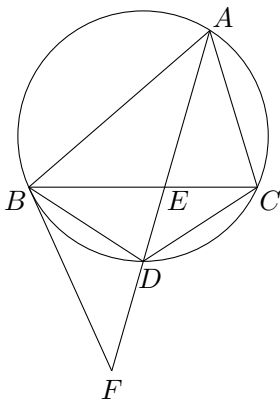


文科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{7+i}{3+4i} =$ ()
(A) $1-i$ (B) $-1+i$ (C) $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$ (D) $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x+2y$ 的最小值为 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
3. 已知命题 $p: \forall x > 0$, 总有 $(x+1)e^x > 1$, 则 $\neg p$ 为 ()
(A) $\exists x_0 \leq 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$ (B) $\exists x_0 > 0$, 使得 $(x_0+1)e^{x_0} \leq 1$
(C) $\forall x > 0$, 总有 $(x+1)e^x \leq 1$ (D) $\forall x \leq 0$, 总有 $(x+1)e^x \leq 1$
4. 设 $a = \log_2 \pi$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \pi$, $c = \pi^{-2}$, 则 ()
(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $a > c > b$ (D) $c > b > a$
5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 $a_1 =$ ()
(A) 2 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$
6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ (B) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
(C) $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ (D) $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$
7. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D , 交 BC 于 E , 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2 = FD \cdot FA$; ③ $AE \cdot CE = BE \cdot DE$; ④ $AF \cdot BD = AB \cdot BF$. 则所有正确结论的序号是 ()

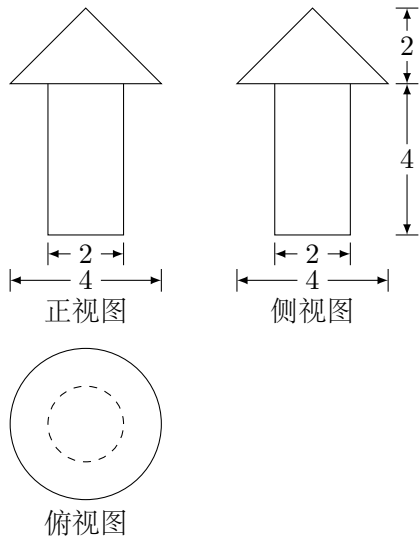


- (A) ①② (B) ③④ (C) ①②③ (D) ①②④

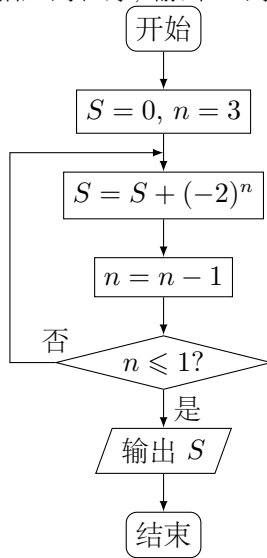
8. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), $x \in \mathbf{R}$. 在曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 的交点中, 若相邻交点距离的最小值为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) π (D) 2π

二、填空题

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 $4:5:5:6$, 则应从一年级本科生中抽取_____名学生.
10. 已知一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____m³.



11. 阅读如图的框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为_____.



12. 函数 $f(x) = \lg x^2$ 的单调递减区间是_____.
13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上, $BC = 3BE$, $DC = \lambda DF$. 若 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 1$, 则 λ 的值为_____.
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x^2 + 5x + 4|, & x \leq 0 \\ 2|x - 2|, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - a|x|$ 恰有

4 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题

15. 某校夏令营有 3 名男同学 A, B, C 和 3 名女同学 X, Y, Z , 其年级情况如下表:

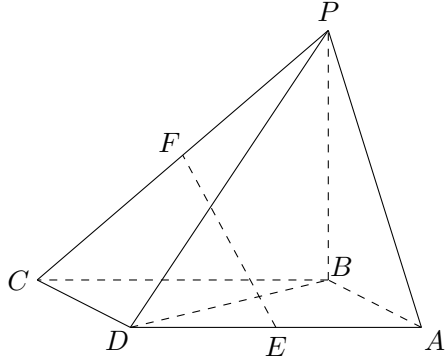
| | 一年级 | 二年级 | 三年级 |
|-----|-----|-----|-----|
| 男同学 | A | B | C |
| 女同学 | X | Y | Z |

现从这 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛 (每人被选到的可能性相同).

- (1) 用表中字母列举出所有可能的结果;
- (2) 设 M 为事件“选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a - c = \frac{\sqrt{6}}{6}b$, $\sin B = \sqrt{6} \sin C$.
(1) 求 $\cos A$ 的值;
(2) 求 $\cos\left(2A - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 四棱锥 $PABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, $BA = BD = \sqrt{2}$, $AD = 2$, $PA = PD = \sqrt{5}$, E, F 分别是棱 AD, PC 的中点.
- (1) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAB ;
- (2) 若二面角 $P-AD-B$ 为 60° ,
- ① 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$;
- ② 求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值.



19. 已知函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}ax^3$ ($a > 0$), $x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (2) 若对于任意的 $x_1 \in (2, +\infty)$, 都存在 $x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$, 求 a 的取值范围.

20. 已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数. 设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, 集合 $A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$.
- (1) 当 $q = 2, n = 3$ 时, 用列举法表示集合 A ;
- (2) 设 $s, t \in A$, $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$, $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$, 其中 $a_i, b_i \in M, i = 1, 2, \dots, n$. 证明: 若 $a_n < b_n$, 则 $s < t$.

18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 上顶点为 B , 已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$.
- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点, 以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 , 经过点 F_2 的直线 l 与该圆相切与点 M , $|MF_2| = 2\sqrt{2}$. 求椭圆的方程.