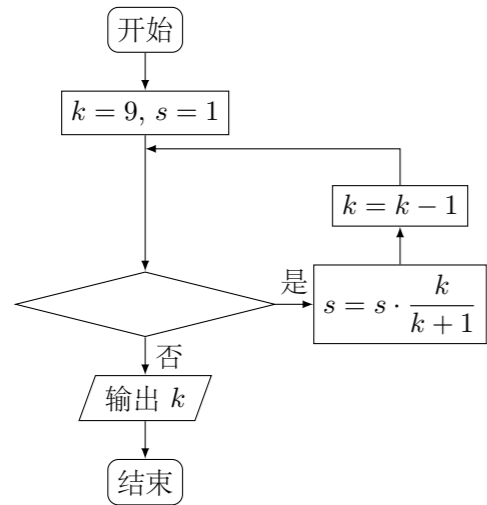


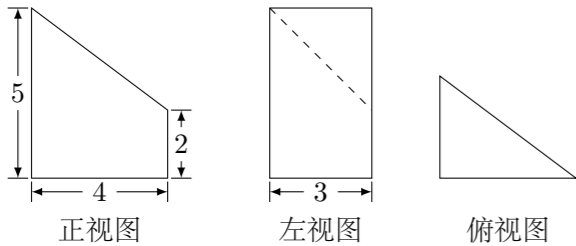
理科数学

一、选择题

- 在复平面内表示复数 $i(1 - 2i)$ 的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 对任意等比数列 $\{a_n\}$, 下列说法一定正确的是 ()
(A) a_1, a_3, a_9 成等比数列 (B) a_2, a_3, a_6 成等比数列
(C) a_2, a_4, a_8 成等比数列 (D) a_3, a_6, a_9 成等比数列
- 已知变量 x 与 y 正相关, 且由观测数据算得样本平均数 $\bar{x} = 3, \bar{y} = 3.5$, 则由该观测数据算得的线性回归方程可能是 ()
(A) $\hat{y} = 0.4x + 2.3$ (B) $\hat{y} = 2x - 2.4$
(C) $\hat{y} = -2x + 9.5$ (D) $\hat{y} = -0.3x + 4.4$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (k, 3), \mathbf{b} = (1, 4), \mathbf{c} = (2, 1)$, 且 $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \perp \mathbf{c}$, 则实数 $k =$ ()
(A) $-\frac{9}{2}$ (B) 0 (C) 3 (D) $\frac{15}{2}$
- 执行如图所示的程序框图, 若输出 k 的值为 6, 则判断框内可填入的条件是 ()



- (A) $s > \frac{1}{2}$ (B) $s > \frac{3}{5}$ (C) $s > \frac{7}{10}$ (D) $s > \frac{4}{5}$
- 已知命题 p : 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $2^x > 0$; q : “ $x > 1$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件. 则下列命题为真命题的是 ()
(A) $p \wedge q$ (B) $\neg p \wedge \neg q$ (C) $\neg p \wedge q$ (D) $p \wedge \neg q$
- 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ()



- (A) 54 (B) 60 (C) 66 (D) 72

- 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 双曲线上存在一点 P 使得 $|PF_1| + |PF_2| = 3b, |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{9}{4}ab$, 则该双曲线的离心率为 ()
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D) 3
- 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目, 2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序, 则同类节目不相邻的排法种数是 ()
(A) 72 (B) 120 (C) 144 (D) 168
- 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\sin 2A + \sin(A - B + C) = \sin(C - A - B) + \frac{1}{2}$, 面积 S 满足 $1 \leq S \leq 2$, 记 a, b, c 分别为 A, B, C 所对的边, 则下列不等式一定成立的是 ()
(A) $bc(b + c) > 8$ (B) $ab(a + b) > 16\sqrt{2}$
(C) $6 \leq abc \leq 12$ (D) $12 \leq abc \leq 24$

二、填空题

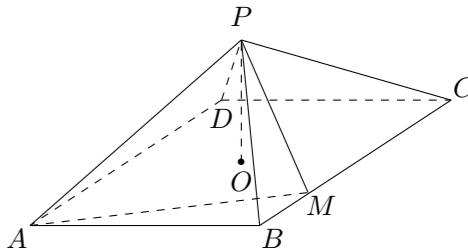
- 设全集 $U = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.
- 函数 $f(x) = \log_2 \sqrt{x} \cdot \log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为_____.
- 已知直线 $ax + y - 2 = 0$ 与圆心为 C 的圆 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则实数 $a =$ _____.
- 过圆外一点 P 作圆的切线 PA (A 为切点), 再作割线 PBC 依次交圆于 B, C , 若 $PA = 6, AC = 8, BC = 9$, 则 $AB =$ _____.
- 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta - 4 \cos \theta = 0$ ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$), 则直线 l 与曲线 C 的公共点的极径 $\rho =$ _____.
- 若不等式 $|2x - 1| + |x + 2| \geq a^2 + \frac{1}{2}a + 2$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 且图象上相邻两个最高点的距离为 π .
(1) 求 ω 和 φ 的值;
(2) 若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ($\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$), 求 $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$ 的值.

- 一盒中装有 9 张各写有一个数字的卡片, 其中 4 张卡片上的数字是 1, 3 张卡片上的数字是 2, 2 张卡片上的数字是 3, 从盒中任取 3 张卡片.
(1) 求所取 3 张卡片上的数字完全相同的概率;
(2) X 表示所取 3 张卡片上的数字的中位数, 求 X 的分布列与数学期望.
(注: 若三个数 a, b, c 满足 $a \leq b \leq c$, 则称 b 为这三个数的中位数)

- 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面是以 O 为中心的菱形, $PO \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = 2, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, M 为 BC 上一点, 且 $BM = \frac{1}{2}$, $MP \perp AP$.
(1) 求 PO 的长;
(2) 求二面角 $A - PM - C$ 的正弦值.



20. 已知函数 $f(x) = ae^{2x} - be^{-2x} - cx$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$) 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 $4 - c$.

- (1) 确定 a, b 的值;
- (2) 若 $c = 3$, 判断 $f(x)$ 的单调性;
- (3) 若 $f(x)$ 有极值, 求 c 的取值范围.

21. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 D 在椭圆上, $DF_1 \perp F_1F_2$, $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|} = 2\sqrt{2}$, $\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求该椭圆的标准方程;
- (2) 设圆心在 y 轴上的圆与椭圆在 x 轴的上方有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点, 求圆的半径.

22. 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 2} + b$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 若 $b = 1$, 求 a_2, a_3 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b = -1$, 问: 是否存在实数 c , 使得 $a_{2n} < c < a_{2n+1}$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立? 证明你的结论.

