2019 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$, $N=\{x|x^2-x-6<0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{x|-4<x<3\}$ (B) $\{x|-4<x<-2\}$

(C) $\{x|-2<x<2\}$ (D) $\{x|2<x<3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$, z 在复平面内对应的点为 (x,y), 则 （ ）

(A) $(x+1)^2+y^2=1$ (B) $(x-1)^2+y^2=1$

(C) $x^2+(y-1)^2=1$ (D) $x^2+(y+1)^2=1$

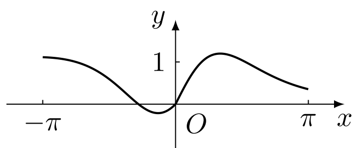
3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $c<a<b$ (D) $b<c<a$

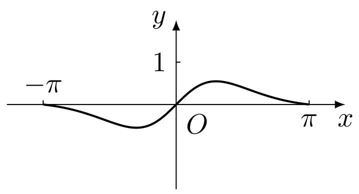
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 （ ）

(A) 165 cm (B) 175 cm (C) 185 cm (D) 190 cm

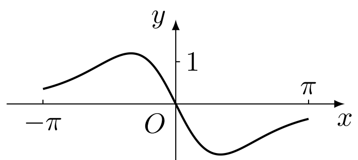
5. 函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 （ ）



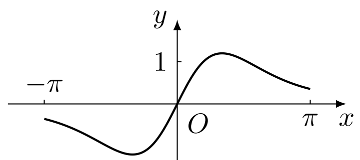
(A)



(B)

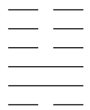


(C)



(D)

6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成, 爻分为阳爻“——”和阴爻“— —”, 如图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦, 则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是 （ ）

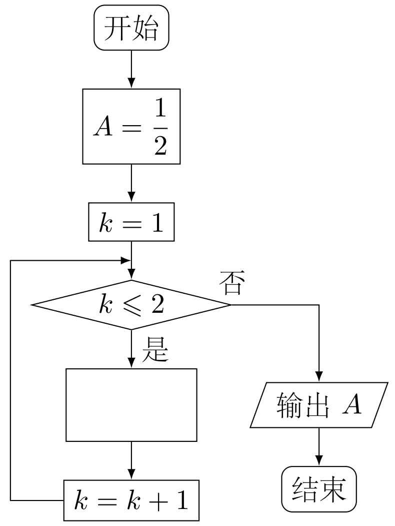


(A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{11}{32}$ (C) $\frac{21}{32}$ (D) $\frac{11}{16}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 （ ）

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

8. 如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 （ ）



(A) $A=\frac{1}{2+A}$ (B) $A=2+\frac{1}{A}$ (C) $A=\frac{1}{1+2A}$ (D) $A=1+\frac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则 （ ）

(A) $a_n=2n-5$ (B) $a_n=3n-10$ (C) $S_n=2n^2-8n$ (D) $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 （ ）

(A) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ (B) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ (C) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数;

② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增;

③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点;

④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是 （ ）

(A) ①②④ (B) ②④ (C) ①④ (D) ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 PA, AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$, 则球 O 的体积为 （ ）

(A) $8\sqrt{6}\pi$ (B) $4\sqrt{6}\pi$ (C) $2\sqrt{6}\pi$ (D) $\sqrt{6}\pi$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$______.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛, 采取七场四胜制 (当一队赢得四场胜利时, 该队获胜, 决赛结束). 根据前期比赛成绩, 甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6, 客场取胜的概率为 0.5, 且各场比赛结果相互独立, 则甲队以 4 : 1 获胜的概率是______.

16. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A, B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$, 则 C 的离心率为______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

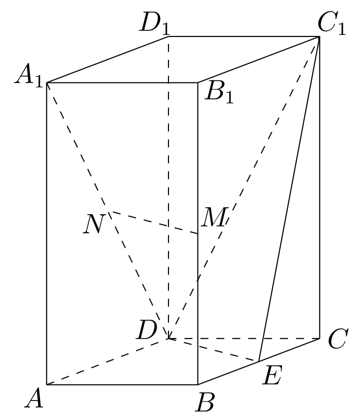
(1) 求 A;

(2) 若 $\sqrt{2}a+b=2c$, 求 $\sin C$.

18. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN\,/\!/$ 平面 C_1DE;

(2) 求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19. 已知抛物线 C: $y^2=3x$ 的焦点为 F, 斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A, B, 与 x 轴的交点为 P.
(1) 若 $|AF|+|BF|=4$, 求 l 的方程;
(2) 若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$, 求 $|AB|$.

20. 已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:
(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;
(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21. 为治疗某种疾病, 研制了甲、乙两种新药, 希望知道哪种新药更有效, 为此进行动物试验. 试验方案如下: 每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠, 随机选一只施以甲药, 另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后, 再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时, 就停止试验, 并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题, 约定: 对于每轮试验, 若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分, 乙药得 -1 分; 若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分, 甲药得 -1 分; 若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β, 一轮试验中甲药的得分记为 X.
(1) 求 X 的分布列;
(2) 若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分, p_i $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时, 最终认为甲药比乙药更有效”的概率, 则 $p_0=0$, $p_8=1$, $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$, 其中 $a=P(X=-1)$, $b=P(X=0)$, $c=P(X=1)$. 假设 $\alpha=0.5$, $\beta=0.8$.
① 证明: $\{p_{i+1}-p_i\}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ 为等比数列;
② 求 p_4, 并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.
(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;
(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:
(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$;
(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.