2015 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{\mathrm{i},\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3,\mathrm{i}^4\}$ (i 是虚数单位), $B=\{1,-1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{-1\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1,-1\}$ (D) $\varnothing$

2. 下列函数为奇函数的是 （ ）

(A) $y=\sqrt{x}$ (B) $y=|\sin x|$ (C) $y=\cos x$ (D) $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

3. 若双曲线 $E:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线 E 上, 且 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|$ 等于 （ ）

(A) 11 (B) 9 (C) 5 (D) 3

4. 为了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系, 随机调查了该社区 5 户家庭, 得到如下统计数据表:

收入 x (万元)	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y (万元)	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

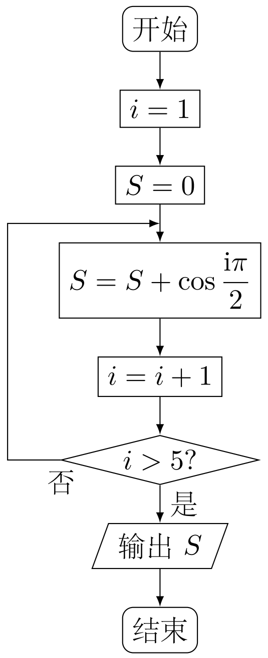
根据上表可得回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$, 其中 $\hat{b}=0.76$, $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$. 据此估计, 该社区一户年收入为 15 万元家庭的年支出为 （ ）

(A) 11.4 万元 (B) 11.8 万元 (C) 12.0 万元 (D) 12.2 万元

5. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\geqslant 0\\ x-y\leqslant 0\\ x-2y+2\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值等于 （ ）

(A) $-\dfrac{5}{2}$ (B) -2 (C) $-\dfrac{3}{2}$ (D) 2

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的结果为 （ ）



(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

7. 若 l, m 是两条不同的直线, m 垂直于平面 α, 则“$l\perp m$”是“$l\parallel\alpha$”的（ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 若 a, b 是函数 $f(x)=x^2-px+q$ $(p>0,\ q>0)$ 的两个不同的零点, 且 a, b, -2 这三个数可适当排序后成等差数列, 也可适当排序后成等比数列, 则 $p+q$ 的值等于 （ ）

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

9. 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{t}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点. 且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{4\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, 则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 （ ）

(A) 13 (B) 15 (C) 19 (D) 21

10. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$, 则下列结论中一定错误的是 （ ）

(A) $f\left(\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$ (B) $f\left(\dfrac{1}{k}\right)>\dfrac{1}{k-1}$

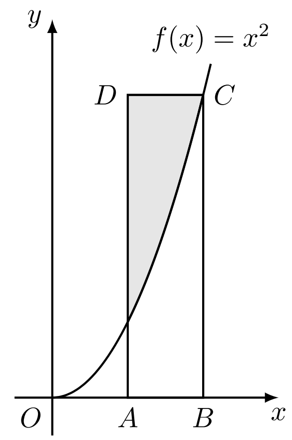
(C) $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)<\dfrac{1}{k-1}$ (D) $f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)>\dfrac{k}{k-1}$

二、填空题

11. $(x+2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于______. (用数字作答)

12. 若锐角 $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$, 且 $AB=5$, $AC=8$, 则 BC 等于______.

13. 如图, 点 A 的坐标为 $(1,0)$, 点 C 的坐标为 $(2,4)$, 函数 $f(x)=x^2$. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点, 则此点取自阴影部分的概率等于______.



14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6,\ x\leqslant 2\\ 3+\log_a x,\ x>2\end{cases}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的值域是 $[4,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是______.

15. 一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串 $x_1x_2\cdots x_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_k $(k=1,2,\cdots,n)$ 称为第 k 位码元. 二元码是通信中常用的码, 但在通信过程中有时会发生码元错误 (即码元由 0 变为 1, 或者由 1 变为 0). 已知某种二元码 $x_1x_2\cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组: $\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=0\\ x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0\\ x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=0\end{cases}$, 其中运算 $\oplus$ 定义为: $0\oplus 0=0$, $0\oplus 1=1$, $1\oplus 0=1$, $1\oplus 1=0$. 现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第 k 位发生码元错误后变成了 1101101, 那么利用上述校验方程组可判定 k 等于______.

三、解答题

16. 某银行规定, 一张银行卡若在一天内出现 3 次密码尝试错误, 该银行卡将被锁定. 小王到该银行取钱时, 发现自己忘记了银行卡的密码, 但可以确认该银行卡的正确密码是他常用的 6 个密码之一, 小王决定从中不重复地随机选择 1 个进行尝试. 若密码正确, 则结束尝试; 否则继续尝试, 直至该银行卡被锁定.

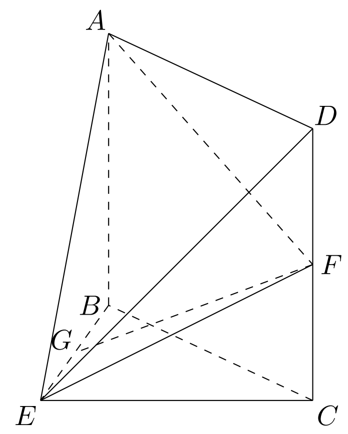
(1) 求当天小王的该银行卡被锁定的概率;

(2) 设当天小王用该银行卡尝试密码的次数为 X, 求 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在几何体 $ABCDE$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB\perp$ 平面 BEC, $BE\perp EC$, $AB=BE=EC=2$, G, F 分别是线段 BE, DC 的中点.

(1) 求证: $GF\parallel$ 平面 ADE;

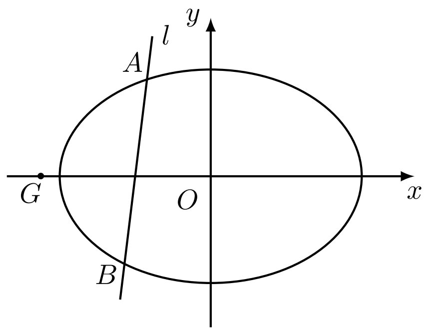
(2) 求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



18. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $\left(0,\sqrt{2}\right)$, 且离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设直线 $l:x=my-1\ (m\in\mathbf{R})$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 判断点 $G\left(-\dfrac{9}{4},0\right)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并说明理由.



19. 已知函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)=\cos x$ 的图象经如下变换得到: 先将 $g(x)$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 再将所得到的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并求其图象的对称轴方程;

(2) 已知关于 x 的方程 $f(x)+g(x)=m$ 在 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β.

① 求实数 m 的取值范围;

② 证明: $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{2m^2}{5}-1$.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=kx\ (k\in\mathbf{R})$.

(1) 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<x$;

(2) 证明: 当 $k<1$ 时, 存在 $x_0>0$, 使得对任意的 $x\in(0,x_0)$, 恒有 $f(x)>g(x)$;

(3) 确定 k 的所有可能取值, 使得存在 $t>0$, 对任意的 $x\in(0,t)$, 恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$.

21. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3\cos t\\ y=-2+3\sin t\end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与平面直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴非负半轴为极轴) 中, 直线 l 的方程为 $\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=m\ (m\in\mathbf{R})$.

(1) 求圆 C 的普通方程及直线 l 的直角坐标方程;

(2) 设圆心 C 到直线 l 的距离等于 2, 求 m 的值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $c>0$, 函数 $f(x)=|x+a|+|x-b|+c$ 的最小值为 4.

(1) 求 $a+b+c$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{9}b^2+c^2$ 的最小值.