

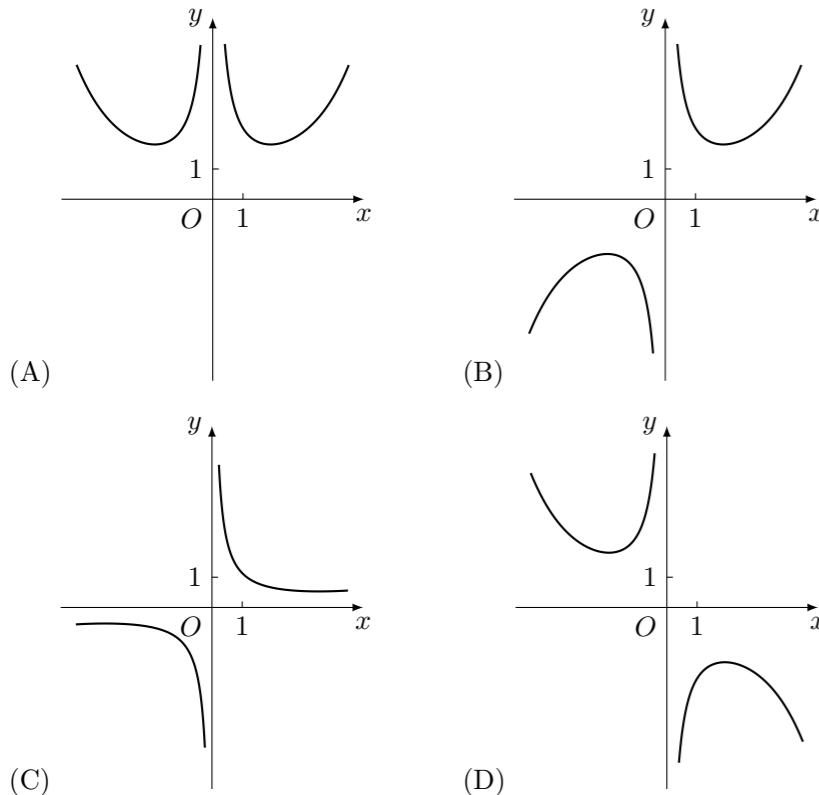
理科数学

一、选择题

1. $\frac{1+2i}{1-2i} =$ ()
 (A) $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$ (B) $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$ (C) $-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ (D) $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为
 (A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 4

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ()

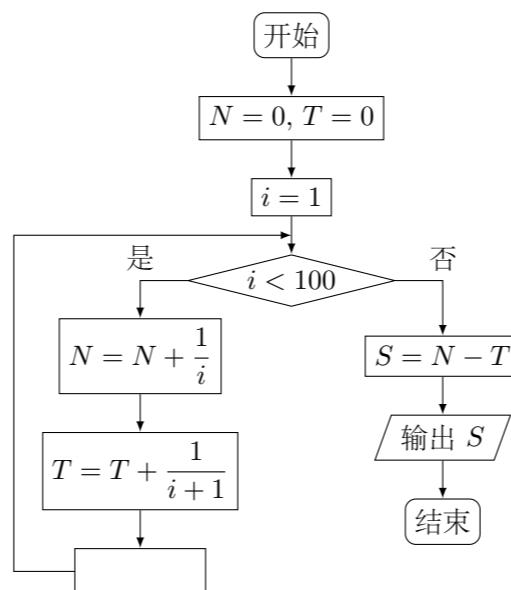


4. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$, 则 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) =$ ()
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()
 (A) $y = \pm\sqrt{2}x$ (B) $y = \pm\sqrt{3}x$ (C) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC = 1$, $AC = 5$, 则 $AB =$ ()
 (A) $4\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{30}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ()



- (A) $i = i + 1$ (B) $i = i + 2$ (C) $i = i + 3$ (D) $i = i + 4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”, 如 $30 = 7 + 23$. 在不超过 30 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 30 的概率是 ()
 (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 1$, $AA_1 = \sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ()
 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) =$ ()
 (A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左, 右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为 ()
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

二、填空题

13. 曲线 $y = 2 \ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

15. 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

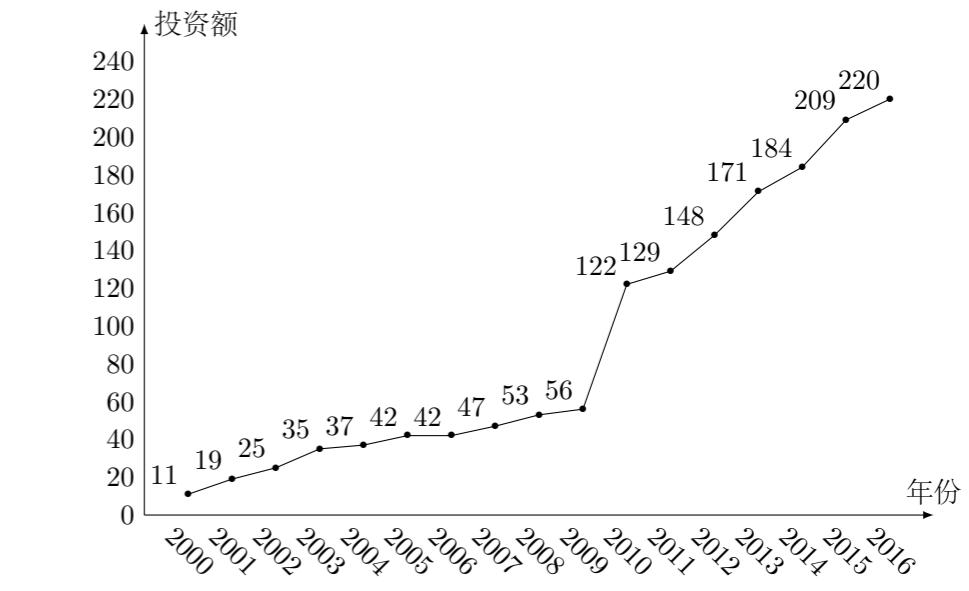
16. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为_____.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7, S_3 = -15$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, \dots , 17) 建立模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, \dots , 7) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.
- (1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;
 (2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$.
- 求 l 的方程;
 - 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.
21. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.
- 若 $a = 1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;
 - 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .
22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).
- 求 C 和 l 的直角坐标方程;
 - 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.
20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $PA = PB = PC = AC = 4$, O 为 AC 的中点.
- 证明: $PO \perp$ 平面 ABC ;
 - 若点 M 在棱 BC 上, 且二面角 $M-PA-C$ 为 30° , 求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.
23. 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.
- 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
 - 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

