

2013 年普通高等学校招生考试 (大纲卷)

理科数学

一、选择题

1. 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$ ,  $M = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$ , 则  $M$  中元素的个数为 ( )  
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
2.  $(1 + \sqrt{3}i)^3 =$  ( )  
 (A) -8 (B) 8 (C) -8i (D) 8i
3. 已知向量  $\mathbf{m} = (\lambda + 1, 1)$ ,  $\mathbf{n} = (\lambda + 2, 2)$ , 若  $(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \perp (\mathbf{m} - \mathbf{n})$ , 则  $\lambda =$  ( )  
 (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1
4. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 0)$ , 则函数  $f(2x + 1)$  的定义域为 ( )  
 (A)  $(-1, 1)$  (B)  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  (C)  $(-1, 0)$  (D)  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
5. 函数  $f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  ( $x > 0$ ) 的反函数  $f^{-1}(x) =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2^x - 1}$  ( $x > 0$ ) (B)  $\frac{1}{2^x - 1}$  ( $x \neq 0$ )  
 (C)  $2^x - 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) (D)  $2^x - 1$  ( $x > 0$ )
6. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $3a_{n+1} + a_n = 0$ ,  $a_2 = -\frac{4}{3}$ , 则  $\{a_n\}$  的前 10 项和等于 ( )  
 (A)  $-6(1 - 3^{-10})$  (B)  $\frac{1}{9}(1 - 3^{10})$  (C)  $3(1 - 3^{-10})$  (D)  $3(1 + 3^{-10})$
7.  $(1+x)^8(1+y)^4$  的展开式中  $x^2y^2$  的系数是 ( )  
 (A) 56 (B) 84 (C) 112 (D) 168
8. 椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右顶点分别为  $A_1$ 、 $A_2$ , 点  $P$  在  $C$  上且直线  $PA_2$  斜率的取值范围是  $[-2, -1]$ , 那么直线  $PA_1$  斜率的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$  (B)  $\left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]$  (C)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  (D)  $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$
9. 若函数  $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$  在  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  是增函数, 则  $a$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $[-1, 0]$  (B)  $[-1, +\infty)$  (C)  $[0, 3]$  (D)  $[3, +\infty)$
10. 已知正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 2AB$ , 则  $CD$  与平面  $BDC_1$  所成角的正弦值等于 ( )  
 (A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  (D)  $\frac{1}{3}$
11. 已知抛物线  $C: y^2 = 8x$  与点  $M(-2, 2)$ , 过  $C$  的焦点且斜率为  $k$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ , 则  $k =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D) 2

12. 已知函数  $f(x) = \cos x \sin 2x$ , 下列结论中错误的是

- (A)  $y = f(x)$  的图象关于点  $(\pi, 0)$  中心对称
- (B)  $y = f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{2}$  对称
- (C)  $f(x)$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D)  $f(x)$  既是奇函数, 又是周期函数

( )

18. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $(a+b+c)(a-b+c) = ac$ .

- (1) 求  $B$ ;
- (2) 若  $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ , 求  $C$ .

二、填空题

13. 已知  $\alpha$  是第三象限角,  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ , 则  $\cot \alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. 6 个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有 \_\_\_\_\_ 种. (用数字作答)

15. 记不等式组  $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 3y \geqslant 4 \\ 3x + y \leqslant 4 \end{cases}$  所表示的平面区域为  $D$ , 若直线  $y = a(x+1)$  与  $D$  有公共点, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

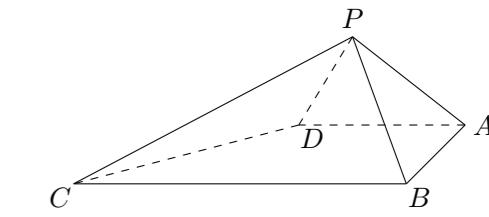
16. 已知圆  $O$  和圆  $K$  是球  $O$  的大圆和小圆, 其公共弦长等于球  $O$  的半径,  $OK = \frac{3}{2}$ , 且圆  $O$  与圆  $K$  所在的平面所成的一个二面角为  $60^\circ$ , 则球  $O$  的表面积等于 \_\_\_\_\_.

三、解答题

17. 等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_3 = a_2^2$ , 且  $S_1, S_2, S_4$  成等比数列, 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

19. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ,  $BC = 2AD$ ,  $\triangle PAB$  与  $\triangle PAD$  都是等边三角形.

- (1) 证明:  $PB \perp CD$ ;
- (2) 求二面角  $A-PD-C$  的大小.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为  $\frac{1}{2}$ , 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.
- (1) 求第 4 局甲当裁判的概率;
  - (2)  $X$  表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求  $X$  的数学期望.

21. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为 3, 直线  $y = 2$  与  $C$  的两个交点间的距离为  $\sqrt{6}$ .
- (1) 求  $a, b$ ;
  - (2) 设过  $F_2$  的直线  $l$  与  $C$  的左、右两支分别交于  $A, B$  两点, 且  $|AF_1| = |BF_1|$ , 证明:  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等比数列.

22. 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$ .
- (1) 若  $x \geq 0$  时  $f(x) \leq 0$ , 求  $\lambda$  的最小值;
  - (2) 设数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ , 证明:  $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$ .