# 2012 年普通高等学校招生考试（北京卷）

# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 3x+2>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid(x+1)(x-3)>0\}$, 则 $A\bigcap B=$ （ ）

(A) $(-\infty,-1)$ (B) $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\dfrac{2}{3},3\right)$ (D) $(3,+\infty)$

2. 设不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 $D$. 在区域 $D$ 内随机取一个点, 则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是 （ ）

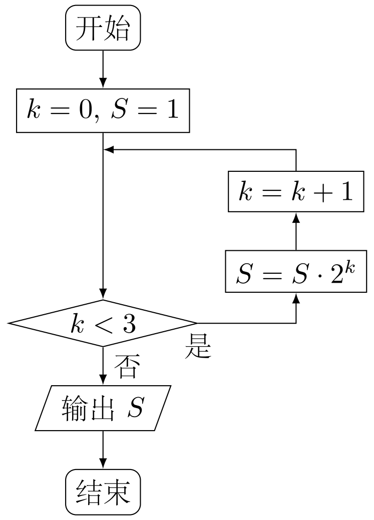
(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi-2}{2}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{4-\pi}{4}$

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$. “$a=0$”是“复数 $a+bi$ 是纯虚数”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

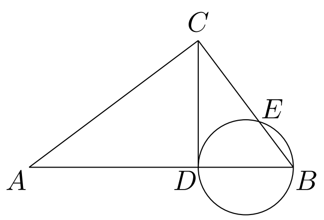
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 $S$ 值为 （ ）




(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

5. 如图, $\angle ACB=90^\circ$, $CD\perp AB$ 于点 $D$, 以 $BD$ 为直径的圆与 $BC$ 交于点 $E$, 则 （ ）



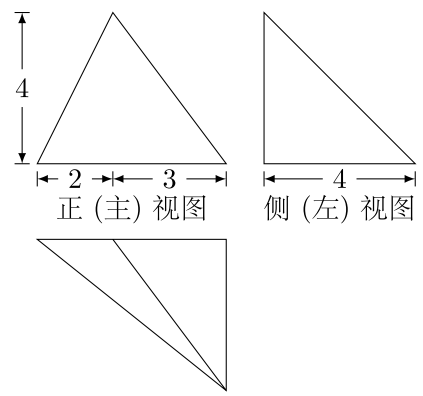

(A) $CE\cdot CB=AD\cdot DB$ (B) $CE\cdot CB=AD\cdot AB$

(C) $AD\cdot AB=CD^2$ (D) $CE\cdot EB=CD^2$

6. 从 0, 2 中选一个数字, 从 1, 3, 5 中选两个数字, 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 （ ）

(A) 24 (B) 18 (C) 12 (D) 6

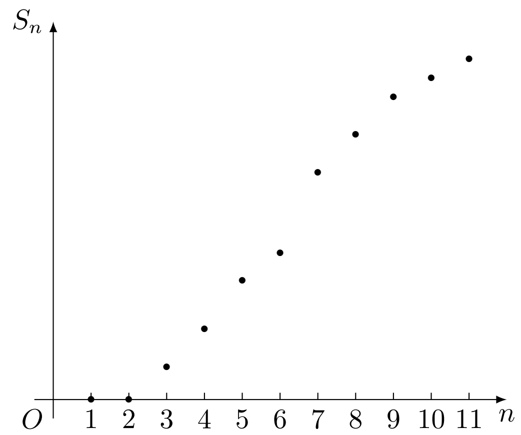
7. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积是 （ ）




俯视图

(A) $28+6\sqrt{5}$ (B) $30+6\sqrt{5}$ (C) $56+12\sqrt{5}$ (D) $60+12\sqrt{5}$

8. 某棵果树前 $n$ 年的总产量 $S_n$ 与 $n$ 之间的关系如图所示. 从目前记录的结果看, 前 $m$ 年的年平均产量最高, $m$ 的值为 （ ）




(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

## 二、填空题

9. 直线 $\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\end{cases}$ ($t$ 为参数) 与曲线 $\begin{cases}x=3\cos\alpha\\y=3\sin\alpha\end{cases}$ ($\alpha$ 为参数) 的交点个数为______.

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $S_n$ 为其前 $n$ 项和, 若 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_2=a_3$, 则 $a_2=$______; $S_n=$______.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a=2$, $b+c=7$, $\cos B=-\dfrac{1}{4}$, 则 $b=$______.

12. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 直线 $l$ 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $F$, 且与该抛物线相交于 $A$, $B$ 两点, 其中点 $A$ 在 $x$ 轴上方. 若直线 $l$ 的倾斜角为 $60^\circ$, 则 $\triangle OAF$ 的面积为______.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 $E$ 是 $AB$ 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的值为______; $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的最大值为______.

14. 已知 $f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$, $g(x)=2^x-2$. 若同时满足条件: ① $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)<0$ 或 $g(x)<0$; ② $\exists x\in(-\infty,-4)$, $f(x)g(x)<0$, 则 $m$ 的取值范围是______.

## 三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)\sin 2x}{\sin x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;

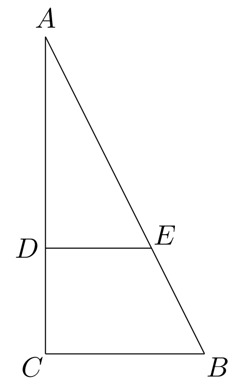
(2) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. 如图 1, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=3$, $AC=6$. $D$, $E$ 分别是 $AC$, $AB$ 上的点, 且 $DE\parallel BC$, $DE=2$, 将 $\triangle ADE$ 沿 $DE$ 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使 $A_1C\perp CD$, 如图 2.

(1) 求证: $A_1C\perp$ 平面 $BCDE$;

(2) 若 $M$ 是 $A_1D$ 的中点, 求 $CM$ 与平面 $A_1BE$ 所成角的大小;

(3) 线段 $BC$ 上是否存在点 $P$, 使平面 $A_1DP$ 与平面 $A_1BE$ 垂直? 说明理由.



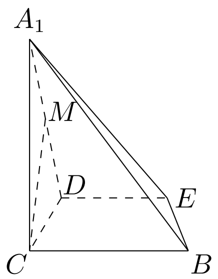




图 1 图 2

17. 近年来, 某市为促进生活垃圾的分类处理, 将生活垃圾分为厨余垃圾、可回收物和其他垃圾三类, 并分别设置了相应的垃圾箱. 为调查居民生活垃圾分类投放情况, 现随机抽取了该市三类垃圾箱中总计 1000 吨生活垃圾, 数据统计如下 (单位: 吨):

| | "厨余垃圾"箱 | "可回收物"箱 | "其他垃圾"箱 |
|---|---|---|---|
| 厨余垃圾 | 400 | 100 | 100 |
| 可回收物 | 30 | 240 | 30 |
| 其他垃圾 | 20 | 20 | 60 |

(1) 试估计厨余垃圾投放正确的概率;
(2) 试估计生活垃圾投放错误的概率;
(3) 假设厨余垃圾在"厨余垃圾"箱、"可回收物"箱、"其他垃圾"箱的投放量分别为 $a$, $b$, $c$, 其中 $a>0$, $a+b+c=600$. 当数据 $a$, $b$, $c$ 的方差 $s^2$ 最大时, 写出 $a$, $b$, $c$ 的值 (结论不要求证明), 并求此时 $s^2$ 的值.
(注: $s^2=\frac{1}{n}\left[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\right]$, 其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ 的平均数)

18. 已知函数 $f(x)=ax^2+1\,(a>0)$, $g(x)=x^3+bx$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线, 求 $a$, $b$ 的值;
(2) 当 $a^2=4b$ 时, 求函数 $f(x)+g(x)$ 的单调区间, 并求其在区间 $(-\infty,-1]$ 上的最大值.

19. 已知曲线 $C:(5-m)x^2+(m-2)y^2=8\ (m\in\mathbf{R})$.
(1) 若曲线 $C$ 是焦点在 $x$ 轴上的椭圆, 求 $m$ 的取值范围;
(2) 设 $m=4$, 曲线 $C$ 与 $y$ 轴的交点为 $A$, $B$ (点 $A$ 位于点 $B$ 的上方), 直线 $y=kx+4$ 与曲线 $C$ 交于不同的两点 $M$, $N$, 直线 $y=1$ 与直线 $BM$ 交于点 $G$. 求证: $A$, $G$, $N$ 三点共线.

20. 设 $A$ 是由 $m\times n$ 个实数组成的 $m$ 行 $n$ 列的数表, 满足: 每个数的绝对值不大于 1, 且所有数的和为零. 记 $S(m,n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A\in S(m,n)$, 记 $r_i(A)$ 为 $A$ 的第 $i$ 行各数之和 $(1\leqslant i\leqslant m)$, $c_j(A)$ 为 $A$ 的第 $j$ 列各数之和 $(1\leqslant j\leqslant n)$; 记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|$, $|r_2(A)|$, $\cdots$, $|r_m(A)|$, $|c_1(A)|$, $|c_2(A)|$, $\cdots$, $|c_n(A)|$ 中的最小值.
(1) 对如下数表 $A$, 求 $k(A)$ 的值;

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $-0.8$ |
| 0.1 | $-0.3$ | $-1$ |

(2) 设数表 $A\in S(2,3)$ 形如

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $c$ |
| $a$ | $b$ | $-1$ |

求 $k(A)$ 的最大值;
(3) 给定正整数 $t$, 对于所有的 $A\in S(2,2t+1)$, 求 $k(A)$ 的最大值.