2010 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

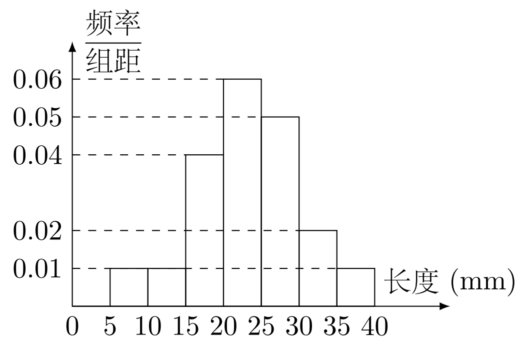
一、填空题

1. 设集合 $A=\{-1,1,3\}$, $B=\{a+2,a^2+4\}$, $A\cap B=\{3\}$, 则实数 $a=$______.

2. 设复数 z 满足 $z(2-3\mathrm{i})=6+4\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 的模为______.

3. 盒子中有大小相同的 3 只白球, 1 只黑球, 若从中随机地摸出两只球, 则它们颜色不同的概率是______.

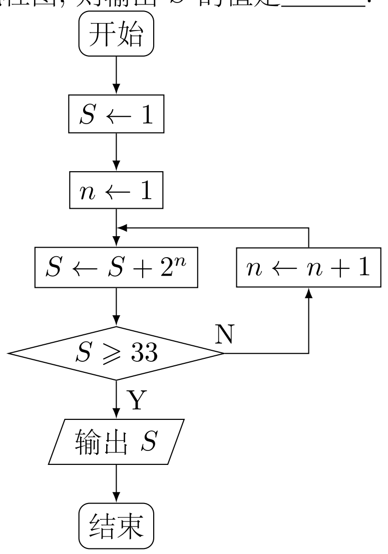
4. 某棉纺厂为了了解一批棉花的质量, 从中随机抽取了 100 根棉花纤维的长度 (棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标), 所得数据都在区间 $[5,40]$ 中, 其频率分布直方图如图所示, 则其抽样的 100 根中, 有______根棉花纤维的长度小于 20 mm.



5. 设函数 $f(x)=x\left(\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}\right)$, $x\in\mathbf{R}$ 是偶函数, 则实数 a 的值为______.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上一点 M 的横坐标为 3, 则点 M 到此双曲线的右焦点的距离为______.

7. 如图是一个算法流程图, 则输出 S 的值是______.



8. 函数 $y=x^2\ (x>0)$ 的图象在点 (a_k,a_k^2) 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 a_{k+1}, 其中 $k\in\mathrm{N}^*$. 若 $a_1=16$, 则 $a_1+a_3+a_5$ 的值是______.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个点到直线 $12x-5y+c=0$ 的距离为 1, 则实数 c 的取值范围是______.

10. 定义在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图象与 $y=5\tan x$ 的图象的交于点 P, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 P_1, 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图象交于点 P_2, 则线段 P_1P_2 的长为______.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$, 则满足不等式 $f\left(1-x^2\right)>f(2x)$ 的 x 的取值范围是______.

12. 设实数 x, y 满足 $3\leqslant xy^2\leqslant 8$, $4\leqslant\dfrac{x^2}{y}\leqslant 9$, 则 $\dfrac{x^3}{y^4}$ 的最大值是______.

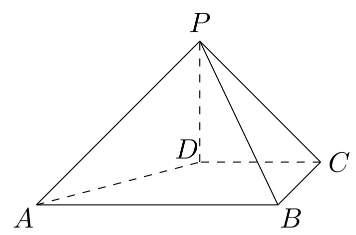
13. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=6\cos C$, 则 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$ 的值是______.

14. 将边长为 1 m 的正三角形薄铁皮沿一条平行于某边的直线剪成两块, 其中一块是梯形, 记 $s=\dfrac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$, 则 s 的最小值是______.

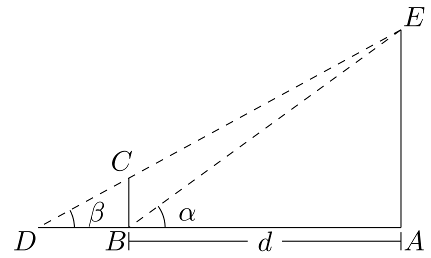
二、解答题

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1,-2)$、$B(2,3)$、$C(-2,-1)$.
(1) 求以线段 AB、AC 为邻边的平行四边形的两条对角线的长;
(2) 设实数 t 满足 $\left(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=0$, 求 t 的值.

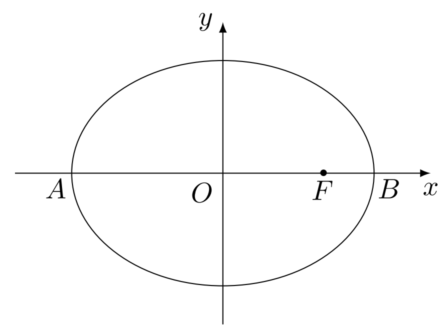
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 平面 $ABCD$, $PD=DC=BC=1$, $AB=2$, $AB\parallel DC$, $\angle BCD=90^\circ$.
(1) 求证: $PC\perp BC$;
(2) 求点 A 到平面 PBC 的距离.



17. 某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H (单位: m). 如示意图, 垂直放置的标杆 BC 的高度 $h=4$ m, 仰角 $\angle ABE=\alpha$, $\angle ADE=\beta$.
(1) 该小组已经测得一组 α, β 的值, 算出了 $\tan\alpha=1.24$, $\tan\beta=1.20$, 请据此算出 H 的值;
(2) 该小组分析若干测得的数据后, 发现适当调整标杆到电视塔的距离 d (单位: m), 使 α 与 β 之差较大, 可以提高测量精度. 若电视塔实际高度为 125 m, 试问 d 为多少时, $\alpha-\beta$ 最大.



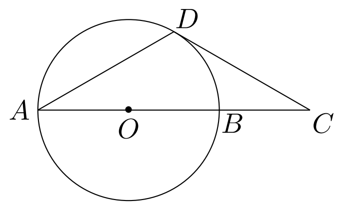
18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如图, 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 A、B, 右焦点为 F. 设过点 $T(t,m)$ 的直线 TA、TB 与此椭圆分别交于点 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, 其中 $m>0$, $y_1>0$, $y_2<0$.
(1) 设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$, 求点 P 的轨迹;
(2) 设 $x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{3}$, 求点 T 的坐标;
(3) 设 $t=9$, 求证: 直线 MN 必过 x 轴上的一定点 (其坐标与 m 无关).



19. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $2a_2 = a_1 + a_3$, 数列 $\left\{\sqrt{S_n}\right\}$ 是公差为 d 的等差数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 n, d 表示);
(2) 设 c 为实数, 对满足 $m+n=3k$ 且 $m \neq n$ 的任意正整数 m, n, k, 不等式 $S_m + S_n > cS_k$ 都成立. 求证: c 的最大值为 $\dfrac{9}{2}$.

20. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(1, +\infty)$ 上的函数, 其导函数为 $f'(x)$. 如果存在实数 a 和函数 $h(x)$, 其中 $h(x)$ 对任意的 $x \in (1, +\infty)$ 都有 $h(x) > 0$, 使得 $f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(a)$.
(1) 设函数 $f(x) = \ln x + \dfrac{b+2}{x+1}\,(x > 1)$, 其中 b 为实数.
① 求证: 函数 $f(x)$ 具有性质 $P(b)$;
② 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
(2) 已知函数 $g(x)$ 具有性质 $P(2)$, 给定 x_1, $x_2 \in (1, +\infty)$, $x_1 < x_2$, 设 m 为实数. $\alpha = mx_1 + (1-m)x_2$, $\beta = (1-m)x_1 + mx_2$, 且 $\alpha > 1$, $\beta > 1$, 若 $|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$, 求 m 的取值范围.

21. 四选二.
【A】如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, D 为 $\odot O$ 上一点, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 延长线于点 C. 若 $DA = DC$, 求证: $AB = 2BC$.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, $A(0,0)$, $B(-2,0)$, $C(-2,1)$, 设 k 为非零实数. 矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 点 A、B、C 在矩阵 $\boldsymbol{M}N$ 对应的变换下得到的点分别为 A_1、B_1、C_1, $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍, 求实数 k 的值.

【C】在极坐标系中, 圆 $\rho = 2\cos\theta$ 与直线 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta + a = 0$ 相切, 求实数 a 的值.

【D】设 a, b 是非负实数, 求证: $a^3 + b^3 \geqslant \sqrt{ab}\,(a^2 + b^2)$.

22. 某工厂生产甲、乙两种产品. 甲产品的一等品率为 80%, 二等品率为 20%; 乙产品的一等品率为 90%, 二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品, 若是一等品则获得利润 4 万元, 若是二等品则亏损 1 万元; 生产 1 件乙产品, 若是一等品则获得利润 6 万元, 若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各种产品相互独立.
(1) 记 X (单位: 万元) 为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润, 求 X 的分布列;
(2) 求生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率.

23. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数.
(1) 求证: $\cos A$ 是有理数;
(2) 求证: 对任意正整数 n, $\cos nA$ 是有理数.