2010 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$, $N=\{2,3,4\}$, 则 （　）

(A) $M\subseteq N$　　(B) $N\subseteq M$

(C) $M\cap N=\{2,3\}$　　(D) $M\cup N=\{1,4\}$

2. 下列命题中是假命题的是 （　）

(A) $\forall x\in\mathbf{R}$, $2^{x-1}>0$　　(B) $\forall x\in\mathbf{N}^*$, $(x-1)^2>0$

(C) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\lg x<1$　　(D) $\exists x\in\mathbf{R}$, $\tan x=2$

3. 极坐标方程 $\rho=\cos\theta$ 和参数方程 $\begin{cases}x=-1-t\\y=2+3t\end{cases}$ (t 为参数) 所表示的图形分别是 （　）

(A) 圆、直线　　(B) 直线、圆　　(C) 圆、圆　　(D) 直线、直线

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=4$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于 （　）

(A) -16　　(B) -8　　(C) 8　　(D) 16

5. $\int_2^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 等于 （　）

(A) $-2\ln 2$　　(B) $2\ln 2$　　(C) $-\ln 2$　　(D) $\ln 2$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c, 若 $\angle C=120^\circ$, $c=\sqrt{2}a$, 则 （　）

(A) $a>b$　　(B) $a<b$

(C) $a=b$　　(D) a 与 b 的大小关系不能确定

7. 在某种信息传输过程中, 用 4 个数字的一个排列 (数字允许重复) 表示一个信息, 不同排列表示不同信息, 若所用数字只有 0 和 1, 则与信息 0110 至多有两个对应位置上的数字相同的信息个数为 （　）

(A) 10　　(B) 11　　(C) 12　　(D) 15

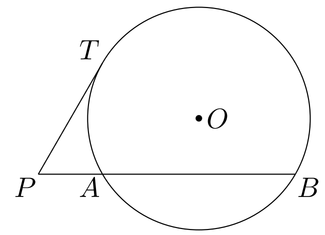
8. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的最小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称, 则 t 的值为 （　）

(A) -2　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 1

二、填空题

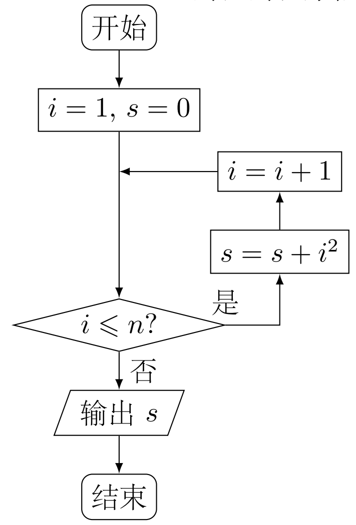
9. 已知一种材料的最佳加入量在 110 g 到 210 g 之间. 若用 0.618 法安排实验, 则第一次试点的加入量可以是______g.

10. 如图所示, 过 $\odot O$ 外一点 P 作一条直线与 $\odot O$ 交于 A, B 两点. 已知 $PA=2$, 点 P 到 $\odot O$ 的切线长 $PT=4$, 则弦 AB 的长为______.

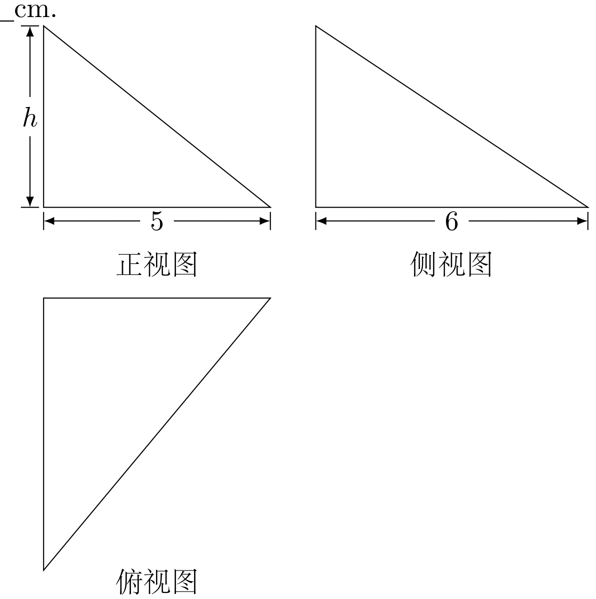


11. 在区间 $[-1,2]$ 上随机取一个数 x, 则 $|x|\leqslant 1$ 的概率为______.

12. 如图是求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$ 的值的程序框图, 则正整数 $n=$______.



13. 图中的三个直角三角形是一个体积为 $20\ \text{cm}^3$ 的几何体的三视图, 则 $h=$______cm.



14. 过抛物线 $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点作斜率为 1 的直线与该抛物线交于 A, B 两点, A, B 在 x 轴上的正射影分别为 D, C. 若梯形 $ABCD$ 的面积为 $12\sqrt{2}$, 则 $p=$______.

15. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 只有有限个正整数 m 使得 $a_m<n$ 成立, 记这样的 m 的个数为 $(a_n)^*$, 则得到一个新数列 $\{(a_n)^*\}$. 例如, 若数列 $\{a_n\}$ 是 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 则数列 $\{(a_n)^*\}$ 是 $0, 1, 2, \cdots, n-1, \cdots$. 已知对任意的 $n\in\mathrm{N}^*$, $a_n=n^2$, 则 $(a_5)^*=$______, $((a_n)^*)^*=$______.

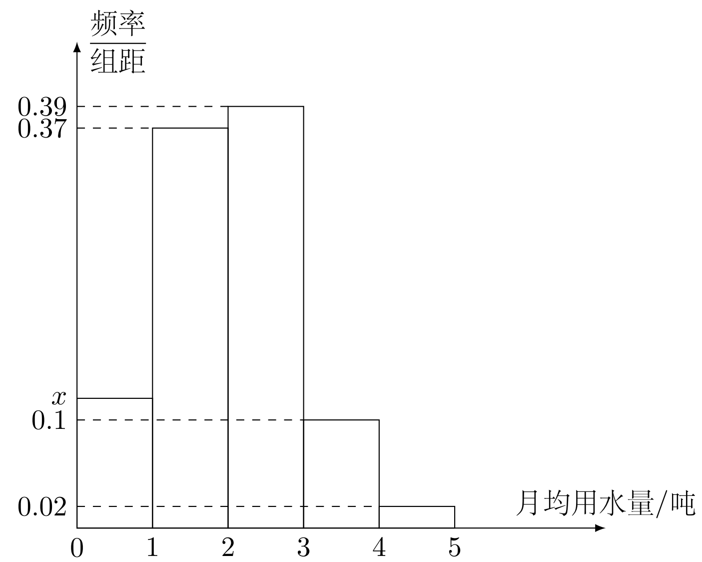
三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\sin^2 x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的零点的集合.

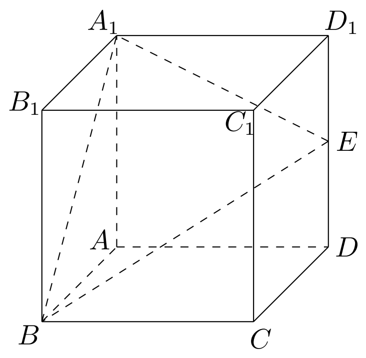
17. 如图, 是某城市通过抽样得到的居民某年的月均用水量 (单位: 吨) 的频率分布直方图.



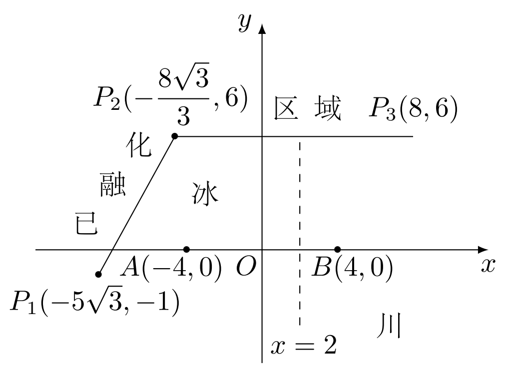
(1) 求直方图中 x 的值;

(2) 若将频率视为概率, 从这个城市随机抽取 3 位居民 (看作有放回的抽样), 求月均用水量在 3 至 4 吨的居民数 X 的分布列和数学期望.

18. 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是棱 DD_1 的中点.
(1) 求直线 BE 和平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值;
(2) 在棱 C_1D_1 上是否存在一点 F, 使 B_1F // 平面 A_1BE? 证明你的结论.



19. 为了考察冰川的融化状况, 一支科考队在某冰川上相距 8 km 的 A, B 两点各建一个考察基地. 视冰川面为平面形, 以过 A, B 两点的直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系 (如图). 在直线 $x=2$ 的右侧, 考察范围为到点 B 的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ km 的区域; 在直线 $x=2$ 的左侧, 考察范围为到 A, B 两点的距离之和不超过 $4\sqrt{5}$ km 的区域.
(1) 求考察区域边界曲线的方程;
(2) 如图所示, 设线段 P_1P_2, P_2P_3 是冰川的部分边界线 (不考虑其他边界), 当冰川融化时, 边界线沿与其垂直的方向朝考察区域平行移动, 第一年移动 0.2 km, 以后每年移动的距离为前一年的 2 倍. 求冰川边界线移动到考察区域所需的最短时间.



20. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$ $(b,\ c\in\mathbf{R})$, 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, 恒有 $f'(x)\leqslant f(x)$.
(1) 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant(x+c)^2$;
(2) 若对满足题设条件的任意 b, c, 不等式 $f(c)-f(b)\leqslant M(c^2-b^2)$ 恒成立, 求 M 的最小值.

21. 数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中, $a_1=a$, a_{n+1} 是函数 $f_n(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(3a_n+n^2)x^2+3n^2a_nx$ 的极小值点.
(1) 当 $a=0$ 时, 求通项 a_n;
(2) 是否存在 a, 使数列 $\{a_n\}$ 是等比数列? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.