

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x|x > 1\}$, $B = \{x|-1 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) $\{x|-1 < x < 2\}$ (B) $\{x|x > -1\}$
 (C) $\{x|-1 < x < 1\}$ (D) $\{x|1 < x < 2\}$

2. i 为虚数单位, $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} =$ ()

- (A) 0 (B) $2i$ (C) $-2i$ (D) $4i$

3. 已知向量 $a = (2, 1)$, $b = (-1, k)$, $a \cdot (2a - b) = 0$, 则 $k =$ ()

- (A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 12

4. 已知命题 $p: \exists n \in \mathbb{N}, 2^n > 1000$, 则 $\neg p$ 为 ()

- (A) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 1000$ (B) $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > 1000$
 (C) $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n \leq 1000$ (D) $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n < 1000$

5. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+1} = 16^n$, 则公比为 ()

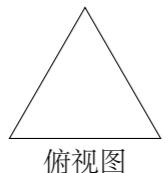
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

6. 若函数 $f(x) = \frac{x}{(2x+1)(x-a)}$ 为奇函数, 则 $a =$ ()

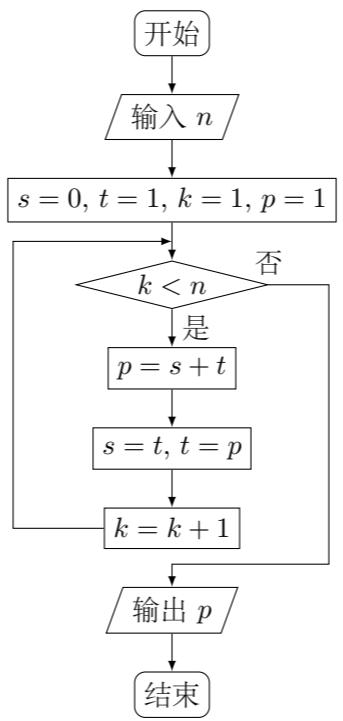
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

7. 已知 F 是抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, A, B 是该抛物线上的两点, $|AF| + |BF| = 3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ()

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

8. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等, 体积为 $2\sqrt{3}$, 它的三视图中的俯视图如图所示, 左视图是一个矩形, 则这个矩形的面积是 ()

- (A) 4 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

9. 执行下面的程序框图, 如果输入的 n 是 4, 则输出的 p 是 ()

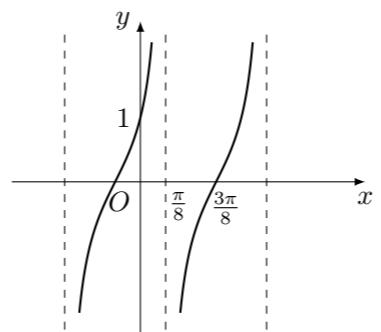
- (A) 8 (B) 5 (C) 3 (D) 2

10. 已知球的直径 $SC = 4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB = 2$, $\angle ASC = \angle BSC = 45^\circ$, 则棱锥 $S-ABC$ 的体积为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-1) = 2$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 2$, 则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为 ()

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1)$ (D) $(-\infty, +\infty)$

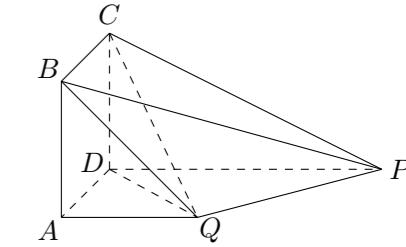
12. 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $y = f(x)$ 的部分图象如图, 则 $f\left(\frac{\pi}{24}\right) =$ ()

- (A) $2 + \sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $2 - \sqrt{3}$

二、填空题

13. 已知圆 C 经过 $A(5, 1)$, $B(1, 3)$ 两点, 圆心在 x 轴上, 则 C 的方程为 _____.14. 调查了某地若干户家庭的年收入 x (单位: 万元) 和年饮食支出 y (单位: 万元), 调查显示年收入 x 与年饮食支出 y 具有线性相关关系, 并由调查数据得到 y 对 x 的回归直线方程: $\hat{y} = 0.254x + 0.321$. 由回归直线方程可知, 家庭年收入每增加 1 万元, 年饮食支出平均增加 _____ 万元.15. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_2 = S_6$, $a_4 = 1$, 则 $a_5 =$ _____.16. 已知函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 有零点, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$.(1) 求 $\frac{b}{a}$;(2) 若 $c^2 = b^2 + \sqrt{3}a^2$, 求 B .18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $QA \perp$ 平面 $ABCD$, $PD \parallel QA$, $QA = AB = \frac{1}{2}PD$.(1) 证明: $PQ \perp$ 平面 DCQ ;(2) 求棱锥 $Q-ABCD$ 的体积与棱锥 $P-DCQ$ 的体积比值.

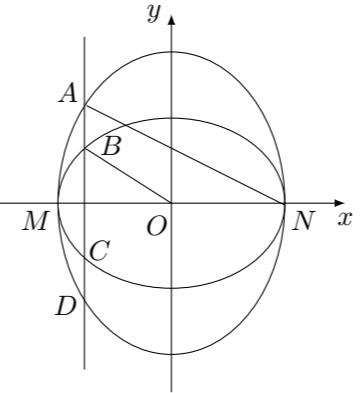
19. 某农场计划种植某种新作物, 为此对这种作物的两个品种(分别称为品种甲和品种乙)进行田间试验, 选取两大块地, 每大块地分成 n 小块地, 在总共 $2n$ 小块地中, 随机选 n 小块地种植品种甲, 另外 n 小块地种植品种乙.
- (1) 假设 $n=2$, 求第一大块地都种植品种甲的概率;
 - (2) 试验时每大块地分成 8 小块, 即 $n=8$, 试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量(单位: kg/hm^2)如下表:

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙每公顷产量的样本平均数和样本方差; 根据试验结果, 你应该种植哪一品种?

附: 样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的样本方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为样本平均数.

21. 如图, 已知椭圆 C_1 的中心在原点 O , 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN , 且 C_1, C_2 的离心率都为 e . 直线 $l \perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D .
- (1) 设 $e = \frac{1}{2}$, 求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;
 - (2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l , 使得 $BO \parallel AN$, 并说明理由.

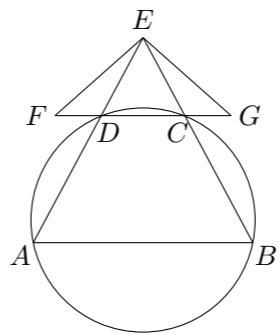


20. 设函数 $f(x) = x + ax^2 + b \ln x$, 曲线 $y = f(x)$ 过 $P(1, 0)$, 且在 P 点处的切线斜率为 2.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 证明: $f(x) \leqslant 2x - 2$.

22. 三选一.

- 【A】如图, A, B, C, D 四点在同一圆上, AD 的延长线与 BC 的延长线交于 E 点, 且 $EC = ED$.
- (1) 证明: $CD \parallel AB$;
 - (2) 延长 CD 到 F , 延长 DC 到 G , 使得 $EF = EG$, 证明: A, B, G, F 四点共圆.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases} (\varphi$

为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} (a > b > 0, \varphi \text{ 为参数}).$ 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $l: \theta = \alpha$ 与 C_1, C_2 各有一个交点, 当 $\alpha = 0$ 时, 这两个交点间的距离为 2, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 这两个交点重合.

- (1) 分别说明 C_1, C_2 是什么曲线, 并求出 a 与 b 的值;
- (2) 设当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_1, B_1 , 当 $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_2, B_2 , 求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积.

【C】已知函数 $f(x) = |x - 2| - |x - 5|$.

- (1) 证明: $-3 \leqslant f(x) \leqslant 3$;
- (2) 求不等式 $f(x) \geqslant x^2 - 8x + 15$ 的解集.