

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{N}} B =$ ()

- (A)
- $\{1, 5, 7\}$
- (B)
- $\{3, 5, 7\}$
- (C)
- $\{1, 3, 9\}$
- (D)
- $\{1, 2, 3\}$

2. 复数 $\frac{3+2i}{2-3i} - \frac{3-2i}{2+3i} =$ ()

- (A) 0 (B) 2 (C)
- $-2i$
- (D) 2

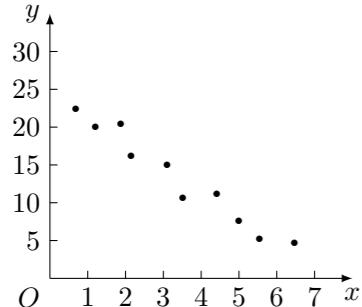
3. 对变量 x, y 有观测数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 10$), 得散点图 1; 对变量 u, v 有观测数据 (u_i, v_i) ($i = 1, 2, \dots, 10$), 得散点图 2. 由这两个散点图可以判断 ()

图 1

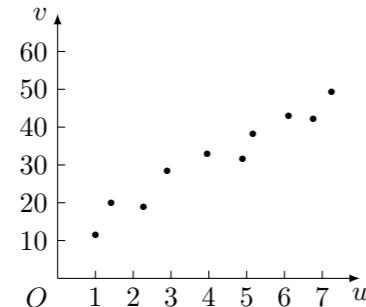


图 2

- (A) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 正相关
(B) 变量 x 与 y 正相关, u 与 v 负相关
(C) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 正相关
(D) 变量 x 与 y 负相关, u 与 v 负相关

4. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 ()

- (A)
- $2\sqrt{3}$
- (B) 2 (C)
- $\sqrt{3}$
- (D) 1

5. 有四个关于三角函数的命题:

- $p_1: \exists x \in \mathbb{R}, \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2};$
 $p_2: \exists x, y \in \mathbb{R}, \sin(x-y) = \sin x - \sin y;$
 $p_3: \forall x \in [0, \pi], \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} = \sin x;$
 $p_4: \sin x = \cos y \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2}.$

其中假命题的是 ()

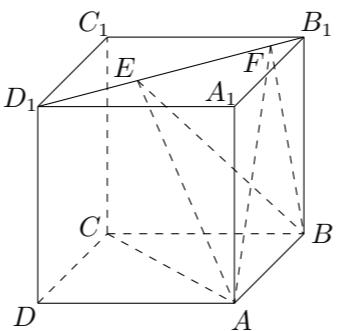
- (A)
- p_1, p_4
- (B)
- p_2, p_4
- (C)
- p_1, p_3
- (D)
- p_2, p_3

6. 设 x, y 满足 $\begin{cases} 2x+y \geq 4 \\ x-y \geq -1 \\ x-2y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x+y$ ()

- (A) 有最小值 2, 最大值 3 (B) 有最小值 2, 无最大值
-
- (C) 有最大值 3, 无最小值 (D) 既无最小值, 也无最大值

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列. 若 $a_1=1$, 则 $S_4=$ ()

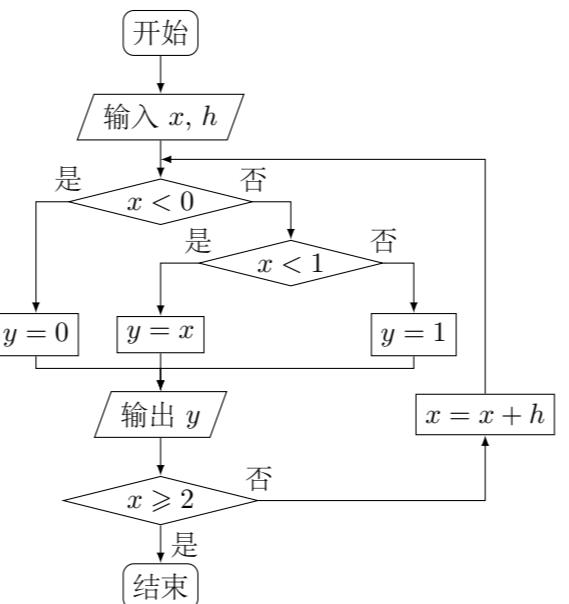
- (A) 7 (B) 8 (C) 15 (D) 16

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则下列结论中错误的是 ()

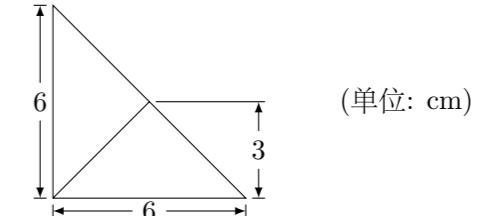
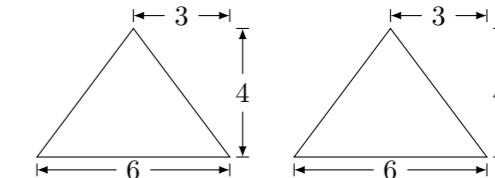
- (A) $AC \perp BE$
(B) $EF \parallel$ 平面 $ABCD$
(C) 三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值
(D) 异面直线 AE, BF 所成的角为定值

9. 已知 O, N, P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内, 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA}$, 则点 O, N, P 依次是 $\triangle ABC$ 的 ()

- (A) 重心、外心、垂心 (B) 重心、外心、内心
(C) 外心、重心、垂心 (D) 外心、重心、内心

10. 如果执行如图的程序框图, 输入 $x = -2, h = 0.5$, 那么输出的各个数的和等于 ()

- (A) 3 (B) 3.5 (C) 4 (D) 4.5

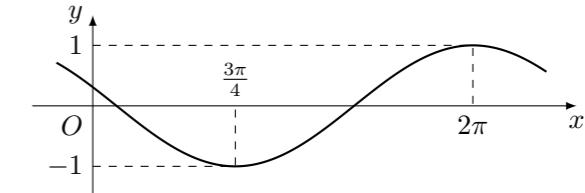
11. 一个棱锥的三视图如图, 则该棱锥的全面积 (单位: cm^2) 为 ()

- (A)
- $48 + 12\sqrt{2}$
- (B)
- $48 + 24\sqrt{2}$
- (C)
- $36 + 12\sqrt{2}$
- (D)
- $36 + 24\sqrt{2}$

12. 用 $\min\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值. 设 $f(x) = \min\{2^x, x+2, 10-x\}$ ($x \geq 0$), 则 $f(x)$ 的最大值为 ()

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

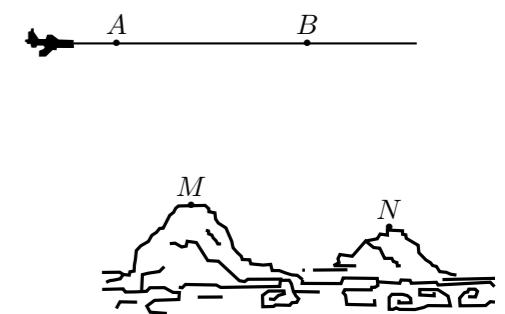
二、填空题

13. 设已知抛物线 C 的顶点在坐标原点, 焦点为 $F(1, 0)$, 直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点. 若 AB 的中点为 $(2, 2)$, 则直线 l 的方程为_____.14. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\pi \leq \varphi < \pi$) 的图象如图所示, 则 $\varphi =$ _____.

15. 7 名志愿者中安排 6 人在周六、周日两天参加社区公益活动. 若每天安排 3 人, 则不同的安排方案共有_____种. (用数字作答)

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n . 已知 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0, S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ _____.

三、解答题

17. 为了测量两山顶 M, N 间的距离, 飞机沿水平方向在 A, B 两点进行测量. A, B, M, N 在同一个铅垂平面内 (如示意图), 飞机能测量的数据有俯角和 A, B 间的距离, 请设计一个方案, 包括: ① 指出需要测量的数据 (用字母表示, 并在图中标出); ② 用文字和公式写出计算 M, N 间的距离的步骤.

18. 某工厂有工人 1000 名, 其中 250 名工人参加过短期培训 (称为 A 类工人), 另外 750 名工人参加过长期培训 (称为 B 类工人), 现用分层抽样方法 (按 A 类、B 类分二层) 从该工厂的工人中共抽查 100 名工人, 调查他们的生产能力 (此处生产能力指一天加工的零件数).

- (1) 求甲、乙两工人都被抽到的概率, 其中甲为 A 类工人, 乙为 B 类工人;
(2) 从 A 类工人中的抽查结果和从 B 类工人中的抽插结果分别如下表 1 和表 2.

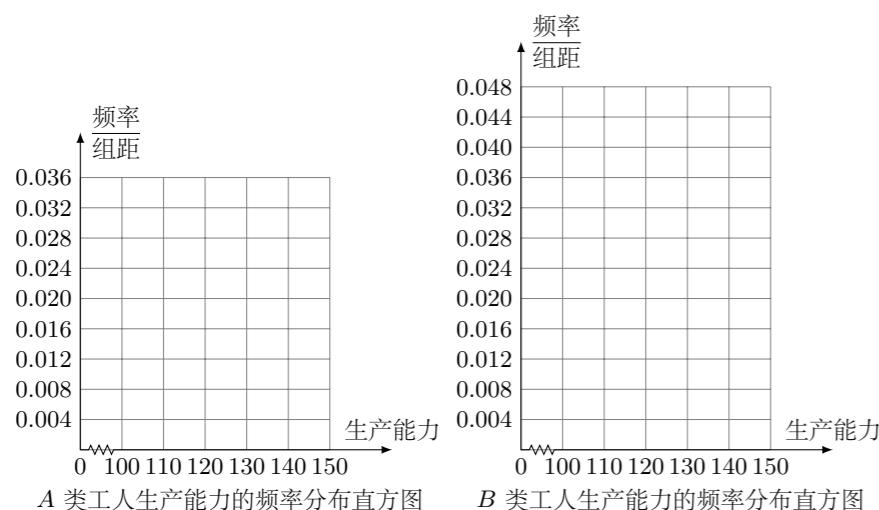
表 1:

生产能力分组	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	4	8	x	5	3

表 2:

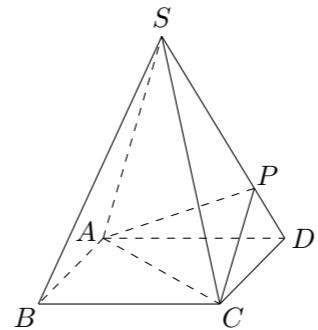
生产能力分组	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
人数	6	y	36	18

① 先确定 x, y , 再在答题纸上完成下列频率分布直方图. 就生产能力而言, A 类工人中个体间的差异程度与 B 类工人中个体间的差异程度哪个更小? (不用计算, 可通过观察直方图直接回答结论)



② 分别估计 A 类工人和 B 类工人生产能力的平均数, 并估计该工厂工人的生产能力的平均数. (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)

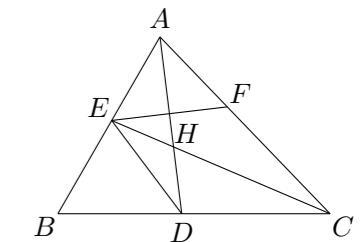
19. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, 每条侧棱的长都是地面边长的 $\sqrt{2}$ 倍, P 为侧棱 SD 上的点.
- (1) 求证: $AC \perp SD$;
(2) 若 $SD \perp$ 平面 PAC , 求二面角 $P-AC-D$ 的大小;
(3) 在 (2) 的条件下, 侧棱 SC 上是否存在一点 E , 使得 $BE \parallel$ 平面 PAC . 若存在, 求 $SE : EC$ 的值; 若不存在, 试说明理由.



20. 已知椭圆 C 的中心为直角坐标系 xOy 的原点, 焦点在 x 轴上, 它的一个顶点到两个焦点的距离分别是 7 和 1.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 若 P 为椭圆 C 上的动点, M 为过 P 且垂直于 x 轴的直线上的点, $\frac{|OP|}{|OM|} = \lambda$, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线.

21. 已知函数 $f(x) = (x^3 + 3x^2 + ax + b)e^{-x}$.
- (1) 若 $a = b = -3$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, \alpha), (2, \beta)$ 单调增加, 在 $(\alpha, 2), (\beta, +\infty)$ 单调减少, 证明: $\beta - \alpha < 6$.

22. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的两条角平分线 AD 和 CE 相交于 H , $\angle B = 60^\circ$, F 在 AC 上, 且 $AE = AF$.
- (1) 证明: 证明: B, D, H, E 四点共圆;
(2) 证明: CE 平分 $\angle DEF$.



23. 已知曲线 C_1 : $\begin{cases} x = -4 + \cos t \\ y = 3 + \sin t \end{cases}$ (t 为参数), C_2 : $\begin{cases} x = 8 \cos \theta \\ y = 3 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

- (1) 化 C_1, C_2 的方程为普通方程, 并说明它们分别表示什么曲线
(2) 若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t = \frac{\pi}{2}$, Q 为 C_2 上的动点, 求 PQ 中点 M 到直线 C_3 : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$ (t 为参数) 距离的最小值.

24. 如图, O 为数轴的原点, A, B, M 为数轴上三点, C 为线段 OM 上的动点, 设 x 表示 C 与原点的距离, y 表示 C 到 A 距离 4 倍与 C 到 B 距离的 6 倍的和.

- (1) 将 y 表示成 x 的函数;
(2) 要使 y 的值不超过 70, x 应该在什么范围内取值?

