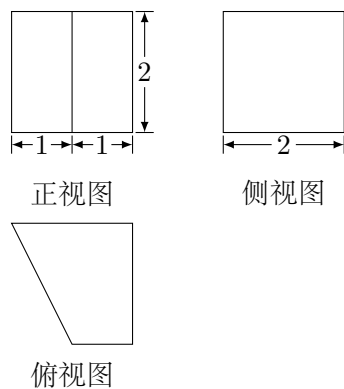


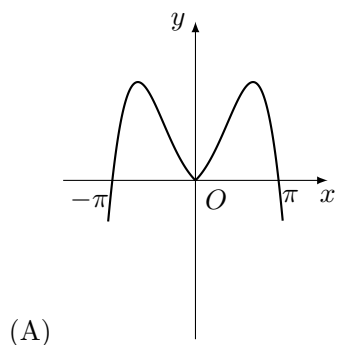
数学试卷

一、选择题

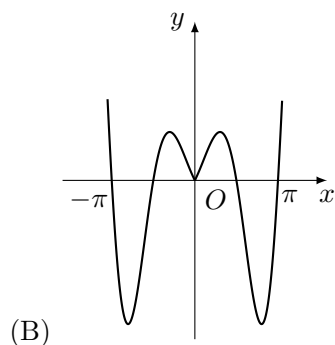
- 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
(A) \emptyset (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{2, 4, 5\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- 双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的焦点坐标是 ()
(A) $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$ (B) $(-2, 0), (2, 0)$
(C) $(0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2})$ (D) $(0, -2), (0, 2)$
- 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 ()



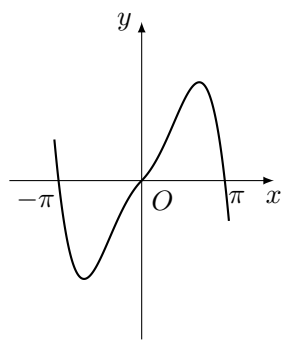
- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
- 复数 $\frac{2}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 ()
(A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$
 - 函数 $y = 2^{|x|} \sin 2x$ 的图象可能是 ()



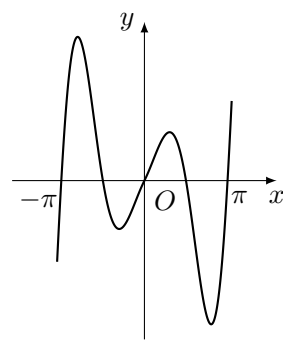
(A)



(B)



(C)



(D)

- 已知平面 α , 直线 m, n 满足 $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$, 则“ $m \parallel n$ ”是“ $m \parallel \alpha$ ”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 设 $0 < p < 1$, 随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

- 则当 p 在 $(0, 1)$ 内增大时, ()
(A) $D(\xi)$ 减小 (B) $D(\xi)$ 增大
(C) $D(\xi)$ 先减小后增大 (D) $D(\xi)$ 先增大后减小
- 已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, 侧棱长均相等, E 是线段 AB 上的点 (不含端点), 设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1 , SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2 , 二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 , 则 ()
(A) $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$ (B) $\theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1$ (C) $\theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_2$ (D) $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_1$
 - 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$ 是平面向量, \mathbf{e} 是单位向量. 若非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{e} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 \mathbf{b} 满足 $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + 3 = 0$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的最小值是 ()
(A) $\sqrt{3} - 1$ (B) $\sqrt{3} + 1$ (C) 2 (D) $2 - \sqrt{3}$
 - 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$. 若 $a_1 > 1$, 则 ()
(A) $a_1 < a_3, a_2 < a_4$ (B) $a_1 > a_3, a_2 < a_4$
(C) $a_1 < a_3, a_2 > a_4$ (D) $a_1 > a_3, a_2 > a_4$

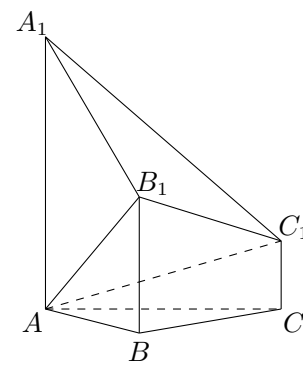
二、填空题

- 我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题: “今有鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱, 买鸡百只, 问鸡翁、母、雏各几何?” 设鸡翁, 鸡母, 鸡雏个数分别为 x, y, z , 则 $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$, 当 $z = 81$ 时, $x =$ _____, $y =$ _____.
- 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + 3y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{7}, b = 2, A = 60^\circ$, 则 $\sin B =$ _____, $c =$ _____.
- 二项式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的常数项是_____.
- 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq \lambda \\ x^2 - 4x + 3, & x < \lambda \end{cases}$, 当 $\lambda = 2$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是_____. 若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____.

- 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6 中任取 2 个数字, 一共可以组成_____个没有重复数字的四位数. (用数字作答)
- 已知点 $P(0, 1)$, 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$ ($m > 1$) 上两点 A, B 满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 则当 $m =$ _____时, 点 B 横坐标的绝对值最大.

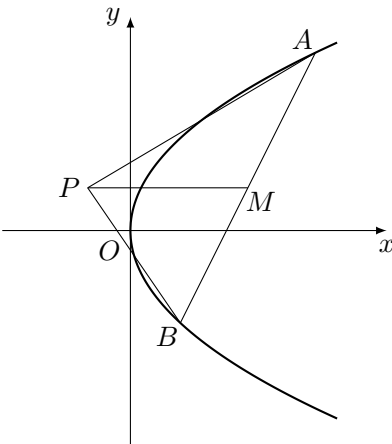
三、解答题

- 已知角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
(1) 求 $\sin(\alpha + \pi)$ 的值;
(2) 若角 β 满足 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\cos \beta$ 的值.
- 如图, 已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$, A_1A, B_1B, C_1C 均垂直于平面 ABC , $\angle ABC = 120^\circ$, $A_1A = 4, C_1C = 1, AB = BC = B_1B = 2$.
(1) 证明: $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.



20. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 且 $a_3 + a_4 + a_5 = 28$, $a_4 + 2$ 是 a_3, a_5 的等差中项. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 数列 $\{(b_{n+1} - b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2 + n$.
- (1) 求 q 的值;
- (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

21. 如图, 已知点 P 是 y 轴左侧 (不含 y 轴) 一点, 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上存在不同的两点 A, B 满足 PA, PB 的中点均在 C 上.
- (1) 设 AB 中点为 M , 证明: PM 垂直于 y 轴;
- (2) 若 P 是半椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ($x < 0$) 上的动点, 求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.



22. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
- (1) 若 $f(x)$ 在 $x = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$) 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8\ln 2$;
- (2) 若 $a \leq 3 - 4\ln 2$, 证明: 对于任意 $k > 0$, 直线 $y = kx + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 有唯一公共点.