

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $P = \{x \mid 1 < x < 4\}$, $Q = \{2 < x < 3\}$, 则 $P \cap Q =$ ()

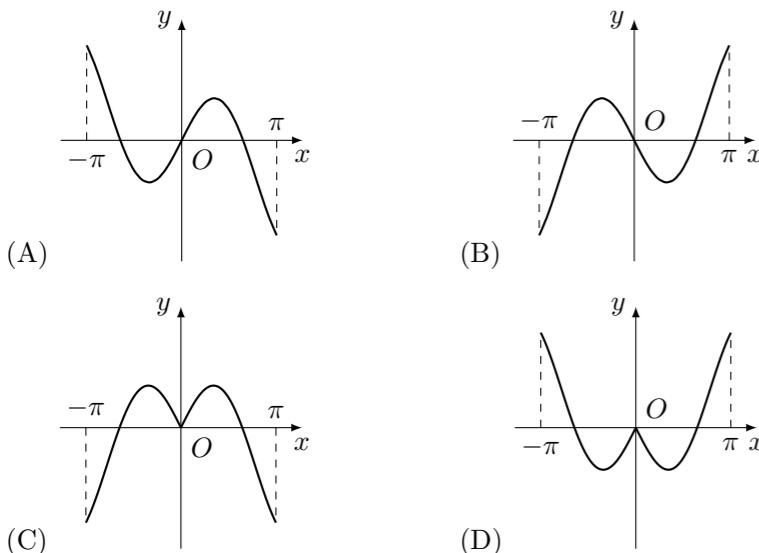
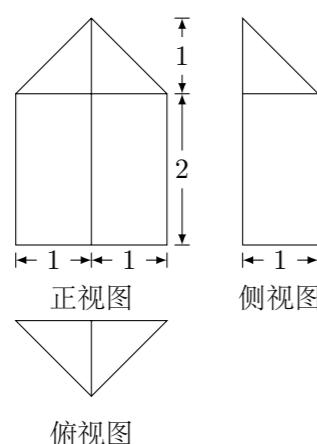
- (A) $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$ (B) $\{x \mid 2 < x < 3\}$
 (C) $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$ (D) $\{x \mid 1 < x < 4\}$

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若 $a - 1 + (a - 2)i$ (i 为虚数单位) 是实数, 则 $a =$ ()

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 3y + 1 \leq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + 2y$ 的取值范围是 ()

- (A) $(-\infty, 4]$ (B) $[4, +\infty)$ (C) $[5, +\infty)$ (D) $(-\infty, +\infty)$

4. 函数 $y = x \cos x + \sin x$ 在区间 $[-\pi, +\pi]$ 的图象大致为 ()5. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 ()

- (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{14}{3}$ (C) 3 (D) 6

6. 已知空间中不过同一点的三条直线 m, n, l , 则“ m, n, l 在同一平面”是“ m, n, l 两两相交”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 公差 $d \neq 0$, $\frac{a_1}{d} \leq 1$. 记 $b_1 = S_2$, $b_{n+1} = S_{2n+2} - S_{2n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 下列等式不可能成立的是 ()
 (A) $2a_4 = a_2 + a_6$ (B) $2b_4 = b_2 + b_6$
 (C) $a_4^2 = a_2 a_8$ (D) $b_4^2 = b_2 b_8$

8. 已知点 $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$. 设点 P 满足 $|PA| - |PB| = 2$, 且 P 为函数 $y = 3\sqrt{4 - x^2}$ 图象上的点, 则 $|OP| =$ ()
 (A) $\frac{\sqrt{22}}{2}$ (B) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{10}$

9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $ab \neq 0$, 若 $(x - a)(x - b)(x - 2a - b) \geq 0$ 在 $x \geq 0$ 上恒成立, 则 ()

- (A) $a < 0$ (B) $a > 0$ (C) $b < 0$ (D) $b > 0$

10. 设集合 S, T , $S \subseteq \mathbf{N}^*$, $T \subseteq \mathbf{N}^*$, S, T 中至少有两个元素, 且 S, T 满足:

- ① 对于任意 $x, y \in S$, 若 $x \neq y$, 都有 $xy \in T$;
 ② 对于任意 $x, y \in T$, 若 $x < y$, 则 $\frac{y}{x} \in S$.

下列命题正确的是 ()

- (A) 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 7 个元素
 (B) 若 S 有 4 个元素, 则 $S \cup T$ 有 6 个元素
 (C) 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 4 个元素
 (D) 若 S 有 3 个元素, 则 $S \cup T$ 有 5 个元素

二、填空题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 则 $S_3 =$ ____.

12. 设 $(1+2x)^5 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + a_5x^4 + a_6x^5$, 则 $a_5 =$ ____;
 $a_1 + a_2 + a_3 =$ ____.

13. 已知 $\tan \theta = 2$, 则 $\cos 2\theta =$ ____; $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) =$ ____.

14. 已知圆锥展开图的侧面积为 2π , 且为半圆, 则底面半径为 ____.

15. 设直线 $l: y = kx + b$ ($k > 0$), 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x - 4)^2 + y^2 = 1$, 若直线 l 与 C_1, C_2 都相切, 则 $k =$ ____; $b =$ ____.

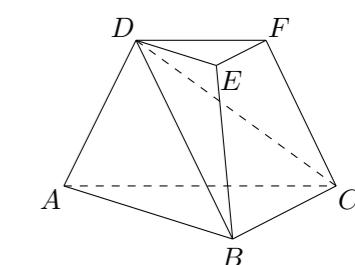
16. 一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球, 每次拿一个, 不放回, 拿出红球即停, 设拿出黄球的个数为 ξ , 则 $P(\xi = 0) =$ ____;
 $E(\xi) =$ ____.

17. 设 e_1, e_2 为单位向量, 满足 $|2e_1 - e_2| \leq \sqrt{2}$, $\mathbf{a} = e_1 + e_2$, $\mathbf{b} = 3e_1 + e_2$, 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 θ , 则 $\cos^2 \theta$ 的最小值为 ____.

三、解答题

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2b \sin A = \sqrt{3}a$.

- (1) 求角 B ;
 (2) 求 $\cos A + \cos B + \cos C$ 的取值范围.



20. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 中, $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, $c_n = a_{n+1} - a_n$, $c_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+2}} \cdot c_n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
(1) 若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且公比 $q > 0$, 且 $b_1 + b_2 = 6b_3$, 求 q 与 a_n 的通项公式;
(2) 若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且公差 $d > 0$, 证明: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < 1 + \frac{1}{d}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
21. 如图, 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点, 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B , 交抛物线 C_2 于 $M (B, M)$ 不同于 A .
(1) 若 $p = \frac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;
(2) 若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点, 求 p 的最大值.
22. 已知 $1 < a \leq 2$, 函数 $f(x) = e^x - x - a$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.
(1) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点;
(2) 记 x_0 为函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 证明:
① $\sqrt{a-1} \leq x_0 \leq \sqrt{2(a-1)}$;
② $x_0 f(e^{x_0}) \geq (e-1)(a-1)a$.

