绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-1,2]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

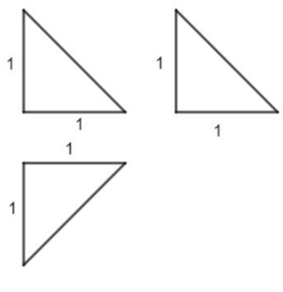
2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z=2$，则 $z=$（　　）

A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1-i$　　D. $1+i$

3. 已知 $f(x)$ 是定义在上 $[0,1]$ 的函数，那么“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（　　）



A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　　B. 4　　C. $3+\sqrt{3}$　　D. 2

5. 双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$过点$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，且离心率为$2$，则该双曲线的标准方程为（　　）

A. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　　C. $x^2-\dfrac{\sqrt{3}y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}x^2}{3}-y^2=1$

6. $\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，其中$\dfrac{a_k}{b_k}(1\le k\le 5)$为常值，$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3=$（　　）

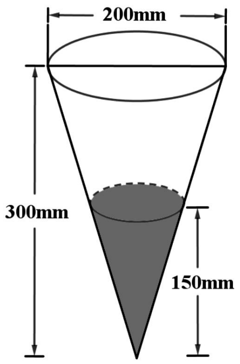
A. 64　　B. 128　　C. 256　　D. 512

7. 函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，试判断函数的奇偶性及最大值（　　）

A. 奇函数，最大值为2　　B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为$\dfrac{9}{8}$　　D. 偶函数，最大值为$\dfrac{9}{8}$

8. 定义：24小时内降水在平地上积水厚度（mm）来判断降雨程度．其中小雨（<10mm），中雨（10mm−25mm），大雨（25mm−50mm），暴雨（50mm−100mm），小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，如图，则这天降雨属于哪个等级（ ）



A. 小雨　　B. 中雨　　C. 大雨　　D. 暴雨

9. 已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$l:y=kx+m$，当k变化时，l截得圆C弦长的最小值为2，则$m=$（　　）

A. ±2　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. $\pm\sqrt{5}$

10. 数列$\{a_n\}$是递增的整数数列，且$a_1\ge3$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=100$，则n的最大值为（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

二、填空题5小题，每小题5分，共25分．

11. $(x^3-\dfrac{1}{x})^4$展开式中常数项为__________．

12. 已知抛物线$C:y^2=4x$，焦点为F，点M为抛物线C上的点，且$|FM|=6$，则M的横坐标是_______；作$MN\perp x$轴于N，则$S_{\triangle FMN}=$_______．

13. $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(2,-1)$，$\vec{c}=(0,1)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$______；$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

14. 若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称，写出一个符合题意的 $\theta=$___.

15. 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$ 有两个零点；

② $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有一个零点；

③ $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有三个零点；

④ $\exists k>0$，使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论得序号是______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

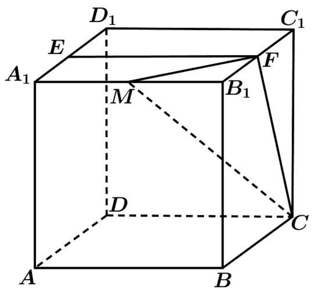
16. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$c=2b\cos B$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求 B 的大小；

（2）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求出 BC 边上的中线的长度.

① $c=\sqrt{2}b$；②周长为 $4+2\sqrt{3}$；③面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 为 A_1D_1 中点，直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F.



（1）证明：点 F 为 B_1C_1 的中点；

（2）若点 M 为棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.

18. 为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“k 合 1 检测法”，即将 k 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可以确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有 100 人，已知其中 2 人感染病毒.

（1）①若采用“10 合 1 检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知10人分成一组，分10组，两名感染患者在同一组的概率为$\frac{1}{11}$，定义随机变量X为总检测次数，求检测次数X的分布列和数学期望$E(X)$；

（2）若采用“5合1检测法”，检测次数Y的期望为$E(Y)$，试比较$E(X)$和$E(Y)$的大小(直接写出结果).

19. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2+a}$.

（1）若$a=0$，求$y=f\left(x\right)$在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处切线方程；

（2）若函数$f\left(x\right)$在$x=-1$处取得极值，求$f\left(x\right)$的单调区间，以及最大值和最小值.

20. 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为$4\sqrt{5}$.

（1）求椭圆E的标准方程；

（2）过点P(0，-3)的直线l斜率为k，交椭圆E于不同的两点B，C，直线AB，AC交y=-3于点M、N，直线AC交y=-3于点N，若$|PM|+|PN|\leq 15$，求k的取值范围.

21. 定义R_p数列$\left\{a_n\right\}$：对实数p，满足：①$a_1+p\geq 0$，$a_2+p=0$；②$\forall n\in N^*,a_{4n-1}<a_{4n}$；

③$a_{m+n}\in\left\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\right\}$，$m,n\in N^*$.

（1）对于前4项2，-2，0，1的数列，可以是R_2数列吗？说明理由；

（2）若$\left\{a_n\right\}$是R_0数列，求a_5的值；

（3）是否存在p，使得存在R_p数列$\left\{a_n\right\}$，对$\forall n\in N^*,S_n\geq S_{10}$？若存在，求出所有这样的$p$；若不存在，说明理由.