

# 理科数学

## 一、选择题

1.  $\sin 210^\circ =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $-\frac{1}{2}$
2. 函数  $f(x) = |\sin x|$  的一个单调递增区间是 ( )  
(A)  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  (B)  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$  (C)  $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
3. 设复数  $z$  满足  $\frac{1+2i}{z} = i$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $-2+i$  (B)  $-2-i$  (C)  $2-i$  (D)  $2+i$
4. 以下四个数中的最大者是 ( )  
(A)  $(\ln 2)^2$  (B)  $\ln(\ln 2)$  (C)  $\ln \sqrt{2}$  (D)  $\ln 2$
5. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $D$  是  $AB$  边上一点, 若  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$ , 则  $\lambda =$  ( )  
(A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $-\frac{1}{3}$  (D)  $-\frac{2}{3}$
6. 不等式  $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$  的解集为 ( )  
(A)  $(-2, 1)$  (B)  $(2, +\infty)$   
(C)  $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
7. 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧棱长与底面边长相等, 则  $AB_1$  与侧面  $ACC_1A_1$  所成角的正弦等于 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{6}}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{10}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知曲线  $y = \frac{x^2}{4} - 3\ln x$  的一条切线的斜率为  $\frac{1}{2}$ , 则切点的横坐标为( )  
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D)  $\frac{1}{2}$
9. 把函数  $y = e^x$  的图象按向量  $\boldsymbol{a} = (2, 3)$  平移, 得到  $y = f(x)$  的图象, 则  $f(x) =$  ( )  
(A)  $e^{x-3} + 2$  (B)  $e^{x+3} - 2$  (C)  $e^{x-2} + 3$  (D)  $e^{x+2} - 3$
10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ( )  
(A) 40 种 (B) 60 种 (C) 100 种 (D) 120 种
11. 设  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点. 若双曲线上存在点  $A$ , 使  $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$ , 且  $|AF_1| = 3|AF_2|$ , 则双曲线离心率为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{10}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  (D)  $\sqrt{5}$

12. 设  $F$  为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点,  $A, B, C$  为该抛物线上三点. 若  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$ , 则  $|FA| + |FB| + |FC| =$  ( )  
(A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 3

## 二、填空题

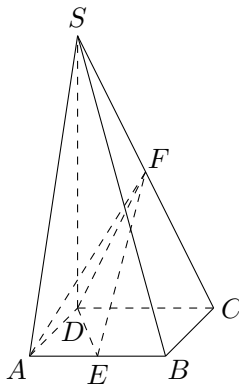
13.  $(1 + 2x^2) \left(x - \frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中常数项为\_\_\_\_\_. (用数字作答)
14. 在某项测量中, 测量结果  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ). 若  $\xi$  在  $(0, 1)$  内取值的概率为 0.4, 则  $\xi$  在  $(0, 2)$  内取值的概率为\_\_\_\_\_.
15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为\_\_\_\_\_cm<sup>2</sup>.
16. 已知数列的通项  $a_n = -5n + 2$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 已知内角  $A = \frac{\pi}{3}$ , 边  $BC = 2\sqrt{3}$ , 设内角  $B = x$ , 周长为  $y$ .  
(1) 求函数  $y = f(x)$  的解析式和定义域;  
(2) 求  $y$  的最大值.

18. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件  $A$ : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率  $P(A) = 0.96$ .  
(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率  $p$ ;  
(2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件,  $\xi$  表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求  $\xi$  的分布列.

19. 如图, 在四棱锥  $S - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形, 侧棱  $SD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $E, F$  分别是  $AB, SC$  的中点.  
(1) 求证:  $EF \parallel$  平面  $SAD$ ;  
(2) 设  $SD = 2CD$ , 求二面角  $A - EF - D$  的大小.



20. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以  $O$  为圆心的圆与直线  $x - \sqrt{3}y = 4$  相切.

(1) 求圆  $O$  的方程;

(2) 圆  $O$  与  $x$  轴相交于  $A$ 、 $B$  两点, 圆内的动点  $P$  使  $|PA|$ 、 $|PO|$ 、 $|PB|$  成等比数列, 求  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  的取值范围.

21. 设数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_n = \frac{3 - a_{n-1}}{2}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = a_n\sqrt{3 - 2a_n}$ , 证明  $b_n < b_{n+1}$ , 其中  $n$  为正整数.

22. 已知函数  $f(x) = x^3 - x$ .

(1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $M(t, f(t))$  处的切线方程;

(2) 设  $a > 0$ , 如果过点  $(a, b)$  可作曲线  $y = f(x)$  的三条切线, 证明:  
 $-a < b < f(a)$ .