2012 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 方程 $x^2+6x+13=0$ 的一个根是（ ）

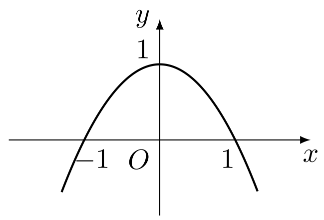
(A) $-3+2\mathrm{i}$　(B) $3+2\mathrm{i}$　(C) $-2+3\mathrm{i}$　(D) $2+3\mathrm{i}$

2. 命题"$\exists x_0\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3\in\mathbf{Q}$"的否定是（ ）

(A) $\exists x_0\notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3\in\mathbf{Q}$　(B) $\exists x_0\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x_0^3\notin\mathbf{Q}$

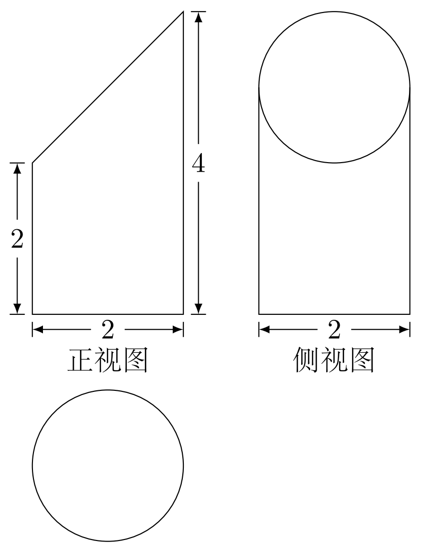
(C) $\forall x\notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x^3\in\mathbf{Q}$　(D) $\forall x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$, $x^3\notin\mathbf{Q}$

3. 已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则它与 x 轴所围成的图形的面积为（ ）



(A) $\dfrac{2\pi}{5}$　(B) $\dfrac{4}{3}$　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为（ ）



(A) $\dfrac{8\pi}{3}$　(B) 3π　(C) $\dfrac{10\pi}{3}$　(D) 6π

5. 设 $a\in\mathbf{Z}$, 且 $0\leqslant a<13$, 若 $51^{2012}+a$ 能被 13 整除, 则 $a=$（ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 11　(D) 12

6. 设 a, b, c, x, y, z 是正数, 且 $a^2+b^2+c^2=10$, $x^2+y^2+z^2=40$, $ax+by+cz=20$, 则 $\dfrac{a+b+c}{x+y+z}=$（ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

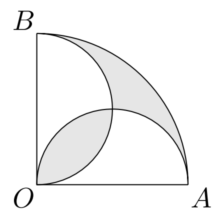
7. 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$, 如果对于任意给定的等比数列 $\{a_n\}$, $\{f(a_n)\}$ 仍是等比数列, 则称 $f(x)$ 为"保等比数列函数". 现有定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的如下函数:

① $f(x)=x^2$; ② $f(x)=2^x$; ③ $f(x)=\sqrt{|x|}$; ④ $f(x)=\ln|x|$.

则其中是"保等比数列函数"的 $f(x)$ 的序号为（ ）

(A) ①②　(B) ③④　(C) ①③　(D) ②④

8. 如图, 在圆心角为直角的扇形 OAB 中, 分别以 OA, OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率是（ ）



(A) $1-\dfrac{2}{\pi}$　(B) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$　(C) $\dfrac{2}{\pi}$　(D) $\dfrac{1}{\pi}$

9. 函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的零点个数为（ ）

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

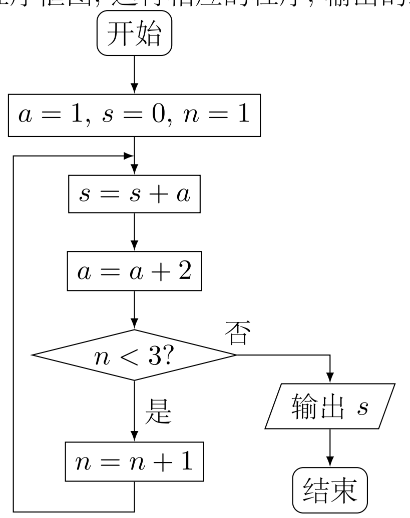
10. 我国古代数学名著《九章算术》中"开立圆术"曰: 置积尺数, 以十六乘之, 九而一, 所得开立方除之, 即立圆径. "开立圆术"相当于给出了已知球的体积 V, 求其直径 d 的一个近似公式 $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}V}$. 人们还用过一些类似的近似公式. 根据 $\pi=3.14159\cdots$ 判断, 下列近似公式中最精确的一个是（ ）

(A) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}V}$　(B) $d\approx\sqrt[3]{2V}$　(C) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{300}{157}V}$　(D) $d\approx\sqrt[3]{\dfrac{21}{11}V}$

二、填空题

11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$, 则角 $C=$______.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $s=$______.



13. 回文数是指从左到右读与从右到左读都一样的正整数. 如 22, 121, 3443, 94249 等. 显然 2 位回文数有 9 个: 11, 22, 33, $\cdots$, 99; 3 位回文数有 90 个: 101, 111, 121, $\cdots$, 191, 202, $\cdots$, 999. 则

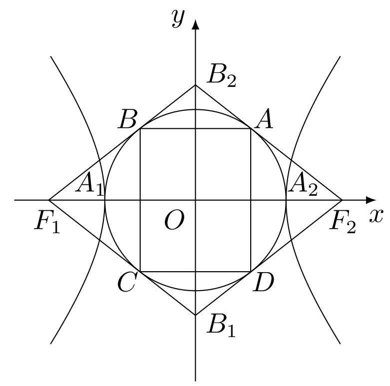
(1) 4 位回文数有______个;

(2) $2n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 位回文数有______个.

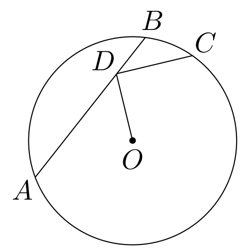
14. 如图, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ 的两顶点为 A_1, A_2, 虚轴两端点为 B_1, B_2, 两焦点为 F_1, F_2. 若以 A_1A_2 为直径的圆内切于菱形 $F_1B_1F_2B_2$, 切点分别为 A, B, C, D. 则

(1) 双曲线的离心率 $e=$______;

(2) 菱形 $F_1B_1F_2B_2$ 的面积 S_1 与矩形 $ABCD$ 的面积 S_2 的比值 $\dfrac{S_1}{S_2}=$______.



15. 如图, 点 D 在 $\odot O$ 的弦 AB 上移动, $AB=4$, 连接 OD, 过点 D 作 OD 的垂线交 $\odot O$ 于点 C, 则 CD 的最大值为______.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知射线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 与曲线 $\begin{cases}x=t+1\\y=(t-1)^2\end{cases}$ (t 为参数) 相交于 A, B 两点, 则线段 AB 的中点的直角坐标为______.

三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$, $\boldsymbol{b}=\left(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x\right)$, 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称, 其中 ω, λ 为常数, 且 $\omega\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 若 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{5}\right]$ 上的取值范围.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -3, 前三项的积为 8.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 a_2, a_3, a_1 成等比数列, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

19. 如图 1, $\angle ACB = 45°$, $BC = 3$, 过动点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足 D 在线段 BC 上且异于点 B, 连接 AB, 沿 AD 将 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90°$ (如图 2 所示).

(1) 当 BD 的长为多少时, 三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大;

(2) 当三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大时, 设点 E, M 分别为棱 BC, AC 的中点, 试在棱 CD 上确定一点 N, 使得 $EN \perp BM$, 并求 EN 与平面 BMN 所成角的大小.

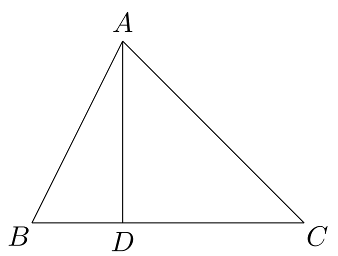


图 1

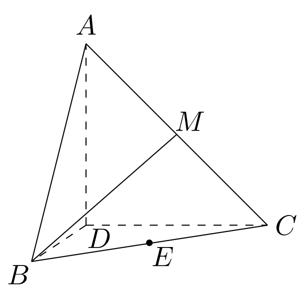


图 2

20. 根据以往的经验, 某工程施工期间的降水量 X (单位: mm) 对工期的影响如下表:

降水量 X	$X < 300$	$300 \leqslant X < 700$	$700 \leqslant X < 900$	$X \geqslant 900$
工期延误天数 Y	0	2	6	10

历年气象资料表明, 该工程施工期间降水量 X 小于 300, 700, 900 的概率分别为 0.3, 0.7, 0.9. 求:

(1) 工期延误天数 Y 的均值与方差;

(2) 在降水量 X 至少是 300 的条件下, 工期延误不超过 6 天的概率.

21. 设 A 是单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的任意一点, l 是过点 A 与 x 轴垂直的直线, D 是直线 l 与 x 轴的交点, 点 M 在直线 l 上, 且满足 $|DM| = m|DA|$ ($m > 0$ 且 $m \neq 1$). 当点 A 在圆上运动时, 记点 M 的轨迹为曲线 C.

(1) 求曲线 C 的方程, 判断曲线 C 为何种圆锥曲线, 并求其焦点坐标;

(2) 过原点且斜率为 k 的直线交曲线 C 于 P, Q 两点, 其中 P 在第一象限, 它在 y 轴上的射影为点 N, 直线 QN 交曲线 C 于另一点 H. 是否存在 m, 使得对任意的 $k > 0$, 都有 $PQ \perp PH$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (1) 已知函数 $f(x) = rx - x^r + (1-r)$ $(x > 0)$, 其中 r 为有理数, 且 $0 < r < 1$, 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 试用 (1) 的结果证明如下命题: 设 $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, b_1, b_2 为正有理数. 若 $b_1 + b_2 = 1$, 则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2$;

(3) 请将 (2) 中的命题推广到一般形式, 并用数学归纳法证明你所推广的命题.

注: 当 α 为正有理数时, 有求导公式 $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.