

2015 年普通高等学校招生考试 (北京卷)

理科数学

一、选择题

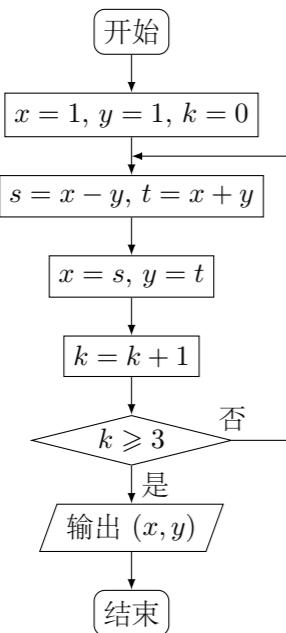
1. 复数 $i(2-i) =$ ()

- (A) $1+2i$ (B) $1-2i$ (C) $-1+2i$ (D) $-1-2i$

2. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 最大值为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 ()

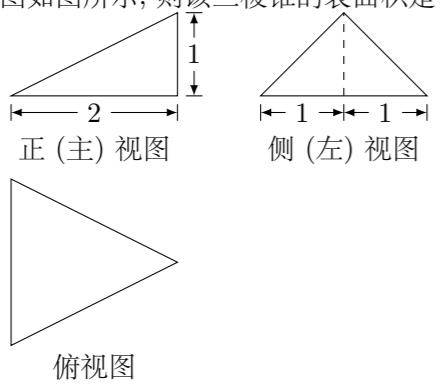


- (A) $(-2, 2)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(-4, -4)$ (D) $(0, 8)$

4. 设 α, β 是两个不同的平面, m 是直线且 $m \subset \alpha$, “ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的表面积是 ()

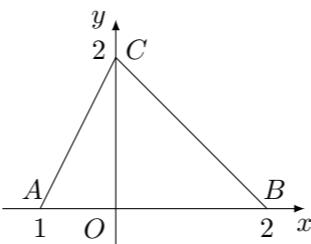


- (A) $2+\sqrt{5}$ (B) $4+\sqrt{5}$ (C) $2+2\sqrt{5}$ (D) 5

6. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是 ()

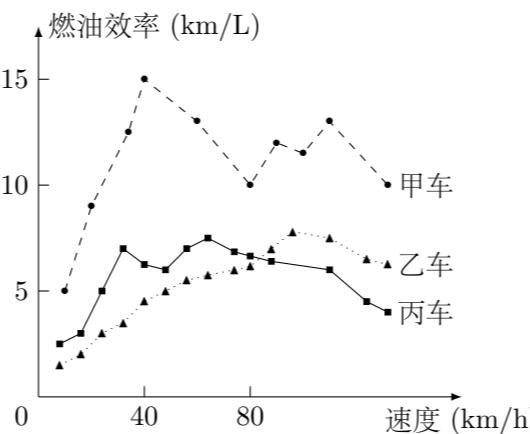
- (A) 若 $a_1+a_2>0$, 则 $a_2+a_3>0$
 (B) 若 $a_1+a_3<0$, 则 $a_1+a_2<0$
 (C) 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$
 (D) 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

7. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB , 则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是 ()



- (A) $\{x | -1 < x \leq 0\}$ (B) $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$
 (C) $\{x | -1 < x \leq 1\}$ (D) $\{x | -1 < x \leq 2\}$

8. 汽车的“燃油效率”, 是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程, 下图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下的燃油效率情况. 下列叙述中正确的是 ()



- (A) 消耗 1 升汽油, 乙车最多可行驶 5 千米
 (B) 以相同速度行驶相同路程, 三辆车中, 甲车消耗汽油最多
 (C) 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时, 消耗 10 升汽油
 (D) 某城市机动车最高限速 80 千米/小时. 相同条件下, 在该市用丙车比用乙车更省油

二、填空题

9. 在 $(2+x)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为 _____. (用数字作答)

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + y = 0$, 则 $a =$ _____.

11. 在极坐标系中, 点 $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 到直线 $\rho(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) = 6$ 的距离为 _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=4, b=5, c=6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$. 若 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $x =$ _____. $y =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x < 1 \\ 4(x-a)(x-2a), & x \geq 1 \end{cases}$.

- ① 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____.
 ② 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的最小值.

16. A, B 两组各有 7 位病人, 他们服用某种药物后的康复时间 (单位: 天) 记录如下:

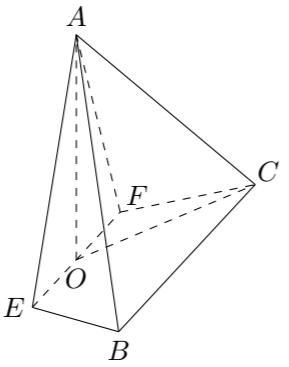
A 组: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16;
 B 组: 12, 13, 15, 16, 17, 14, a .

假设所有病人的康复时间相互独立, 从 A, B 两组随机各选 1 人, A 组选出的人记为甲, B 组选出的人记为乙.

- (1) 求甲的康复时间不少于 14 天的概率;
 (2) 如果 $a=25$, 求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率;
 (3) 当 a 为何值时, A, B 两组病人康复时间的方差相等? (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $A-EFCB$ 中, $\triangle AEF$ 为等边三角形, 平面 $AEF \perp$ 平面 $EFCB$, $EF \parallel BC$, $BC = 4$, $EF = 2a$, $\angle EBC = \angle FCB = 60^\circ$, O 为 EF 的中点.

- (1) 求证: $AO \perp BE$;
- (2) 求二面角 $F-AE-B$ 的余弦值;
- (3) 若 $BE \perp$ 平面 AOC , 求 a 的值.



19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 和点 $A(m, n)$ ($m \neq 0$) 都在椭圆 C 上, 直线 PA 交 x 轴于点 M .

- (1) 求椭圆 C 的方程, 并求点 M 的坐标; (用 m, n 表示)
- (2) 设 O 为原点, 点 B 与点 A 关于 x 轴对称, 直线 PB 交 x 轴于点 N , 问: y 轴上是否存在点 Q , 使得 $\angle OQM = \angle ONQ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

18. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

- (1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 求证: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 2\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$;
- (3) 设实数 k 使得 $f(x) > k\left(x + \frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 求 k 的最大值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 \in \mathbf{N}^*$, $a_1 \leq 36$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 18 \\ 2a_n - 36, & a_n > 18 \end{cases}$

- ($n = 1, 2, \dots$). 记集合 $M = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.
- (1) 若 $a_1 = 6$, 写出集合 M 的所有元素;
- (2) 若集合 M 存在一个元素是 3 的倍数, 证明: M 的所有元素都是 3 的倍数;
- (3) 求集合 M 的元素个数的最大值.