

理科数学

一、选择题

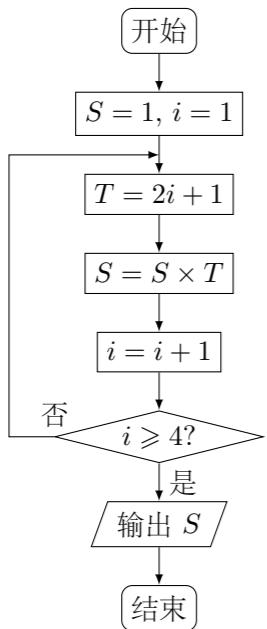
1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{7+i}{3+4i} =$ ()

- (A) $1-i$ (B) $-1+i$ (C) $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$ (D) $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \geqslant 0 \\ x-y-2 \leqslant 0 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x+2y$ 的最小值为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 S 的值为 ()



- (A) 15 (B) 105 (C) 245 (D) 945

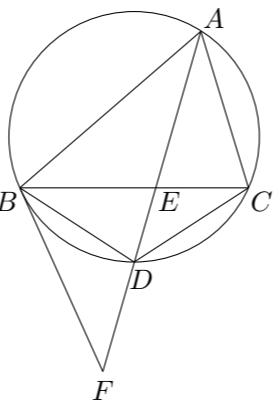
4. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$ 的单调递增区间是 ()

- (A) $(0, +\infty)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -2)$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ (B) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
 (C) $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ (D) $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$

6. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D , 交 BC 于 E , 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2 = FD \cdot FA$; ③ $AE \cdot CE = BE \cdot DE$; ④ $AF \cdot BD = AB \cdot BF$. 则所有正确结论的序号是 ()



13. 在以 O 为极点的极坐标系中, 圆 $\rho = 4 \sin \theta$ 和直线 $\rho \sin \theta = a$ 相交于 A, B 两点. 若 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 则 a 的值为 _____.
 14. 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|, x \in \mathbf{R}$. 若方程 $f(x) - a|x-1| = 0$ 恰有 4 个互异的实数根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

7. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

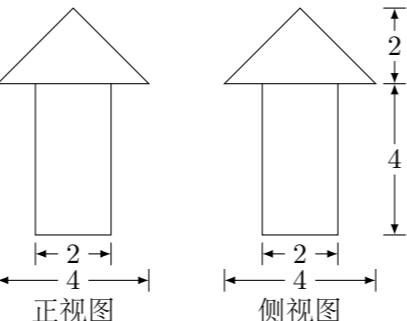
8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BE = \lambda BC, DF = \mu DC$, 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{12}$

二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 $4:5:5:6$, 则应从一年级本科生中抽取 _____ 名学生.

10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为 _____ m^3 .

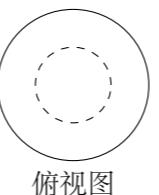


11. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和. 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 a_1 的值为 _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $b - c = \frac{1}{4}a$, $2 \sin B = 3 \sin C$, 则 $\cos A$ 的值为 _____.

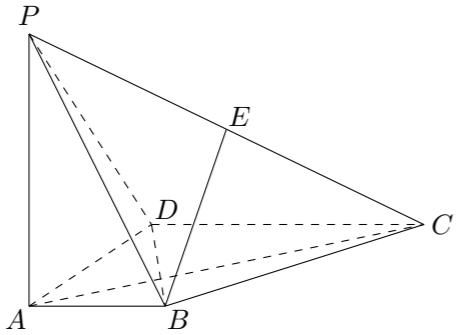
16. 某大学志愿者协会有 6 名男同学, 4 名女同学. 在这 10 名同学中, 3 名同学来自数学学院, 其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学, 到希望小学进行支教活动 (每位同学被选到的可能性相同).

- (1) 求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率;
 (2) 设 X 为选出的 3 名同学中女同学的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.



俯视图

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = AP = 2$, $AB = 1$, 点 E 为棱 PC 的中点.
- 证明: $BE \perp DC$;
 - 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值;
 - 若 F 为棱 PC 上一点, 满足 $BF \perp AC$, 求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.
19. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, 集合 $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.
- 当 $q = 2, n = 3$ 时, 用列举法表示集合 A ;
 - 设 $s, t \in A$, $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$, $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$, 其中 $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: 若 $a_n < b_n$, 则 $s < t$.
20. 已知函数 $f(x) = x - ae^x$ ($a \in \mathbf{R}$), $x \in \mathbf{R}$, 已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.
- 求 a 的取值范围;
 - 证明 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大;
 - 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大.



18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 上顶点为 B , 已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.
- 求椭圆的离心率;
 - 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 , 经过原点 O 的直线 l 与该圆相切. 求直线 l 的斜率.