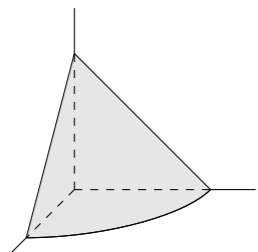


理科数学

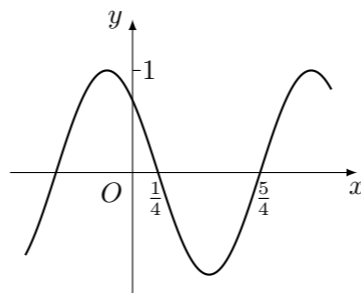
一、选择题

- 设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z} = i$, 则 $|z| =$ ()
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2
- $\sin 20^\circ \cos 10^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$ ()
(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
- 设命题 $p: \exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()
(A) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ (B) $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$
(C) $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 2^n$ (D) $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 = 2^n$
- 投篮测试中, 每人投 3 次, 至少投中 2 次才能通过测试. 已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6, 且各次投篮是否投中相互独立, 则该同学通过测试的概率为 ()
(A) 0.648 (B) 0.432 (C) 0.36 (D) 0.312
- 已知 $M(x_0, y_0)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上的一点, F_1, F_2 是 C 的两个焦点. 若 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} < 0$, 则 y_0 的取值范围是 ()
(A) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (B) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$
(C) $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (D) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
- 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角, 下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思为: “在屋内墙角处堆放米 (如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少?” 已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有 ()

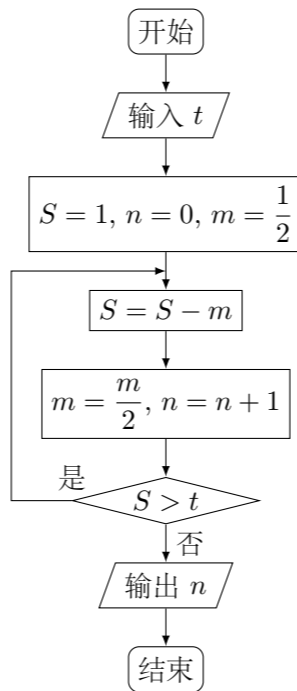


- (A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛
- 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CD}$, 则 ()
(A) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

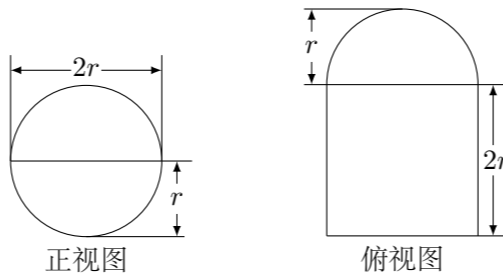
- 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()



- (A) $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (B) $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
(C) $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (D) $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
- 执行如图的程序框图, 如果输入的 $t = 0.01$, 则输出的 $n =$ ()



- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中, $x^5 y^2$ 的系数为 ()
(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60
 - 圆柱被一个平面截去一部分后与半球 (半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16 + 20\pi$, 则 $r =$ ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

- 设函数 $f(x) = e^x(2x - 1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 x_0 使得 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()
(A) $\left[-\frac{3}{2e}, 1\right)$ (B) $\left[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (C) $\left[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$ (D) $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

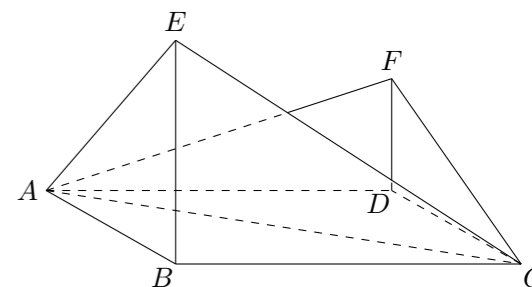
二、填空题

- 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.
- 一个圆经过椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的三个顶点, 且圆心在 x 轴的正半轴上, 则该圆的标准方程为_____.
- 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为_____.
- 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 75^\circ$, $BC = 2$, 则 AB 的取值范围是_____.

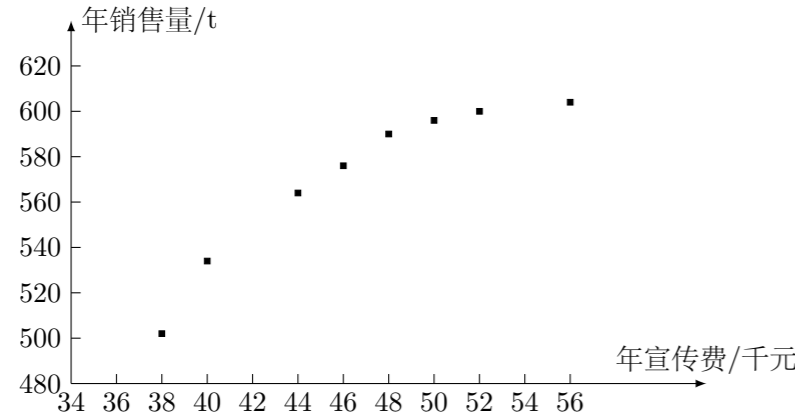
三、解答题

- S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0$, $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

- 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, E, F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$, $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $BE = 2DF$, $AE \perp EC$.
(1) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 AFC ;
(2) 求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.



19. 某公司为确定下一年度投入某产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6
$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$		$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$		
1.469		108.8		

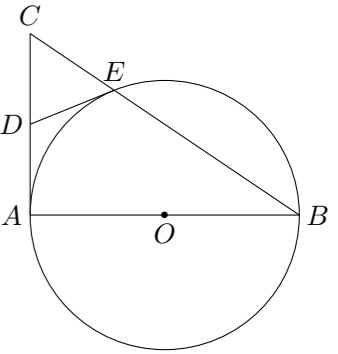
- 表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$.
- 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)
 - 根据 (1) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;
 - 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$. 根据 (2) 的结果回答下列问题:
 - 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?
 - 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

20. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 与直线 $l: y = kx + a$ ($a > 0$) 交于 M, N 两点.
- 当 $k = 0$ 时, 分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程;
 - y 轴上是否存在点 P , 使得当 k 变动时, 总有 $\angle OPM = \angle OPN$? 说明理由.

22. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E .
- 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;
 - 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.
- 求 C_1, C_2 的极坐标方程;
 - 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($\rho \in \mathbf{R}$), 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

21. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, $g(x) = -\ln x$.
- 当 a 为何值时, x 轴为曲线 $y = f(x)$ 的切线;
 - 用 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的最小值, 设函数 $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ($x > 0$), 讨论 $h(x)$ 零点的个数.

24. 已知函数 $f(x) = |x + 1| - 2|x - a|$, $a > 0$.
- 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
 - 若 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形面积大于 6, 求 a 的取值范围.