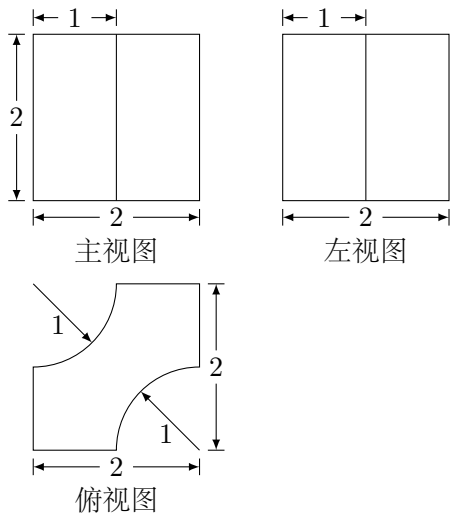


理科数学

一、选择题

- 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x \leq 0\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B) =$ ()
(A) $\{x | x \geq 0\}$ (B) $\{x | x \leq 1\}$
(C) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x | 0 < x < 1\}$
- 设复数 z 满足 $(z - 2i)(2 - i) = 5$, 则 $z =$ ()
(A) $2 + 3i$ (B) $2 - 3i$ (C) $3 + 2i$ (D) $3 - 2i$
- 已知 $a = 2^{-\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, 则 ()
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$
- 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ()
(A) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$ (B) 若 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \perp n$
(C) 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$ (D) 若 $m \parallel \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
- 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是非零向量, 已知命题 p : 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$; 命题 q : 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$, 则下列命题中的真命题是 ()
(A) $p \vee q$ (B) $p \wedge q$ (C) $(\neg p) \wedge (\neg q)$ (D) $p \vee (\neg q)$
- 6 把椅子摆成一排, 3 人随机就座, 任何两人不相邻的坐法种数为 ()
(A) 144 (B) 120 (C) 72 (D) 24
- 某几何体三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()

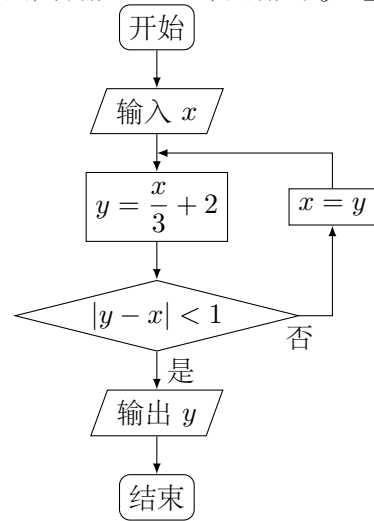


- (A) $8 - 2\pi$ (B) $8 - \pi$ (C) $8 - \frac{\pi}{2}$ (D) $8 - \frac{\pi}{4}$
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若数列 $\{2^{a_1 a_n}\}$ 为递减数列, 则 ()
(A) $d < 0$ (B) $d > 0$ (C) $a_1 d > 0$ (D) $a_1 d < 0$

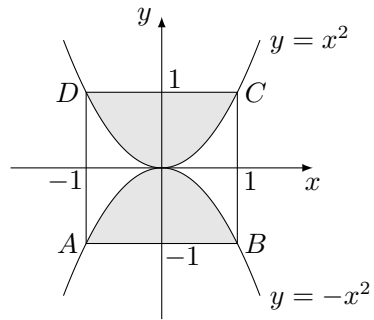
- 将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()
(A) 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减 (B) 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递增
(C) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减 (D) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增
- 已知点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B , 记 C 的焦点为 F , 则直线 BF 的斜率为 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$
- 当 $x \in [-2, 1]$ 时, 不等式 $ax^3 - x^2 + 4x + 3 \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
(A) $[-5, -3]$ (B) $\left[-6, -\frac{9}{8}\right]$ (C) $[-6, -2]$ (D) $[-4, -3]$
- 已知定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(0) = f(1) = 0$; ② 对所有 $x, y \in [0, 1]$, 且 $x \neq y$, 有 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$. 若对所有 $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| < k$ 恒成立, 则 k 的最小值为 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2\pi}$ (D) $\frac{1}{8}$

二、填空题

- 执行如图的程序框图, 若输入 $x = 9$, 则输出 $y =$ _____.



- 正方形的四个顶点 $A(-1, -1), B(1, -1), C(1, 1), D(-1, 1)$ 分别在抛物线 $y = -x^2$ 和 $y = x^2$ 上, 如图所示, 若将一个质点随机投入正方形 $ABCD$ 中, 则质点落在阴影区域的概率是_____.

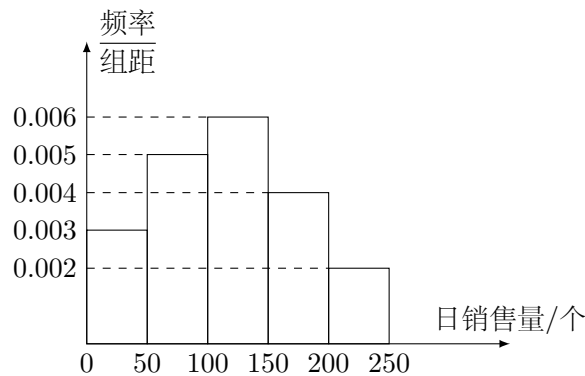


- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 点 M 与 C 的焦点不重合, 若 M 关于 C 的焦点的对称点分别为 A, B , 线段 MN 的中点在 C 上, 则 $|AN| + |BN| =$ _____.

- 对于 $c > 0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2 - 2ab + 4b^2 - c = 0$ 且使 $|2a + b|$ 最大时, $\frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$ 的最小值为_____.

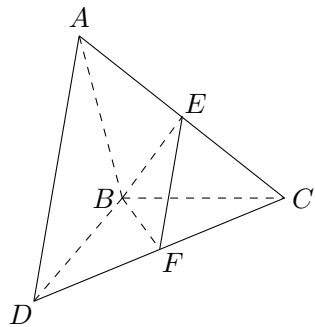
三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a > c$, 已知 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2, \cos B = \frac{1}{3}, b = 3$, 求:
(1) a 和 c 的值;
(2) $\cos(B - C)$ 的值.
- 一家面包房根据以往某种面包的销售记录, 绘制了日销售量的频率分布直方图, 如图所示. 将日销售量落入各组的频率视为概率, 并假设每天的销售量相互独立.



- 求在未来连续 3 天里, 有连续 2 天的日销售量都不低于 100 个且另 1 天的日销售量低于 50 个的概率;
- 用 X 表示在未来 3 天里日销售量不低于 100 个的天数, 求随机变量 X 的分布列, 期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$.

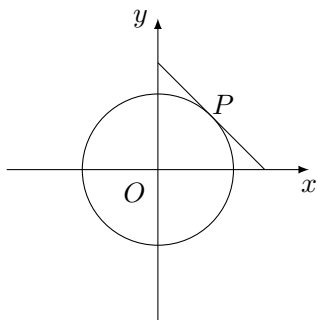
19. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 所在平面互相垂直, 且 $AB = BC = BD = 2$, $\angle ABC = \angle DBC = 120^\circ$, E, F 分别为 AC, DC 的中点.
- (1) 求证: $EF \perp BC$;
- (2) 求二面角 $E - BF - C$ 的正弦值



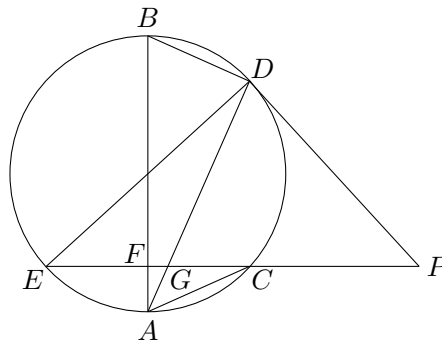
21. 已知函数 $f(x) = (\cos x - x)(\pi + 2x) - \frac{8}{3}(\sin x + 1)$, $g(x) = 3(x - \pi) \cos x - 4(1 + \sin x) \ln \left(3 - \frac{2x}{\pi}\right)$.
- (1) 证明: 存在唯一 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(x_0) = 0$;
- (2) 证明: 存在唯一 $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 使 $g(x_1) = 0$, 且对 (1) 中的 x_0 , 有 $x_0 + x_1 < \pi$.

23. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上每一点的横坐标保持不变, 纵坐标变为原来的 2 倍, 得曲线 C .
- (1) 写出 C 的参数方程;
- (2) 设直线 $l: 2x + y - 2 = 0$ 与 C 的交点为 P_1, P_2 , 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求过线段 P_1P_2 的中点且与 l 垂直的直线的极坐标方程.

20. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图). 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.
- (1) 求 C_1 的方程;
- (2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点, 直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A, B 两点, 若以线段 AB 为直径的圆过点 P , 求 l 的方程.



22. 如图, EP 交圆于 E, C 两点, PD 切圆于 D , G 为 CE 上一点且 $PG = PD$, 连接 DG 并延长交圆于点 A , 作弦 AB 垂直 EP , 垂足为 F .
- (1) 求证: AB 为圆的直径;
- (2) 若 $AC = BD$, 求证: $AB = ED$.



24. 设函数 $f(x) = 2|x - 1| + x - 1$, $g(x) = 16x^2 - 8x + 1$, 记 $f(x) \leq 1$ 的解集为 M , $g(x) \leq 4$ 的解集为 N .
- (1) 求 M ;
- (2) 当 $x \in M \cap N$ 时, 证明: $x^2 f(x) + x[f(x)]^2 \leq \frac{1}{4}$.