

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A)
- $(-1, +\infty)$
- (B)
- $(-\infty, 2)$
- (C)
- $(-1, 2)$
- (D)
- \emptyset

2. 设 $z = i(2+i)$, 则 $\bar{z} =$ ()

- (A)
- $1+2i$
- (B)
- $-1+2i$
- (C)
- $1-2i$
- (D)
- $-1-2i$

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ ()

- (A)
- $\sqrt{2}$
- (B) 2 (C)
- $5\sqrt{2}$
- (D) 50

4. 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为 ()

- (A)
- $\frac{2}{3}$
- (B)
- $\frac{3}{5}$
- (C)
- $\frac{2}{5}$
- (D)
- $\frac{1}{5}$

5. 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.

甲: 我的成绩比乙高.

乙: 丙的成绩比我和甲的都高.

丙: 我的成绩比乙高.

成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 ()

- (A) 甲、乙、丙 (B) 乙、甲、丙 (C) 丙、乙、甲 (D) 甲、丙、乙

6. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()

- (A)
- $e^{-x} - 1$
- (B)
- $e^{-x} + 1$
- (C)
- $-e^{-x} - 1$
- (D)
- $-e^{-x} + 1$

7. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是 ()

- (A)
- α
- 内有无数条直线与
- β
- 平行 (B)
- α
- 内有两条相交直线与
- β
- 平行
-
- (C)
- α, β
- 平行于同一条直线 (D)
- α, β
- 垂直于同一平面

8. 若 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 两个相邻的极值点, 则 $\omega =$ ()

- (A) 2 (B)
- $\frac{3}{2}$
- (C) 1 (D)
- $\frac{1}{2}$

9. 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8

10. 曲线 $y = 2 \sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 ()

- (A)
- $x - y - \pi - 1 = 0$
- (B)
- $2x - y - 2\pi - 1 = 0$
-
- (C)
- $2x + y - 2\pi + 1 = 0$
- (D)
- $x + y - \pi + 1 = 0$

11. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()

- (A)
- $\frac{1}{5}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (D)
- $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 ()

- (A)
- $\sqrt{2}$
- (B)
- $\sqrt{3}$
- (C) 2 (D)
- $\sqrt{5}$

二、填空题

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - y$ 的最大值是_____.

14. 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A + a \cos B = 0$, 则 $B =$ _____.

16. 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____.



图 1

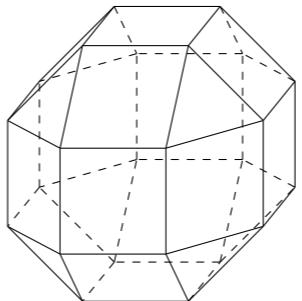
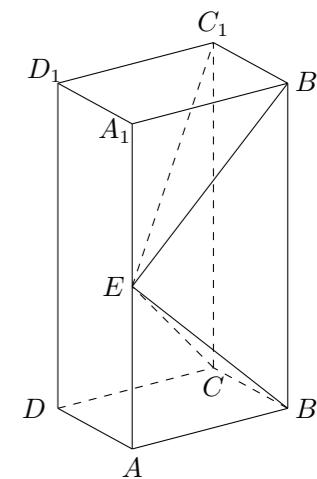


图 2

三、解答题

17. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.(1) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;(2) 若 $AE = A_1E$, $AB = 3$, 求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.

19. 某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.
21. 已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - x - 1$. 证明:
- $f(x)$ 存在唯一的极值点;
 - $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.
22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0, \theta_0)$ ($\rho_0 > 0$) 在曲线 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P .
- 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;
 - 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

y 的分组	[−0.20, 0)	[0, 0.20)	[0.20, 0.40)	[0.40, 0.60)	[0.60, 0.80)
企业数	2	24	53	14	7

- (1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;
- (2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)
- 附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.

- (1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;
- (2) 如果存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

23. 已知 $f(x) = |x-a|x + |x-2|(x-a)$.
- 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;
 - 若 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.