

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

(A) $(0, 2)$ (B) $[0, 2]$ (C) $\{0, 2\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$

2. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 为平面向量, 若 $\mathbf{a} = (4, 3)$, $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 18)$, 则 \mathbf{a}, \mathbf{b} 夹角的余弦值等于 ()

(A) $\frac{8}{65}$ (B) $-\frac{8}{65}$ (C) $\frac{16}{65}$ (D) $-\frac{16}{65}$

3. 已知复数 $z = \frac{\sqrt{3} + i}{(1 - \sqrt{3}i)^2}$, 则 $|z| =$ ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

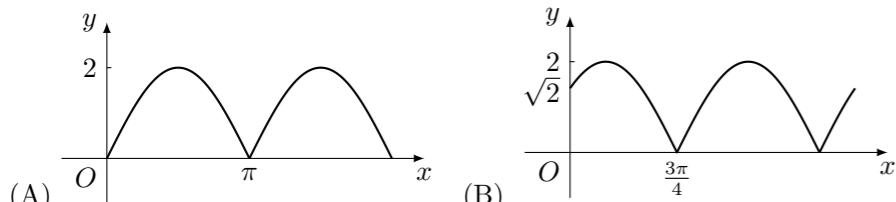
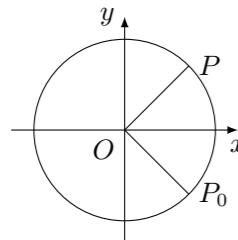
4. 曲线 $y = x^3 - 2x + 1$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 ()

(A) $y = x - 1$ (B) $y = -x + 1$ (C) $y = 2x - 2$ (D) $y = -2x + 2$

5. 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4, 2)$, 则它的离心率为 ()

(A) $\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

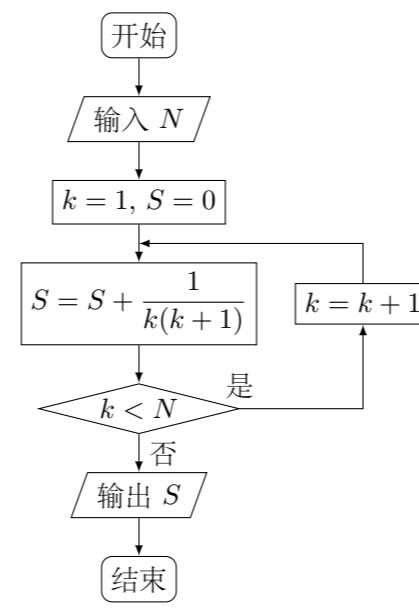
6. 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为 ()



7. 设长方体的长、宽、高分别为 $2a$ 、 a 、 a , 其顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ()

(A) $3\pi a^2$ (B) $6\pi a^2$ (C) $12\pi a^2$ (D) $24\pi a^2$

8. 如果执行如图所示的框图, 输入 $N = 5$, 则输出的数等于 ()



(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

9. 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4 (x \geq 0)$, 则 $\{x \mid f(x-2) > 0\} =$ ()

(A) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$ (B) $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
(C) $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$ (D) $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

10. 若 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限的角, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ()

(A) $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ (C) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$

11. 已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点为 $A(-1, 2)$ 、 $B(3, 4)$ 、 $C(4, -2)$, 点 (x, y) 在平行四边形 $ABCD$ 的内部, 则 $z = 2x - 5y$ 的取值范围是 ()

(A) $(-14, 16)$ (B) $(-14, 20)$ (C) $(-12, 18)$ (D) $(-12, 20)$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是 ()

(A) $(1, 10)$ (B) $(5, 6)$ (C) $(10, 12)$ (D) $(20, 24)$

二、填空题

13. 圆心位于原点且与直线 $x + y - 2 = 0$ 相切的圆的方程为_____.

14. 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 且恒有 $0 \leq f(x) \leq 1$, 可以用随机模拟方法近似计算由曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围成部分的面积 S , 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0, 1]$ 上的均匀随机数 x_1, x_2, \dots, x_N 和 y_1, y_2, \dots, y_N , 由此得到 N 个点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, N$). 再数出其中满足 $y_i \leq f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 的点数 N_1 , 那么由随机模拟方法可得 S 的近似值为_____.

15. 一个几何体的正视图为一个三角形, 则这个几何体可能是下列几何体中的_____. (填入所有可能的几何体前的编号)

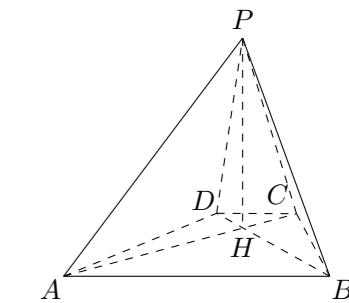
①三棱锥 ②四棱锥 ③三棱柱 ④四棱柱 ⑤圆锥 ⑥圆柱

16. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BC = 3BD$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle ADB = 135^\circ$. 若 $AC = \sqrt{2}AB$, 则 $BD =$ _____.

三、解答题

17. 设等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 = 5$, $a_{10} = -9$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

性别		男	女
是否需要志愿者	需要	40	30
	不需要	160	270

- (1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;
(2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?
(3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附: $\frac{P(K^2 \geq k)}{k} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0.050 & 0.010 & 0.001 \\ \hline k & 3.841 & 6.635 & 10.828 \\ \hline \end{array}$

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 1)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 且 $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等差数列.

- (1) 求 $|AB|$;
(2) 若直线 l 的斜率为 1, 求 b 的值.

21. 设函数 $f(x) = x(e^x - 1) - ax^2$.

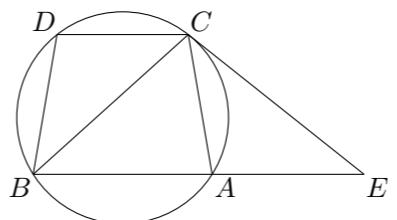
- (1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

23. 已知直线 $C_1: \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 圆 $C_2: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$.

- (1) 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 C_1 与 C_2 的交点坐标;
(2) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线, 垂足为 A , P 为 OA 的中点, 当 α 变化时, 求点 P 轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

22. 如图, 已知圆上的弧 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, 过 C 点的圆的切线与 BA 的延长线交于 E 点, 证明:

- (1) $\angle ACE = \angle BCD$;
(2) $BC^2 = BE \cdot CD$.



24. 设函数 $f(x) = |2x - 4| + 1$.

- (1) 画出函数 $y = f(x)$ 的图象;
(2) 若不等式 $f(x) \leq ax$ 的解集非空, 求 a 的取值范围.

