2006 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2\}$, 则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 ( )
   (A) 1　(B) 3　(C) 4　(D) 8

2. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ( )
   (A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数　(B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
   (C) $f(x)-f(-x)$ 是偶函数　(D) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数

3. 给出下列四个命题:
   ① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;
   ② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;
   ③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;
   ④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.
   其中假命题的个数是 ( )
   (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

4. 双曲线 $x^2-y^2=4$ 的两条渐近线与直线 $x=3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ( )
   (A) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　(B) $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　(C) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\leqslant 0\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$　(D) $\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y\geqslant 3\\0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

5. 设 $\oplus$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算, A 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 若对任意 a, $b\in A$, 有 $a\oplus b\in A$, 则称 A 对运算 $\oplus$ 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零) 四则运算都封闭的是 ( )
   (A) 自然数集　(B) 整数集　(C) 有理数集　(D) 无理数集

6. $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C, 所对边的长分别为 a, b, c, 设向量 $\vec{p}=(a+c,b)$、$\vec{q}=(b-a,c-a)$. 若 $\vec{p}\parallel\vec{q}$, 则角 C 的大小为 ( )
   (A) $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $\dfrac{2\pi}{3}$

7. 与方程 $y=\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+1\ (x\geqslant 0)$ 的曲线关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 ( )
   (A) $y=\ln(1+\sqrt{x})$　(B) $y=\ln(1-\sqrt{x})$
   (C) $y=-\ln(1+\sqrt{x})$　(D) $y=-\ln(1-\sqrt{x})$

8. 曲线 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{6-m}=1\ (m<6)$ 与曲线 $\dfrac{x^2}{5-n}+\dfrac{y^2}{9-n}=1\ (5<n<9)$ 的 ( )
   (A) 焦距相等　(B) 离心率相等　(C) 焦点相同　(D) 准线相同

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, 前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n+1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于 ( )
   (A) $2^{n+1}-2$　(B) $3n$　(C) $2n$　(D) 3^n-1

10. 直线 $y=2k$ 与曲线 $9k^2x^2+y^2=18k^2|x|\ (k\in\mathbf{R}$, 且 $k\neq 0)$ 的公共点的个数为 ( )
    (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}|\sin x-\cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是( )
    (A) $[-1,1]$　(B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　(C) $\left[-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(D) $\left[-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. 设 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, 点 P 是线段 AB 上的一个动点, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, 若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$, 则实数 λ 的取值范围是 ( )
    (A) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$　(B) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$
    (C) $\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

13. 设 $g(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x,\ x\leqslant 0\\ \ln x,\ x>0\end{cases}$, 则 $g\left(g\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$______.

14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{4}{5^2}-\frac{6}{7^2}\right)+\cdots+\left(\frac{4}{5^n}-\frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{6^2}-\frac{4}{5^2}\right)+\cdots+\left(\frac{5}{6^n}-\frac{4}{5^n}\right)}=$______.

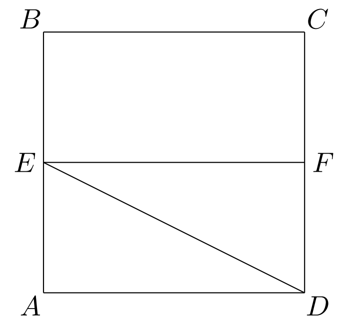
15. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有______种. (以数作答)

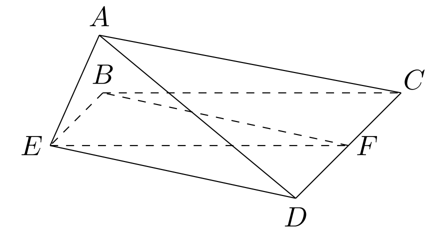
16. 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α, 则 $\cos\alpha=$______.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$. 求:
    (1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;
    (2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 已知正方形 $ABCD$, E、F 分别是边 AB、CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 $\theta\ (0<\theta<\pi)$.
    (1) 证明: $BF\parallel$ 平面 ADE;
    (2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.





19. 现有甲、乙两个项目, 对甲项目每投资十万元, 一年后利润是 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为 $\dfrac{1}{6}$、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$; 已知乙项目的利润与产品价格的调整有关, 在每次调整中, 价格下降的概率都是 $p\ (0<p<1)$, 设乙项目产品价格在一年内进行 2 次独立的调整, 记乙项目产品价格在一年内的下降次数为 ξ, 对乙项目每投资十万元, ξ 取 0、1、2 时, 一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元. 随机变量 ξ_1、ξ_2 分别表示对甲、乙两项目各投资十万元一年后的利润.
    (1) 求 ξ_1、ξ_2 的概率分布和数学期望 $E\xi_1$、$E\xi_2$;
    (2) 当 $E\xi_1<E\xi_2$ 时, 求 p 的取值范围.

20. 已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ $(x_1,\ x_2\neq 0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 满足 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y=0$.

(1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;

(2) 当圆 C 的圆心到直线 $x-2y=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a, b, c 是以 d 为公差的等差数列, 且 $a>0$, $d>0$. 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点. 在 $\left[1-\dfrac{2b}{a},0\right]$ 上, $f'(x)$ 在 x_1 处取得最大值, 在 x_2 处取得最小值. 将 $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f'(x_1))$, $(x_2,f'(x_2))$ 依次记为 A, B, C.

(1) 求 x_o;

(2) 若 $\triangle ABC$ 有一边平行于 x 轴, 且面积为 $2+\sqrt{3}$, 求 a, d 的值.

22. 已知 $f_0(x)=x^n$, $f_k(x)=\dfrac{f'_{k-1}(x)}{f_{k-1}(1)}$, 其中 $k\leqslant n$ $(n,\ k\in\mathbf{N}_+)$, 设 $F(x)=\mathrm{C}_n^0f_0(x^2)+\mathrm{C}_n^1f_1(x^2)+\cdots+\mathrm{C}_n^nf_n(x^2)$, $x\in[-1,1]$.

(1) 写出 $f_k(1)$;

(2) 证明: 对任意的 x_1, $x_2\in[-1,1]$, 恒有 $|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant 2^{n-1}(n+2)-n-1$.