

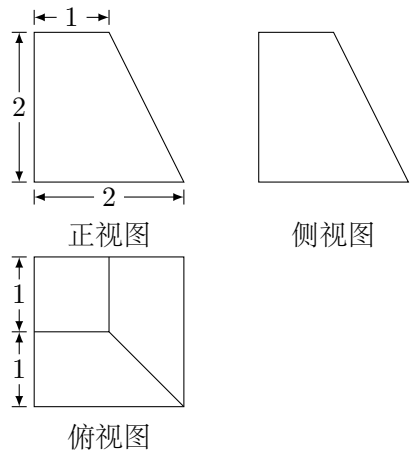
理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M = \{x \mid x^2 + 2x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x \mid x^2 - 2x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cup N =$ ()
(A) $\{0\}$ (B) $\{0, 2\}$ (C) $\{-2, 0\}$ (D) $\{-2, 0, 2\}$
2. 定义域为 \mathbf{R} 的四个函数 $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = x^2 + 1$, $y = 2 \sin x$ 中, 奇函数的个数是 ()
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
3. 若复数 z 满足 $iz = 2 + 4i$, 则在复平面内, z 对应的点的坐标是 ()
(A) $(2, 4)$ (B) $(2, -4)$ (C) $(4, -2)$ (D) $(4, 2)$
4. 已知离散型随机变量 X 的分布列为

| | | | |
|-----|---------------|----------------|----------------|
| X | 1 | 2 | 3 |
| P | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

- 则 X 的数学期望 $E(X) =$ ()
(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3
5. 某四棱台的三视图如图所示, 则该四棱台的体积是 ()



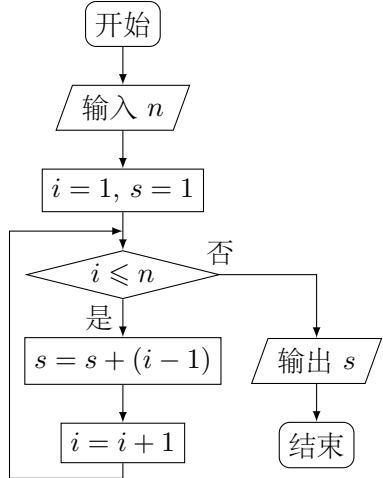
- (A) 4 (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) 6
6. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 下列命题中正确的是 ()
(A) 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \perp n$
(B) 若 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \perp n, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
(D) 若 $m \perp \alpha, m \parallel n, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
7. 已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $F(3, 0)$, 离心率等于 $\frac{3}{2}$, 则 C 的方程是 ()

(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\sqrt{5}} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (C) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\sqrt{5}} = 1$

8. 设整数 $n \geq 4$, 集合 $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. 令集合 $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in X, \text{且三条件 } x < y < z, y < z < x, z < x < y \text{ 恰有一个成立}\}$, 若 (x, y, z) 和 (z, w, x) 都在 S 中, 则下列选项正确的是 ()
(A) $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \notin S$ (B) $(y, z, w) \in S, (x, y, w) \in S$
(C) $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \in S$ (D) $(y, z, w) \notin S, (x, y, w) \notin S$

二、填空题

9. 不等式 $x^2 + x - 2 < 0$ 的解集为_____.
10. 若曲线 $y = kx + \ln x$ 在点 $(1, k)$ 处的切线平行于 x 轴, 则 $k =$ _____.
11. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 4, 则输出 s 的值为_____.



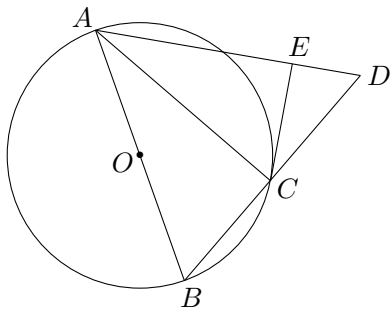
12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 + a_8 = 10$, 则 $3a_5 + a_7 =$ _____.

13. 给定区域 $D: \begin{cases} x + 4y \geq 4 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 令点集 $T = \{(x_0, y_0) \in D \mid x_0, y_0 \in \mathbf{Z}, (x_0, y_0)$

是 $z = x + y$ 在 D 上取得最大值或最小值的点}, 则 T 中的点共确定_____条不同的直线.

14. 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \end{cases}$ (t 为参数), C 在点 $(1, 1)$ 处的切线为 l , 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则 l 的极坐标方程为_____.

15. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 在圆 O 上, 延长 BC 到 D 使 $BC = CD$, 过 C 作圆 O 的切线交 AD 于 E . 若 $AB = 6, ED = 2$, 则 $BC =$ _____.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

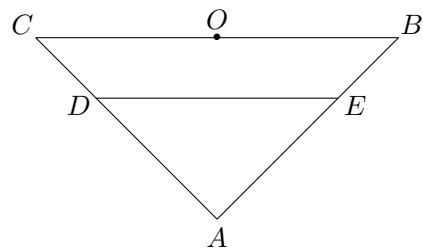
- (1) 求 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值;
(2) 若 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, 求 $f\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

17. 某车间共有 12 名工人, 随机抽取 6 名, 他们某日加工零件个数的茎叶图如图所示, 其中茎为十位数, 叶为个位数.

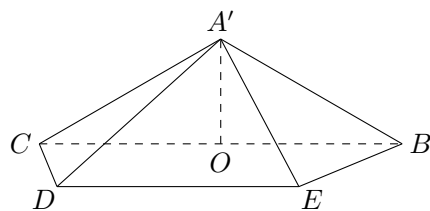
| | | |
|---|---|-----|
| 1 | 7 | 9 |
| 2 | 0 | 1 5 |
| 3 | 0 | |

- (1) 根据茎叶图计算样本均值;
(2) 日加工零件个数大于样本均值的工人优秀工人. 根据茎叶图推断该车间 12 名工人中有几名优秀工人?
(3) 从该车间 12 名工人中, 任取 2 人, 求恰有 1 名优秀工人的概率.

18. 如图①, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 6$, D, E 分别是 AC, AB 上的点, $CD = BE = \sqrt{2}$, O 为 BC 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 得到下图②所示的四棱锥 $A' - BCDE$, 其中 $A'O = \sqrt{3}$.
- (1) 证明: $A'O \perp$ 平面 $BCDE$;
- (2) 求二面角 $A' - CD - B$ 的平面角的余弦值.



图①



图②

20. 已知抛物线 C 的顶点为原点, 其焦点 $F(0, c)$ ($c > 0$) 到直线 $l: x - y - 2 = 0$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 设 P 为直线 l 上的点, 过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点.
- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 当点 $P(x_0, y_0)$ 为直线 l 上的定点时, 求直线 AB 的方程;
- (3) 当点 P 在直线 l 上移动时, 求 $|AF| \cdot |BF|$ 的最小值.

21. 设函数 $f(x) = (x - 1)e^x - kx^2$ ($k \in \mathbf{R}$).
- (1) 当 $k = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 当 $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, k]$ 上的最大值 M .

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $\frac{2S_n}{n} = a_{n+1} - \frac{1}{3}n^2 - n - \frac{2}{3}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求 a_2 的值;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$.