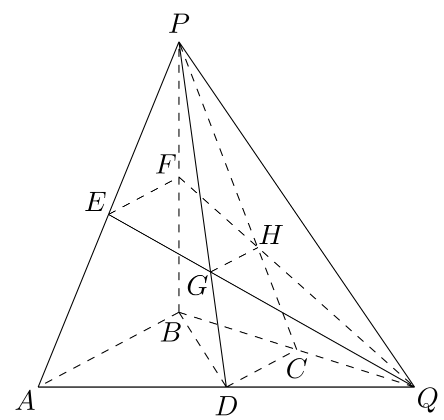
(1) 求 a, c 的值;

(2) 求 $\sin(A-B)$ 的值.

18. 如图所示, 在三棱锥 $P-ABQ$ 中, $PB\perp$ 平面 ABQ, $BA=BP=BQ$, D, C, E, F 分别是 AQ, BQ, AP, BP 的中点, $AQ=2BD$, PD 与 EQ 交于点 G, PC 与 FQ 交于点 H, 连接 GH.

(1) 求证: $AB\,/\!/\,GH$;

(2) 求二面角 $D-GH-E$ 的余弦值.



19. 甲、乙两支排球队进行比赛, 约定先胜 3 局者获得比赛的胜利, 比赛随即结束. 除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$ 外, 其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$. 假设每局比赛结果互相独立.

(1) 分别求甲队以 $3:0$, $3:1$, $3:2$ 胜利的概率;

(2) 若比赛结果为 $3:0$ 或 $3:1$, 则胜利方得 3 分, 对方得 0 分; 若比赛结果为 $3:2$, 则胜利方得 2 分、对方得 1 分, 求乙队得分 X 的分布列及数学期望.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_4=4S_2$, $a_{2n}=2a_n+1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n, 且 $T_n+\frac{a_n+1}{2^n}=\lambda$ (λ 为常数), 令 $c_n=b_{2n}$ ($n\in\mathbf{N}^*$). 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n.

21. 设函数 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}+c$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数, $c\in\mathbf{R}$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值;

(2) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x|=f(x)$ 根的个数.

22. 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点, 连接 PF_1, PF_2. 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m,0)$, 求 m 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 过点 P 作斜率为 k 的直线 l, 使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点. 设直线 PF_1, PF_2 的斜率分别为 k_1, k_2, 若 $k\neq 0$, 试证明 $\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}$ 为定值, 并求出这个定值.