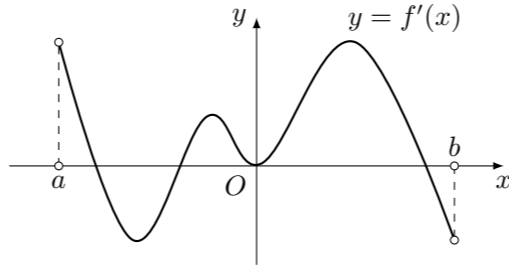


# 理科数学

## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位,  $\frac{i}{1+i} =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (B)  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  (C)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$  (D)  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2. 如果双曲线的两个焦点分别为  $F_1(-3, 0)$ 、 $F_2(3, 0)$ , 一条渐近线方程为  $y = \sqrt{2}x$ , 那么它的两条渐近线间的距离是 ( )  
(A)  $6\sqrt{3}$  (B) 4 (C) 2 (D) 1
3. 设变量  $x$ 、 $y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq x \\ x + y \geq 2 \\ y \geq 3x - 6 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = 2x + y$  的最小值为 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9
4. 设集合  $M = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ,  $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$ , 那么“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
5. 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法有 ( )  
(A) 10 种 (B) 20 种 (C) 36 种 (D) 52 种
6. 设  $m$ 、 $n$  是两条不同的直线,  $\alpha$ 、 $\beta$  是两个不同的平面. 考查下列命题, 其中正确的命题是 ( )  
(A)  $m \perp \alpha, n \subset \beta, m \perp n \Rightarrow \alpha \perp \beta$   
(B)  $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha, n \parallel \beta \Rightarrow m \perp n$   
(C)  $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n \parallel \beta \Rightarrow m \perp n$   
(D)  $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m \Rightarrow n \perp \beta$
7. 已知数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为  $a_1$ 、 $b_1$ , 且  $a_1 + b_1 = 5$ ,  $a_1, b_1 \in \mathbf{N}^*$ . 设  $C_n = a_{b_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则数列  $\{C_n\}$  的前 10 项和等于 ( )  
(A) 55 (B) 70 (C) 85 (D) 100
8. 已知函数  $f(x) = a \sin x - b \cos x$  ( $a$ 、 $b$  为常数,  $a \neq 0, x \in \mathbf{R}$ ) 在  $x = \frac{\pi}{4}$  处取得最小值, 则函数  $y = f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$  是 ( )  
(A) 偶函数且它的图象关于点  $(\pi, 0)$  对称  
(B) 偶函数且它的图象关于点  $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$  对称  
(C) 奇函数且它的图象关于点  $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$  对称  
(D) 奇函数且它的图象关于点  $(\pi, 0)$  对称

9. 函数  $f(x)$  的定义域为开区间  $(a, b)$ , 导函数  $f'(x)$  在  $(a, b)$  内的图像如图所示, 则函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有极小值点 ( )

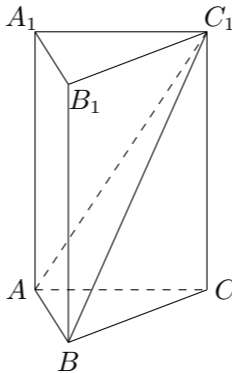


- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

10. 已知函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的图象关于直线  $y = x$  对称, 记  $g(x) = f(x)[f(x) + f(2) - 1]$ . 若  $y = g(x)$  在区间  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$  上是增函数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
(A)  $[2, +\infty)$  (B)  $(0, 1) \cup (1, 2)$   
(C)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$  (D)  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

## 二、填空题

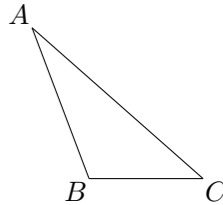
11.  $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的二项展开式中  $x$  的系数是\_\_\_\_\_. (用数字作答)
12. 设向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\theta$ , 且  $\mathbf{a} = (3, 3)$ ,  $2\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-1, 1)$ , 则  $\cos \theta =$ \_\_\_\_\_.
13. 如图, 在正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 1$ . 若二面角  $C - AB - C_1$  的大小为  $60^\circ$ , 则点  $C$  到平面  $ABC_1$  的距离为\_\_\_\_\_.



14. 设直线  $ax - y + 3 = 0$  与圆  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  相交于  $A$ 、 $B$  两点, 且弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买  $x$  吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为  $4x$  万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则  $x =$ \_\_\_\_\_吨.
16. 设函数  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ , 点  $A_0$  表示坐标原点, 点  $A_n(n, f(n))$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 若向量  $\vec{a_n} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ ,  $\theta_n$  是  $\vec{a_n}$  与  $\vec{i}$  的夹角 (其中  $\vec{i} = (1, 0)$ ), 设  $S_n = \tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \cdots + \tan \theta_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.

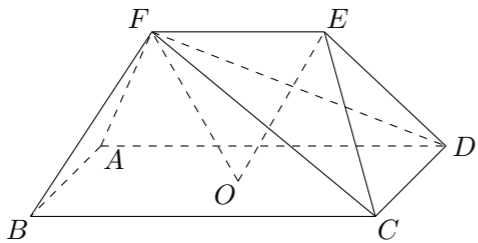
## 三、解答题

17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AC = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ .  
(1) 求  $AB$  的值;  
(2) 求  $\sin(2A + C)$  的值.



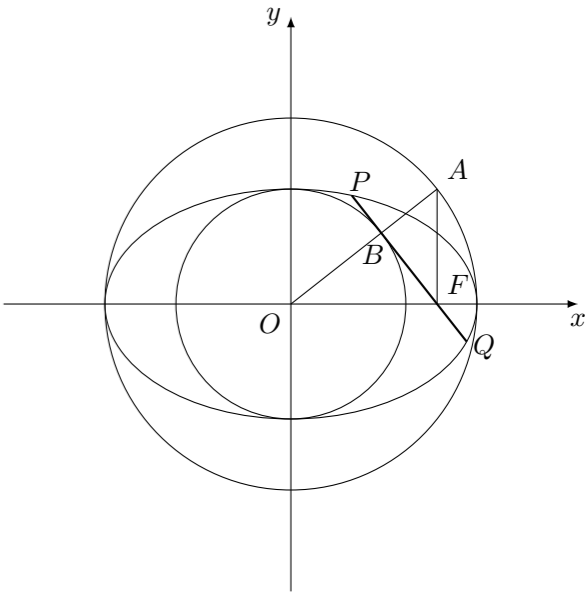
18. 某射手进行射击训练, 假设每次射击击中目标的概率为  $\frac{3}{5}$ , 且每次射击的结果互不影响.  
(1) 求射手在 3 次射击中, 至少有两次连续击中目标的概率 (用数字作答);  
(2) 求射手第 3 次击中目标时, 恰好射击了 4 次的概率 (用数字作答);  
(3) 设随机变量  $\xi$  表示射手第 3 次击中目标时已射击的次数, 求  $\xi$  的分布列.

19. 如图, 在五面体  $ABCDEF$  中, 点  $O$  是矩形  $ABCD$  的对角线的交点, 面  $CDE$  是等边三角形, 棱  $EF \parallel BC$  且  $EF = \frac{1}{2}BC$ .
- (1) 证明:  $FO \parallel$  平面  $CDE$ ;
- (2) 设  $BC = \sqrt{3}CD$ , 证明:  $EO \perp$  平面  $CDF$ .



21. 已知数列  $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$  满足  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $y_1 = y_2 = 2$ , 并且  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \frac{x_n}{x_{n-1}}$ ,  $\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \lambda \frac{y_n}{y_{n-1}}$  ( $\lambda$  为非零参数,  $n = 2, 3, 4, \dots$ ).
- (1) 若  $x_1, x_3, x_5$  成等比数列, 求参数  $\lambda$  的值;
- (2) 当  $\lambda > 0$  时, 证明:  $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ );
- (3) 当  $\lambda > 1$ , 证明:  $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} + \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} + \dots + \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

22. 如图, 以椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的中心  $O$  为圆心, 分别以  $a$  和  $b$  为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点  $F(c, 0)$  ( $c > b$ ) 作垂直于  $x$  轴的直线交大圆于第一象限内的点  $A$ . 连结  $OA$  交小圆于点  $B$ . 设直线  $BF$  是小圆的切线.
- (1) 证明  $c^2 = ab$ , 并求直线  $BF$  与  $y$  轴的交点  $M$  的坐标;
- (2) 设直线  $BF$  交椭圆于  $P$ 、 $Q$  两点, 证明:  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}b^2$ .



20. 已知函数  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 \cos \theta + \frac{3}{16} \cos \theta$ , 其中  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\theta$  为参数, 且  $0 \leq \theta < 2\pi$ .
- (1) 当  $\cos \theta = 0$  时, 判断函数  $f(x)$  是否有极值;
- (2) 要使函数  $f(x)$  的极小值大于零, 求参数  $\theta$  的取值范围;
- (3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数  $\theta$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(2a - 1, a)$  内都是增函数, 求实数  $a$  的取值范围.