# 2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x\middle|\dfrac{x+3}{x-1}<0\right\}$, $N=\{x|x\leqslant -3\}$, 则集合 $\{x|x\geqslant 1\}=$( )

(A) $M\cap N$ (B) $M\cup N$ (C) $\complement_{\mathbf{R}}(M\cap N)$ (D) $\complement_{\mathbf{R}}(M\cup N)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n(2n+1)}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

3. 圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx+2$ 没有公共点的充要条件是 ( )

(A) $k\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ (B) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$

(C) $k\in\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ (D) $k\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

4. 复数 $\dfrac{1}{-2+\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}$ 的虚部是 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{1}{5}$

5. 已知 $O,A,B$ 是平面上的三个点, 直线 $AB$ 上有一点 $C$, 满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$, 则 $\overrightarrow{OC}=$ ( )

(A) $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ (B) $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ (C) $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ (D) $-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

6. 设 $P$ 为曲线 $C$: $y=x^2+2x+3$ 上的点, 且曲线 $C$ 在点 $P$ 处切线倾斜角的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则点 $P$ 横坐标的取值范围是 ( )

(A) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ (B) $[-1,0]$ (C) $[0,1]$ (D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

8. 将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$ 的图象, 则( )

(A) $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$ (B) $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ (C) $\boldsymbol{a}=(1,1)$ (D) $\boldsymbol{a}=(-1,1)$

9. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有 ( )

(A) 24 种 (B) 36 种 (C) 48 种 (D) 72 种

10. 已知点 $P$ 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点, 则点 $P$ 到点 $(0,2)$ 的距离与 $P$ 到该抛物线准线的距离之和的最小值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ (B) 3 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\dfrac{9}{2}$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $E,F$ 分别为棱 $AA_1$, $CC_1$ 的中点, 则在空间中与三条直线 $A_1D_1$, $EF$, $CD$ 都相交的直线 ( )

(A) 不存在 (B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条

12. 设 $f(x)$ 是连续的偶函数, 且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是单调函数, 则满足 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 $x$ 之和为 ( )

(A) $-3$ (B) 3 (C) $-8$ (D) 8

## 二、填空题

13. 函数 $y=\begin{cases}x+1,\ x<0\\ \mathrm{e}^x,\ x\geqslant 0\end{cases}$ 的反函数是______.

14. 在体积为 $4\sqrt{3}\pi$ 的球的表面上有 $A,B,C$ 三点, $AB=1$, $BC=\sqrt{2}$, $A,C$ 两点的球面距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$, 则球心到平面 $ABC$ 的距离为______.

15. 已知 $(1+x+x^2)\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ 的展开式中没有常数项, $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $2\leqslant n\leqslant 8$, 则 $n=$______.

16. 已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 有最小值, 无最大值, 则 $\omega=$______.

## 三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A,B,C$ 对边的边长分别是 $a,b,c$. 已知 $c=2$, $C=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 求 $a,b$;

(2) 若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

| 周销售量 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 频数 | 20 | 50 | 30 |

(1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;

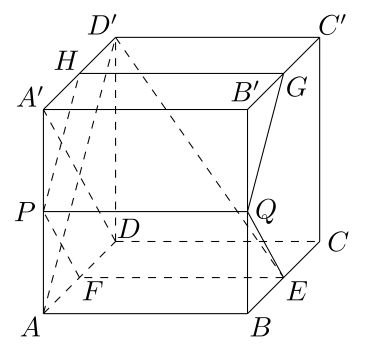
(2) 已知每吨该商品的销售利润为 2 千元, $\xi$ 表示该种商品两周销售利润的和 (单位: 千元). 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求 $\xi$ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AP=BQ=b$ $(0<b<1)$, 截面 $PQEF\parallel A'D$, 截面 $PQGH\parallel AD'$.

(1) 证明: 平面 $PQEF$ 和平面 $PQGH$ 互相垂直;

(2) 证明: 截面 $PQEF$ 和截面 $PQGH$ 面积之和是定值, 并求出这个值;

(3) 若 $D'E$ 与平面 $PQEF$ 所成的角为 45°, 求 $D'E$ 与平面 $PQGH$ 所成角的正弦值.



20. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 点 $P$ 到两点 $\left(0,-\sqrt{3}\right)$, $\left(0,\sqrt{3}\right)$ 的距离之和为 4, 设点 $P$ 的轨迹为 $C$, 直线 $y=kx+1$ 与 $C$ 交于 $A$, $B$ 两点.

(1) 写出 $C$ 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 求 $k$ 的值;

(3) 若点 $A$ 在第一象限, 证明: 当 $k>0$ 时, 恒有 $\left|\overrightarrow{OA}\right|>\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

21. 在数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 中, $a_1=2$, $b_1=4$, 且 $a_n$, $b_n$, $a_{n+1}$ 成等差数列, $b_n$, $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ 成等比数列.

(1) 求 $a_2$, $a_3$, $a_4$ 及 $b_2$, $b_3$, $b_4$, 由此猜测 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式, 并证明你的结论;

(2) 证明: $\dfrac{1}{a_1+b_1}+\dfrac{1}{a_2+b_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n+b_n}<\dfrac{5}{12}$.

22. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 是否存在实数 $a$, 使得关于 $x$ 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$? 若存在, 求 $a$ 的取值范围; 若不存在, 试说明理由.