

文科数学

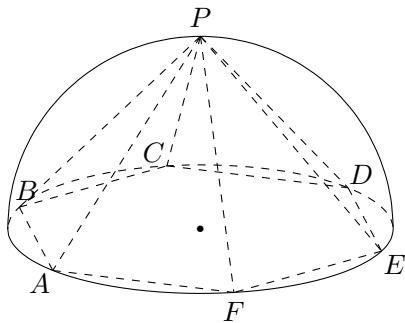
一、选择题

- 函数 $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
- 设集合 $A = \{1, 2\}$, 则满足 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 的集合 B 的个数是 ()
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 8
- 设 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ()
(A) $f(x)f(-x)$ 是奇函数 (B) $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
(C) $f(x) + f(-x)$ 是偶函数 (D) $f(x) - f(-x)$ 是偶函数
- $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$ 的值为 ()
(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64
- 方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两个根可分别作为 ()
(A) 一个椭圆和一双曲线的离心率 (B) 两抛物线的离心率
(C) 一个椭圆和一抛物线的离心率 (D) 两椭圆的离心率
- 给出下列四个命题:
① 垂直于同一直线的两条直线互相平行;
② 垂直于同一平面的两个平面互相平行;
③ 若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行;
④ 若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线.
其中假命题的个数是 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的两条渐近线与直线 $x = 3$ 围成一个三角形区域, 表示该区域的不等式组是 ()
(A) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 3 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$
- 设 \oplus 是 \mathbf{R} 上的一个运算, A 是 \mathbf{R} 的非空子集, 若对任意 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 对运算 \oplus 封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法 (除数不等于零) 四则运算都封闭的是 ()
(A) 自然数集 (B) 整数集 (C) 有理数集 (D) 无理数集
- $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C , 所对边的长分别为 a, b, c , 设向量 $\vec{p} = (a+c, b)$ 、 $\vec{q} = (b-a, c-a)$. 若 $\vec{p} \parallel \vec{q}$, 则角 C 的大小为 ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$
- 已知等腰 $\triangle ABC$ 的腰为底的 2 倍, 则顶角 A 的正切值是 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{7}$

- 与方程 $y = e^{2x} - 2e^x + 1$ ($x \geq 0$) 的曲线关于直线 $y = x$ 对称的曲线方程为 ()
(A) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$ (B) $y = \ln(1 - \sqrt{x})$
(C) $y = -\ln(1 + \sqrt{x})$ (D) $y = -\ln(1 - \sqrt{x})$
- 曲线 $\frac{x^2}{10-m} + \frac{y^2}{6-m} = 1$ ($m < 6$) 与曲线 $\frac{x^2}{5-n} + \frac{y^2}{9-n} = 1$ ($5 < n < 9$) 的 ()
(A) 离心率相等 (B) 焦距相等 (C) 焦点相同 (D) 准线相同

二、填空题

- 方程 $\log_2(x-1) = 2 - \log_2(x+1)$ 的解为_____.
- 设 $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$ _____.
- 如图, 半径为 2 的半球内有一内接正六棱锥 $P-ABCDEF$, 则此正六棱锥的侧面积是_____.



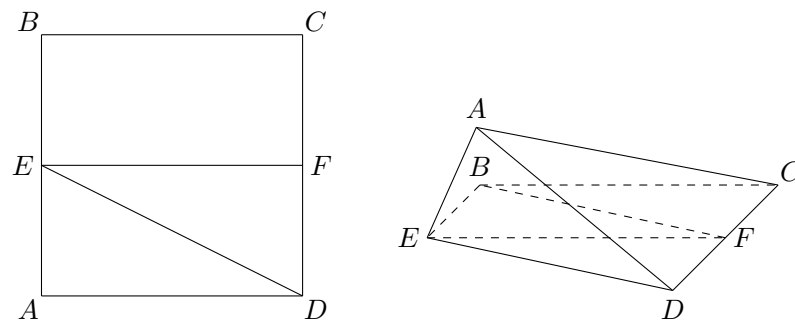
- 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员排成 1、2、3 号参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员, 且 1、2 号中至少有 1 名新队员的排列方法有_____种. (以数作答)

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$. 求:
(1) 函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值的自变量 x 的集合;
(2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

- 甲、乙两班各派 2 名同学参加年级数学竞赛, 参赛同学成绩及格的概率都为 0.6, 且参赛同学的成绩相互之间没有影响. 求:
(1) 甲、乙两班参赛同学中各有 1 名同学成绩及格的概率;
(2) 甲、乙两班参赛同学中至少有 1 名同学成绩及格的概率.

- 已知正方形 $ABCD$, E, F 分别是边 AB, CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起, 如图所示, 记二面角 $A-DE-C$ 的大小为 θ ($0 < \theta < \pi$).
(1) 证明: $BF \parallel$ 平面 ADE ;
(2) 若 $\triangle ACD$ 为正三角形, 试判断点 A 在平面 $BCDE$ 内的射影 G 是否在直线 EF 上, 证明你的结论, 并求角 θ 的余弦值.



20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = pn^2 - 2n + q$ ($p, q \in \mathbf{R}$), $n \in \mathbf{N}_+$.
- (1) 求 q 的值;
 - (2) 若 a_1 与 a_5 的等差中项为 18, b_n 满足 $a_n = 2\log_2 b_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (a+d)x^2 + (a+2d)x + d$, $g(x) = ax^2 + 2(a+2d)x + a + 4d$, 其中 $a > 0$, $d > 0$, 设 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, x_1 为 $g(x)$ 的极值点, $g(x_2) = g(x_3) = 0$, 并且 $x_2 < x_3$. 将点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, g(x_1))$, $(x_2, 0)$, $(x_3, 0)$ 依次记为 A, B, C, D .
- (1) 求 x_0 的值;
 - (2) 若四边形 $APCD$ 为梯形且面积为 1, 求 a, d 的值.
22. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ($x_1, x_2 \neq 0$) 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的两个动点, O 是坐标原点, 向量 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 满足 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. 设圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y = 0$.
- (1) 证明线段 AB 是圆 C 的直径;
 - (2) 当圆 C 的圆心到直线 $x - 2y = 0$ 的距离的最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 p 的值.