

2010 年普通高等学校招生考试 (全国卷)

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

(A) $(0, 2)$ (B) $[0, 2]$ (C) $\{0, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$

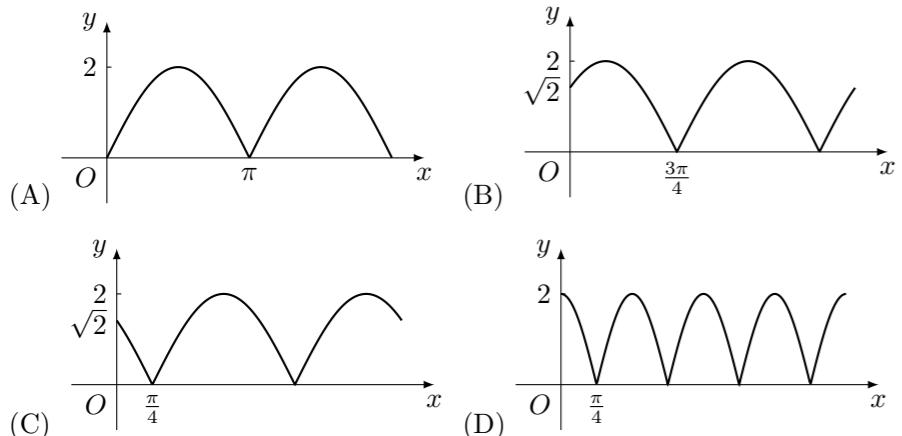
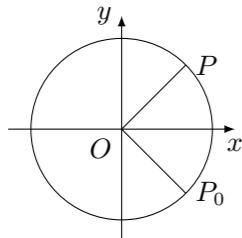
2. 已知复数 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{(1 - \sqrt{3}i)^2}$, \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

3. 曲线 $y = \frac{x}{x+2}$ 在点 $(-1, -1)$ 处的切线方程为 ()

(A) $y = 2x + 1$ (B) $y = 2x - 1$ (C) $y = -2x - 3$ (D) $y = -2x - 2$

4. 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 ()



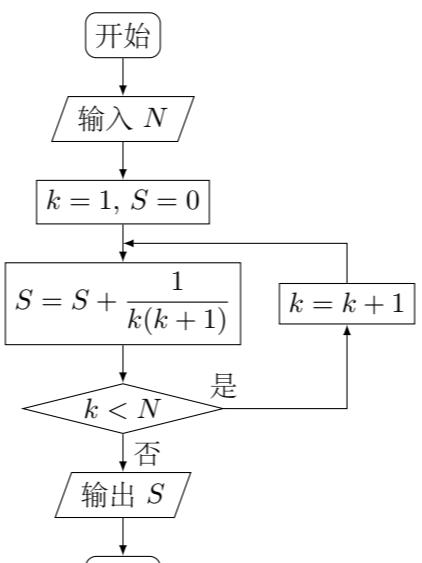
5. 已知命题 p_1 : 函数 $y = 2^x - 2^{-x}$ 在 \mathbf{R} 为增函数; p_2 : 函数 $y = 2^x + 2^{-x}$ 在 \mathbf{R} 为减函数. 则在命题 $q_1: p_1 \vee p_2$, $q_2: p_1 \wedge p_2$, $q_3: (\neg p_1) \vee p_2$ 和 $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$ 中, 真命题是 ()

(A) q_1, q_3 (B) q_2, q_3 (C) q_1, q_4 (D) q_2, q_4

6. 某种种子每粒发芽的概率都为 0.9, 现播种了 1000 粒, 对于没有发芽的种子, 每粒需再补种 2 粒, 补种的种子数记为 X , 则 X 的数学期望为 ()

(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400

7. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N = 5$, 则输出的数等于 ()



- (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

8. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x^3 - 8 (x \geq 0)$, 则 $\{x \mid f(x-2) > 0\} =$ ()

(A) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
(C) $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$ (D) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

9. 若 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} =$ ()

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2

10. 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱长都为 a , 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ()

(A) πa^2 (B) $\frac{7}{3}\pi a^2$ (C) $\frac{11}{3}\pi a^2$ (D) $5\pi a^2$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 ()

(A) $(1, 10)$ (B) $(5, 6)$ (C) $(10, 12)$ (D) $(20, 24)$

12. 已知双曲线 E 的中心为原点, $F(3, 0)$ 是 E 的焦点, 过 F 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 且 AB 的中点为 $N(-12, -15)$, 则 E 的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (C) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

二、填空题

13. 设 $y = f(x)$ 为区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且恒有 $0 \leq f(x) \leq 1$, 可以用随机模拟方法近似计算积分 $\int_0^1 f(x) dx$. 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0, 1]$ 上的均匀随机数 x_1, x_2, \dots, x_N 和 y_1, y_2, \dots, y_N , 由此得到 N 个点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, N$), 再数出其中满足 $y_i \leq f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 的点数 N_1 , 那么由随机模拟方法可得积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 的近似值为_____.

14. 正视图为一个三角形的几何体可以是_____. (写出三种)

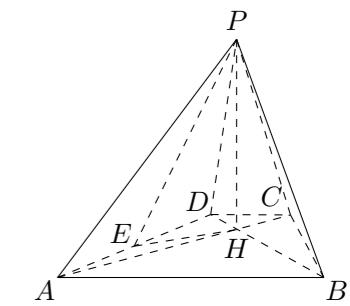
15. 过点 $A(4, 1)$ 的圆 C 与直线 $x - y - 1 = 0$ 相切于点 $B(2, 1)$, 则圆 C 的方程为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $BD = \frac{1}{2}DC$, $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, 若 $\triangle ADC$ 的面积为 $3 - \sqrt{3}$, 则 $\angle BAC =$ _____.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

是否需要志愿者	性别	
	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

- (1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附: $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 0.010 0.001
 k | 3.841 6.635 10.828
 $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 且斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 且 $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等差数列.

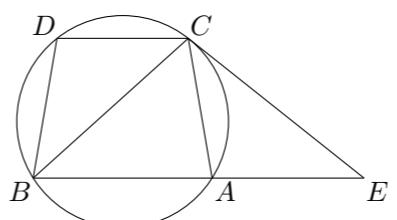
- (1) 求 E 的离心率;
(2) 设点 $P(0, -1)$ 满足 $|PA| = |PB|$, 求 E 的方程.

21. 设函数 $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$.
(1) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

23. 已知直线 $C_1: \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 圆 $C_2: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

- (1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A , P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:
(1) $\angle ACE = \angle BCD$;
(2) $BC^2 = BE \cdot CD$.



24. 设函数 $f(x) = |2x - 4| + 1$.
(1) 画出函数 $y = f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x) \leq ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.

