

# 数学试卷

## 一、填空题

- 计算:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{4n+3} =$ \_\_\_\_\_.
- 方程  $\log_3(2x-1) = 1$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = 3x + 5, x \in [0, 1]$  的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.
- 不等式  $\frac{1-2x}{x+1} > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 已知圆  $C: (x+5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$  和直线  $l: 3x + y + 5 = 0$ . 若圆  $C$  与直线  $l$  没有公共点, 则  $r$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 已知函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的偶函数. 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $f(x) = x - x^4$ , 则当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.
- 电视台连续播放 6 个广告, 其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告, 要求首尾必须播放公益广告, 则共有种不同的播放方式\_\_\_\_\_. (结果用数值表示)
- 正四棱锥底面边长为 4, 侧棱长为 3, 则其体积为\_\_\_\_\_.
- 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $BC = 8, AC = 5$ , 三角形面积为 12, 则  $\cos 2C =$ \_\_\_\_\_.
- 若向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $150^\circ, |\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 4$ , 则  $|2\vec{a} + \vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.
- 已知直线  $l$  过点  $P(2, 1)$ , 且与  $x$  轴、 $y$  轴的正半轴分别交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 则三角形  $OAB$  面积的最小值为\_\_\_\_\_.
- 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ , 则\_\_\_\_\_. (结论用数学式子表示)

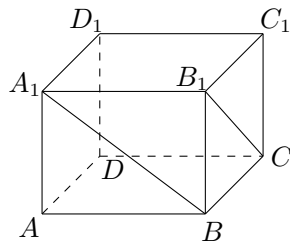
## 二、选择题

- 抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点坐标为 ( )  
(A) (0, 1) (B) (1, 0) (C) (0, 2) (D) (2, 0)
- 若  $a, b, c \in \mathbf{R}, a > b$ , 则下列不等式成立的是 ( )  
(A)  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  (B)  $a^2 > b^2$   
(C)  $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$  (D)  $a|c| > b|c|$
- 若  $k \in \mathbf{R}$ , 则“ $k > 3$ ”是“方程  $\frac{x^2}{k-3} - \frac{y^2}{k+3} = 1$  表示双曲线”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

- 若集合  $A = \left\{ y \left| y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1 \right. \right\}, B = \left\{ y \left| y = 2 - \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \right. \right\}$ , 则  $A \cap B$  等于 ( )  
(A)  $(-\infty, 1]$  (B)  $[-1, 1]$  (C)  $\emptyset$  (D)  $\{1\}$

## 三、解答题

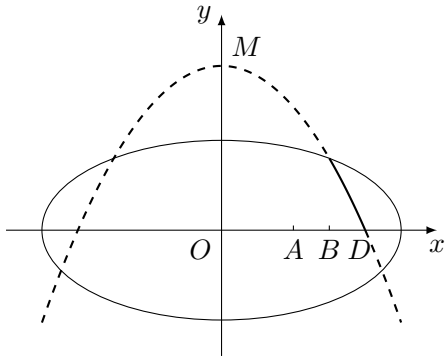
- 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $DA = DC = 4, DD_1 = 3$ , 求异面直线  $A_1B$  与  $B_1C$  所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



- 已知复数  $w$  满足  $w - 4 = (3 - 2w)i$  ( $i$  为虚数单位),  $z = \frac{5}{w} + |w - 2|$ , 求一个以  $z$  为根的实系数一元二次方程.

- 已知函数  $f(x) = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos x, x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .  
(1) 若  $\sin x = \frac{4}{5}$ , 求函数  $f(x)$  的值;  
(2) 求函数  $f(x)$  的值域.

20. 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图: 航天器运行 (按顺时针方向) 的轨迹方程为  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ , 变轨 (即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线) 后返回的轨迹是以  $y$  轴为对称轴、 $M\left(0, \frac{64}{7}\right)$  为顶点的抛物线的实线部分, 降落点为  $D(8, 0)$ . 观测点  $A(4, 0)$ 、 $B(6, 0)$  同时跟踪航天器.
- (1) 求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;
- (2) 试问: 当航天器在  $x$  轴上方时, 观测点  $AB$  测得离航天器的距离分别为多少时, 应向航天器发出变轨指令?



21. 设函数  $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ .
- (1) 在区间  $[-2, 6]$  上画出函数  $f(x)$  的图象;
- (2) 设集合  $A = \{x | f(x) \geq 5\}$ ,  $B = (-\infty, -2] \cup [0, 4] \cup [6, +\infty)$ . 试判断集合  $A$  和  $B$  之间的关系, 并给出证明;
- (3) 当  $k > 2$  时, 求证: 在区间  $[-1, 5]$  上,  $y = kx + 3k$  的图象位于函数  $f(x)$  图象的上方.

22. 已知数列  $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  是首项为 1, 公差为 1 的等差数列;  $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{20}$  是公差为  $d$  的等差数列;  $a_{20}, a_{21}, \dots, a_{30}$  是公差为  $d^2$  的等差数列 ( $d \neq 0$ ).
- (1) 若  $a_{20} = 40$ , 求  $d$ ;
- (2) 试写出  $a_{30}$  关于  $d$  的关系式, 并求  $a_{30}$  的取值范围;
- (3) 续写已知数列, 使得  $a_{30}, a_{31}, \dots, a_{40}$  是公差为  $d^3$  的等差数列,  $\dots$ , 依次类推, 把已知数列推广为无穷数列. 提出同 (2) 类似的问题 ((2) 应当作为特例), 并进行研究, 你能得到什么样的结论?