

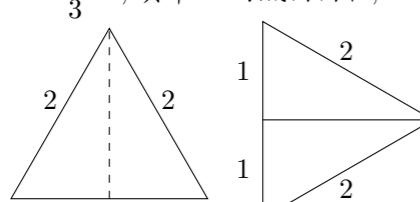
# 文科数学

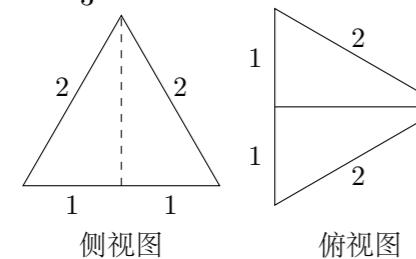
## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x \mid (x+1)(x-2) \leq 0\}$ , 集合  $B$  为整数集, 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{-1, 0\}$       (B)  $\{0, 1\}$       (C)  $\{-2, -1, 0, 1\}$       (D)  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 在“世界读书日”前夕, 为了了解某地 5000 名居民某天的阅读时间, 从中抽取了 200 名居民的阅读时间进行统计分析. 在这个问题中, 5000 名居民的阅读时间的全体是 ( )  
 (A) 总体      (B) 个体  
 (C) 样本的容量      (D) 从总体中抽取的一个样本

3. 为了得到函数  $y = \sin(x+1)$  的图象, 只需把函数  $y = \sin x$  的图象上所有的点 ( )  
 (A) 向左平行移动 1 个单位长度      (B) 向右平行移动 1 个单位长度  
 (C) 向左平行移动  $\pi$  个单位长度      (D) 向右平行移动  $\pi$  个单位长度

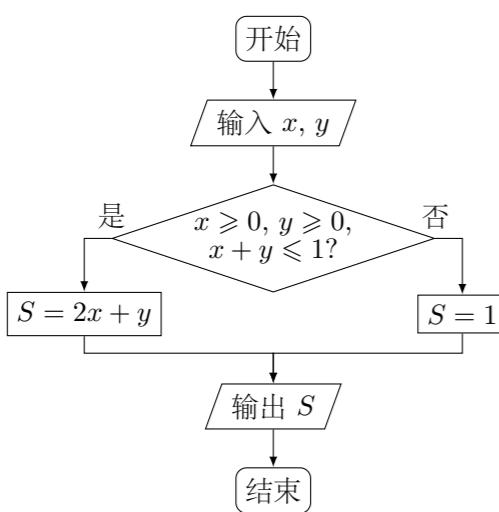
4. 某三棱锥的侧视图、俯视图如图所示, 则该三棱锥的体积是 ( )  
 (锥体体积公式:  $V = \frac{1}{3}Sh$ , 其中  $S$  为底面面积,  $h$  为高)  
  
 侧视图      俯视图



5. 若  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则一定有 ( )

(A)  $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$       (B)  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$       (C)  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$       (D)  $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则输出的  $S$  的最大值 ( )



- (A) 0                    (B) 1                    (C) 2                    (D) 3

7. 已知  $b > 0$ ,  $\log_5 b = a$ ,  $\lg b = c$ ,  $5^d = 10$ , 则下列等式一定成立的是 ( )

(A)  $d = ac$             (B)  $a = cd$             (C)  $c = ad$             (D)  $d = a + c$

8. 如图, 从气球  $A$  上测得正前方的河流的两岸  $B, C$  的俯角分别为  $75^\circ, 30^\circ$ , 此时气球的高是  $60\text{ m}$ , 则河流的宽度  $BC$  等于 ( )

(A)  $240(\sqrt{3}-1)\text{ m}$                     (B)  $180(\sqrt{2}-1)\text{ m}$   
 (C)  $120(\sqrt{3}-1)\text{ m}$                     (D)  $30(\sqrt{3}+1)\text{ m}$

9. 设  $m \in \mathbf{R}$ , 过定点  $A$  的动直线  $x + my = 0$  和过定点  $B$  的动直线  $mx - y - m + 3 = 0$  交于点  $P(x, y)$ , 则  $|PA| + |PB|$  的取值范围是( )

(A)  $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$             (B)  $[\sqrt{10}, 2\sqrt{5}]$             (C)  $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$             (D)  $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

10. 已知  $F$  是抛物线  $y^2 = x$  的焦点, 点  $A, B$  在该抛物线上且位于  $x$  轴的两侧,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$  (其中  $O$  为坐标原点), 则  $\triangle ABO$  与  $\triangle AFO$  面积之和的最小值是 ( )

(A) 2                    (B) 3                    (C)  $\frac{17\sqrt{2}}{8}$                     (D)  $\sqrt{10}$

**二、填空题**

11. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的离心率等于\_\_\_\_\_.

12. 复数  $\frac{2-2i}{1+i} =$ \_\_\_\_\_.

13. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的周期为 2 的函数, 当  $x \in [-1, 1)$  时,  $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ , 则  $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ \_\_\_\_\_.

14. 平面向量  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (4, 2)$ ,  $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + \mathbf{b}$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), 且  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{a}$  的夹角等于  $\mathbf{c}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.

15. 以  $A$  表示值域为  $\mathbf{R}$  的函数组成的集合,  $B$  表示具有如下性质的函数  $\varphi(x)$  组成的集合: 对于函数  $\varphi(x)$ , 存在一个正数  $M$ , 使得函数  $\varphi(x)$  的值域包含于区间  $[-M, M]$ . 例如, 当  $\varphi_1(x) = x^3$ ,  $\varphi_2(x) = \sin x$  时,  $\varphi_1(x) \in A$ ,  $\varphi_2(x) \in B$ . 现有如下命题:

① 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 则“ $f(x) \in A$ ”的充要条件是“ $\forall b \in \mathbf{R}$ ,  $\exists a \in D$ ,  $f(a) = b$ ”;

② 函数  $f(x) \in B$  的充要条件是  $f(x)$  有最大值和最小值;

③ 若函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的定义域相同, 且  $f(x) \in A$ ,  $g(x) \in B$ , 则  $f(x) + g(x) \notin B$ ;

④ 若函数  $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{x}{x^2+1}$  ( $x > -2$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ) 有最大值, 则  $f(x) \in B$ .

其中的真命题有\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

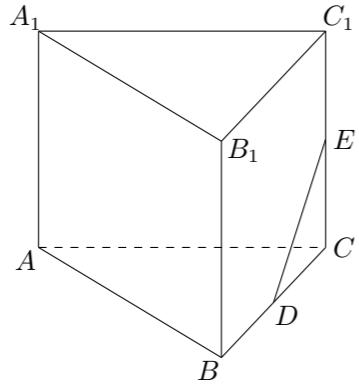
**三、解答题**

16. 一个盒子里装有三张卡片, 分别标记有数字 1, 2, 3, 这三张卡片除标记的数字外完全相同. 随机有放回地抽取 3 次, 每次抽取 1 张, 将抽取的卡片上的数字依次记为  $a, b, c$ .

(1) 求“抽取的卡片上的数字满足  $a + b = c$ ”的概率;

(2) 求“抽取的卡片上的数字  $a, b, c$  不完全相同”的概率.

18. 在如图所示的多面体中, 四边形  $ABB_1A_1$  和  $ACC_1A_1$  都为矩形.
- 若  $AC \perp BC$ , 证明: 直线  $BC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ;
  - 设  $D, E$  分别是线段  $BC, CC_1$  的中点, 在线段  $AB$  上是否存在一点  $M$ , 使直线  $DE \parallel$  平面  $A_1MC$ ? 请证明你的结论.



19. 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 点  $(a_n, b_n)$  在函数  $f(x) = 2^x$  的图象上 ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).
- 证明: 数列  $\{b_n\}$  为等比数列;
  - 若  $a_1 = 1$ , 函数  $f(x)$  的图象在点  $(a_2, b_2)$  处的切线在  $x$  轴上的截距为  $2 - \frac{1}{\ln 2}$ , 求数列  $\{a_n b_n^2\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F(-2, 0)$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .
- 求椭圆  $C$  的标准方程;
  - 设  $O$  为坐标原点,  $T$  为直线  $x = -3$  上一点, 过  $F$  作  $TF$  的垂线交椭圆于  $P, Q$ . 当四边形  $OPTQ$  是平行四边形时, 求四边形  $OPTQ$  的面积.

21. 已知函数  $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $e = 2.71828\cdots$  为自然对数的底数.
- 设  $g(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 求函数  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的最小值;
  - 若  $f(1) = 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内有零点, 证明:  $e - 2 < a < 1$ .