2015 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,5\}$, 则集合 $A\cup B$ 中元素的个数为______.

2. 已知一组数据 4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为______.

3. 设复数 z 满足 $z^2=3+4\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 z 的模为______.

4. 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 S 为______.

```
S ← 1
I ← 1
While I < 8
    S ← S + 2
    I ← I + 3
End While
Print S
```

5. 袋中有形状、大小都相同的 4 只球, 其中 1 只白球、1 只红球、2 只黄球, 从中一次随机摸出 2 只球, 则这 2 只球颜色不同的概率为______.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2)$, 若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)$ $(m,\ n\in\mathbf{R})$, 则 $m-n$ 的值为______.

7. 不等式 $2^{x^2-x}<4$ 的解集为______.

8. 已知 $\tan\alpha=-2$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{7}$, 则 $\tan\beta$ 的值为______.

9. 现有橡皮泥制作的底面半径为 5, 高为 4 的圆锥和底面半径为 2, 高为 8 的圆柱各一个. 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为______.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以点 $(1,0)$ 为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为______.

11. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且 $a_{n+1}-a_n=n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 前 10 项的和为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, P 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 右支上的一个动点, 若点 P 到直线 $x-y+1=0$ 的距离大于 c 恒成立, 则实数 c 的最大值为______.

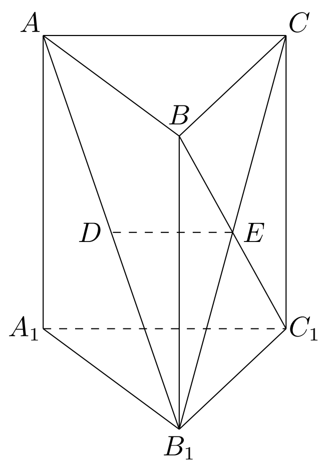
13. 已知函数 $f(x)=|\ln x|$, $g(x)=\begin{cases}0,\ 0<x\leqslant 1\\ |x^2-4|-2,\ x>1\end{cases}$, 则方程 $|f(x)+g(x)|=1$ 实根的个数为______.

14. 设向量 $\boldsymbol{a}_k=\left(\cos\dfrac{k\pi}{6},\sin\dfrac{k\pi}{6}+\cos\dfrac{k\pi}{6}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$, 则 $\sum\limits_{k=0}^{11}(\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_{k+1})$ 的值为______.

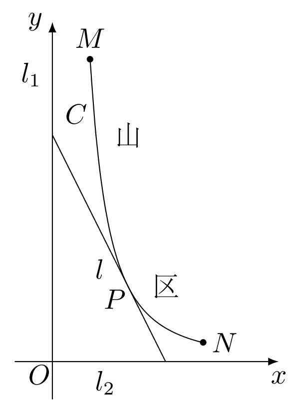
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2$, $AC=3$, $A=60^\circ$.
(1) 求 BC 的长;
(2) 求 $\sin 2C$ 的值.

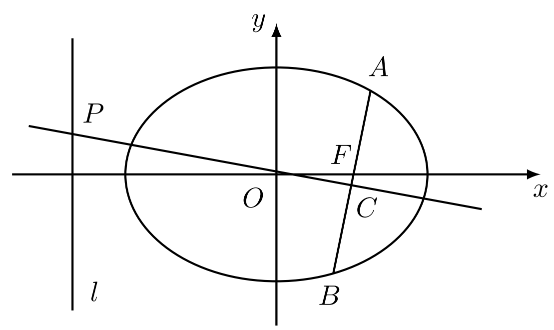
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AC\perp BC$, $BC=CC_1$, 设 AB_1 的中点为 D, $B_1C\cap BC_1=E$. 求证:
(1) $DE\,/\!/$ 平面 AA_1C_1C;
(2) $BC_1\perp AB_1$.



17. 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路. 记两条相互垂直的公路为 l_1, l_2, 山区边界曲线为 C, 计划修建的公路为 l. 如图所示, M, N 为 C 的两个端点, 测得点 M 到 l_1, l_2 的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点 N 到 l_1, l_2 的距离分别为 20 千米和 2.5 千米. 以 l_2, l_1 所在的直线分别为 x, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy. 假设曲线 C 符合函数 $y=\dfrac{a}{x^2+b}$ (其中 a, b 为常数) 模型.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 设公路 l 与曲线 C 相切于 P 点, P 的横坐标为 t.
① 请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$, 并写出其定义域;
② 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.
(1) 求椭圆的标准方程;
(2) 过 F 的直线与椭圆交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于点 P, C, 若 $PC=2AB$, 求直线 AB 的方程.



19. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$.

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $b=c-a$ (实数 c 是与 a 无关的常数), 当函数 $f(x)$ 有三个不同的零点时, a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$, 求 c 的值.

20. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是各项为正数且公差为 d $(d\neq 0)$ 的等差数列.

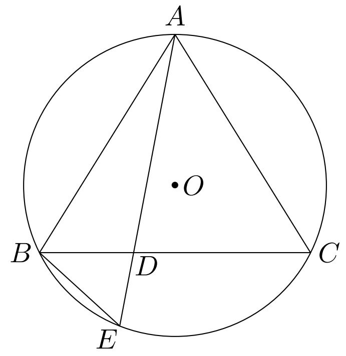
(1) 证明: $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$ 依次构成等比数列;

(2) 是否存在 a_1, d, 使得 a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在 a_1, d 及正整数 n, k, 使得 $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$ 依次构成等比数列? 并说明理由.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 AE 交 BC 于点 D. 求证: $\triangle ABD\backsim\triangle AEB$.



【B】已知 $x, y\in\mathbf{R}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x&1\\y&0\end{bmatrix}$ 的属于特征值 -2 的一个特征向量, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及它的另一个特征值.

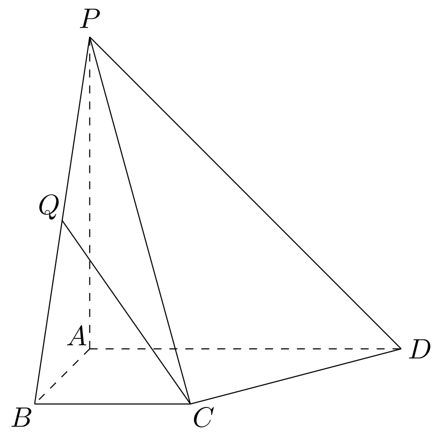
【C】已知圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)-4=0$, 求圆 C 的半径.

【D】解不等式 $x+|2x+3|\geqslant 2$.

22. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$, $PA=AD=2$, $AB=BC=1$.

(1) 求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的余弦值;

(2) 点 Q 是线段 BP 上的动点, 当直线 CQ 与 DP 所成的角最小时, 求线段 BQ 的长.



23. 已知集合 $X=\{1,2,3\}$, $Y_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 设 $S_n=\{(a,b)\mid a$ 整除 b 或 b 整除 a, $a\in X, b\in Y_n\}$, 令 $f(n)$ 表示集合 S_n 所含元素的个数.

(1) 写出 $f(6)$ 的值;

(2) 当 $n\geqslant 6$ 时, 写出 $f(n)$ 的表达式, 并用数学归纳法证明.