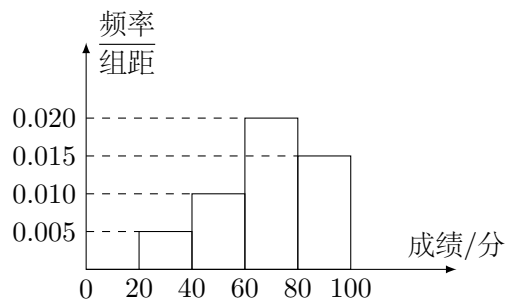


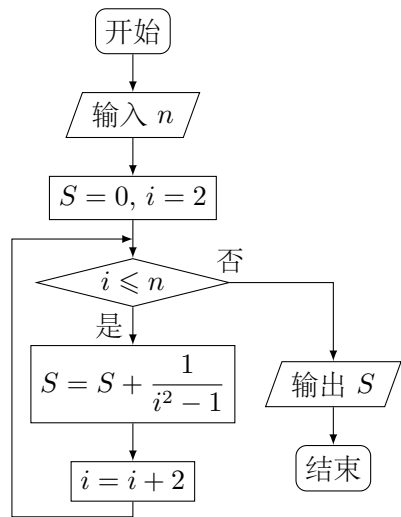
理科数学

一、选择题

- 复数的 $z = \frac{1}{i-1}$ 模为 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
- 已知集合 $A = \{x \mid 0 < \log_4 x < 1\}$, $B = \{x \mid x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) (0, 1) (B) (0, 2] (C) (1, 2) (D) (1, 2]
- 已知点 $A(1, 3)$, $B(4, -1)$, 则与向量 \overrightarrow{AB} 同方向的单位向量为 ()
(A) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ (C) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (D) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
- 下面是关于公差 $d > 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的四个命题:
 p_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
 p_2 : 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;
 p_3 : 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;
 p_4 : 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列.
 其中的真命题为 ()
 (A) p_1, p_2 (B) p_3, p_4 (C) p_2, p_3 (D) p_1, p_4
- 某班的全体学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为: [20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]. 若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是 ()



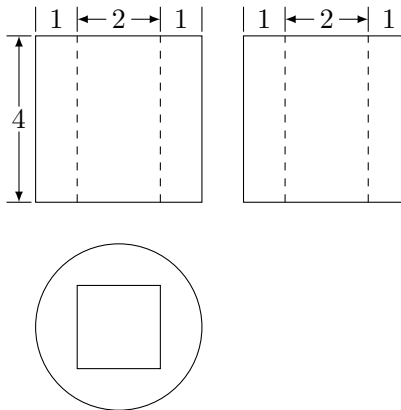
- (A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60
- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$, 且 $a > b$, 则 $\angle B =$ ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$
- 使 $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 的展开式中含有常数项的最小的 n 为 ()
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- 执行如图所示的程序框图, 若输入 $n = 10$, 则输出 $S =$ ()



- (A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{36}{55}$ (D) $\frac{72}{55}$
- 已知点 $O(0, 0)$, $A(0, b)$, $B(a, a^3)$. 若 $\triangle OAB$ 为直角三角形, 则必有 ()
(A) $b = a^3$ (B) $b = a^3 + \frac{1}{a}$
(C) $(b - a^3) \left(b - a^3 - \frac{1}{a}\right) = 0$ (D) $|b - a^3| + \left|b - a^3 - \frac{1}{a}\right| = 0$
- 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 6 个顶点都在球 O 的球面上. 若 $AB = 3$, $AC = 4$, $AB \perp AC$, $AA_1 = 12$, 则球 O 的半径为 ()
(A) $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ (B) $2\sqrt{10}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D) $3\sqrt{10}$
- 已知函数 $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2$, $g(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a^2 + 8$, 设 $H_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $H_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($\max\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较大值, $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 中的较小值). 记 $H_1(x)$ 的最小值为 A , $H_2(x)$ 的最大值为 B , 则 $A - B =$ ()
(A) 16 (B) -16 (C) $a^2 - 2a - 16$ (D) $a^2 + 2a - 16$
- 设函数 $f(x)$ 满足 $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}$, $f(2) = \frac{e^2}{8}$, 则 $x > 0$ 时, $f(x)$ ()
(A) 有极大值, 无极小值 (B) 有极小值, 无极大值
(C) 既有极大值又有极小值 (D) 既无极大值也无极小值

二、填空题

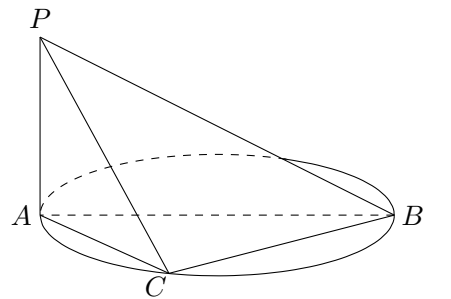
- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是_____.



- 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 a_1, a_3 是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的两个根, 则 $S_6 =$ _____.
- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , C 与过原点的直线相交于 A, B 两点, 连接 AF, BF , 若 $|AB| = 10$, $|AF| = 6$, $\cos \angle ABF = \frac{4}{5}$, 则椭圆 C 的离心率 $e =$ _____.
- 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 从全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为_____.

三、解答题

- 设向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3} \sin x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
 (1) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 求 x 的值;
 (2) 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.
- 如图, AB 是圆的直径, PA 垂直圆所在的平面, C 是圆上的点.
 (1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC ;
 (2) 若 $AB = 2$, $AC = 1$, $PA = 1$, 求二面角 $C - PB - A$ 的余弦值.

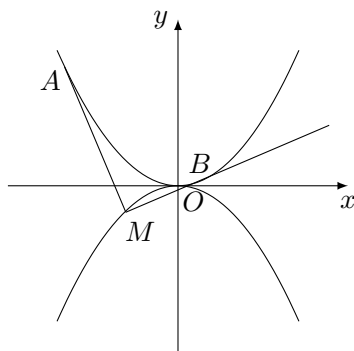


19. 现有 10 道题, 其中 6 道甲类题, 4 道乙类题, 张同学从中任取 3 道题解答.
- (1) 求张同学至少取到 1 道乙类题的概率;
 - (2) 已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题, 1 道乙类题. 设张同学答对每道甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$, 答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$, 且各题答对与否相互独立. 用 X 表示张同学答对题的个数, 求 X 的分布列和数学期望.

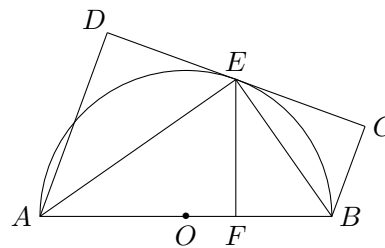
21. 已知函数 $f(x) = (1+x)e^{-2x}$, $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,
- (1) 求证: $1 - x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$;
 - (2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 圆 C_1 , 直线 C_2 的极坐标方程分别为 $\rho = 4 \sin \theta$, $\rho \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2}$.
- (1) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标;
 - (2) 设 P 为 C_1 的圆心, Q 为 C_1 与 C_2 交点连线的中点, 已知直线 PQ 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^3 + a \\ y = \frac{b}{2}t^3 + 1 \end{cases}$ ($t \in \mathbf{R}$ 为参数), 求 a, b 的值.

20. 如图, 抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, $C_2: x^2 = -2py$ ($p > 0$). 点 $M(x_0, y_0)$ 在抛物线 C_2 上, 过 M 作 C_1 的切线, 切点为 A, B (M 为原点 O 时, A, B 重合于 O). 当 $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ 时, 切线 MA 的斜率为 $-\frac{1}{2}$.
- (1) 求 p 的值;
 - (2) 当 M 在 C_2 上运动时, 求线段 AB 中点 N 的轨迹方程 (A, B 重合于 O 时, 中点为 O).



22. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于 E , AD 垂直 CD 于 D , BC 垂直 CD 于 C , EF 垂直 AB 于 F , 连接 AE, BE . 证明:
- (1) $\angle FEB = \angle CEB$;
 - (2) $EF^2 = AD \cdot BC$.



24. 已知函数 $f(x) = |x - a|$, 其中 $a > 1$.
- (1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4 - |x - 4|$ 的解集;
 - (2) 已知关于 x 的不等式 $|f(2x + a) - 2f(x)| \leq 2$ 的解集为 $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$, 求 a 的值.