2018 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,8\}$, $B=\{-1,1,6,8\}$, 那么 $A\cap B=$______.

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=1+2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为______.

3. 已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示, 那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为______.

8	9 9
9	0 1 1

4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为______.

```
I ← 1
S ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ←2S
End While
Print S
```

5. 函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为______.

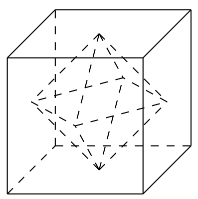
6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生, 现从中任选 2 名学生去参加活动, 则恰好选中 2 名女生的概率为______.

7. 已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值为______.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点 $F(c,0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则其离心率的值为______.

9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$, 且在区间 $(-2,2]$ 上, $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, & 0<x\leqslant 2\\ \left|x+\frac{1}{2}\right|, & -2<x\leqslant 0\end{cases}$, 则 $f(f(15))$ 的值为______.

10. 如图所示, 正方体的棱长为 2, 以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为______.



11. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$ $(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为______.

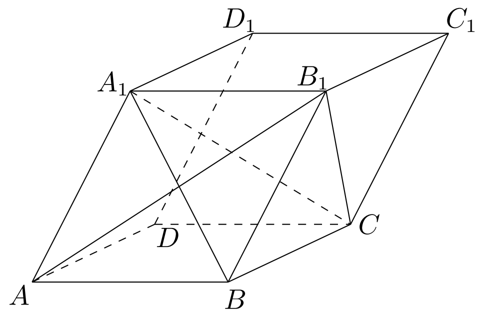
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y=2x$ 上在第一象限内的点, $B(5,0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, 则点 A 的横坐标为______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, $\angle ABC=120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D, 且 $BD=1$, 则 $4a+c$ 的最小值为______.

14. 已知集合 $A=\{x\mid x=2n-1, n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x\mid x=2^n, n\in\mathbf{N}^*\}$. 将 $A\cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $S_n>12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为______.

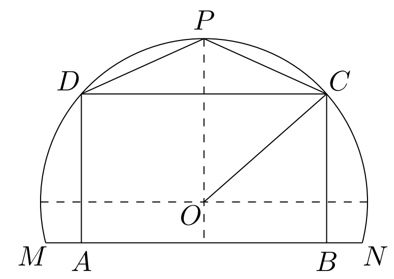
二、解答题

15. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB$, $AB_1\perp B_1C_1$. 求证:
(1) $AB\,/\!/$ 平面 A_1B_1C;
(2) 平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 A_1BC.

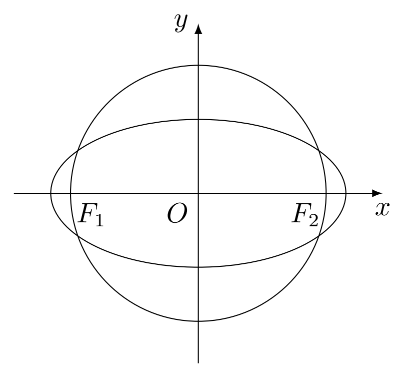


16. 已知 α, β 为锐角, $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;
(2) 求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

17. 某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成. 已知圆 O 的半径为 40 米, 点 P 到 MN 的距离为 50 米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚 I 内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚 II 内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上. 设 OC 与 MN 所成的角为 θ.
(1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin\theta$ 的取值范围;
(2) 若大棚 I 内种植甲种蔬菜, 大棚 II 内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 $4:3$. 求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 过点 $\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$, 焦点为 $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$, 圆 O 的直径为 F_1F_2.
(1) 求椭圆 C 及圆 O 的方程;
(2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P.
① 若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 求点 P 的坐标;
② 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, 求直线 l 的方程.



19. 记 $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个"S 点".

(1) 证明: 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在"S 点";

(2) 若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 $g(x)=\ln x$ 存在"S 点", 求实数 a 的值;

(3) 已知函数 $f(x)=-x^2+a$, $g(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^x}{x}$. 对任意 $a>0$, 判断是否存在 $b>0$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内存在"S 点", 并说明理由.

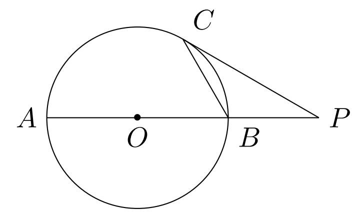
20. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1, 公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 b_1, 公比为 q 的等比数列.

(1) 设 $a_1=0$, $b_1=1$, $q=2$, 若 $|a_n-b_n|\leqslant b_1$ 对 $n=1,2,3,4$ 均成立, 求 d 的取值范围;

(2) 若 $a_1=b_1>0$, $m\in\mathbf{N}^*$, $q\in\left(1,\sqrt[m]{2}\right]$, 证明: 存在 $d\in\mathbf{R}$, 使得 $|a_n-b_n|\leqslant b_1$ 对 $n=2,3,\cdots,m+1$ 均成立, 并求 d 的取值范围 (用 b_1, m, q 表示).

21. 四选二.

【A】如图, 圆 O 的半径为 2, AB 为圆 O 的直径, P 为 AB 延长线上一点, 过 P 作圆 O 的切线, 切点为 C. 若 $PC=2\sqrt{3}$, 求 BC 的长.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 若点 P 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换作用下得到点 $P'(3,1)$, 求点 P 的坐标.

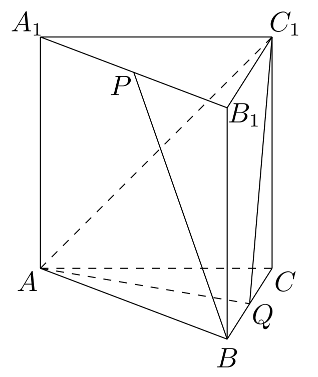
【C】在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=2$, 曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

【D】若 x, y, z 为实数, 且 $x+2y+2z=6$, 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

22. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AA_1=2$, 点 P, Q 分别为 A_1B_1, BC 的中点.

(1) 求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值;

(2) 求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值.



23. 设 $n\in\mathbf{N}^*$, 对 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列 $i_1i_2\cdots i_n$, 如果当 $s<t$ 时, 有 $i_s>i_t$, 则称 (i_s,i_t) 是排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序, 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对 1, 2, 3 的一个排列 231, 只有两个逆序 $(2,1)$, $(3,1)$, 则排列 231 的逆序数为 2. 记 $f_n(k)$ 为 1, 2, $\cdots$, n 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数.

(1) 求 $f_3(2)$, $f_4(2)$ 的值;

(2) 求 $f_n(2)$ $(n\geqslant 5)$ 的表达式 (用 n 表示).