2005 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 P、Q 为两个非空实数集合, 定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$, 若 $P=\{0,2,5\}$, $Q=\{1,2,6\}$, 则 $P+Q$ 中元素的个数是 ( )

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

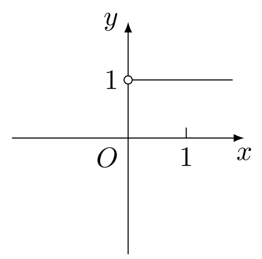
2. 对任意实数 a, b, c, 给出下列命题:
① "$a=b$"是"$ac=bc$"充要条件;
② "$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件;
③ "$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件;
④ "$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.
其中真命题的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

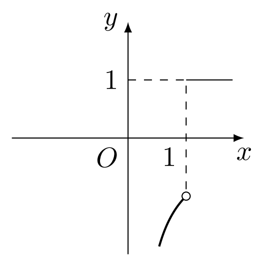
3. $\dfrac{(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $-2-\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $2-\mathrm{i}$ (D) $2+\mathrm{i}$

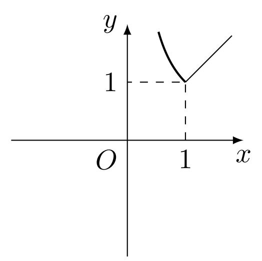
4. 函数 $y=\mathrm{e}^{|\ln x|}-|x-1|$ 的图象大致是 ( )



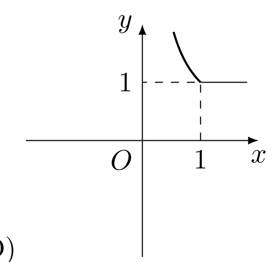
(A)



(B)



(C)



(D)

5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1$ $(mn\neq 0)$ 离心率为 2, 有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合, 则 mn 的值为 ( )

(A) $\dfrac{3}{16}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{16}{3}$ (D) $\dfrac{8}{3}$

6. 在 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=x^2$, $y=\cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0<x_1<x_2<1$ 时, 使 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha\in$ ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ (C) $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$

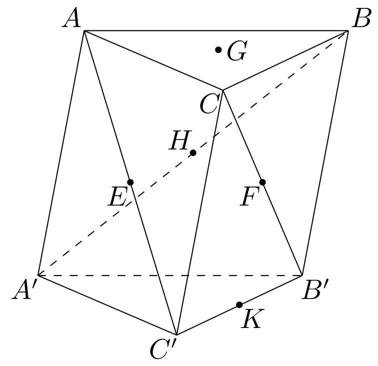
8. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^2}\right)=1$, 则常数 a, b 的值为 ( )

(A) $a=-2$, $b=4$ (B) $a=2$, $b=-4$
(C) $a=-2$, $b=-4$ (D) $a=2$, $b=4$

9. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系 ( )

(A) $2x>3\sin x$ (B) $2x<3\sin x$
(C) $2x=3\sin x$ (D) 与 x 的取值有关

10. 如图, 在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, 点 E、F、H、K 分别为 AC'、CB'、$A'B$、$B'C'$ 的中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 从 K、H、G、B' 中取一点作为 P, 使得该棱柱恰有 2 条棱与平面 PEF 平行, 则 P 为 ( )



(A) K (B) H (C) G (D) B'

11. 某初级中学有学生 270 人, 其中一年级 108 人, 二、三年级各 81 人, 现要利用抽样方法抽取 10 人参加某项调查, 考虑选用简单随机抽样、分层抽样和系统抽样三种方案, 使用简单随机抽样和分层抽样时, 将学生按一、二、三年级依次统一编号为 1, 2, $\cdots$, 270; 使用系统抽样时, 将学生统一随机编号 1, 2, $\cdots$, 270, 并将整个编号依次分为 10 段. 如果抽得号码有下列四种情况:
① 7, 34, 61, 88, 115, 142, 169, 196, 223, 250;
② 5, 9, 100, 107, 111, 121, 180, 195, 200, 265;
③ 11, 38, 65, 92, 119, 146, 173, 200, 227, 254;
④ 30, 57, 84, 111, 138, 165, 192, 219, 246, 270;
关于上述样本的下列结论中, 正确的是 ( )

(A) ②、③都不能为系统抽样 (B) ②、④都不能为分层抽样
(C) ①、④都可能为系统抽样 (D) ①、③都可能为分层抽样

12. 以平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的任意三个顶点为顶点作三角形, 从中随机取出两个三角形, 则这两个三角形不共面的概率 p 为 ( )

(A) $\dfrac{367}{385}$ (B) $\dfrac{376}{385}$ (C) $\dfrac{192}{385}$ (D) $\dfrac{18}{385}$

二、填空题

13. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-2,2)$, $\overrightarrow{b}=(5,k)$. 若 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$ 不超过 5, 则 k 的取值范围是______.

14. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}+\sqrt{2}\right)^5$ 的展开式中整理后的常数项为______.

15. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 若 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 成等差数列, 则 q 的值为______.

16. 某实验室需购某种化工原料 106 千克, 现在市场上该原料有两种包装, 一种是每袋 35 千克, 价格为 140 元; 另一种是每袋 24 千克, 价格为 120 元. 在满足需要的条件下, 最少要花费______元.

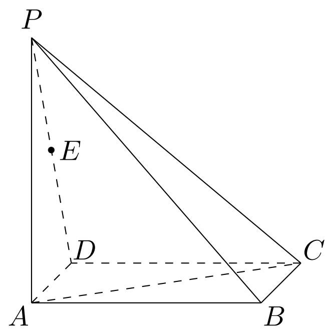
三、解答题

17. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(x^2,x+1)$, $\overrightarrow{b}=(1-x,t)$, 若函数 $f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数, 求 t 的取值范围.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, $\cos B=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, AC 边上的中线 $BD=\sqrt{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

19. 某地最近出台一项机动车驾照考试规定: 每位考试者一年之内最多有 4 次参加考试的机会, 一旦某次考试通过, 使可领取驾照, 不再参加以后的考试, 否则就一直考到第 4 次为止. 如果李明决定参加驾照考试, 设他每次参加考试通过的概率依次为 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 求在一年内李明参加驾照考试次数 ξ 的分布列和 ξ 的期望, 并求李明在一年内领到驾照的概率.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, $PA=2$, E 为 PD 的中点.
(1) 求直线 AC 与 PB 所成角的余弦值;
(2) 在侧面 PAB 内找一点 N, 使 $NE\perp$ 面 PAC, 并求出 N 点到 AB 和 AP 的距离.



21. 设 A、B 是椭圆 $3x^2+y^2=\lambda$ 上的两点, 点 $N(1,3)$ 是线段 AB 的中点, 线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C、D 两点.
(1) 确定 λ 的取值范围, 并求直线 AB 的方程;
(2) 试判断是否存在这样的 λ, 使得 A、B、C、D 四点在同一个圆上? 并说明理由.

22. 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$, 其中 n 为大于 2 的整数, $[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正, 且满足 $a_1=b\ (b>0)$, $a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$, $n=2, 3, 4, \cdots$.
(1) 证明: $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$, $n=3, 4, 5, \cdots$;
(2) 猜测数列 $\{a_n\}$ 是否有极限? 如果有, 写出极限的值 (不必证明);
(3) 试确定一个正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 对任意 $b>0$, 都有 $a_n<\frac{1}{5}$.