

文科数学

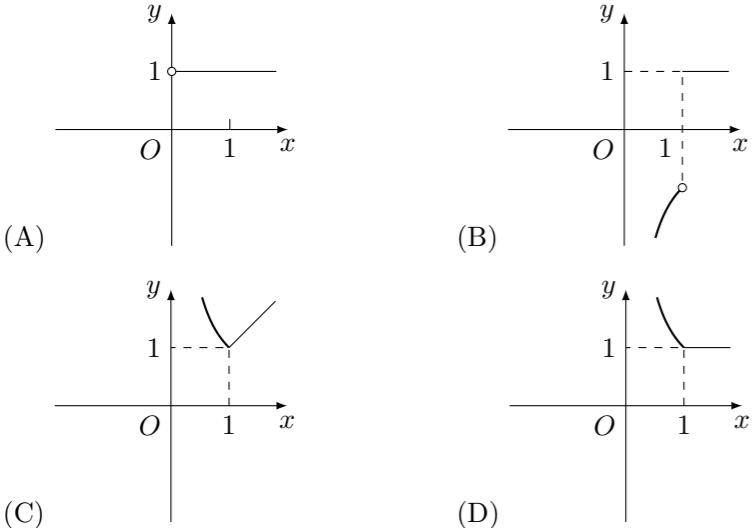
一、选择题

1. 设 P, Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P + Q = \{a + b | a \in P, b \in Q\}$, 若 $P = \{0, 2, 5\}, Q = \{1, 2, 6\}$, 则 $P + Q$ 中元素的个数是 ()
 (A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

2. 对任意实数 a, b, c , 给出下列命题:
 ① “ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”充要条件;
 ② “ $a + 5$ 是无理数”是“ a 是无理数”的充要条件;
 ③ “ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件;
 ④ “ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件.
 其中真命题的个数是 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 已知向量 $\vec{a} = (-2, 2), \vec{b} = (5, k)$. 若 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是 ()
 (A) $[-4, 6]$ (B) $[-6, 4]$ (C) $[-6, 2]$ (D) $[-2, 6]$

4. 函数 $y = e^{| \ln x |} - |x - 1|$ 的图象大致是 ()



5. 木星的体积约是地球体积的 $240\sqrt{30}$ 倍, 则它的表面积约是地球表面积的 ()
 (A) 60 倍 (B) $60\sqrt{30}$ 倍 (C) 120 倍 (D) $120\sqrt{30}$ 倍

6. 双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (mn \neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 ()
 (A) $\frac{3}{16}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

7. 在 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^2, y = \cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 使 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 已知 a, b, c 是直线, β 是平面, 给出下列命题:
 ① 若 $a \perp b, b \perp c$, 则 $a \parallel c$;
 ② 若 $a \parallel b, b \perp c$, 则 $a \perp c$;
 ③ 若 $a \parallel \beta, b \subset \beta$, 则 $a \parallel b$;
 ④ 若 a 与 b 异面, 且 $a \parallel \beta$, 则 $b \parallel \beta$ 相交;
 ⑤ 若 a 与 b 异面, 则至多有一条直线与 a, b 都垂直.

其中真命题的个数是 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 把一同排 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人, 每人至少分 1 张, 至多分 2 张, 且这两张票具有连续的编号, 那么不同的分法种数是 ()

- (A) 168 (B) 96 (C) 72 (D) 144

10. 若 $\sin \alpha + \cos \alpha = \tan \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha \in$ ()
 (A) $(0, \frac{\pi}{6})$ (B) $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ (C) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ (D) $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

11. 在函数 $y = x^3 - 8x$ 的图象上, 其切线的倾斜角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的点中, 坐标为整数的点的个数是 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

12. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1, 2, …, 270; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 1, 2, …, 270, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:

- ① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
 ② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
 ③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
 ④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;

关于上述样本的下列结论中, 正确的是 ()

- (A) ②、③都不能为系统抽样 (B) ②、④都不能为分层抽样
 (C) ①、④都可能为系统抽样 (D) ①、③都可能为分层抽样

二、填空题

13. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} \lg \sqrt{4-x}$ 的定义域是_____.

14. $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^4 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中整理后的常数项等于_____.

15. 函数 $y = |\sin x| \cos x - 1$ 的最小正周期与最大值的和为_____.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费_____元.

三、解答题

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2$, $\{b_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = b_1$, $b_2(a_2 - a_1) = b_1$.
- 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
21. 某会议室用 5 盏灯照明, 每盏灯各使用灯泡一只, 且型号相同. 假定每盏灯能否正常照明只与灯泡的寿命有关, 该型号的灯泡寿命为 1 年以上的概率为 p_1 , 寿命为 2 年以上的概率为 p_2 . 从使用之日起每满 1 年进行一次灯泡更换工作, 只更换已坏的灯泡, 平时不换.
- 在第一次灯泡更换工作中, 求不需要换灯泡的概率和更换 2 只灯泡的概率;
 - 在第二次灯泡更换工作中, 对其中的某一盏灯来说, 求该盏灯需要更换灯泡的概率;
 - 当 $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.3$ 时, 求在第二次灯泡更换工作, 至少需要更换 4 只灯泡的概率. (结果保留两个有效数字)
22. 设 A 、 B 是椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 上的两点, 点 $N(1, 3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C 、 D 两点.
- 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;
 - 试判断是否存在这样的 λ , 使得 A 、 B 、 C 、 D 四点在同一个圆上? 并说明理由.
20. 如图所示的多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 AEC_1F 所截面而得到的, 其中 $AB = 4$, $BC = 2$, $CC_1 = 3$, $BE = 1$.
- 求 BF 的长;
 - 求点 C 到平面 AEC_1F 的距离.

