2006 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\right.\right\}$, $N=\{y|y=3x^2+1, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $M\cap N$ 等于 ( )

(A) $\varnothing$　(B) $\{x|x\geqslant 1\}$

(C) $\{x|x>1\}$　(D) $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$

2. 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}+3\mathrm{i})z=3\mathrm{i}$, 则 z 等于 ( )

(A) $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(B) $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　(C) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　(D) $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$

3. 若 $a>0$, $b>0$, 则不等式 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于 ( )

(A) $-\frac{1}{b}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$　(B) $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

(C) $x<-\frac{1}{a}$ 或 $x>\frac{1}{b}$　(D) $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

4. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A 为抛物线上的一点, 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AF}=-4$, 则点 A 的坐标为 ( )

(A) $(2,\pm 2\sqrt{2})$　(B) $(1,\pm 2)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,2\sqrt{2})$

5. 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x)\geqslant 0$, 则必有 ( )

(A) $f(0)+f(2)<2f(1)$　(B) $f(0)+f(2)\leqslant 2f(1)$

(C) $f(0)+f(2)\geqslant 2f(1)$　(D) $f(0)+f(2)>2f(1)$

6. 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对一切 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 成立, 则 a 的最小值为( )

(A) 0　(B) -2　(C) $-\frac{5}{2}$　(D) -3

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $\overrightarrow{OB}=a_1\overrightarrow{OA}+a_{200}\overrightarrow{OC}$, 且 A、B、C 三点共线 (该直线不过点 O), 则 S_{200} 等于 ( )

(A) 100　(B) 101　(C) 200　(D) 201

8. 在 $(x-\sqrt{2})^{2006}$ 的二项展开式中, 含 x 的奇次幂的项之和为 S, 当 $x=\sqrt{2}$ 时, S 等于 ( )

(A) 2^{3008}　(B) -2^{3008}　(C) 2^{3009}　(D) -2^{3009}

9. P 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点, M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点, 则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为 ( )

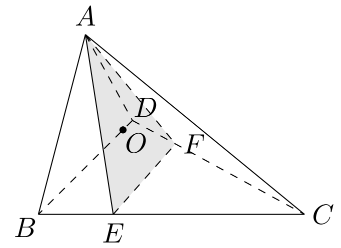
(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

10. 将 7 个人 (含甲、乙) 分成三个组, 一组 3 人, 另两组各 2 人, 不同的分组数为 a, 甲、乙分在同一组的概率为 p, 则 a、p 的值分别为 ( )

(A) $a=105$, $p=\frac{5}{21}$　(B) $a=105$, $p=\frac{4}{21}$

(C) $a=210$, $p=\frac{5}{21}$　(D) $a=210$, $p=\frac{4}{21}$

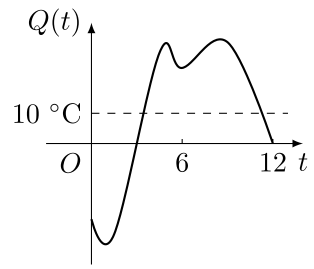
11. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 AEF 经过四面体的内切球 (与四个面都相切的球) 球心 O, 且与 BC、DC 分别截于 E、F. 如果截面将四面体分为体积相等的两部分, 设四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积分别为 S_1、S_2, 则必有 ( )

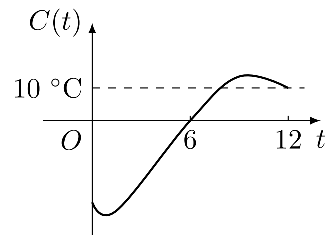


(A) $S_1<S_2$　(B) $S_1>S_2$

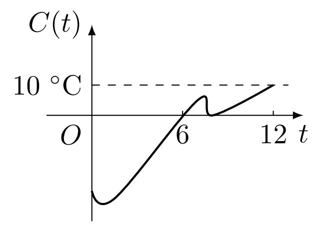
(C) $S_1=S_2$　(D) S_1、S_2 的大小不能确定

12. 某地一年内的气温 $Q(t)$ (单位: °C) 与时间 t (月份) 之间的关系如图所示, 已知该年的平均气温为 10 °C. 令 $C(t)$ 表示时间段 $[0,t]$ 的平均气温, $C(t)$ 与 t 之间的函数关系用下列图象表示, 则正确的是 ( )

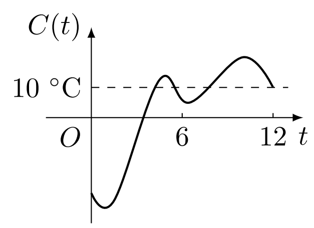




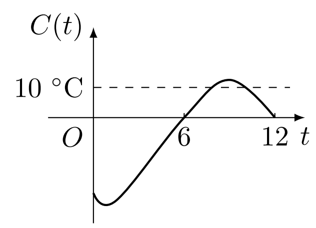
(A)



(B)



(C)



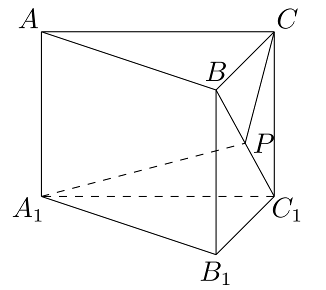
(D)

二、填空题

13. 数列 $\left\{\frac{1}{4n^2-1}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

14. 设 $f(x)=\log_3(x+6)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $[f^{-1}(m)+6]\cdot[f^{-1}(n)+6]=27$, 则 $f(m+n)=$______.

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面为直角三角形, $\angle ACB=90°$, $AC=6$, $BC=CC_1=\sqrt{2}$, P 是 BC_1 上一动点, 则 $CP+PA_1$ 的最小值为______.



16. 已知圆 $M:(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$, 直线 $l:y=kx$, 下面四个命题:

① 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 相切;

② 对任意实数 k 和 θ, 直线 l 和圆 M 有公共点;

③ 对任意实数 θ, 必存在实数 k, 使得直线 l 和圆 M 相切;

④ 对任意实数 k, 必存在实数 θ, 使得直线 l 和圆 M 相切.

其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{2}{3}$ 与 $x=1$ 时都取得极值.

(1) 求 a、b 的值与函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对 $x\in[-1,2]$, 不等式 $f(x)<c^2$ 恒成立, 求 c 的取值范围.

18. 某商场举行抽奖促销互动, 抽奖规则是: 从装有 9 个白球、1 个红球的箱子中每次随机地摸出一个球, 记下颜色后放回, 摸出一个红球可获得奖金 10 元; 摸出两个红球可获得奖金 50 元. 现有甲、乙两位顾客, 规定: 甲摸一次, 乙摸两次. 令 ξ 表示甲、乙两人摸球后获得的奖金总额. 求:

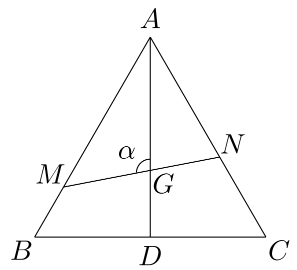
(1) ξ 的分布列;

(2) ξ 的的数学期望.

19. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, M、N 分别是边 AB、AC 上的点, 线段 MN 经过 $\triangle ABC$ 的中心 G. 设 $\angle MGA = \alpha$ $\left(\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}\right)$.

(1) 试将 $\triangle AGM$、$\triangle AGN$ 的面积 (分别记为 S_1 与 S_2) 表示为 α 的函数;

(2) 求 $y = \frac{1}{{S_1}^2} + \frac{1}{{S_2}^2}$ 的最大值与最小值.

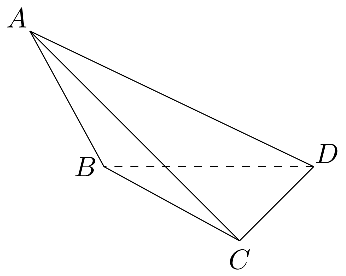


20. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 侧面 ABD、ACD 是全等的直角三角形, AD 是公共的斜边, 且 $AD = \sqrt{3}$, $BD = CD = 1$, 另一个侧面 ABC 是正三角形.

(1) 求证: $AD \perp BC$;

(2) 求二面角 $B-AC-D$ 的大小;

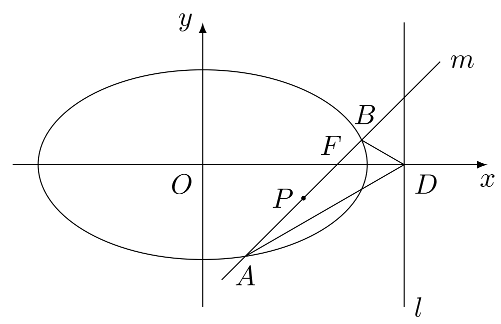
(3) 在直线 AC 上是否存在一点 E, 使 ED 与面 BCD 成 $30°$ 角? 若存在, 确定 E 的位置; 若不存在, 说明理由.



21. 如图, 椭圆 $Q: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 过点 F 的一动直线 m 绕点 F 转动, 并且交椭圆于 A、B 两点, P 为线段 AB 的中点.

(1) 求点 P 的轨迹 H 的方程;

(2) 在 Q 的方程中, 令 $a^2 = 1 + \cos\theta + \sin\theta$, $b^2 = \sin\theta$ $\left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, 确定 θ 的值, 使原点距椭圆的右准线 l 最远, 此时, 设 l 与 x 轴交点为 D, 当直线 m 绕点 F 转动到什么位置时, 三角形 ABD 的面积最大?



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{3}{2}$, 且 $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + n - 1}$ $(n \geqslant 2,\ n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对一切正整数 n, 不等式 $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n < 2 \cdot n!$ 恒成立.