

2010 年普通高等学校招生考试 (天津卷)

文科数学

一、选择题

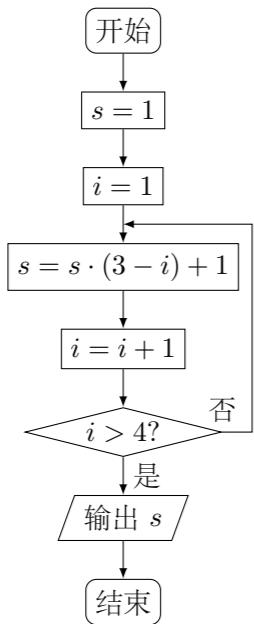
1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{3+i}{1-i} =$ ()

- (A) $1+2i$ (B) $2+4i$ (C) $-1-2i$ (D) $2-i$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x-y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z=4x+2y$ 的最大值为 ()

- (A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 2

3. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7, 则判断框内可填写 ()



- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

4. 函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是 ()

- (A) $(-2, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(1, 2)$

5. 下列命题中, 真命题是 ()

- (A) $\exists m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数
 (B) $\exists m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数
 (C) $\forall m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是偶函数
 (D) $\forall m \in \mathbf{R}$, 使函数 $f(x)=x^2+mx$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数

6. 设 $a=\log_5 4$, $b=(\log_5 3)^2$, $c=\log_4 5$, 则 ()

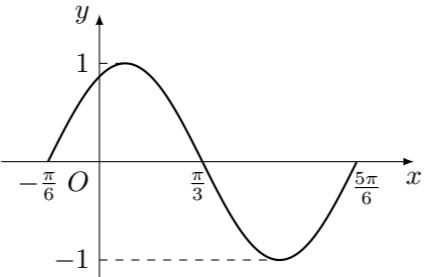
- (A) $a < c < b$ (B) $b < c < a$ (C) $a < b < c$ (D) $b < a < c$

7. 设集合 $A=\{x \mid |x-a|<1, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid 1 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \cap B=\emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $\{a \mid 0 \leq a \leq 6\}$
 (C) $\{a \mid a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 6\}$

- (B) $\{a \mid a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 4\}$
 (D) $\{a \mid 2 \leq a \leq 4\}$

8. 如图是函数 $y=A \sin(\omega x+\varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的图象, 为了得到这个函数的图象, 只要将 $y=\sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象上所有的点 ()



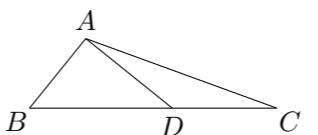
- (A) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

- (B) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

- (C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变

- (D) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$, $|\overrightarrow{AD}|=1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}=$ ()



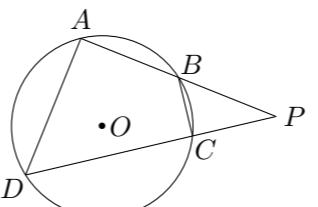
- (A) $2\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 设函数 $g(x)=x^2-2$ ($x \in \mathbf{R}$), $f(x)=\begin{cases} g(x)+x+4, & x < g(x) \\ g(x)-x, & x \geq g(x) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是 ()

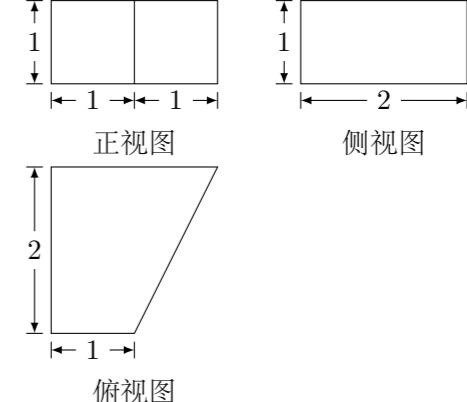
- (A) $\left[-\frac{9}{4}, 0\right] \cup (1, +\infty)$ (B) $[0, +\infty)$
 (C) $\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$ (D) $\left[-\frac{9}{4}, 0\right] \cup (2, +\infty)$

二、填空题

11. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P . 若 $PB=1$, $PD=3$, 则 $\frac{BC}{AD}$ 的值为_____.



12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为_____.



13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0, b>0$) 的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$, 它的一个焦点与抛物线 $y^2=16x$ 的焦点相同. 则双曲线的方程为_____.

14. 已知圆 C 的圆心是直线 $x-y+1=0$ 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切, 则圆 C 的方程为_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比 $q=\sqrt{2}$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 记 $T_n=\frac{17S_n-S_{2n}}{a_{n+1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$. 设 T_{n_0} 为数列 $\{T_n\}$ 的最大项, 则 $n_0=$ _____.

16. 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{AC}{AB}=\frac{\cos B}{\cos C}$.

- (1) 证明: $B=C$;
 (2) 若 $\cos A=-\frac{1}{3}$, 求 $\sin\left(4B+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 有编号为 A_1, A_2, \dots, A_{10} 的 10 个零件, 测量其直径 (单位: cm), 得到下面数据:

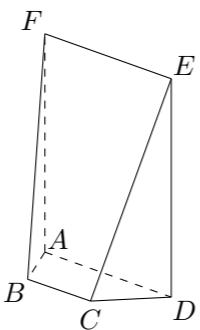
编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
直径	1.51	1.49	1.49	1.51	1.49	1.51	1.47	1.46	1.53	1.47

其中直径在区间 $[1.48, 1.52]$ 内的零件为一等品.

- (1) 从上述 10 个零件中, 随机抽取一个, 求这个零件为一等品的概率;
 (2) 从一等品零件中, 随机抽取 2 个.
 ① 用零件的编号列出所有可能的抽取结果;
 ② 求这 2 个零件直径相等的概率.

19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ADEF$ 是正方形, $FA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \parallel AD$, $CD = 1$, $AD = 2\sqrt{2}$, $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$.

- (1) 求异面直线 CE 与 AF 所成角的余弦值;
 (2) 证明 $CD \perp$ 平面 ABF ;
 (3) 求二面角 $B - EF - A$ 的正切值.



20. 已知函数 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a > 0$.

- (1) 若 $a = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
 (2) 若在区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上, $f(x) > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, 且对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ 成等差数列, 其公差为 $2k$.

- (1) 证明 a_4, a_5, a_6 成等比数列;
 (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (3) 记 $T_n = \frac{2^2}{a_2} + \frac{3^2}{a_3} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}$, 证明 $\frac{3}{2} < 2n - T_n \leq 2$ ($n \geq 2$).

21. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

- (1) 求椭圆的方程;
 (2) 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B , 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$.

- ① 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 求直线 l 的倾斜角;
 ② 若点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.