

## 文科数学

## 一、选择题

1. 设集合  $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $N = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ , 则  $M \cap N$  中元素的个数为 ( )

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

2. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $(-4, 3)$ , 则  $\cos \alpha =$  ( )

- (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{3}{5}$  (C)  $-\frac{3}{5}$  (D)  $-\frac{4}{5}$

3. 不等式组  $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$  的解集为 ( )

- (A)  $\{x \mid -2 < x < -1\}$  (B)  $\{x \mid -1 < x < 0\}$   
(C)  $\{x \mid 0 < x < 1\}$  (D)  $\{x \mid x > 1\}$

4. 已知正四面体  $ABCD$  中,  $E$  是  $AB$  的中点, 则异面直线  $CE$  与  $BD$  所成角的余弦值为 ( )

- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 函数  $y = \ln(\sqrt[3]{x} + 1)$  ( $x > -1$ ) 的反函数是 ( )

- (A)  $y = (1 - e^x)^3$  ( $x > -1$ ) (B)  $y = (e^x - 1)^3$  ( $x > -1$ )  
(C)  $y = (1 - e^x)^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (D)  $y = (e^x - 1)^3$  ( $x \in \mathbf{R}$ )

6. 已知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  为单位向量, 其夹角为  $60^\circ$ , 则  $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} =$  ( )

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

7. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ( )

- (A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种

8. 设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_2 = 3$ ,  $S_4 = 15$ , 则  $S_6 =$  ( )

- (A) 31 (B) 32 (C) 63 (D) 64

9. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 过  $F_2$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点, 若  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4\sqrt{3}$ ,

- 则  $C$  的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  (C)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

10. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ( )

- (A)  $\frac{81\pi}{4}$  (B)  $16\pi$  (C)  $9\pi$  (D)  $\frac{27\pi}{4}$

11. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ) 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ , 则  $C$  的焦距等于 ( )

- (A) 2 (B)  $2\sqrt{2}$  (C) 4 (D)  $4\sqrt{2}$

12. 奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(x+2)$  为偶函数,  $f(1) = 1$ , 则  $f(8) + f(9) =$  ( )

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

## 二、填空题

13.  $(x-2)^6$  的展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_.

(用数字作答)

14. 函数  $y = \cos 2x + 2 \sin x$  的最大值为\_\_\_\_\_.

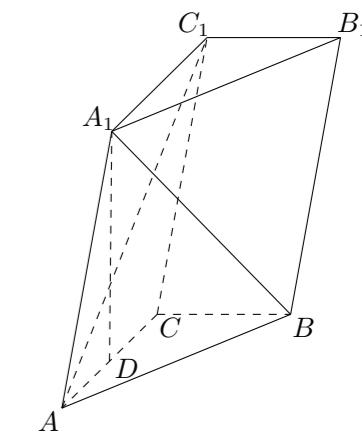
15. 设  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y \geqslant 0 \\ x+2y \leqslant 3 \\ x-2y \leqslant 1 \end{cases}$ , 则  $z = x+4y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

16. 直线  $l_1$  和  $l_2$  是圆  $x^2 + y^2 = 2$  的两条切线, 若  $l_1$  与  $l_2$  的交点为  $(1, 3)$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的夹角的正切值等于\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ .

- (1) 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 证明  $\{b_n\}$  是等差数列;  
(2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式.



19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 点  $A_1$  在平面  $ABC$  内的射影  $D$  在  $AC$  上,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $BC = 1$ ,  $AC = CC_1 = 2$ .

(1) 证明:  $AC_1 \perp A_1B$ ;

(2) 设直线  $AA_1$  与平面  $BCC_1B_1$  的距离为  $\sqrt{3}$ , 求二面角  $A_1 - AB - C$  的大小.

20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4，各人是否需使用设备相互独立.  
(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率；  
(2) 实验室计划购买  $k$  台设备供甲、乙、丙、丁使用，若要求“同一工作日需使用设备的人数大于  $k$ ”的概率小于 0.1，求  $k$  的最小值.
21. 函数  $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$  ( $a \neq 0$ ).  
(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性；  
(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  是增函数，求  $a$  的取值范围.
22. 已知抛物线  $C : y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ ，直线  $y = 4$  与  $y$  轴的交点为  $P$ ，与  $C$  的交点为  $Q$ ，且  $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$ .  
(1) 求  $C$  的方程；  
(2) 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点，若  $AB$  的垂直平分线  $l'$  与  $C$  相交于  $M$ 、 $N$  两点，且  $A$ 、 $M$ 、 $B$ 、 $N$  四点在同一圆上，求  $l$  的方程.