

## 理科数学

## 一、选择题

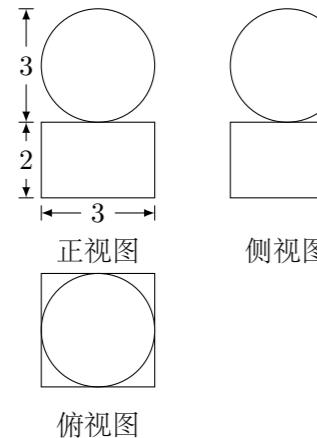
1. 若  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$  为虚数单位, 且  $(a+i)i = b+i$ , 则 ( )

- (A)  $a=1, b=1$   
(B)  $a=-1, b=1$   
(C)  $a=-1, b=-1$   
(D)  $a=1, b=-1$

2. 设  $M = \{1, 2\}$ ,  $N = \{a^2\}$ , 则“ $a=1$ ”是“ $N \subseteq M$ ”的 ( )

- (A) 充分不必要条件  
(B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件  
(D) 既不充分又不必要条件

3. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $\frac{9}{2}\pi + 12$   
(B)  $\frac{9}{2}\pi + 18$   
(C)  $9\pi + 42$   
(D)  $36\pi + 18$

4. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$  算得,

$$K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

参照附表, 得到的正确结论是 ( )

(A) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”

(B) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”

(C) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

(D) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

5. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$  ( $a > 0$ ) 的渐近线方程为  $3x \pm 2y = 0$ , 则  $a$  的值为 ( )

- (A) 4  
(B) 3  
(C) 2  
(D) 1

6. 由直线  $x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3}, y = 0$  与曲线  $y = \cos x$  所围成的封闭图形的面积为 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$   
(B) 1  
(C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
(D)  $\sqrt{3}$

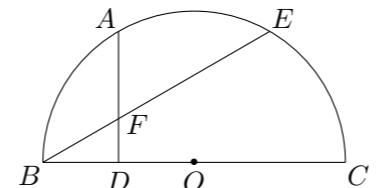
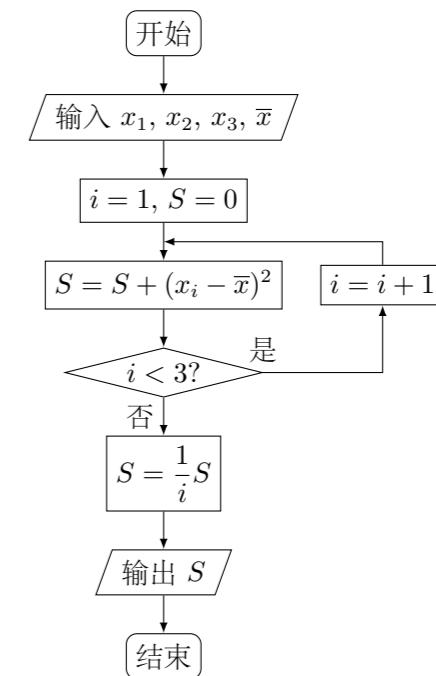
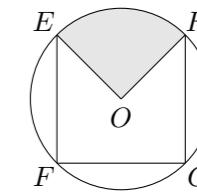
7. 设  $m > 1$ , 在约束条件  $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x+y \leq 1 \end{cases}$  下, 目标函数  $z = x+my$  的最大值小于 2, 则  $m$  的取值范围为 ( )

- (A)  $(1, 1+\sqrt{2})$   
(B)  $(1+\sqrt{2}, +\infty)$   
(C)  $(1, 3)$   
(D)  $(3, +\infty)$

8. 设直线  $x=t$  与函数  $f(x) = x^2, g(x) = \ln x$  的图象分别交于点  $M, N$ , 则当  $|MN|$  达到最小时  $t$  的值为 ( )

- (A) 1  
(B)  $\frac{1}{2}$   
(C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$   
(D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 二、填空题

9. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系  $xOy$  取相同的长度单位, 且以原点  $O$  为极点, 以  $x$  轴正半轴为极轴) 中, 曲线  $C_2$  的方程为  $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$ , 则  $C_1$  与  $C_2$  的交点个数为 \_\_\_\_\_. 10. 设  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $xy \neq 0$ , 则  $\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + 4y^2\right)$  的最小值为 \_\_\_\_\_. 11. 如图,  $A, E$  是半圆周上的两个三等分点, 直径  $BC = 4$ ,  $AD \perp BC$ , 垂足为  $D$ ,  $BE$  与  $AD$  相交于点  $F$ , 则  $AF$  的长为 \_\_\_\_\_. 12. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 的前  $n$  项和, 且  $a_1 = 1, a_4 = 7$ , 则  $S_5 =$  \_\_\_\_\_. 13. 若执行如图所示的框图, 输入  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \bar{x} = 2$ , 则输出的数等于 \_\_\_\_\_. 14. 在边长为 1 的正三角形  $ABC$  中, 设  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$ , 则  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$  \_\_\_\_\_. 15. 如图所示,  $EFGH$  是以  $O$  为圆心, 半径为 1 的圆的内接正方形, 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用  $A$  表示事件“豆子落在正方形  $EFGH$  内”,  $B$  表示事件“豆子落在扇形  $OHE$  (阴影部分) 内”, 则 (1)  $P(A) =$  \_\_\_\_\_. (2)  $P(B|A) =$  \_\_\_\_\_. 16. 对于  $n \in \mathbb{N}^*$ , 将  $n$  表示为  $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \dots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$ . 当  $i = 0$  时,  $a_i = 1$ , 当  $1 \leq i \leq k$  时,  $a_i$  为 0 或 1. 记  $I(n)$  为上述表示中  $a_i$  为 0 的个数 (例如:  $1 = 1 \times 2^0, 4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ , 则  $I(1) = 0, I(4) = 2$ ), 则 (1)  $I(12) =$  \_\_\_\_\_. (2)  $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} =$  \_\_\_\_\_. 

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且满足  $c \sin A = a \cos C$ . (1) 求角  $C$  的大小;  
(2) 求  $\sqrt{3} \sin A - \cos\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$  的最大值, 并求取得最大值时角  $A, B$  的大小.

18. 某商店试销某种商品 20 天, 获得如下数据:

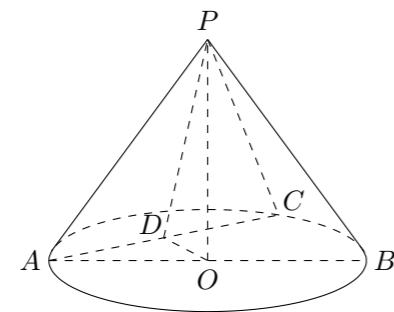
日销售量(件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

试销结束后 (假设该商品的日销售量的分布规律不变), 设某天开始营业时有该商品 3 件, 当天营业结束后检查存货, 若发现存货少于 2 件, 则当天进货补充至 3 件, 否则不进货, 将频率视为概率.

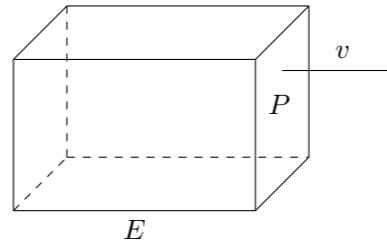
- (1) 求当天商品不进货的概率;  
 (2) 记  $X$  为第二天开始营业时该商品的件数, 求  $X$  的分布列和数学期望.

19. 如图, 在圆锥  $PO$  中, 已知  $PO = \sqrt{2}$ ,  $\odot O$  的直径  $AB = 2$ ,  $C$  是  $\widehat{AB}$  的中点,  $D$  为  $AC$  的中点.

- (1) 证明: 平面  $POD \perp$  平面  $PAC$ ;  
 (2) 求二面角  $B - PA - C$  的余弦值.

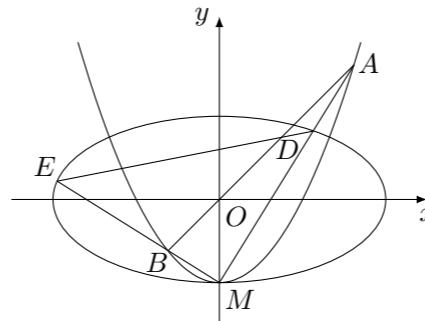


20. 如图, 长方体物体  $E$  在雨中沿面  $P$  (面积为  $S$ ) 的垂直方向作匀速移动, 速度为  $v$  ( $v > 0$ ), 雨速沿  $E$  移动方向的分速度为  $c$  ( $c \in \mathbf{R}$ ).  $E$  移动时单位时间内的淋雨量包括两部分: ①  $P$  或  $P$  的平行面 (只有一个面淋雨) 的淋雨量, 假设其值与  $|v - c| \times S$  成正比, 比例系数为  $\frac{1}{10}$ ; ② 其它面的淋雨量之和, 其值为  $\frac{1}{2}$ , 记  $y$  为  $E$  移动过程中的总淋雨量, 当移动距离  $d = 100$ , 面积  $S = \frac{3}{2}$  时.
- (1) 写出  $y$  的表达式;  
 (2) 设  $0 < v \leq 10$ ,  $0 < c \leq 5$ , 试根据  $c$  的不同取值范围, 确定移动速度  $v$ , 使总淋雨量  $y$  最少.



21. 如图, 椭圆  $C_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x$  轴被曲线  $C_2 : y = x^2 - b$  截得的线段长等于  $C_1$  的长半轴长.

- (1) 求  $C_1$ ,  $C_2$  的方程;  
 (2) 设  $C_2$  与  $y$  轴的交点为  $M$ , 过坐标原点  $O$  的直线  $l$  与  $C_2$  相交于点  $A$ ,  $B$ , 直线  $MA$ ,  $MB$  分别与  $C_1$  相交与点  $D$ ,  $E$ .
- ① 证明:  $MD \perp ME$ ;  
 ② 记  $\triangle MAB$ ,  $\triangle MDE$  的面积分别是  $S_1$ ,  $S_2$ . 问: 是否存在直线  $l$ , 使得  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$ ? 请说明理由.



22. 已知函数  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x + \sqrt{x}$ .

- (1) 求函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  的零点个数, 并说明理由;  
 (2) 设数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 满足  $a_1 = a$  ( $a > 0$ ),  $f(a_{n+1}) = g(a_n)$ , 证明: 存在常数  $M$ , 使得对于任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $a_n \leq M$ .