

# 理科数学

## 一、选择题

- 不等式组  $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$  的解集为 ( )
 

(A)  $\{x | -1 < x < 1\}$  (B)  $\{x | 0 < x < 3\}$   
(C)  $\{x | 0 < x < 1\}$  (D)  $\{x | -1 < x < 3\}$
- 已知三条直线  $m, n, l$ , 三个平面  $\alpha, \beta, \gamma$ , 下列四个命题中, 正确的是 ( )
 

(A)  $\begin{cases} \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$  (B)  $\begin{cases} m \parallel \beta \\ l \perp m \end{cases} \Rightarrow l \perp \beta$   
(C)  $\begin{cases} m \parallel \gamma \\ n \parallel \gamma \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$  (D)  $\begin{cases} m \perp \gamma \\ n \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$
- 已知椭圆的焦点是  $F_1, F_2$ ,  $P$  是椭圆上的一个动点, 如果延长  $F_1P$  到  $Q$ , 使得  $|PQ| = |PF_2|$ , 那么动点  $Q$  的轨迹是. ( )
 

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线
- 如果  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 那么复数  $(1 + i)(\cos \theta + i \sin \theta)$  的辐角的主值是 ( )
 

(A)  $\theta + \frac{9\pi}{4}$  (B)  $\theta + \frac{\pi}{4}$  (C)  $\theta - \frac{\pi}{4}$  (D)  $\theta + \frac{7\pi}{4}$
- 若角  $\alpha$  满足条件  $\sin 2\alpha < 0, \cos \alpha - \sin \alpha < 0$ , 则  $\alpha$  在 ( )
 

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. ( )
 

(A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种
- 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2, BC = 1.5, \angle ABC = 120^\circ$ , 若使三角形绕直线  $BC$  旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 ( )
 

(A)  $\frac{3}{2}\pi$  (B)  $\frac{5}{2}\pi$  (C)  $\frac{7}{2}\pi$  (D)  $\frac{9}{2}\pi$
- 圆  $2x^2 + 2y^2 = 1$  与直线  $x \sin \theta + y - 1 = 0$  ( $\theta \in \mathbf{R}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ) 的位置关系是 ( )
 

(A) 相交 (B) 相切 (C) 相离或相切 (D) 不能确定
- 在极坐标系中, 如果一个圆的方程  $\rho = 4 \cos \theta + 6 \sin \theta$ , 那么过圆心且与极轴平行的直线方程是 ( )
 

(A)  $\rho \sin \theta = 3$  (B)  $\rho \sin \theta = -3$  (C)  $\rho \cos \theta = 2$  (D)  $\rho \cos \theta = -2$
- 对于二项式  $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$  的展开式 ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 四位同学作出了四种判断:
 

① 存在  $n \in \mathbf{N}^*$ , 展开式中有常数项;  
② 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 展开式中没有常数项;  
③ 对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 展开式中没有  $x$  的一次项;

④ 存在  $n \in \mathbf{N}^*$ , 展开式中有  $x$  的一次项.  
上述判断中正确的是 ( )

- (A) ①与③ (B) ②与③ (C) ①与④ (D) ②与④

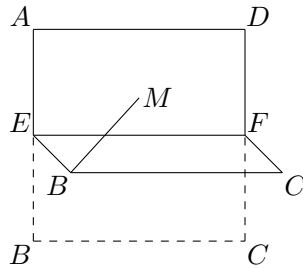
- 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 ( )
 

(A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项
- 用一张钢板制作一个容积为  $4\text{m}^3$  的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长  $\times$  宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. ( )
 

(A)  $2 \times 5$  (B)  $2 \times 5.5$  (C)  $2 \times 6.1$  (D)  $3 \times 5$

## 二、填空题

- 若双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ , 则双曲线的焦点坐标是\_\_\_\_\_.
- 如果  $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ , 那么  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$  的值等于\_\_\_\_\_.
- 正方形  $ABCD$  的边长是 2,  $E, F$  分别是  $AB$  和  $CD$  的中点, 将正方形沿  $EF$  折成直二面角 (如图所示).  $M$  为矩形  $AEFD$  内一点, 如果  $\angle MBE = \angle MBC$ ,  $MB$  和平面  $BCF$  所成角的正切值为  $\frac{1}{2}$ , 那么点  $M$  到直线  $EF$  的距离为\_\_\_\_\_.



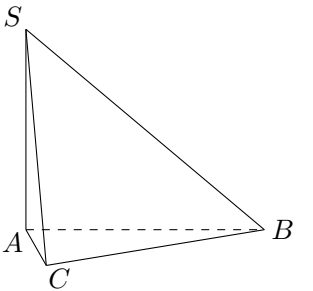
- 对于任意两个复数  $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$  ( $x_1, y_1, x_2, y_2$  为实数), 定义运算  $\odot$  为:  $z_1 \odot z_2 = x_1x_2 + y_1y_2$ . 设非零复数  $w_1, w_2$  在复平面内对应的点分别为  $P_1, P_2$ , 点为  $O$  为坐标原点. 如果  $w_1 \odot w_2 = 0$ , 那么在  $\triangle P_1OP_2$  中,  $\angle P_1OP_2$  的大小为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $A, B, C$  成等差数列, 求  $\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$  的值.

- 已知函数  $f(x)$  是偶函数, 而且在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 判断  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.

- 在三棱锥  $S - ABC$  中, 如图,  $\angle SAB = \angle SAC = \angle ACB = 90^\circ, AC = 2, BC = \sqrt{13}, SB = \sqrt{29}$ .
  - 证明:  $SC \perp BC$ ;
  - 求侧面  $SBC$  与底面  $ABC$  所成的二面角大小;
  - 求异面直线  $SC$  与  $AB$  所成的角的大小 (用反三角函数表示).



20. 假设  $A$  型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年  $A$  型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
- (1) 已知与  $A$  型车性能相近的  $B$  型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若  $A$  型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年  $B$  型车的价格不高于  $A$  型车价格的 90%,  $B$  型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
- (2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的  $B$  型车一辆?
21. 已知点的序列  $A_n(x_n, 0)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , 其中  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$  ( $a < 0$ ),  $A_3$  是线段  $A_1A_2$  的中点,  $A_4$  是线段  $A_2A_3$  的中点,  $\dots$ ,  $A_n$  是线段  $A_{n-2}A_{n-1}$  的中点,  $\dots$ .
- (1) 写出  $x_n$  与  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$  之间的关系式 ( $n \geq 3$ );
- (2) 设  $a_n = x_{n+1} - x_n$ , 计算  $a_1, a_2, a_3$ , 由此推测数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 并加以证明;
- (3) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
22. 已知某椭圆的焦点是  $F_1(-4, 0)$ ,  $F_2(4, 0)$ , 过点  $F_2$ , 并垂直于  $x$  轴的直线与椭圆的一个交点为  $B$ , 且  $|F_1B| + |F_2B| = 10$ . 椭圆上不同的两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$  满足条件:  $|F_2A|$ ,  $|F_2B|$ ,  $|F_2C|$  成等差数列.
- (1) 求该椭圆的方程;
- (2) 求弦  $AC$  中点的横坐标;
- (3) 设弦  $AC$  的垂直平分线的方程为  $y = kx + m$ , 求  $m$  的取值范围.