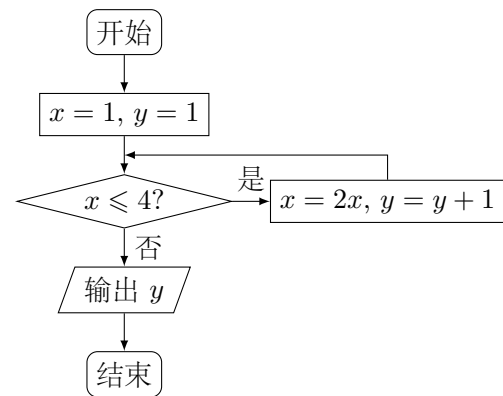


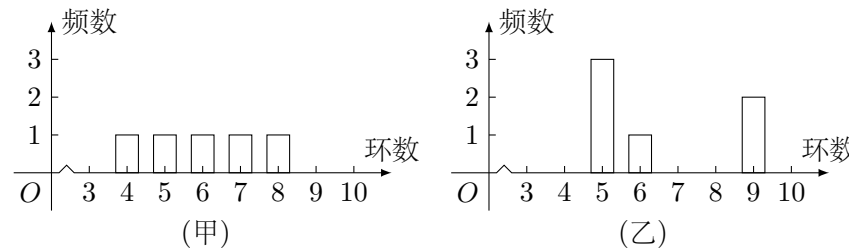
理科数学

一、选择题

- 复数 z 满足 $(z - i)(2 - i) = 5$, 则 $z =$ ()
(A) $-2 - 2i$ (B) $-2 + 2i$ (C) $2 - 2i$ (D) $2 + 2i$
- 下列函数中, 不满足 $f(2x) = 2f(x)$ 的是 ()
(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = x - |x|$ (C) $f(x) = x + 1$ (D) $f(x) = -x$
- 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是 ()



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 8
- 公比为 $\sqrt[3]{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_3 a_{11} = 16$, 则 $\log_2 a_{16} =$ ()
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- 甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次, 两人成绩的条形统计图如图所示, 则 ()



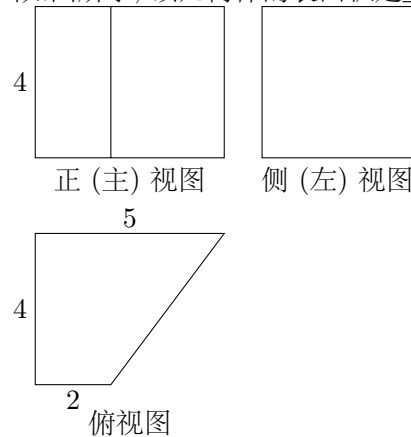
- (A) 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数
(B) 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数
(C) 甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差
(D) 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差
- 设平面 α 与平面 β 相交于直线 m , 直线 a 在平面 α 内, 直线 b 在平面 β 内, 且 $b \perp m$, 则“ $\alpha \perp \beta$ ”是“ $a \perp b$ ”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

- $(x^2 + 2)\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5$ 的展开式的常数项是 ()
(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3
- 在平面直角坐标系中, 点 $O(0, 0)$, $P(6, 8)$, 将向量 \overrightarrow{OP} 绕点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后得向量 \overrightarrow{OQ} , 则点 Q 的坐标是 ()
(A) $(-7\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (B) $(-7\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (C) $(-4\sqrt{6}, -2)$ (D) $(-4\sqrt{6}, 2)$
- 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若 $|AF| = 3$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$
- 6 位同学在毕业聚会活动中进行纪念品的交换, 任意两位同学之间最多交换一次, 进行交换的两位同学互赠一份纪念品. 已知 6 位同学之间共进行了 13 次交换, 则收到 4 份纪念品的同学人数为 ()
(A) 1 或 3 (B) 1 或 4 (C) 2 或 3 (D) 2 或 4

二、填空题

- 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$, 则 $x - y$ 的取值范围是_____.

- 某几何体的三视图如图所示, 该几何体的表面积是_____.



- 在极坐标系中, 圆 $\rho = 4 \sin \theta$ 的圆心到直线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 的距离是_____.
- 若平面向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq 3$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的最小值是_____.
- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 则下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)
① 若 $ab > c^2$, 则 $C < \frac{\pi}{3}$;
② 若 $a + b > 2c$, 则 $C < \frac{\pi}{3}$;
③ 若 $a^3 + b^3 = c^3$, 则 $C < \frac{\pi}{2}$;
④ 若 $(a + b)c < 2ab$, 则 $C > \frac{\pi}{2}$;
⑤ 若 $(a^2 + b^2)c^2 < 2a^2b^2$, 则 $C > \frac{\pi}{3}$.

三、解答题

- 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^2 x$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 设函数 $g(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$, 且当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$. 求 $g(x)$ 在区间 $[-\pi, 0]$ 上的解析式.

- 某单位招聘面试, 每次从试题库中随机调用一道试题. 若调用的是 A 类型试题, 则使用后该试题回库, 并增补一道 A 类型试题和一道 B 类型试题入库, 此次调题工作结束; 若调用的是 B 类型试题, 则使用后该试题回库, 此次调题工作结束. 试题库中现共有 $n + m$ 道试题, 其中有 n 道 A 类型试题和 m 道 B 类型试题. 以 X 表示两次调题工作完成后, 试题库中 A 类试题的数量.
(1) 求 $X = n + 2$ 的概率;
(2) 设 $m = n$, 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 平面图形 $ABB_1A_1C_1C$ 如图 1 所示, 其中 BB_1C_1C 是矩形, $BC = 2$, $BB_1 = 4$, $AB = AC = \sqrt{2}$, $A_1B_1 = A_1C_1 = \sqrt{5}$. 现将该平面图形分别沿 BC 和 B_1C_1 折叠, 使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 所在平面都与平面 BB_1C_1C 垂直, 再分别连接 A_1A , A_1B , A_1C , 得到如图 2 所示的空间图形, 对此空间图形解答下列问题.
- (1) 证明: $AA_1 \perp BC$;
 - (2) 求 AA_1 的长;
 - (3) 求二面角 $A - BC - A_1$ 的余弦值.

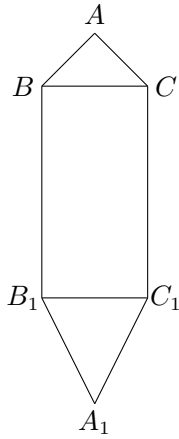


图 1

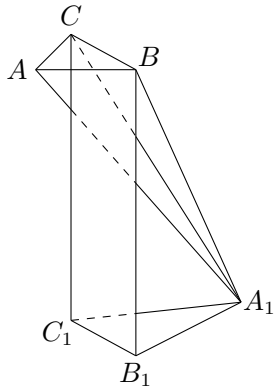
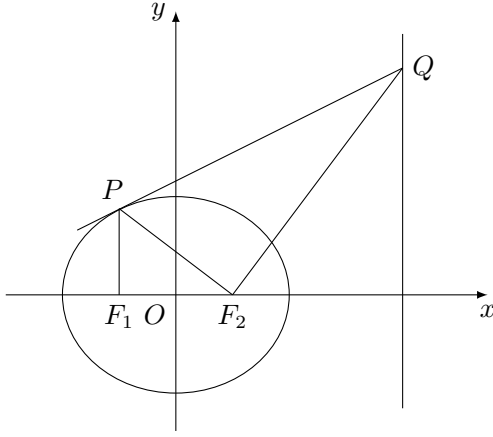


图 2

19. 设函数 $f(x) = ae^x + \frac{1}{ae^x} + b$ ($a > 0$).

- (1) 求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的最小值;
- (2) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = \frac{3}{2}x$, 求 a, b 的值.

20. 如图, 点 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆 C 的上半部分于点 P , 过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线交直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 于点 Q .
- (1) 如果点 Q 的坐标是 $(4, 4)$, 求此时椭圆 C 的方程;
 - (2) 证明: 直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点.



21. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = -x_n^2 + x_n + c$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 证明: $\{x_n\}$ 是递减数列的充分必要条件是 $c < 0$;
 - (2) 求 c 的取值范围, 使 $\{x_n\}$ 是递增数列.