2005 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 方程 $\lg x^2-\lg(x+2)=0$ 的解集是______.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{1+2+\cdots+n}=$______.

3. 若 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, 且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=$______.

4. 函数 $f(x)=-x^2\ (x\in(-\infty,-2])$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=4$, 则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.

6. 某班共有 40 名学生, 其中只有一对双胞胎, 若从中一次随机抽查三位学生的作业, 则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是______. (结果用最简分数表示)

7. 双曲线 $9x^2-16y^2=1$ 的焦距是______.

8. 若 $(x+2)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+cx+2^n$ ($n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 3$), 且 $a:b=3:2$, 则 $n=$______.

9. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n\in\mathbf{N}$). 关于数列 $\{a_n\}$ 有下列三个命题:
① 若 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列, 则 $a_n=a_{n+1}\quad(n\in\mathbf{N})$;
② 若 $S_n=an^2+bn$ ($a,\ b\in\mathbf{R}$), 则 $\{a_n\}$ 是等差数列;
③ 若 $S_n=1-(-1)^n$, 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.
这些命题中, 真命题的序号是______.

10. 若集合 $A=\{x\,|3\cos2\pi x=3^x, x\in\mathbf{R}\}$, 集合 $B=\{y\,|y^2=1, y\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$______.

11. 函数 $y=\sin x+\arcsin x$ 的值域是______.

12. 已知函数 $f(x)=2^x+\log_2 x$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=0.1n$ ($n\in\mathbf{N}$), 当 $|f(a_n)-2005|$ 取得最小值时, $n=$______.

二、选择题

13. 已知直线 l、m、n 及平面 α, 下列命题中的假命题是 (　)
(A) 若 $l\parallel m$, $m\parallel n$, 则 $l\parallel n$　　(B) 若 $l\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $l\perp n$
(C) 若 $l\perp m$, $m\parallel n$, 则 $l\perp n$　　(D) 若 $l\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $l\parallel n$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$, 则 $\triangle ABC$ 是 (　)
(A) 直角三角形　　(B) 等边三角形
(C) 钝角三角形　　(D) 等腰直角三角形

15. 若 a、b、c 是常数, 则“$a>0$ 且 $b^2-4ac<0$”是“对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $ax^2+bx+c>0$”的 (　)
(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

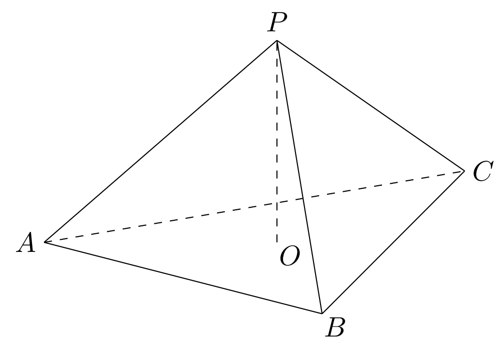
16. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 有下列三个命题:
① 若存在常数 M, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x)\leqslant M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值;
② 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 且 $x\neq x_0$, 有 $f(x)<f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值;
③ 若存在 $x_0\in\mathrm{R}$, 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$, 则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值.
这些命题中, 真命题的个数是 (　)
(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

三、解答题

17. 已知 z 是复数, $z+2\mathrm{i}\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数 (i 为虚数单位), 且复数 $(z+a\mathrm{i})^2$ 在复平面上对应的点在第一象限, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知 $\tan\alpha$ 是方程 $x^2+2x\sec\alpha+1=0$ 的两个根中较小的根, 求 α 的值.

19. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $72\sqrt{3}$, 侧面与底面所成的二面角的大小为 60°.
(1) 证明: $PA\perp BC$;
(2) 求底面中心 O 到侧面的距离.



20. 某市 2004 年底有住房面积 1200 万平方米, 计划从 2005 年起, 每年拆除 20 万平方米的旧住房. 假定该市每年新建住房面积是上年年底住房面积的 5%.

(1) 分别求 2005 年底和 2006 年底的住房面积;

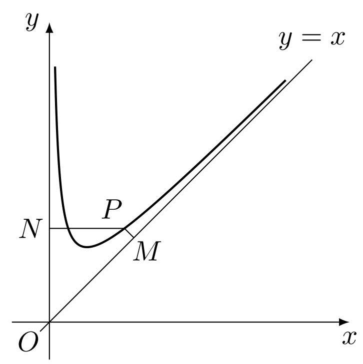
(2) 求 2024 年底的住房面积. (计算结果以万平方米为单位, 且精确到 0.01)

21. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(2)=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M、N.

(1) 求 a 的值;

(2) 问: $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;

(3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.



22. (1) 求右焦点坐标是 $(2,0)$, 且经过点 $(-2,-\sqrt{2})$ 的椭圆的标准方程;

(2) 已知椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 设斜率为 k 的直线 l, 交椭圆 C 于 A、B 两点, AB 的中点为 M. 证明: 当直线 l 平行移动时, 动点 M 在一条过原点的定直线上;

(3) 利用 (2) 所揭示的椭圆几何性质, 用作图方法找出下面给定椭圆的中心, 简要写出作图步骤, 并在图中标出椭圆的中心.