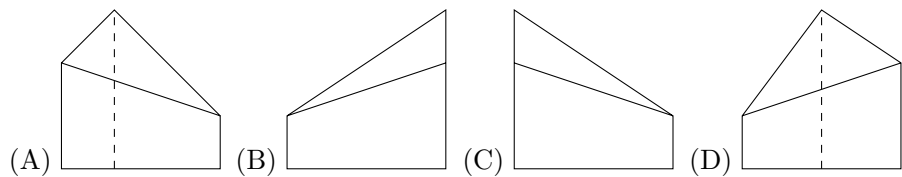
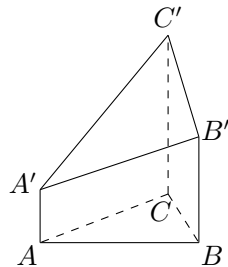


理科数学

一、选择题

- 若集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 则集合 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{x | -1 < x < 1\}$ (B) $\{x | -2 < x < 1\}$
 (C) $\{x | -2 < x < 2\}$ (D) $\{x | 0 < x < 1\}$
- 若复数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - i$, 则 $z_1 \cdot z_2 =$ ()
 (A) $4 + 2i$ (B) $2 + i$ (C) $2 + 2i$ (D) $3 + i$
- 若函数 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ 与 $g(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 则 ()
 (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数 (B) $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数
 (C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数 (D) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
- 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_2 \cdot a_3 = 2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$, 则 $S_5 =$ ()
 (A) 35 (B) 33 (C) 31 (D) 29
- “ $m < \frac{1}{4}$ ”是“一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 有实数解”的 ()
 (A) 充分非必要条件 (B) 充分必要条件
 (C) 必要非充分条件 (D) 非充分非必要条件
- 如图, $\triangle ABC$ 为正三角形, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, $CC' \perp$ 平面 ABC , 且 $3AA' = \frac{3}{2}BB' = CC' = AB$, 则多面体 $ABC - A'B'C'$ 的正视图 (也称主视图) 是 ()



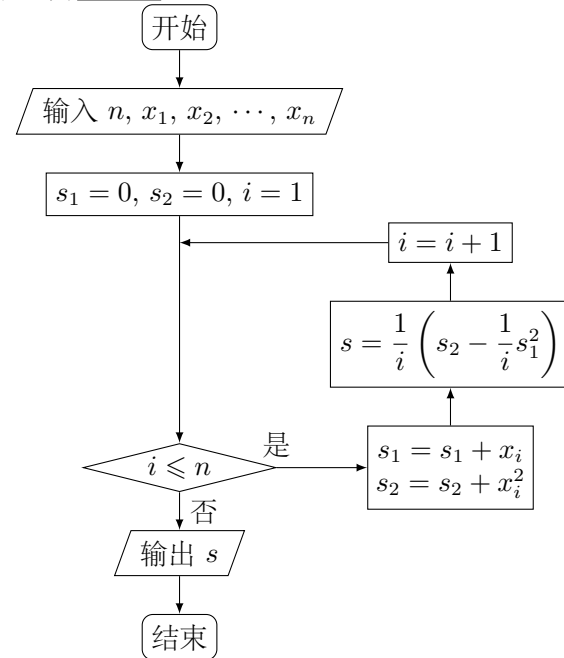
- 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3, 1)$, 且 $P(2 \leq X \leq 4) = 0.6826$, 则 $P(X > 4) =$ ()
 (A) 0.1588 (B) 0.1587 (C) 0.1586 (D) 0.1585
- 为了迎接 2010 年广州亚运会, 某大楼安装 5 个彩灯, 它们闪亮的顺序不固定, 每个彩灯闪亮只能是红、橙、黄、绿、蓝中的一种颜色, 且这 5 个彩灯所闪亮的颜色各不相同. 记这 5 个彩灯有序地闪亮一次为一个闪烁, 在每个

闪烁中, 每秒钟有且仅有一个彩灯闪亮, 而相邻两个闪烁的时间间隔均为 5 秒. 如果要实现所有不同的闪烁, 那么需要的时间至少是 ()

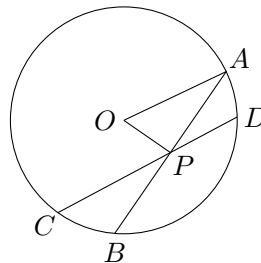
- (A) 1205 秒 (B) 1200 秒 (C) 1195 秒 (D) 1190 秒

二、填空题

- 函数 $f(x) = \lg(x - 2)$ 的定义域是_____.
- 若向量 $\mathbf{a} = (1, 1, x)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$, 满足条件 $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (2\mathbf{b}) = -2$, 则 $x =$ _____.
- 已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边. 若 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $A + C = 2B$, 则 $\sin C =$ _____.
- 若圆心在 x 轴上、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆 O 位于 y 轴左侧, 且与直线 $x + y = 0$ 相切, 则圆 O 的方程是_____.
- 某城市缺水问题比较突出, 为了制定节水管理办法, 对全市居民某年的月均用水量进行了抽样调查, 其中 n 位居民的月均用水量分别为 x_1, \dots, x_n (单位: 吨). 根据如图所示的程序框图, 若 $n = 2$, 且 x_1, x_2 分别为 1, 2, 则输出的结果 s 为_____.



- 如图, AB, CD 是半径为 a 的圆 O 的两条弦, 它们相交于 AB 的中点 P , $PD = \frac{2a}{3}$, $\angle OAP = 30^\circ$, 则 $CP =$ _____.



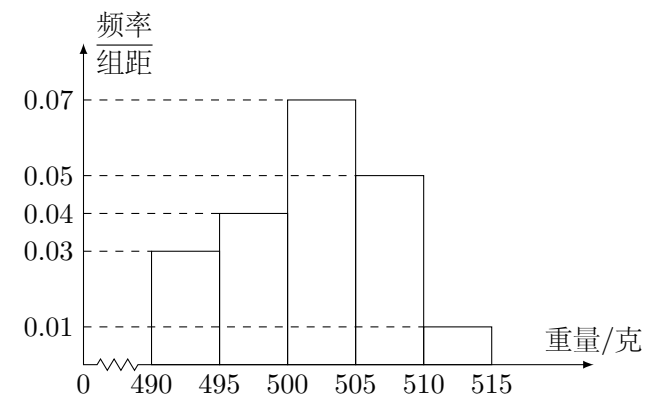
- 在极坐标系 (ρ, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) 中, 曲线 $\rho = 2 \sin \theta$ 与 $\rho \cos \theta = -1$ 的交点的极坐标为_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = A \sin(3x + \varphi)$ ($A > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $0 < \varphi < \pi$) 在 $x = \frac{\pi}{12}$ 时取得最大值 4.

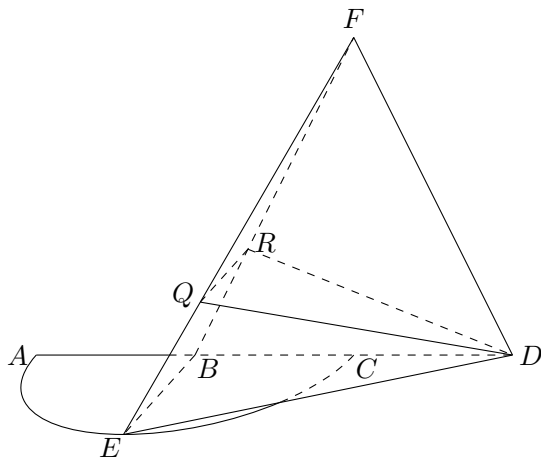
- 求 $f(x)$ 的最小正周期;
- 求 $f(x)$ 的解析式;
- 若 $f\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{12}{5}$, 求 $\sin \alpha$.

- 某食品厂为了检查一条自动包装流水线的生产情况, 随机抽取该流水线上的 40 件产品作为样本称出它们的重量 (单位: 克), 重量的分组区间为 $(490, 495]$, $(495, 500]$, \dots , $(510, 515]$, 由此得到样本的频率分布直方图, 如图所示.



- 根据频率分布直方图, 求重量超过 505 克的产品数量;
- 在上述抽取的 40 件产品中任取 2 件, 设 Y 为重量超过 505 克的产品数量, 求 Y 的分布列;
- 从流水线上任取 5 件产品, 求恰有 2 件产品合格的重量超过 505 克的概率.

18. 如图, \widehat{AEC} 是半径为 a 的半圆, AC 为直径, 点 E 为 \widehat{AC} 的中点, 点 B 和点 C 为线段 AD 的三等分点, 平面 AEC 外一点 F 满足 $FB = FD = \sqrt{5}a$, $EF = \sqrt{6}a$.
- (1) 证明: $EB \perp FD$;
- (2) 已知点 Q, R 分别为线段 FE, FB 上的点, 使得 $FQ = \frac{2}{3}FE$, $FR = \frac{2}{3}FB$, 求平面 BED 与平面 RQD 所成二面角的正弦值.



19. 某营养师要为某个儿童预定午餐和晚餐. 已知一个单位的午餐含 12 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 6 个单位的维生素 C; 一个单位的晚餐含 8 个单位的碳水化合物, 6 个单位的蛋白质和 10 个单位的维生素 C. 另外, 该儿童这两餐需要的营养中至少含 64 个单位的碳水化合物, 42 个单位的蛋白质和 54 个单位的维生素 C. 如果一个单位的午餐、晚餐的费用分别是 2.5 元和 4 元, 那么要满足上述的营养要求, 并且花费最少, 应当为该儿童分别预订多少个单位的午餐和晚餐?

20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 点 $P(x_1, y_1), Q(x_1, -y_1)$ 是双曲线上不同的两个动点.
- (1) 求直线 A_1P 与 A_2Q 交点的轨迹 E 的方程;
- (2) 若过点 $H(0, h)$ ($h > 1$) 的两条直线 l_1 和 l_2 与轨迹 E 都只有一个交点, 且 $l_1 \perp l_2$, 求 h 的值.

21. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系 xOy 上的两点, 现定义由点 A 到点 B 的一种折线距离 $\rho(A, B)$ 为 $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. 对于平面 xOy 上给定的不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,
- (1) 若点 $C(x, y)$ 是平面 xOy 上的点, 试证明 $\rho(A, C) + \rho(C, B) \geq \rho(A, B)$;
- (2) 在平面 xOy 上是否存在点 $C(x, y)$, 同时满足① $\rho(A, C) + \rho(C, B) = \rho(A, B)$; ② $\rho(A, C) = \rho(C, B)$. 若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明.