

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}$, $N = \{x | x \leq -3\}$, 则 $M \cup N =$ ()
 (A) \emptyset (B) $\{x | x \geq -3\}$ (C) $\{x | x \geq 1\}$ (D) $\{x | x < 1\}$
2. 若函数 $y = (x+1)(x-a)$ 为偶函数, 则 $a =$ ()
 (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
3. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = kx + 2$ 没有公共点的充要条件是 ()
 (A) $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (B) $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
 (C) $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ (D) $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
4. 已知 $0 < a < 1$, $x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2} \log_a 5$, $z = \log_a \sqrt{21} - \log_a \sqrt{3}$, 则 ()
 (A) $x > y > z$ (B) $z > y > x$ (C) $y > x > z$ (D) $z > x > y$
5. 已知四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(0, 2)$, $B(-1, -2)$, $C(3, 1)$, 且 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, 则顶点 D 的坐标为 ()
 (A) $(2, \frac{7}{2})$ (B) $(2, -\frac{1}{2})$ (C) $(3, 2)$ (D) $(1, 3)$
6. 设 P 为曲线 $C: y = x^2 + 2x + 3$ 上的点, 且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围是 $[0, \frac{\pi}{4}]$, 则点 P 横坐标的取值范围是 ()
 (A) $[-1, -\frac{1}{2}]$ (B) $[-1, 0]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[\frac{1}{2}, 1]$
7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为 ()
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$
8. 将函数 $y = 2^x + 1$ 的图象按向量 \mathbf{a} 平移得到函数 $y = 2^{x+1}$ 的图象, 则 ()
 (A) $\mathbf{a} = (-1, -1)$ (B) $\mathbf{a} = (1, -1)$ (C) $\mathbf{a} = (1, 1)$ (D) $\mathbf{a} = (-1, 1)$
9. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y + x - 1 \leq 0 \\ y - 3x - 1 \leq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为 ()
 (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) -4
10. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有 ()
 (A) 24 种 (B) 36 种 (C) 48 种 (D) 72 种

11. 已知双曲线 $9y^2 - m^2x^2 = 1 (m > 0)$ 的一个顶点到它的一条渐近线的距离为 $\frac{1}{5}$, 则 $m =$ ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点, 则在空间中与三条直线 A_1D_1, EF, CD 都相交的直线 ()

- (A) 不存在 (B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条

二、填空题

13. 函数 $y = e^{2x+1} (-\infty < x < +\infty)$ 的反函数是_____.

14. 在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球的表面上有 A, B, C 三点, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, A, C 两点的球面距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 则球心到平面 ABC 的距离为_____.

15. $(1+x^3)\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ 展开式中的常数项为_____.

16. 设 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则函数 $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x}$ 的最小值为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 对边的边长分别是 a, b, c . 已知 $c = 2$, $C = \frac{\pi}{3}$.

- (1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 a, b ;
 (2) 若 $\sin B = 2 \sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

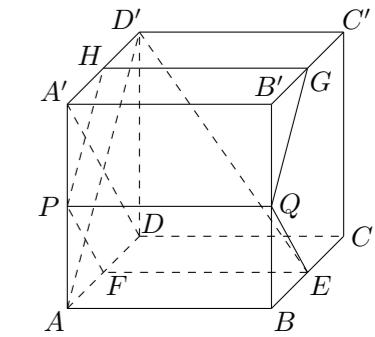
(1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;

(2) 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求

- ① 4 周中该种商品至少有一周的销售量为 4 吨的概率;
 ② 该种商品 4 周的销售量总和至少为 15 吨的概率.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, $AP = BQ = b (0 < b < 1)$, 截面 $PQEF // A'D$, 截面 $PQGH // AD'$.

- (1) 证明: 平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;
 (2) 证明: 截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值, 并求出这个值;
 (3) 若 $b = \frac{1}{2}$, 求 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成角的正弦值.



20. 在数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 设 $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
 (1) 数列 $\{c_n\}$ 是否为等比数列? 证明你的结论;
 (2) 设数列 $\{\ln a_n\}$, $\{\ln b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n , T_n . 若 $a_1 = 2$, $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.
21. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到两点 $(0, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ 的距离之和为 4, 设点 P 的轨迹为 C .
 (1) 写出 C 的方程;
 (2) 设直线 $y = kx + 1$ 与 C 交于 A, B 两点. k 为何值时 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$? 此时 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是多少?
22. 设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3a^2x + 1$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 在 $x = x_1, x = x_2$ 处取得极值, 且 $|x_1 - x_2| = 2$.
 (1) 若 $a = 1$, 求 b 的值, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若 $a > 0$, 求 b 的取值范围.