

文科数学

一、填空题

- 计算: $\frac{3-i}{1+i}$ =_____. (i 为虚数单位)
- 若集合 $A = \{x | 2x - 1 > 0\}$, $B = \{x | |x| < 1\}$, 则 $A \cap B$ =_____.
- 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 2 \\ -1 & \cos x \end{vmatrix}$ 的最小正周期是_____.
- 若 $\vec{d} = (2, 1)$ 是直线 l 的一个方向向量, 则 l 的倾斜角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)
- 一个高为 2 的圆柱, 底面周长为 2π . 该圆柱的表面积为_____.
- 方程 $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ 的解是_____.
- 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n)$ =_____.
- 在 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____.
- 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 若 $g(x) = f(x) + 2$ 且 $g(1) = 1$, 则 $g(-1)$ =_____.
- 满足约束条件 $|x| + 2|y| \leq 2$ 的目标函数 $z = y - x$ 的最小值是_____.
- 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人只选择一个项目, 则有且仅有两人选择的项目相同的概率是_____. (结果用最简分数表示)
- 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是 BC, CD 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.
- 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $C(1, 0)$. 函数 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____.
- 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+2} = f(a_n)$. 若 $a_{2010} = a_{2012}$, 则 $a_{20} + a_{11}$ 的值是_____.

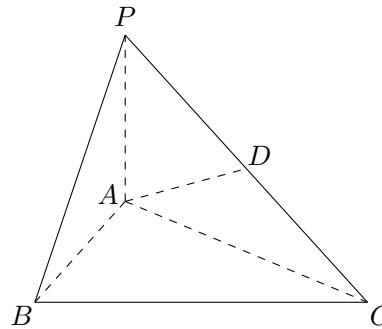
二、选择题

- 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根, 则()
 - $b = 2, c = 3$
 - $b = 2, c = -1$
 - $b = -2, c = -1$
 - $b = -2, c = 3$
- 对于常数 m, n , “ $mn > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示的曲线是椭圆”的
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充分必要条件
 - 既不充分也不必要条件

- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
 - 钝角三角形
 - 直角三角形
 - 锐角三角形
 - 不能确定
- 若 $S_n = \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \dots + \sin \frac{n\pi}{7}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则在 S_1, S_2, \dots, S_{100} 中, 正数的个数是 ()
 - 16
 - 72
 - 86
 - 100

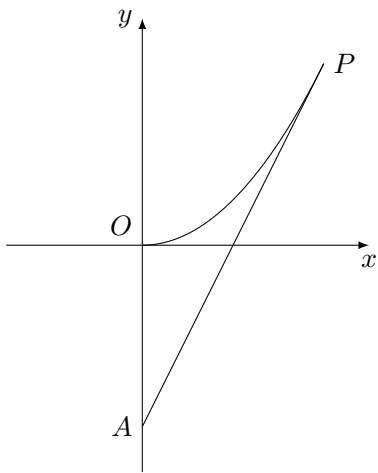
三、解答题

- 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , D 是 PC 的中点. 已知 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $PA = 2$. 求:
 - 三棱锥 $P-ABC$ 的体积;
 - 异面直线 BC 与 AD 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示).



- 已知函数 $f(x) = \lg(x+1)$.
 - 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < 1$, 求 x 的取值范围;
 - 若 $g(x)$ 是以 2 为周期的偶函数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $g(x) = f(x)$, 求函数 $y = g(x)$ ($x \in [1, 2]$) 的反函数.

21. 海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度)，则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处，如图. 现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线 $y = \frac{12}{49}x^2$ ；②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③救援船出发 t 小时后，失事船所在位置的横坐标为 $7t$.
- (1) 当 $t = 0.5$ 时，写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向；
- (2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$.
- (1) 设 F 是 C 的左焦点， M 是 C 右支上一点. 若 $|MF| = 2\sqrt{2}$ ，求点 M 的坐标；
- (2) 过 C 的左顶点作 C 的两条渐近线的平行线，求这两组平行线围成的平行四边形的面积；
- (3) 设斜率为 k ($|k| < \sqrt{2}$) 的直线 l 交 C 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，求证: $OP \perp OQ$.

23. 对于项数为 m 的有穷数列 $\{a_n\}$ ，记 $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$)，即 b_k 为 a_1, a_2, \dots, a_k 中的最大值，并称数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列. 如 1, 3, 2, 5, 5 的控制数列是 1, 3, 3, 5, 5.
- (1) 若各项均为正整数的数列 $\{a_n\}$ 的控制数列为 2, 3, 4, 5, 5，写出所有的 $\{a_n\}$ ；
- (2) 设 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列，满足 $a_k + b_{m-k+1} = C$ (C 为常数， $k = 1, 2, \dots, m$). 求证: $b_k = a_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$)；
- (3) 设 $m = 100$ ，常数 $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 若 $a_n = an^2 - (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n$ ， $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的控制数列，求 $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_{100} - a_{100})$.