

2013 年普通高等学校招生考试 (辽宁卷)

# 理科数学

一、选择题

1. 复数的  $z = \frac{1}{i-1}$  模为 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D) 2

2. 已知集合  $A = \{x | 0 < \log_4 x < 1\}$ ,  $B = \{x | x \leq 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- (A)  $(0, 1)$  (B)  $(0, 2]$  (C)  $(1, 2)$  (D)  $(1, 2]$

3. 已知点  $A(1, 3)$ ,  $B(4, -1)$ , 则与向量  $\overrightarrow{AB}$  同方向的单位向量为 ( )

- (A)  $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$  (B)  $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$  (C)  $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  (D)  $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

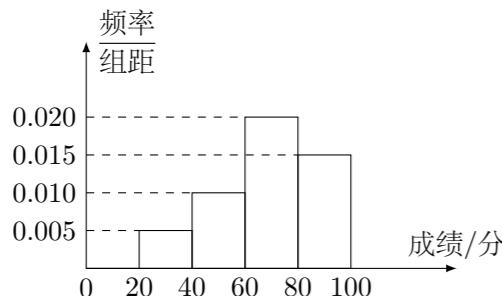
4. 下面是关于公差  $d > 0$  的等差数列  $\{a_n\}$  的四个命题:

- $p_1$ : 数列  $\{a_n\}$  是递增数列;  
 $p_2$ : 数列  $\{na_n\}$  是递增数列;  
 $p_3$ : 数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是递增数列;  
 $p_4$ : 数列  $\{a_n + 3nd\}$  是递增数列.

其中的真命题为 ( )

- (A)  $p_1, p_2$  (B)  $p_3, p_4$  (C)  $p_2, p_3$  (D)  $p_1, p_4$

5. 某班的全体学生参加英语测试, 成绩的频率分布直方图如图, 数据的分组依次为:  $[20, 40)$ ,  $[40, 60)$ ,  $[60, 80)$ ,  $[80, 100]$ . 若低于 60 分的人数是 15, 则该班的学生人数是 ( )



- (A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 60

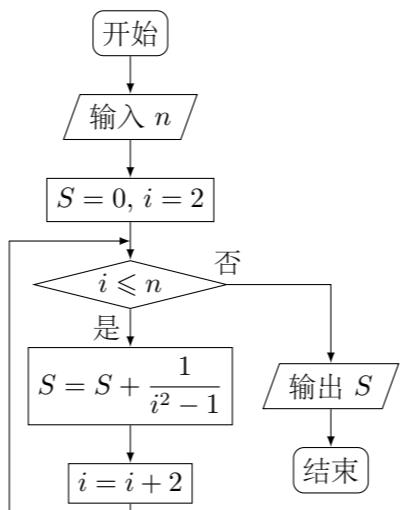
6. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{1}{2}b$ , 且  $a > b$ , 则  $\angle B =$  ( )

- (A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{2\pi}{3}$  (D)  $\frac{5\pi}{6}$

7. 使  $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ) 的展开式中含有常数项的最小的  $n$  为 ( )

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

8. 执行如图所示的程序框图, 若输入  $n = 10$ , 则输出  $S =$  ( )



- (A)  $\frac{5}{11}$  (B)  $\frac{10}{11}$  (C)  $\frac{36}{55}$  (D)  $\frac{72}{55}$

9. 已知点  $O(0, 0)$ ,  $A(0, b)$ ,  $B(a, a^3)$ . 若  $\triangle OAB$  为直角三角形, 则必有 ( )

- (A)  $b = a^3$  (B)  $b = a^3 + \frac{1}{a}$   
(C)  $(b - a^3)\left(b - a^3 - \frac{1}{a}\right) = 0$  (D)  $|b - a^3| + \left|b - a^3 - \frac{1}{a}\right| = 0$

10. 已知直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的 6 个顶点都在球  $O$  的球面上. 若  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AA_1 = 12$ , 则球  $O$  的半径为 ( )

- (A)  $\frac{3\sqrt{17}}{2}$  (B)  $2\sqrt{10}$  (C)  $\frac{13}{2}$  (D)  $3\sqrt{10}$

11. 已知函数  $f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2$ ,  $g(x) = -x^2 + 2(a-2)x - a^2 + 8$ , 设  $H_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $H_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  ( $\max\{p, q\}$  表示  $p, q$  中的较大值,  $\min\{p, q\}$  表示  $p, q$  中的较小值). 记  $H_1(x)$  的最小值为  $A$ ,  $H_2(x)$  的最大值为  $B$ , 则  $A - B =$  ( )

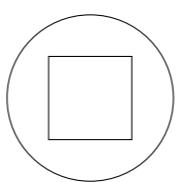
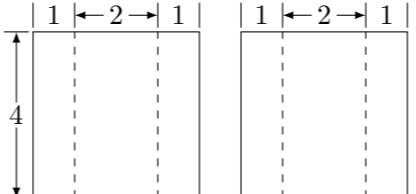
- (A) 16 (B) -16 (C)  $a^2 - 2a - 16$  (D)  $a^2 + 2a - 16$

12. 设函数  $f(x)$  满足  $x^2 f'(x) + 2x f(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $f(2) = \frac{e^2}{8}$ , 则  $x > 0$  时,  $f(x)$  ( )

- (A) 有极大值, 无极小值 (B) 有极小值, 无极大值  
(C) 既有极大值又有极小值 (D) 既无极大值也无极小值

二、填空题

13. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是\_\_\_\_\_.



14. 已知等比数列  $\{a_n\}$  是递增数列,  $S_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1, a_3$  是方程  $x^2 - 5x + 4 = 0$  的两个根, 则  $S_6 =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ ,  $C$  与过原点的直线相交于  $A, B$  两点, 连接  $AF, BF$ , 若  $|AB| = 10$ ,  $|AF| = 6$ ,  $\cos \angle ABF = \frac{4}{5}$ , 则椭圆  $C$  的离心率  $e =$  \_\_\_\_\_.

16. 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数, 从全校随机抽取 5 个班级, 把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7, 样本方差为 4, 且样本数据互不相同, 则样本数据中的最大值为 \_\_\_\_\_.

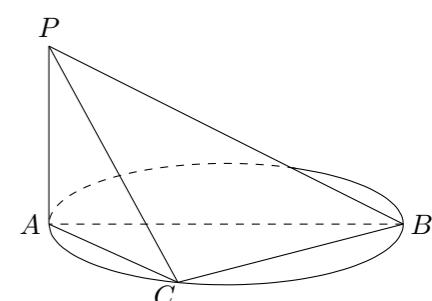
三、解答题

17. 设向量  $\mathbf{a} = (\sqrt{3} \sin x, \sin x)$ ,  $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- (1) 若  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ , 求  $x$  的值;  
(2) 设函数  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , 求  $f(x)$  的最大值.

18. 如图,  $AB$  是圆的直径,  $PA$  垂直圆所在的平面,  $C$  是圆上的点.

- (1) 求证: 平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ ;  
(2) 若  $AB = 2$ ,  $AC = 1$ ,  $PA = 1$ , 求二面角  $C-PB-A$  的余弦值.



19. 现有 10 道题, 其中 6 道甲类题, 4 道乙类题, 张同学从中任取 3 道题解答.
- 求张同学至少取到 1 道乙类题的概率;
  - 已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题, 1 道乙类题. 设张同学答对每道甲类题的概率都是  $\frac{3}{5}$ , 答对每道乙类题的概率都是  $\frac{4}{5}$ , 且各题答对与否相互独立. 用  $X$  表示张同学答对题的个数, 求  $X$  的分布列和数学期望.
20. 如图, 抛物线  $C_1 : x^2 = 4y$ ,  $C_2 : x^2 = -2py$  ( $p > 0$ ). 点  $M(x_0, y_0)$  在抛物线  $C_2$  上, 过  $M$  作  $C_1$  的切线, 切点为  $A, B$  ( $M$  为原点  $O$  时,  $A, B$  重合于  $O$ ). 当  $x_0 = 1 - \sqrt{2}$  时, 切线  $MA$  的斜率为  $-\frac{1}{2}$ .
- 求  $p$  的值;
  - 当  $M$  在  $C_2$  上运动时, 求线段  $AB$  中点  $N$  的轨迹方程 ( $A, B$  重合于  $O$  时, 中点为  $O$ ).
21. 已知函数  $f(x) = (1+x)e^{-2x}$ ,  $g(x) = ax + \frac{x^3}{2} + 1 + 2x \cos x$ , 当  $x \in [0, 1]$  时,
- 求证:  $1-x \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$ ;
  - 若  $f(x) \geq g(x)$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.
22. 如图,  $AB$  为  $\odot O$  直径, 直线  $CD$  与  $\odot O$  相切于  $E$ ,  $AD \perp CD$  于  $D$ ,  $BC \perp CD$  于  $C$ ,  $EF \perp AB$  于  $F$ , 连接  $AE, BE$ . 证明:
- $\angle FEB = \angle CEB$ ;
  - $EF^2 = AD \cdot BC$ .
23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以  $O$  为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系. 圆  $C_1$ , 直线  $C_2$  的极坐标方程分别为  $\rho = 4 \sin \theta$ ,  $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ .
- 求  $C_1$  与  $C_2$  交点的极坐标;
  - 设  $P$  为  $C_1$  的圆心,  $Q$  为  $C_1$  与  $C_2$  交点连线的中点, 已知直线  $PQ$  的参数方程为  $\begin{cases} x = t^3 + a \\ y = \frac{b}{2}t^3 + 1 \end{cases}$  ( $t \in \mathbf{R}$  为参数), 求  $a, b$  的值.
24. 已知函数  $f(x) = |x-a|$ , 其中  $a > 1$ .
- 当  $a=2$  时, 求不等式  $f(x) \geq 4 - |x-4|$  的解集;
  - 已知关于  $x$  的不等式  $|f(2x+a) - 2f(x)| \leq 2$  的解集为  $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$ , 求  $a$  的值.

