

理科数学

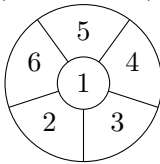
一、选择题

- $\frac{1 - \sqrt{3}i}{(\sqrt{3} + i)^2} =$ ()
(A) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (B) $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的
(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心
- 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
(A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
(C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$
- 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
(A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$
- 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
(A) $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$
- 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
(A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$
- 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()
(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

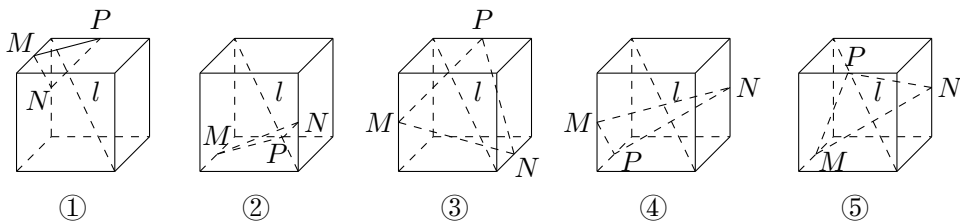
- 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \cdots + C_n^1)} =$ ()
(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6
- 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()
(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

- $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.
- 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____辆.
- 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)

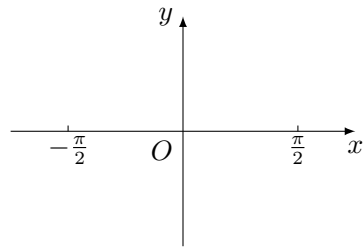


- 下列 5 个正方体图形中, l 是正方体的一条对角线, 点 M, N, P 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 MNP 的图形的序号是_____. (写出所有符合要求的图形序号)

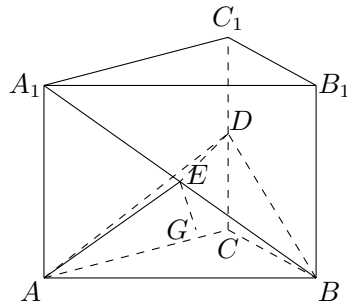


三、解答题

- 已知函数 $f(x) = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;
(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.



- 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, 侧棱 $AA_1 = 2$, D, E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点, 点 E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G .
(1) 求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)
(2) 求点 A_1 到平面 AED 的距离.



- 设 $a > 0$, 求函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x + a)$, $x \in (0, +\infty)$ 的单调区间.

20. A 、 B 两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员, A 队队员是 A_1, A_2, A_3 , B 队队员是 B_1, B_2, B_3 , 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

| 对阵队员 | A 队队员胜的概率 | A 队队员负的概率 |
|---------------|---------------|---------------|
| A_1 对 B_1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| A_2 对 B_2 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| A_3 对 B_3 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设 A 队、 B 队最后所得总分分别为 ξ 、 η .

- (1) 求 ξ 、 η 的概率分布;
(2) 求 $E\xi$, $E\eta$.

21. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.

22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 证明对任意 $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;
(2) 假设对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.