

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

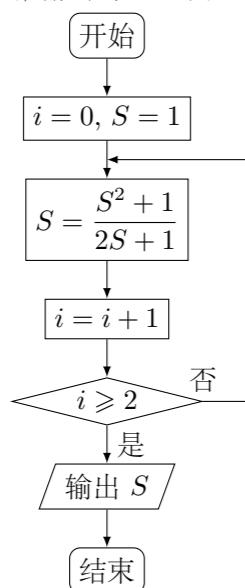
- (A)
- $\{0\}$
- (B)
- $\{-1, 0\}$
- (C)
- $\{0, 1\}$
- (D)
- $\{-1, 0, 1\}$

2. 在复平面内, 复数 $(2-i)^2$ 对应的点位于 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. “ $\varphi = \pi$ ”是“曲线 $y = \sin(2x + \varphi)$ 过坐标原点”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
-
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ()

- (A) 1 (B)
- $\frac{2}{3}$
- (C)
- $\frac{13}{21}$
- (D)
- $\frac{610}{987}$

5. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 所得图象与曲线 $y = e^x$ 关于 y 轴对称, 则 $f(x) =$ ()

- (A)
- e^{x+1}
- (B)
- e^{x-1}
- (C)
- e^{-x+1}
- (D)
- e^{-x-1}

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()

- (A)
- $y = \pm 2x$
- (B)
- $y = \pm \sqrt{2}x$
- (C)
- $y = \pm \frac{1}{2}x$
- (D)
- $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

7. 直线 l 过抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点且与 y 轴垂直, 则 l 与 C 所围成的图形的面积等于 ()

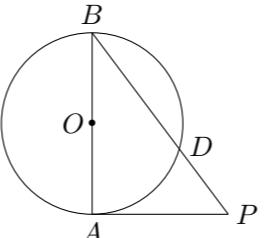
- (A)
- $\frac{4}{3}$
- (B) 2 (C)
- $\frac{8}{3}$
- (D)
- $\frac{16\sqrt{2}}{3}$

8. 设关于 x, y 的不等式组 $\begin{cases} 2x - y + 1 > 0 \\ x + m < 0 \\ y - m > 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内存在点

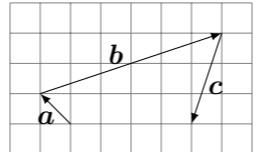
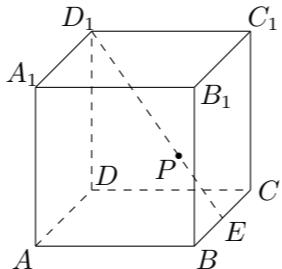
- $P(x_0, y_0)$
- , 满足
- $x_0 - 2y_0 = 2$
- , 则
- m
- 的取值范围是 ()

- (A)
- $(-\infty, \frac{4}{3})$
- (B)
- $(-\infty, \frac{1}{3})$
- (C)
- $(-\infty, -\frac{2}{3})$
- (D)
- $(-\infty, -\frac{5}{3})$

二、填空题

9. 在极坐标系中, 点 $(2, \frac{\pi}{6})$ 到直线 $\rho \sin \theta = 2$ 的距离等于_____.10. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 + a_5 = 40$, 则公比 $q =$ _____, 前 n 项和 $S_n =$ _____.11. 如图, AB 为圆 O 的直径, PA 为圆 O 的切线, PB 与圆 O 相交于 D , 若 $PA = 3$, $PD : DB = 9 : 16$, 则 $PD =$ _____, $AB =$ _____.

12. 将序号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张参观券全部分给 4 人, 每人至少 1 张, 如果分给同一人的 2 张参观券连号, 那么不同的分法种数是_____.

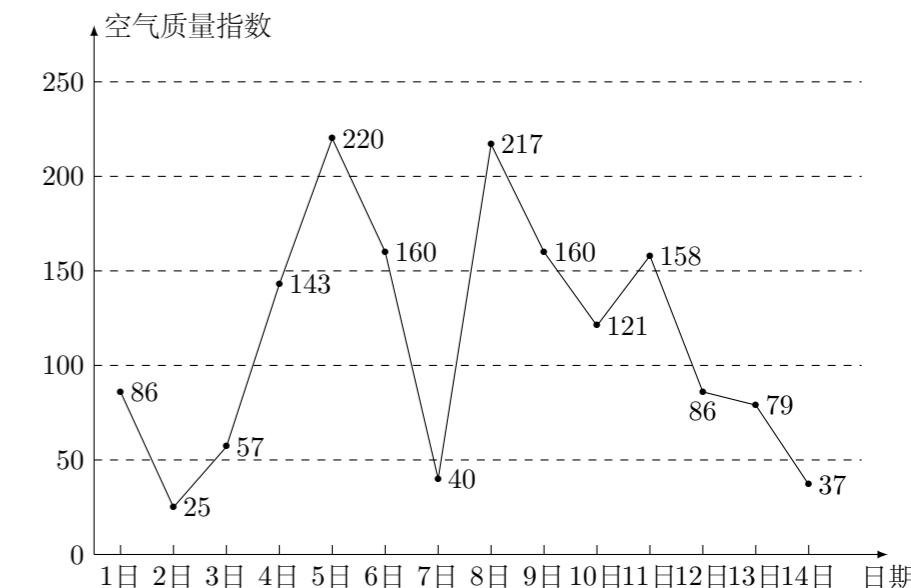
13. 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} =$ _____.14. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BC 的中点, 点 P 在线段 D_1E 上, 点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = 2\sqrt{6}$, $\angle B = 2\angle A$.

- (1) 求
- $\cos A$
- 的值;
-
- (2) 求
- c
- 的值.

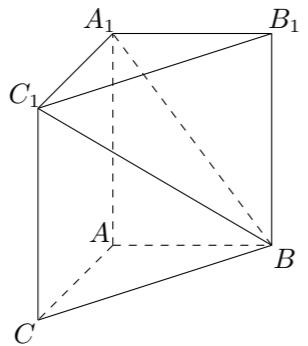
16. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天.



- (1) 求此人到达当日空气重度污染的概率;
-
- (2) 设
- X
- 是此人停留期间空气质量优良的天数, 求
- X
- 的分布列与数学期望;
-
- (3) 由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大? (结论不要求证明)

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形. 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , $AB = 3, BC = 5$.

- (1) 求证: $AA_1 \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 求二面角 $A_1 - BC_1 - B_1$ 的余弦值;
- (3) 证明: 在线段 BC_1 上存在点 D , 使得 $AD \perp A_1B$, 并求 $\frac{BD}{BC_1}$ 的值.



19. 已知 A, B, C 是椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上的三个点, O 是坐标原点.

- (1) 当点 B 是 W 的右顶点, 且四边形 $OABC$ 为菱形时, 求此菱形的面积;
- (2) 当点 B 不是 W 的顶点时, 判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形, 并说明理由.

18. 设 L 为曲线 $C: y = \frac{\ln x}{x}$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线.

- (1) 求 L 的方程;
- (2) 证明: 除切点 $(1, 0)$ 之外, 曲线 C 在直线 L 的下方.

20. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 a_{n+1}, a_{n+2}, \dots 的最小值记为 B_n , $d_n = A_n - B_n$.

- (1) 若 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \dots$, 是一个周期为 4 的数列 (即对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+4} = a_n$), 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;
- (2) 设 d 是非负整数, 证明: $d_n = -d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;
- (3) 证明: 若 $a_1 = 2, d_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2, 且有无穷多项为 1.