2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

文科数学

一、选择题

1. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ( )

(A) $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \varnothing$　(B) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$　(D) $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

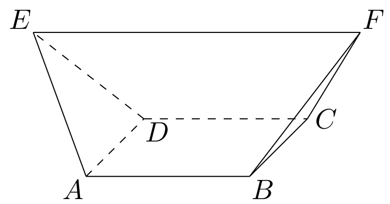
2. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为 ( )

(A) $8\sqrt{2}\pi$　(B) 8π　(C) $4\sqrt{2}\pi$　(D) 4π

3. 函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$, 已知 $f(x)$ 在 $x = -3$ 时取得极值, 则 $a =$ ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

4. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF \parallel AB$, $EF = 2$, 则该多面体的体积为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 = 1\ (a > 0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2 = -6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \dfrac{1 + \cos 2x + 8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 ( )

(A) 2　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{3}$

7. $y = \sqrt{2x - x^2}\ (1 \leqslant x \leqslant 2)$ 的反函数是 ( )

(A) $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$　(B) $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$

(C) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$　(D) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$

8. 设 $0 < a < 1$, 函数 $f(x) = \log_a(a^{2x} - 2a^x - 2)$, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 取值范围是 ( )

(A) $f(x)$　(B) $(0, +\infty)$　(C) $(-\infty, \log_a 3)$　(D) $(\log_a 3, +\infty)$

9. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y \geqslant x - 1 \\ y \leqslant -3|x| + 1 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 ( )

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) 2

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan \dfrac{A+B}{2} = \sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A \cdot \cot B = 1$; ② $0 < \sin A + \sin B \leqslant \sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$; ④ $\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 C$. 其中正确的是 ( )

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①④　(D) ②③

11. 点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$, 则点 O 是 $\triangle ABC$ 的 ( )

(A) 三个内角的角平分线的交点　(B) 三条边的垂直平分线的交点

(C) 三条中线的交点　(D) 三条高的交点

12. 设直线 l 过点 $(-2, 0)$, 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则 l 的斜率是 ( )

(A) ± 1　(B) $\pm\dfrac{1}{2}$　(C) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\pm\sqrt{3}$

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1} < 2^{512} < 10^m$, 则 $m =$______. ($\lg 2 \approx 0.3010$)

14. $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中, 常数项为______. (用数字作答)

15. 从 6 名男生和 4 名女生中, 选出 3 名代表, 要求至少包含 1 名女生, 则不同的选法有______种.

16. 在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;

② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;

③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;

④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为______. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x) = \sin(2\pi + \varphi)\ (-\pi < \varphi < 0)$, $y = f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x = \dfrac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 的单调增区间;

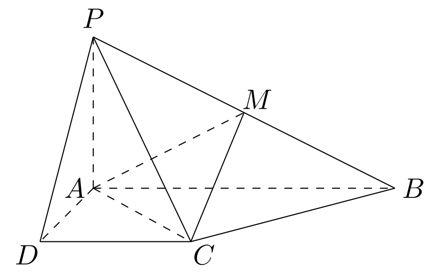
(3) 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的图象.

18. 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90°$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = AD = DE = \dfrac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD \perp$ 面 PCD;

(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a, 且不等式 $f(x) > -2x$ 的解集为 $(1, 3)$.

(1) 若方程 $f(x) + 6a = 0$ 有两个相等的根, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为正数, 求 a 的取值范围.

20. 9 粒种子分种在甲、乙、丙 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5. 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种.
(1) 求甲坑不需要补种的概率;
(2) 求 3 个坑中恰有 1 个坑不需要补种的概率;
(3) 求有坑需要补种的概率. (精确到 0.001)

21. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{1}{2}$, 前 n 项和为 S_n, 且 $2^{10}S_{30}-(2^{10}+1)S_{20}+S_{10}=0$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 求 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ ($\lambda,\ \mu\in\mathbf{R}$), 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.