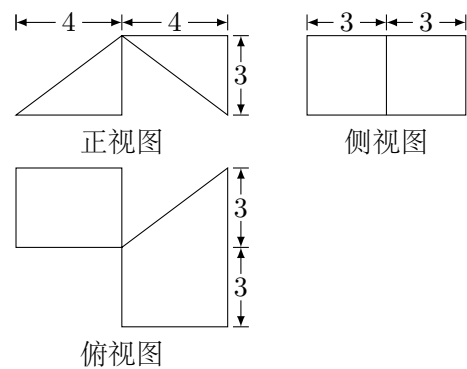


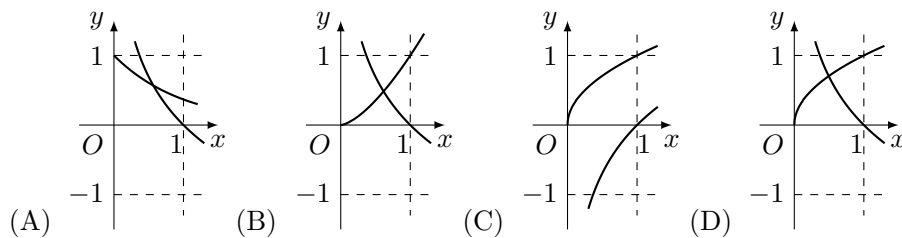
# 理科数学

## 一、选择题

1. 设全集  $U = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 2\}$ , 集合  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 \geq 5\}$ , 则  $\complement_U A =$  ( )  
(A)  $\emptyset$  (B)  $\{2\}$  (C)  $\{5\}$  (D)  $\{2, 5\}$
2. 已知  $i$  是虚数单位,  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a = b = 1$ ”是“ $(a + bi)^2 = 2i$ ”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则此几何体的表面积是 ( )



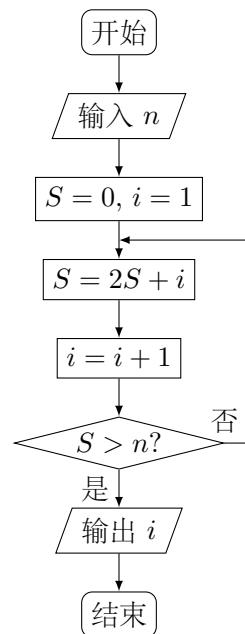
- (A)  $90 \text{ cm}^2$  (B)  $129 \text{ cm}^2$  (C)  $132 \text{ cm}^2$  (D)  $138 \text{ cm}^2$
4. 为了得到函数  $y = \sin 3x + \cos 3x$  的图象, 可以将函数  $y = \sqrt{2} \cos 3x$  的图象 ( )  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位 (B) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位  
(C) 向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位
5. 在  $(1+x)^6(1+y)^4$  的展开式中, 记  $x^m y^n$  项的系数为  $f(m, n)$ , 则  $f(3, 0) + f(2, 1) + f(1, 2) + f(0, 3) =$  ( )  
(A) 45 (B) 60 (C) 120 (D) 210
6. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , 且  $0 < f(-1) = f(-2) = f(-3) \leq 3$ , 则 ( )  
(A)  $c \leq 3$  (B)  $3 < c \leq 6$  (C)  $6 < c \leq 9$  (D)  $c > 9$
7. 在同一直角坐标系中, 函数  $f(x) = x^a$  ( $x \geq 0$ ),  $g(x) = \log_a x$  的图象可能是 ( )



8. 记  $\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & x < y \end{cases}$ ,  $\min\{x, y\} = \begin{cases} y, & x \geq y \\ x, & x < y \end{cases}$ , 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为平面向量, 则 ( )  
(A)  $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \leq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$   
(B)  $\min\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|\} \geq \min\{|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|\}$   
(C)  $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \leq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$   
(D)  $\max\{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2, |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2\} \geq |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$
9. 已知甲盒中仅有 1 个球且为红球, 乙盒中有  $m$  个红球和  $n$  个蓝球 ( $m \geq 3, n \geq 3$ ), 从乙盒中随机抽取  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 个球放入甲盒中.  
(a) 放入  $i$  个球后, 甲盒中含有红球的个数记为  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ );  
(b) 放入  $i$  个球后, 从甲盒中取 1 个球是红球的概率记为  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ). 则 ( )  
(A)  $p_1 > p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$  (B)  $p_1 < p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$   
(C)  $p_1 > p_2, E(\xi_1) > E(\xi_2)$  (D)  $p_1 < p_2, E(\xi_1) < E(\xi_2)$
10. 设函数  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2(x - x^2), f_3(x) = \frac{1}{3}|\sin 2\pi x|, a_i = \frac{i}{99}, i = 0, 1, 2, \dots, 99$ . 记  $I_k = |f_k(a_1) - f_k(a_0)| + |f_k(a_2) - f_k(a_1)| + \dots + |f_k(a_{99}) - f_k(a_{98})|, k = 1, 2, 3$ , 则 ( )  
(A)  $I_1 < I_2 < I_3$  (B)  $I_2 < I_1 < I_3$  (C)  $I_1 < I_3 < I_2$  (D)  $I_3 < I_2 < I_1$

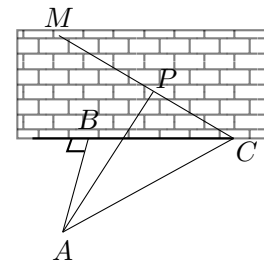
## 二、填空题

11. 若某程序框图如图所示, 当输入 50 时, 则该程序运行后输出的结果是\_\_\_\_\_.



12. 随机变量  $\xi$  的取值为 0, 1, 2, 若  $P(\xi = 0) = \frac{1}{5}, E(\xi) = 1$ , 则  $D(\xi) =$ \_\_\_\_\_.
13. 当实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x + 2y - 4 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$  时,  $1 \leq ax + y \leq 4$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 在 8 张奖券中有一、二、三等奖各 1 张, 其余 5 张无奖. 将这 8 张奖券分配给 4 个人, 每人 2 张, 不同的获奖情况有\_\_\_\_\_种 (用数字作答).
15. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ . 若  $f(f(a)) \leq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 设直线  $x - 3y + m = 0$  ( $m \neq 0$ ) 与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两条渐近线分别交于点  $A, B$ . 若点  $P(m, 0)$  满足  $|PA| = |PB|$ , 则该双曲线的离心率是\_\_\_\_\_.
17. 如图, 某人在垂直于水平地面  $ABC$  的墙面前的点  $A$  处进行射击训练. 已知点  $A$  到墙面的距离为  $AB$ , 某目标点  $P$  沿墙面上的射线  $CM$  移动, 此人为了准确瞄准目标点  $P$ , 需计算由点  $A$  观察点  $P$  的仰角  $\theta$  的大小. 若  $AB = 15 \text{ m}, AC = 25 \text{ m}, \angle BCM = 30^\circ$ , 则  $\tan \theta$  的最大值是\_\_\_\_\_. (仰角  $\theta$  为直线  $AP$  与平面  $ABC$  所成角)



## 三、解答题

18. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a \neq b, c = \sqrt{3}$ ,  $\cos^2 A - \cos^2 B = \sqrt{3} \sin A \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos B$ .  
(1) 求角  $C$  的大小;  
(2) 若  $\sin A = \frac{4}{5}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = (\sqrt{2})^{b_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 若  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $a_1 = 2$ ,  $b_3 = 6 + b_2$ .

(1) 求  $a_n$  与  $b_n$ ;

(2) 设  $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ). 记数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

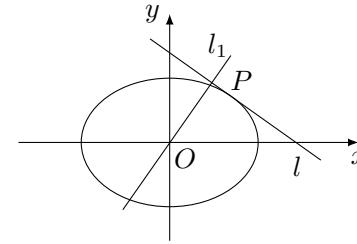
① 求  $S_n$ ;

② 求正整数  $k$ , 使得对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ , 均有  $S_k \geq S_n$ .

21. 如图, 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 动直线  $l$  与椭圆  $C$  只有一个公共点  $P$ , 且点  $P$  在第一象限.

(1) 已知直线  $l$  的斜率为  $k$ , 用  $a, b, k$  表示点  $P$  的坐标;

(2) 若过原点  $O$  的直线  $l_1$  与  $l$  垂直, 证明: 点  $P$  到直线  $l_1$  的距离的最大值为  $a - b$ .



22. 已知函数  $f(x) = x^3 + 3|x - a|$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

(1) 若  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最大值和最小值分别记为  $M(a)$ ,  $m(a)$ , 求  $M(a) - m(a)$ ;

(2) 设  $b \in \mathbf{R}$ , 若  $[f(x) + b]^2 \leq 4$  对  $x \in [-1, 1]$  恒成立, 求  $3a + b$  的取值范围.

20. 如图, 在四棱锥  $A - BCDE$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $BCDE$ ,  $\angle CDE = \angle BED = 90^\circ$ ,  $AB = CD = 2$ ,  $DE = BE = 1$ ,  $AC = \sqrt{2}$ .

(1) 证明:  $DE \perp$  平面  $ACD$ ;

(2) 求二面角  $B - AD - E$  的大小.

