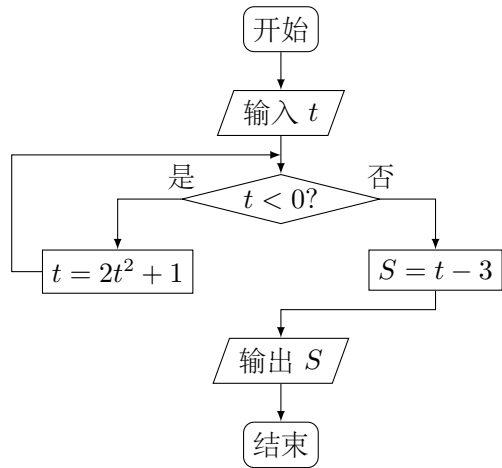


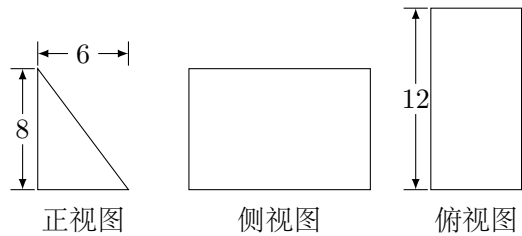
# 理科数学

## 一、选择题

1. 满足  $\frac{z+i}{z} = i$  ( $i$  为虚数单位) 的复数  $z =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (B)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  (C)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (D)  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2. 对一个容量为  $N$  的总体抽取容量为  $n$  的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 则 ( )  
 (A)  $p_1 = p_2 < p_3$  (B)  $p_2 = p_3 < p_1$  (C)  $p_1 = p_3 < p_2$  (D)  $p_1 = p_2 = p_3$
3. 已知  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数和奇函数, 且  $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$ , 则  $f(1) + g(1) =$  ( )  
 (A)  $-3$  (B)  $-1$  (C)  $1$  (D)  $3$
4.  $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^5$  的展开式中  $x^2y^3$  的系数是 ( )  
 (A)  $-20$  (B)  $-5$  (C)  $5$  (D)  $20$
5. 已知命题  $p$ : 若  $x > y$ , 则  $-x < -y$ ; 命题  $q$ : 若  $x > y$ , 则  $x^2 > y^2$ , 在命题 ①  $p \wedge q$ ; ②  $p \vee q$ ; ③  $p \wedge (\neg q)$ ; ④  $(\neg p) \vee q$  中, 真命题是 ( )  
 (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④
6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $t \in [-2, 2]$ , 则输出的  $S$  属于 ( )



- (A)  $[-6, -2]$  (B)  $[-5, -1]$  (C)  $[-4, 5]$  (D)  $[-3, 6]$
7. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ( )

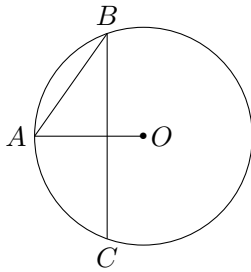


- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

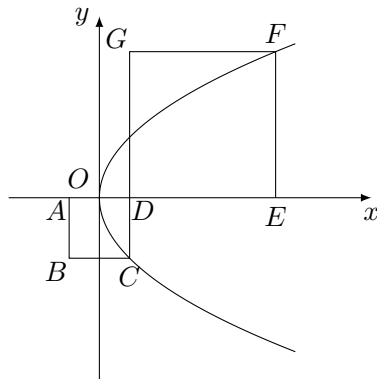
8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为  $p$ , 第二年的增长率为  $q$ , 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 ( )  
 (A)  $\frac{p+q}{2}$  (B)  $\frac{(p+1)(q+1)-1}{2}$   
 (C)  $\sqrt{pq}$  (D)  $\sqrt{(p+1)(q+1)} - 1$
9. 已知函数  $f(x) = \sin(x - \varphi)$ , 且  $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x) dx = 0$ , 则函数  $f(x)$  的图象的一条对称轴是 ( )  
 (A)  $x = \frac{5\pi}{6}$  (B)  $x = \frac{7\pi}{12}$  (C)  $x = \frac{\pi}{3}$  (D)  $x = \frac{\pi}{6}$
10. 已知函数  $f(x) = x^2 + e^x - \frac{1}{2}$  ( $x < 0$ ) 与  $g(x) = x^2 + \ln(x + a)$  的图象上存在关于  $y$  轴对称的点, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  (B)  $(-\infty, \sqrt{e})$  (C)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right)$  (D)  $\left(-\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

## 二、填空题

11. 在平面直角坐标系中, 倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线  $l$  与曲线  $C: \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 交于  $A, B$  两点, 且  $|AB| = 2$ , 以坐标原点  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 则直线  $l$  的极坐标方程是\_\_\_\_\_.
12. 如图, 已知  $AB, BC$  是  $\odot O$  的两条弦,  $AO \perp BC$ ,  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 2\sqrt{2}$ , 则  $\odot O$  的半径等于\_\_\_\_\_.



13. 若关于  $x$  的不等式  $|ax - 2| < 3$  的解集为  $\left\{x \mid -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
14. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x \\ x + y \leq 4 \\ y \geq k \end{cases}$  且  $z = 2x + y$  的最小值为  $-6$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
15. 如图, 正方形  $ABCD$  和正方形  $DEFG$  的边长分别为  $a, b$  ( $a < b$ ), 原点  $O$  为  $AD$  的中点, 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 经过  $C, F$  两点, 则  $\frac{b}{a} =$ \_\_\_\_\_.

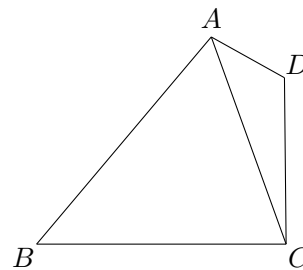


16. 在平面直角坐标系中,  $O$  为原点,  $A(-1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$ ,  $C(3, 0)$ , 动点  $D$  满足  $|\overrightarrow{CD}| = 1$ , 则  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$  的最大值是\_\_\_\_\_.

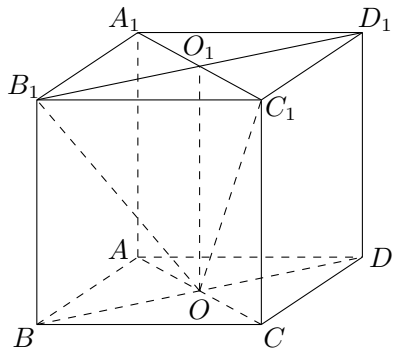
## 三、解答题

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{3}{5}$ . 现安排甲组研发新产品  $A$ , 乙组研发新产品  $B$ . 设甲、乙两组的研发相互独立.  
 (1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;  
 (2) 若新产品  $A$  研发成功, 预计企业可获利润 120 万元; 若新产品  $B$  研发成功, 预计企业可获利润 100 万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

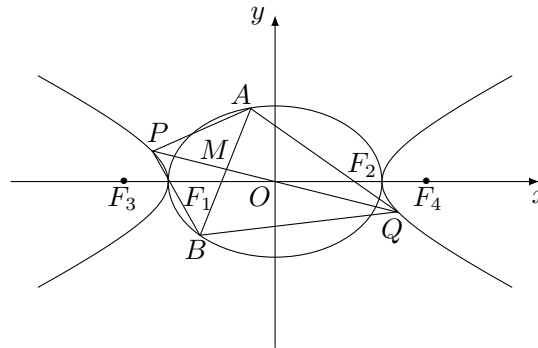
18. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AD = 1$ ,  $CD = 2$ ,  $AC = \sqrt{7}$ .  
 (1) 求  $\cos \angle CAD$  的值;  
 (2) 若  $\cos \angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{14}$ ,  $\sin \angle CBA = \frac{\sqrt{21}}{6}$ , 求  $BC$  的长.



19. 如图, 四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的所有棱长都相等,  $AC \cap BD = O$ ,  $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$ , 四边形  $ACC_1A_1$  和四边形  $BDD_1B_1$  均为矩形.
- (1) 证明:  $O_1O \perp$  底面  $ABCD$ ;
- (2) 若  $\angle CBA = 60^\circ$ , 求二面角  $C_1 - OB_1 - D$  的余弦值.



21. 如图,  $O$  为坐标原点, 椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $e_1$ ; 双曲线  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_3$ 、 $F_4$ , 离心率为  $e_2$ . 已知  $e_1e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且  $|F_2F_4| = \sqrt{3} - 1$ .
- (1) 求  $C_1$ 、 $C_2$  的方程;
- (2) 过  $F_1$  作  $C_1$  的不垂直于  $y$  轴的弦  $AB$ ,  $M$  为弦  $AB$  的中点. 当直线  $OM$  与  $C_2$  交于  $P$ 、 $Q$  两点时, 求四边形  $APBQ$  面积的最小值.



22. 已知常数  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \ln(1 + ax) - \frac{2x}{x + 2}$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上的单调性;
- (2) 若  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $f(x_1) + f(x_2) > 0$ , 求  $a$  的取值范围.

20. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $|a_{n+1} - a_n| = p^n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 若  $\{a_n\}$  是递增数列, 且  $a_1, 2a_2, 3a_3$  成等差数列, 求  $p$  的值;
- (2) 若  $p = \frac{1}{2}$ , 且  $\{a_{2n-1}\}$  是递增数列,  $\{a_{2n}\}$  是递减数列, 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.