2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3}=$ ( )

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $-1-\mathrm{i}$ (C) $1+3\mathrm{i}$ (D) $-1-3\mathrm{i}$

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为 ( )

(A) $[-1,0)$ (B) $[-1,+\infty)$
(C) $(-\infty,-1]$ (D) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,-2)$ 的夹角是 $180°$, 且 $\left|\vec{b}\right|=3\sqrt{5}$, 则 $\vec{b}=$

(A) $(-3,6)$ (B) $(3,-6)$ (C) $(6,-3)$ (D) $(-6,3)$

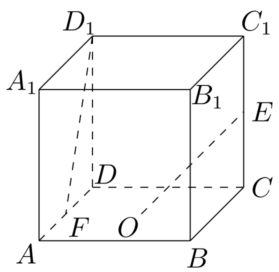
4. 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$, F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|=$ ( )

(A) 1 或 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9

5. 若函数 $f(x)=\log_a x\ (0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a=$ ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是底面 $ABCD$ 的中心, E、F 分别是 CC_1、AD 的中点, 那么异面直线 OE 和 FD_1 所成的角的余弦值等于 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (C) $\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

7. 若 $P(2,-1)$ 为圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是 ( )

(A) $x-y-3=0$ (B) $2x+y-3=0$
(C) $x+y-1=0$ (D) $2x-y-5=0$

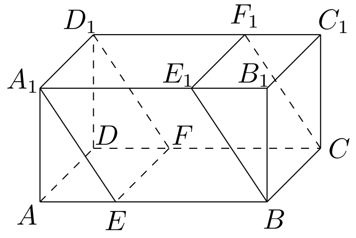
8. 已知数列 $\{a_n\}$, 那么“对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上”是“$\{a_n\}$ 为等差数列”的 ( )

(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)\ (x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ (D) $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$

10. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=3$. 分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$, $V_2=V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$, $V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$. 若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$, 则截面 A_1EFD_1 的面积为 ( )



(A) $4\sqrt{10}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{13}$ (D) 16

11. 函数 $y=3^{x^2-1}\ (-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$ (B) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$
(C) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$ (D) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)=\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 $2:3:5$, 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量 $n=$______.

14. 如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点, 那么实数 a 的取值范围是______.

15. 若 $(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2004}x^{2004}\ (x\in\mathbf{R})$, 则 $(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=$______. (用数字作答)

16. 从 1, 3, 5, 7 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取 2 个数字, 组成没有重复数字的四位数, 其中能被 5 整除的四位数共有______个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛, 设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数.

(1) 求 ξ 的分布列;

(2) 求 ξ 的数学期望;

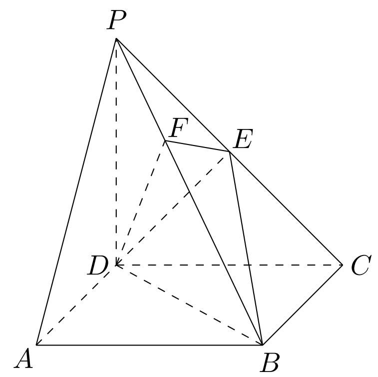
(3) 求“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点, 作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F.

(1) 证明: $PA\parallel$ 平面 EDB;

(2) 证明: $PB\perp$ 平面 EFD;

(3) 求二面角 $C-PB-D$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x$ 在 $x=\pm 1$ 处取得极值.

(1) 讨论 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值还是极小值;

(2) 过点 $A(0,16)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线, 求此切线方程.

21. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和数列 $\{a_n\}$ 满足下列条件: $a_1=a$, $a_n=f(a_{n-1})$ $(n=2,3,4,\cdots)$, $a_2\neq a_1$, $f(a_n)-f(a_{n-1})=k(a_n-a_{n-1})$ $(n=2,3,4,\cdots)$, 其中 a 为常数, k 为非零常数.

(1) 令 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 当 $|k|<1$ 时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

22. 椭圆的中心是原点 O, 它的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 相应于焦点 $F(c,0)$ $(c>0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A, $|OF|=2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.

(1) 求椭圆的方程及离心率;

(2) 若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$, 求直线 PQ 的方程;

(3) 设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$ $(\lambda>1)$, 过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M, 证明 $\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$.