2019 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=(-\infty,3)$, $B=(2,+\infty)$, 则 $A\cap B=$______.

2. 已知 $z\in\mathbf{C}$ 且满足 $\dfrac{1}{z-5}=\mathrm{i}$, 求 $z=$______.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,0)$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为______.

4. 已知二项式 $(2x+1)^5$, 则展开式中含 x^2 项的系数为______.

5. 已知 x、y 满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 2\end{cases}$, 求 $z=2x-3y$ 的最小值为______.

6. 已知函数 $f(x)$ 周期为 1, 且当 $0<x\leqslant 1$ 时, $f(x)=-\log_2 x$, 则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=$______.

7. 若 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 且 $\dfrac{1}{x}+2y=3$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为______.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n, 且满足 $S_n+a_n=2$, 则 $S_5=$______.

9. 过 $y^2=4x$ 的焦点 F 并垂直于 x 轴的直线分别与 $y^2=4x$ 交于 A、B, A 在 B 上方, M 为抛物线上一点, $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(\lambda-2)\overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda=$______.

10. 某三位数密码锁, 每位数字在 $0-9$ 数字中选取, 其中恰有两位数字相同的概率是______.

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n<a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 若点 $P_n(n,a_n)$ 在双曲线 $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 上, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP_{n+1}|=$______.

12. 常数 $a>0$, 将函数 $y=\dfrac{2}{x}$ $(x>0)$ 的图象先向右平移 1 个单位, 再向下平移 a 个单位, 然后将所得的图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴向上翻折, 其余部分保持不变, 得到函数 $f(x)=\left|\dfrac{2}{x-1}-a\right|$ $(x>1)$ 的图象 L, 当 $a=a_0$ 时, L 与 x 轴交点为 A, 在 L 上任意一点 P (P 异于 A), 总存在一点 Q 使得 $AP\perp AQ$ 且 $|AP|=|AQ|$, 则 $a_0=$______.

二、选择题

13. 已知直线方程 $2x-y+c=0$ 的一个方向向量 $\boldsymbol{d}$ 可以是 ( )

(A) $(2,-1)$ (B) $(2,1)$ (C) $(-1,2)$ (D) $(1,2)$

14. 一个直角三角形的两条直角边长分别为 1 和 2, 将该三角形分别绕其两个直角边旋转得到的两个圆锥的体积之比为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

15. 已知 $\omega\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=(x-6)^2\cdot\sin(\omega x)$, 存在常数 $a\in\mathbf{R}$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 可能的值为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{5}$

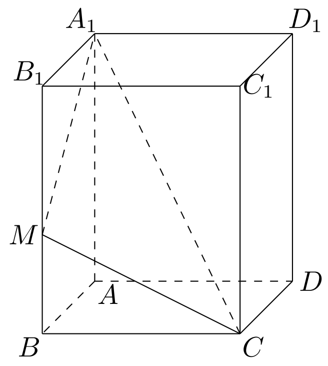
16. 已知 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)$. ① 存在角 α 在第一象限, 角 β 在第三象限; ② 存在角 α 在第二象限, 角 β 在第四象限; 那么 ( )

(A) ①②均正确 (B) ①②均错误

(C) ①正确, ②错误 (D) ①错误, ②正确

三、解答题

17. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 BB_1 上一点, 已知 $BM=2$, $AD=4$, $CD=3$, $AA_1=5$.
(1) 求直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 的夹角;
(2) 求点 A 到平面 A_1MC 的距离.

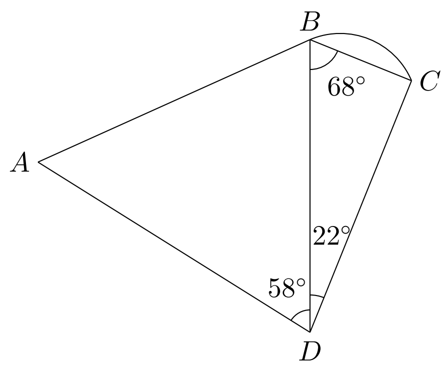


18. 已知 $f(x)=ax+\dfrac{1}{x+1}$ $(a\in\mathbf{R})$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)+1<f(x+1)$ 的解集;
(2) 若 $x\in[1,2]$ 时, $f(x)$ 有零点, 求 a 的范围.

19. 如图, 某段海岸线可近似看作一条曲线, 该曲线由线段 AB 和四分之一圆周 $\overset{\frown}{BC}$ 构成, D 为一海岛, B 在 D 的正北方向, 且 B、D 相距 39.2 千米, A 在 D 的北偏西 58° 方向, C 在 D 的北偏东 22° 方向, C 在 B 的南偏东 68° 方向.

(1) 若沿 $\overset{\frown}{BC}$ 建观光道, 计算该观光道的长度; (精确到 0.001 千米)

(2) 现规划在该海岸线上选取一点 E, 修建从 E 直通 D 的公路桥, 已知 A、B 相距 40 千米, 求公路桥 DE 的最短长度. (精确到 0.001 千米)



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 直线 l 过 F_2 交椭圆于 A、B 两点.

(1) 若直线 l 垂直于 x 轴, 求 $|AB|$;

(2) 当 $\angle F_1AB=90^\circ$ 时, 点 A 在 x 轴上方, 求 A, B 的坐标;

(3) 设直线 AF_1 交 y 轴于点 M, 直线 BF_1 交 y 轴于点 N, 是否存在直线 l, 使得 $S_{\triangle F_1AB}=S_{\triangle F_1MN}$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 有 100 项, $a_1=a$, 对任意 $n\in[2,100]$, 存在 i 使得 $a_n=a_i+d$, $i\in[1,n-1]$, 若 a_k 与其之前中某一项相等, 则称 a_k 具有性质 P.

(1) 若 $a_1=1$, $d=2$, 求 a_4 所有可能的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 求证: $\{a_n\}$ 中存在具有性质 P 的项;

(3) 若 $\{a_n\}$ 中恰有三项具有性质 P, 这三项和为 C, 试用 a, d, c 表示 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$.