

## 理科数学

## 一、选择题

1. 若复数  $z$  满足  $z(2-i) = 11+7i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z$  为 ( )

- (A)
- $3+5i$
- (B)
- $3-5i$
- (C)
- $-3+5i$
- (D)
- $-3-5i$

2. 已知全集  $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ , 则  $(\complement_U A) \cup B =$  ( )

- (A)
- $\{1, 2, 4\}$
- (B)
- $\{2, 3, 4\}$
- (C)
- $\{0, 2, 4\}$
- (D)
- $\{0, 2, 3, 4\}$

3. 设  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 则“函数  $f(x) = a^x$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数”是“函数  $g(x) = (2-a)x^3$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数”的 ( )

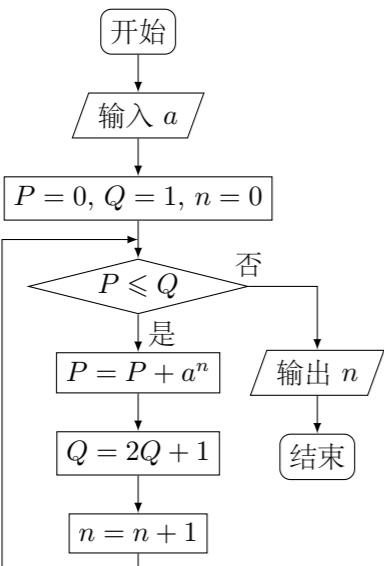
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
- 
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查. 为此将他们随机编号为 1, 2, …, 960, 分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9. 抽到的 32 人中, 编号落入区间 [1, 450] 的人做问卷 A, 编号落入区间 [451, 750] 的人做问卷 B, 其余的人做问卷 C. 则抽到的人中, 做问卷 B 的人数为 ( )

- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 15

5. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 2x + y \leq 4 \\ 4x - y \geq -1 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = 3x - y$  的取值范围是 ( )

- (A)
- $[-\frac{3}{2}, 6]$
- (B)
- $[-\frac{3}{2}, -1]$
- (C)
- $[-1, 6]$
- (D)
- $[-6, \frac{3}{2}]$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入  $a = 4$ , 那么输出的  $n$  的值为 ( )

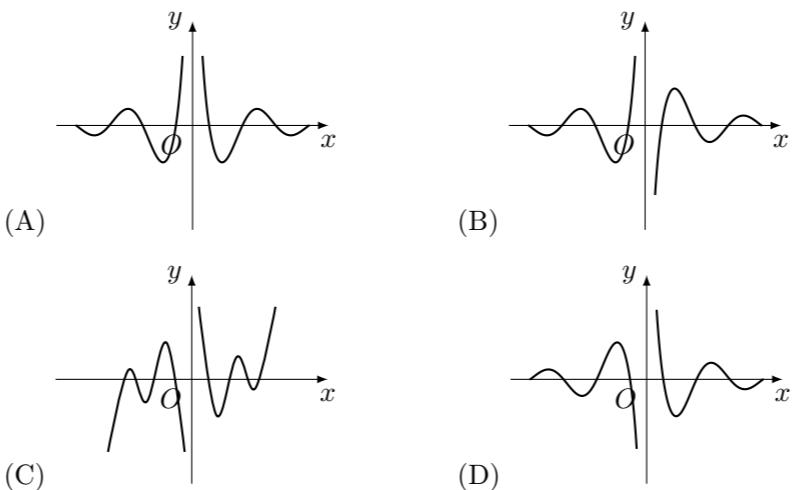
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 若  $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin 2\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ , 则  $\sin \theta =$  ( )

- (A)
- $\frac{3}{5}$
- (B)
- $\frac{4}{5}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{7}}{4}$
- (D)
- $\frac{3}{4}$

8. 定义在  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x+6) = f(x)$ . 当  $-3 \leq x < -1$  时,  $f(x) = -(x+2)^2$ ; 当  $-1 \leq x < 3$  时,  $f(x) = x$ . 则  $f(1) + f(2) + \dots + f(2012) =$  ( )

- (A) 335 (B) 338 (C) 1678 (D) 2012

9. 函数  $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$  的图象大致为 ( )10. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  的渐近线与椭圆  $C$  有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆  $C$  的方程为 ( )

- (A)
- $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$
- (B)
- $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$
- (C)
- $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
- (D)
- $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$

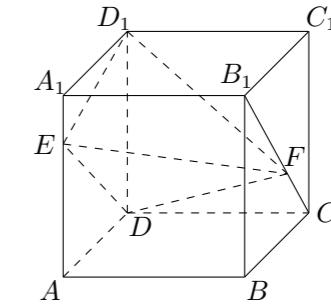
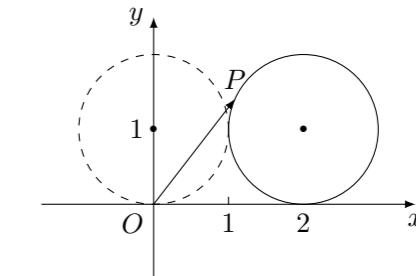
11. 现有 16 张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张, 从中任取 3 张. 要求这 3 张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多 1 张. 不同的取法种数为 ( )

- (A) 232 (B) 252 (C) 472 (D) 484

12. 设函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = ax^2 + bx$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ ). 若  $y = f(x)$  的图象与  $y = g(x)$  图象有且仅有两个不同的公共点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则下列判断正确的是 ( )

- (A) 当
- $a < 0$
- 时,
- $x_1 + x_2 < 0, y_1 + y_2 > 0$
- 
- (B) 当
- $a < 0$
- 时,
- $x_1 + x_2 > 0, y_1 + y_2 < 0$
- 
- (C) 当
- $a > 0$
- 时,
- $x_1 + x_2 < 0, y_1 + y_2 < 0$
- 
- (D) 当
- $a > 0$
- 时,
- $x_1 + x_2 > 0, y_1 + y_2 > 0$

## 二、填空题

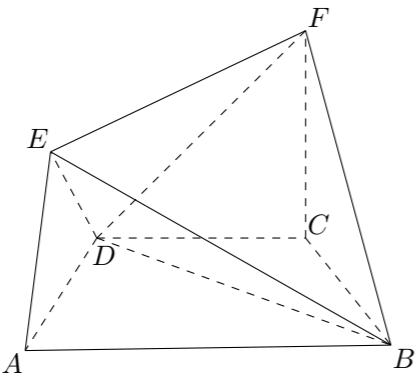
13. 若不等式  $|kx - 4| \leq 2$  的解集为  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ , 则实数  $k =$  \_\_\_\_\_.14. 如图, 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $E, F$  分别为线段  $AA_1, B_1C$  上的点, 则三棱锥  $D_1 - EDF$  的体积为 \_\_\_\_\_.15. 设  $a > 0$ , 若曲线  $y = \sqrt{x}$  与直线  $x = a, y = 0$  所围成封闭图形的面积为  $a^2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.16. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 一单位圆的圆心的初始位置在  $(0, 1)$ , 此时圆上一点  $P$  的位置在  $(0, 0)$ , 圆在  $x$  轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于  $(2, 1)$  时,  $\overrightarrow{OP}$  的坐标为 \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 已知向量  $\mathbf{m} = (\sin x, 1)$ ,  $\mathbf{n} = \left(\sqrt{3}A \cos x, \frac{A}{2} \cos 2x\right)$  ( $A > 0$ ), 函数  $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$  的最大值为 6.

- (1) 求
- $A$
- ;
- 
- (2) 将函数
- $y = f(x)$
- 的图象向左平移
- $\frac{\pi}{12}$
- 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的
- $\frac{1}{2}$
- 倍, 纵坐标不变, 得到函数
- $y = g(x)$
- 的图象, 求
- $g(x)$
- 在
- $[0, \frac{5\pi}{24}]$
- 上的值域.

18. 在如图所示的几何体中, 四边形  $ABCD$  是等腰梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $FC \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AE \perp BD$ ,  $CB = CD = CF$ .  
 (1) 求证:  $BD \perp$  平面  $AED$ ;  
 (2) 求二面角  $F - BD - C$  的余弦值.
20. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 + a_4 + a_5 = 84$ ,  $a_9 = 73$ .  
 (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 对任意  $m \in \mathbb{N}^*$ , 将数列  $\{a_n\}$  中落入区间  $(9^m, 9^{2m})$  内的项的个数记为  $b_m$ , 求数列  $\{b_m\}$  的前  $m$  项和  $S_m$ .
22. 已知函数  $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$  ( $k$  为常数,  $e = 2.71828\cdots$  是自然对数的底数), 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与  $x$  轴平行.  
 (1) 求  $k$  的值;  
 (2) 求  $f(x)$  的单调区间;  
 (3) 设  $g(x) = xf'(x)$ , 其中  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数. 证明: 对任意  $x > 0$ ,  $g(x) < 1 + e^{-2}$ .



19. 现有甲乙两个靶, 某射手向甲靶射击一次命中的概率为  $\frac{3}{4}$ , 命中得 1 分, 没有命中得 0 分; 向乙靶射击两次, 每次命中的概率为  $\frac{2}{3}$ , 每命中一次得 2 分, 没有命中得 0 分. 该射手每次射击的结果相互独立, 假设该射手完成以上三次射击.  
 (1) 求该射手恰好命中一次的概率;  
 (2) 求该射手的总得分  $X$  的分布列及数学期望  $EX$ .

21. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $F$  是抛物线  $C : x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点,  $M$  是抛物线  $C$  上位于第一象限内的任意一点, 过  $M, F, O$  三点的圆的圆心为  $Q$ , 点  $Q$  到抛物线  $C$  的准线的距离为  $\frac{3}{4}$ .  
 (1) 求抛物线  $C$  的方程;  
 (2) 是否存在点  $M$ , 使得直线  $MQ$  与抛物线  $C$  相切于点  $M$ ? 若存在, 求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 说明理由;  
 (3) 若点  $M$  的横坐标为  $\sqrt{2}$ , 直线  $l : y = kx + \frac{1}{4}$  与抛物线  $C$  有两个不同的交点  $A, B$ ,  $l$  与圆  $Q$  有两个不同的交点  $D, E$ , 求当  $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$  时,  $|AB|^2 + |DE|^2$  的最小值.