2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

理科数学

一、选择题

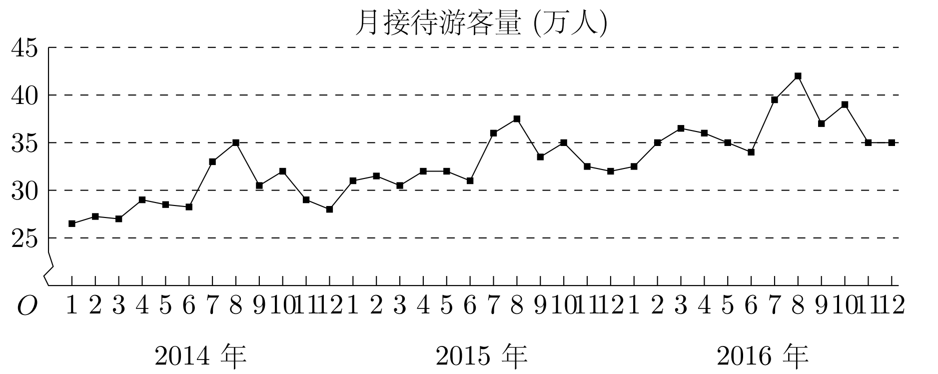
1. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|y=x\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

2. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\,z=2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) 2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是 ( )

(A) 月接待游客量逐月增加

(B) 年接待游客量逐年增加

(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月

(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. $(x+y)\,(2x-y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为 ( )

(A) -80　(B) -40　(C) 40　(D) 80

5. 已知双曲线 C : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{10}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 ( )

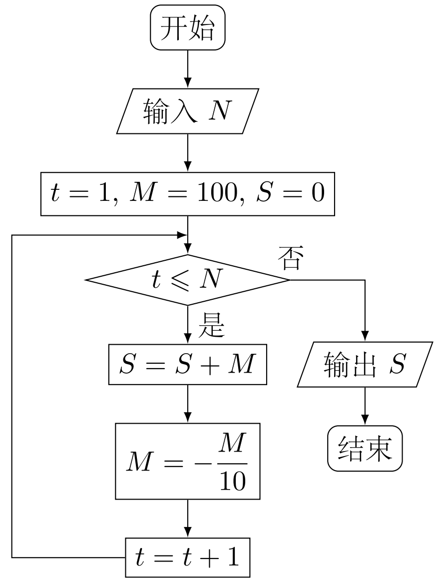
(A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π

(B) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称

(C) $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$

(D) $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

7. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为 ( )



(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

8. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为 ( )

(A) π　(B) $\dfrac{3\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差不为 0, 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为 ( )

(A) -24　(B) -3　(C) 3　(D) 8

10. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(D) $\dfrac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点, 则 $a=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda+\mu$ 的最大值为 ( )

(A) 3　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x-4y$ 的最小值为______.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=-1$, $a_1-a_3=-3$, 则 $a_4=$______.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,\ x\leqslant 0\\ 2^x,\ x>0\end{cases}$, 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 有下列结论:

① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角;

② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角;

③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°;

④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60°;

其中正确的是______. (填写所有正确结论的编号)

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$, $a=2\sqrt{7}$, $b=2$.

(1) 求 c;

(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD\perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

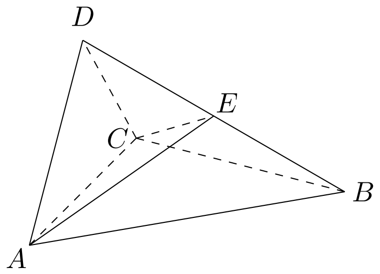
最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

(1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;

(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD=\angle CBD$, $AB=BD$.
(1) 证明: 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;
(2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E, 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



20. 已知抛物线 C: $y^2=2x$, 过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
(1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;
(2) 设圆 M 过点 $P(4,-2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.
(1) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的值;
(2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n, $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$, 求 m 的最小值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\\y=kt\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m\\y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
(1) 写出 C 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 l_3: $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
(1) 求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集;
(2) 若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.