

理科数学

一、选择题

1. 满足 $\frac{z+i}{z} = i$ (i 为虚数单位) 的复数 $z =$ ()

- (A)
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- (B)
- $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- (C)
- $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
- (D)
- $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1, p_2, p_3 , 则 ()

- (A)
- $p_1 = p_2 < p_3$
- (B)
- $p_2 = p_3 < p_1$
- (C)
- $p_1 = p_3 < p_2$
- (D)
- $p_1 = p_2 = p_3$

3. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 且 $f(x) - g(x) = x^3 + x^2 + 1$, 则 $f(1) + g(1) =$ ()

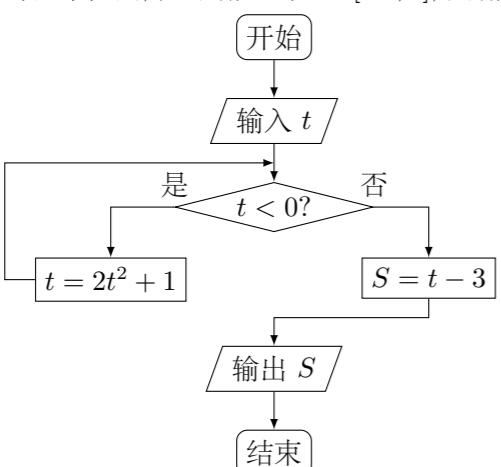
- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

4. $\left(\frac{1}{2}x - 2y\right)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数是 ()

- (A) -20 (B) -5 (C) 5 (D) 20

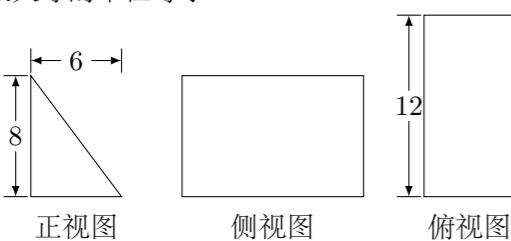
5. 已知命题 p : 若 $x > y$, 则 $-x < -y$; 命题 q : 若 $x > y$, 则 $x^2 > y^2$, 在命题 ① $p \wedge q$; ② $p \vee q$; ③ $p \wedge (\neg q)$; ④ $(\neg p) \vee q$ 中, 真命题是 ()

- (A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

6. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t \in [-2, 2]$, 则输出的 S 属于 ()

- (A)
- $[-6, -2]$
- (B)
- $[-5, -1]$
- (C)
- $[-4, 5]$
- (D)
- $[-3, 6]$

7. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ()



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 某市生产总值连续两年持续增加. 第一年的增长率为 p , 第二年的增长率为 q , 则该市这两年生产总值的年平均增长率为 ()

- (A)
- $\frac{p+q}{2}$
- (B)
- $\frac{(p+1)(q+1)-1}{2}$
-
- (C)
- \sqrt{pq}
- (D)
- $\sqrt{(p+1)(q+1)} - 1$

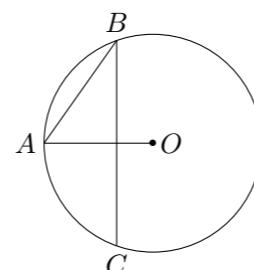
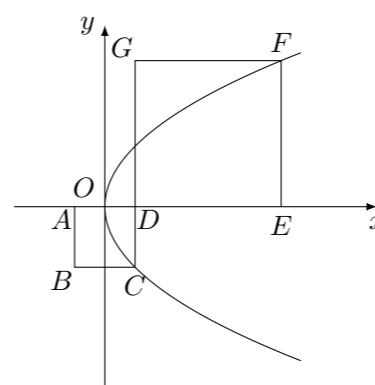
9. 已知函数 $f(x) = \sin(x - \varphi)$, 且 $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, 则函数 $f(x)$ 的图象的一条对称轴是 ()

- (A)
- $x = \frac{5\pi}{6}$
- (B)
- $x = \frac{7\pi}{12}$
- (C)
- $x = \frac{\pi}{3}$
- (D)
- $x = \frac{\pi}{6}$

10. 已知函数 $f(x) = x^2 + e^x - \frac{1}{2}$ ($x < 0$) 与 $g(x) = x^2 + \ln(x+a)$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点, 则 a 的取值范围是 ()

- (A)
- $(-\infty, \frac{1}{\sqrt{e}})$
- (B)
- $(-\infty, \sqrt{e})$
- (C)
- $(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e})$
- (D)
- $(-\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

二、填空题

11. 在平面直角坐标系中, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 $C: \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数) 交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 2$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 则直线 l 的极坐标方程是_____.12. 如图, 已知 AB, BC 是 $\odot O$ 的两条弦, $AO \perp BC$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{2}$, 则 $\odot O$ 的半径等于_____.13. 若关于 x 的不等式 $|ax - 2| < 3$ 的解集为 $\left\{x \mid -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}\right\}$, 则 $a =$ _____.14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leqslant x \\ x + y \leqslant 4 \\ y \geqslant k \end{cases}$ 且 $z = 2x + y$ 的最小值为 -6, 则 $k =$ _____.15. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $DEFG$ 的边长分别为 a, b ($a < b$), 原点 O 为 AD 的中点, 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 经过 C, F 两点, 则 $\frac{b}{a} =$ _____.16. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$, $C(3, 0)$, 动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$ 的最大值是_____.

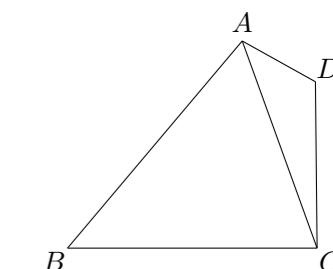
三、解答题

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$. 现安排甲组研发新产品 A , 乙组研发新产品 B . 设甲、乙两组的研发相互独立.

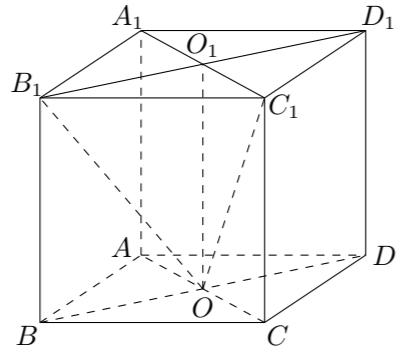
- (1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;
 (2) 若新产品 A 研发成功, 预计企业可获利润 120 万元; 若新产品 B 研发成功, 预计企业可获利润 100 万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $CD = 2$, $AC = \sqrt{7}$.

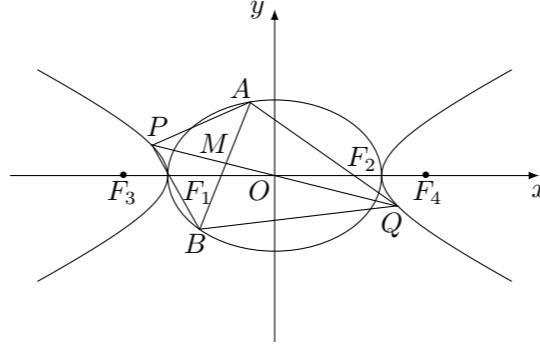
- (1) 求 $\cos \angle CAD$ 的值;
 (2) 若 $\cos \angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{14}$, $\sin \angle CBA = \frac{\sqrt{21}}{6}$, 求 BC 的长.



19. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都相等, $AC \cap BD = O$, $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$, 四边形 ACC_1A_1 和四边形 BDD_1B_1 均为矩形.
 (1) 证明: $O_1O \perp$ 底面 $ABCD$;
 (2) 若 $\angle CBA = 60^\circ$, 求二面角 $C_1 - OB_1 - D$ 的余弦值.



21. 如图, O 为坐标原点, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 e_1 ; 双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_3, F_4 , 离心率为 e_2 . 已知 $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|F_2 F_4| = \sqrt{3} - 1$.
 (1) 求 C_1, C_2 的方程;
 (2) 过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB , M 为弦 AB 的中点. 当直线 OM 与 C_2 交于 P, Q 两点时, 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $|a_{n+1} - a_n| = p^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 (1) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1, 2a_2, 3a_3$ 成等差数列, 求 p 的值;
 (2) 若 $p = \frac{1}{2}$, 且 $\{a_{2n-1}\}$ 是递增数列, $\{a_{2n}\}$ 是递减数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1+ax) - \frac{2x}{x+2}$.
 (1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;
 (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围.