

理科数学

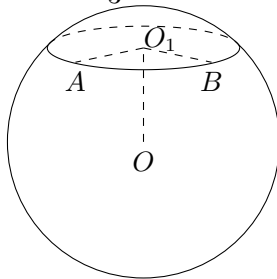
一、选择题

1. 设不等式 $x^2 - x \leq 0$ 的解集为 M , 函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 的定义域为 N , 则 $M \cap N$ 为 ()
(A) $[0, 1]$ (B) $(0, 1)$ (C) $[0, 1]$ (D) $(-1, 0]$
2. 已知 z 是纯虚数, $\frac{z+2}{1-i}$ 是实数, 那么 z 等于 ()
(A) $2i$ (B) i (C) $-i$ (D) $-2i$
3. 函数 $f(x) = \sqrt{2x-4}$ ($x \geq 4$) 的反函数为 ()
(A) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ($x \geq 0$) (B) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ ($x \geq 2$)
(C) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ($x \geq 0$) (D) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$ ($x \geq 2$)
4. 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 所截得的弦长为 ()
(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$
5. 若 $3\sin\alpha + \cos\alpha = 0$, 则 $\frac{1}{\cos^2\alpha + \sin 2\alpha}$ 的值为 ()
(A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) -2
6. 若 $(1-2x)^{2009} = a_0 + a_1x + \dots + a_{2009}x^{2009}$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为 ()
(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2
7. “ $m > n > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于 ()
(A) $-\frac{4}{9}$ (B) $-\frac{4}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$
9. 从 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 这六个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数的个数为 ()
(A) 300 (B) 216 (C) 180 (D) 162
10. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$
11. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 2 \end{cases}$, 目标函数 $z = ax + 2y$ 仅在点 $(1, 0)$ 处取得最小值, 则 a 的取值范围是 ()
(A) $(-1, 2)$ (B) $(-4, 2)$ (C) $(-4, 0]$ (D) $(-2, 4)$

12. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ($x_1 \neq x_2$), 有 $(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0$. 则当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 有 ()
(A) $f(-n) < f(n-1) < f(n+1)$ (B) $f(n-1) < f(-n) < f(n+1)$
(C) $f(n+1) < f(-n) < f(n-1)$ (D) $f(n+1) < f(n-1) < f(-n)$

二、填空题

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_6 = S_3 = 12$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ _____.
14. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 $26, 15, 13$, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有_____人.
15. 如图球 O 的半径为 2 , 圆 O_1 是一小圆, $O_1O = \sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1 上两点. 若 A, B 两点间的球面距离为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle AO_1B =$ _____.

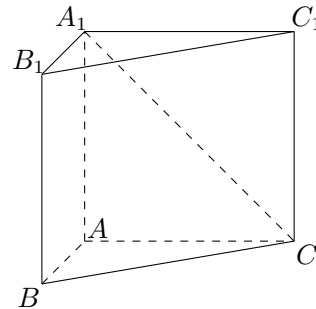


16. 设曲线 $y = x^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n , 令 $a_n = \lg x_n$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{99}$ 的值为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 x 轴的交点中, 相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的值域.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 1, AC = AA_1 = \sqrt{3}, \angle ABC = 60^\circ$.
(1) 证明: $AB \perp A_1C$;
(2) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的大小.



19. 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数用 ξ 表示, 据统计, 随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	0	1	2	3
p	0.1	0.3	$2a$	a

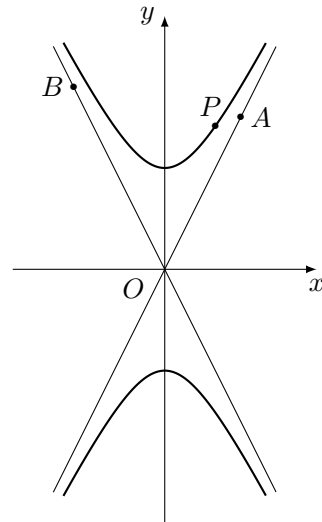
- (1) 求 a 的值和 ξ 的数学期望;
- (2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

20. 已知函数 $f(x) = \ln(ax+1) + \frac{1-x}{1+x}$, $x \geq 0$, 其中 $a > 0$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 求 a 的值;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 若 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 a 的取值范围.

21. 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 顶点到渐近线的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 如图, P 是双曲线 C 上一点, A, B 两点在双曲线 C 的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.



22. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 猜想数列 $\{x_n\}$ 的单调性, 并证明你的结论;
- (2) 证明: $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.