

2003 年普通高等学校春季招生考试 (北京卷)

# 理科数学

一、选择题

1. 若集合  $M = \{y|y = 2^{-x}\}$ ,  $P = \{y|y = \sqrt{x-1}\}$ , 则  $M \cap P =$  ( )

- (A)  $\{y|y > 1\}$  (B)  $\{y|y \geq 1\}$  (C)  $\{y|y > 0\}$  (D)  $\{y|y \geq 0\}$

2. 若  $f(x) = \frac{x-1}{x}$ , 则方程  $f(4x) = x$  的根是 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 2 (D) -2

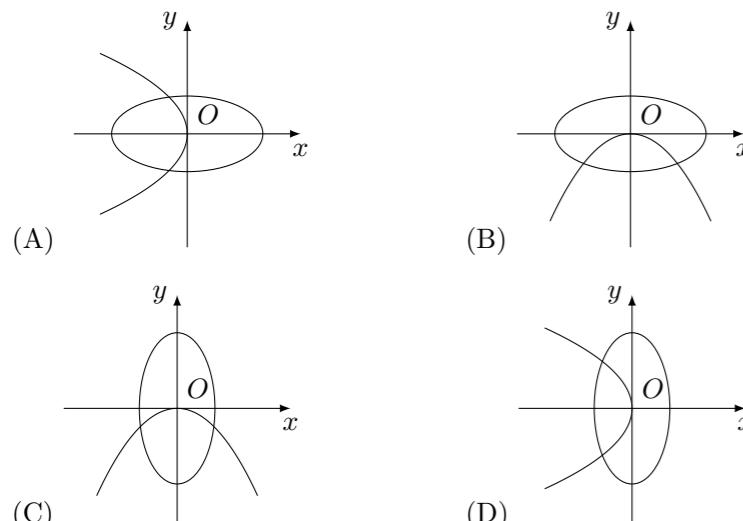
3. 设复数  $z_1 = -1 + i$ ,  $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , 则  $\arg \frac{z_1}{z_2} =$  ( )

- (A)  $\frac{13}{12}\pi$  (B)  $\frac{7}{12}\pi$  (C)  $\frac{5}{12}\pi$  (D)  $-\frac{5}{12}\pi$

4. 函数  $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$  的最大值是 ( )

- (A)  $\frac{4}{5}$  (B)  $\frac{5}{4}$  (C)  $\frac{3}{4}$  (D)  $\frac{4}{3}$

5. 在同一坐标系中, 方程  $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$  与  $ax + by^2 = 0$  ( $a > b > 0$ ) 的曲线大致是 ( )



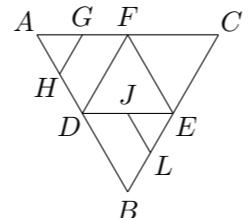
6. 若  $A, B, C$  是  $\triangle ABC$  的三个内角, 且  $A < B < C$  ( $C \neq \frac{\pi}{2}$ ), 则下列结论中正确的是 ( )

- (A)  $\sin A < \sin C$  (B)  $\cos A < \cos C$   
(C)  $\tan A < \tan C$  (D)  $\cot A < \cot C$

7. 椭圆  $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos \varphi \\ y = 3 \sin \varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数) 的焦点坐标为 ( )

- (A)  $(0, 0), (0, -8)$  (B)  $(0, 0), (-8, 0)$   
(C)  $(0, 0), (0, 8)$  (D)  $(0, 0), (8, 0)$

8. 如图, 在正三角形  $ABC$  中,  $D, E, F$  分别为各边的中点,  $G, H, I, J$  分别为  $AF, AD, BE, DE$  的中点. 将  $\triangle ABC$  沿  $DE, EF, DF$  折成三棱锥以后,  $GH$  与  $IJ$  所成角的度数为 ( )



- (A)  $90^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $45^\circ$  (D)  $0^\circ$

9. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 那么不同插法的种数为 ( )

- (A) 42 (B) 30 (C) 20 (D) 12

10. 已知直线  $ax + by + c = 0$  ( $abc \neq 0$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 则三条边长分别为  $|a|, |b|, |c|$  的三角形 ( )

- (A) 是锐角三角形 (B) 是直角三角形  
(C) 是钝角三角形 (D) 不存在

11. 若不等式  $|ax + 2| < 6$  的解集为  $(-1, 2)$ , 则实数  $a$  等于 ( )

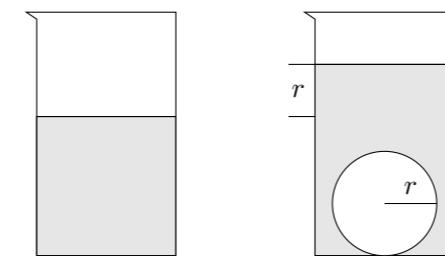
- (A) 8 (B) 2 (C) -4 (D) -8

12. 在直角坐标系  $xOy$  中, 已知  $\triangle AOB$  三边所在直线的方程分别为  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y = 30$ , 则  $\triangle AOB$  内部和边上整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 的总数是 ( )

- (A) 95 (B) 91 (C) 88 (D) 75

二、填空题

13. 如图, 一个底面半径为  $R$  的圆柱形容杯中装有适量的水. 若放入一个半径为  $r$  的实心铁球, 水面高度恰好升高  $r$ , 则  $\frac{R}{r} =$  \_\_\_\_\_.



16. 若存在常数  $p > 0$ , 使得函数  $f(x)$  满足  $f(px) = f\left(px - \frac{p}{2}\right)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 则  $f(x)$  的一个正周期为 \_\_\_\_\_.

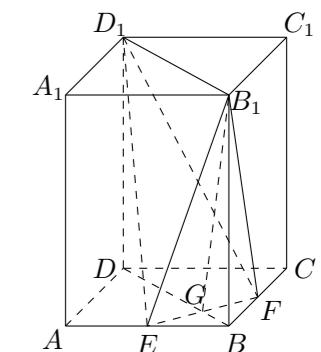
三、解答题

17. 解不等式:  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$ .

18. 已知函数  $f(x) = \frac{6\cos^4 x + 5\sin^2 x - 4}{\cos 2x}$ , 求  $f(x)$  的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

19. 如图, 正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 底面边长为  $2\sqrt{2}$ , 侧棱长为 4.  $E, F$  分别为棱  $AB, BC$  的中点,  $EF \cap BD = G$ .

- (1) 求证: 平面  $B_1EF \perp$  平面  $BDD_1B_1$ ;  
(2) 求点  $D_1$  到平面  $B_1EF$  的距离  $d$ ;  
(3) 求三棱锥  $B_1-EFD_1$  的体积  $V$ .



14. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

15. 已知  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左、右焦点, 点  $P$  在椭圆上,  $\triangle POF_2$  是面积为  $\sqrt{3}$  的正三角形, 则  $b^2$  的值是 \_\_\_\_\_.

20. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
- 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
  - 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?
21. 如图, 在边长为  $l$  的等边  $\triangle ABC$  中, 圆  $O_1$  为  $\triangle ABC$  的内切圆, 圆  $O_2$  与圆  $O_1$  外切, 且与  $AB, BC$  相切,  $\dots$ , 圆  $O_{n+1}$  与圆  $O_n$  外切, 且与  $AB, BC$  相切, 如此无限继续下去. 记圆  $O_n$  的面积为  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
- 证明  $\{a_n\}$  是等比数列;
  - 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  的值.
22. 已知动圆过定点  $P(1, 0)$ , 且与定直线  $l: x = -1$  相切, 点  $C$  在  $l$  上.
- 求动圆圆心的轨迹  $M$  的方程;
  - 设过点  $P$ , 且斜率为  $-\sqrt{3}$  的直线与曲线  $M$  相交于  $A, B$  两点.
    - 问:  $\triangle ABC$  能否为正三角形? 若能, 求点  $C$  的坐标; 若不能, 说明理由;
    - 当  $\triangle ABC$  为钝角三角形时, 求这种点  $C$  的纵坐标的取值范围.

