2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{x \mid (x-1)^2<4, x\in\mathbf{R}\right\}$, $N=\{-1,0,1,2,3\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{0,1,2\}$ (B) $\{-1,0,1,2\}$ (C) $\{-1,0,2,3\}$ (D) $\{0,1,2,3\}$

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-1+\mathrm{i}$ (B) $-1-\mathrm{i}$ (C) $1+\mathrm{i}$ (D) $1-\mathrm{i}$

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_3=a_2+10a_1$, $a_5=9$, 则 $a_1=$( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{9}$ (D) $-\dfrac{1}{9}$

4. 已知 m, n 为异面直线, $m\perp$ 平面 α, $n\perp$ 平面 β. 直线 l 满足 $l\perp m$, $l\perp n$, $l\not\subset\alpha$, $l\not\subset\beta$, 则 ( )

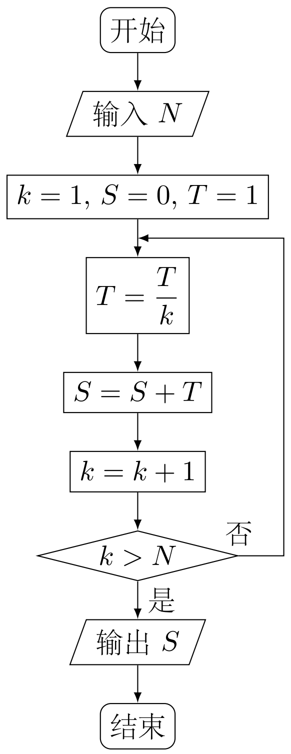
(A) $\alpha\parallel\beta$ 且 $l\parallel\alpha$ (B) $\alpha\perp\beta$ 且 $l\perp\beta$

(C) α 与 β 相交, 且交线垂直于 l (D) α 与 β 相交, 且交线平行于 l

5. 已知 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 5, 则 $a=$ ( )

(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1

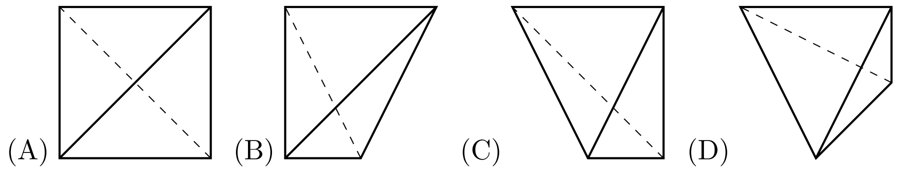
6. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $N=10$, 那么输出的 $S=$ ( )



(A) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{10}$ (B) $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{10!}$

(C) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{11}$ (D) $1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{11!}$

7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到正视图可以为 ( )



8. 设 $a=\log_3 6$, $b=\log_5 10$, $c=\log_7 14$, 则 ( )

(A) $c>b>a$ (B) $b>c>a$ (C) $a>c>b$ (D) $a>b>c$

9. 已知 $a>0$, x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x+y\leqslant 3 \\ y\geqslant a(x-3) \end{cases}$, 若 $z=2x+y$ 的最小值为 1, 则 $a=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

10. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, 下列结论中错误的是 ( )

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)=0$

(B) 函数 $y=f(x)$ 的图象是中心对称图形

(C) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

(D) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)=0$

11. 设抛物线 $C: y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 点 M 在 C 上, $|MF|=5$. 若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$, 则 C 的方程为 ( )

(A) $y^2=4x$ 或 $y^2=8x$ (B) $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

(C) $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$ (D) $y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

12. 已知点 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, 直线 $y=ax+b\ (a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 则 b 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

(C) $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}\right]$ (D) $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

二、填空题

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$______.

14. 从 n 个正整数 $1, 2, \cdots, n$ 中任意取出两个不同的数, 若取出的两数之和等于 5 的概率为 $\dfrac{1}{14}$, 则 $n=$______.

15. 设 θ 为第二象限角, 若 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, 则 $\sin\theta+\cos\theta=$______.

16. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $S_{10}=0$, $S_{15}=25$, 则 nS_n 的最小值为______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=b\cos C+c\sin B$.

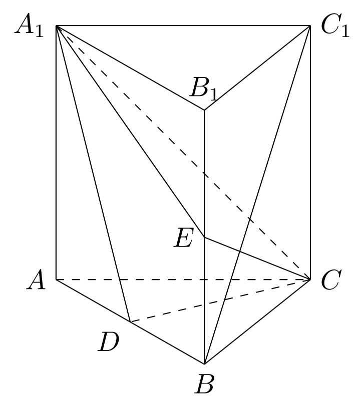
(1) 求 B;

(2) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

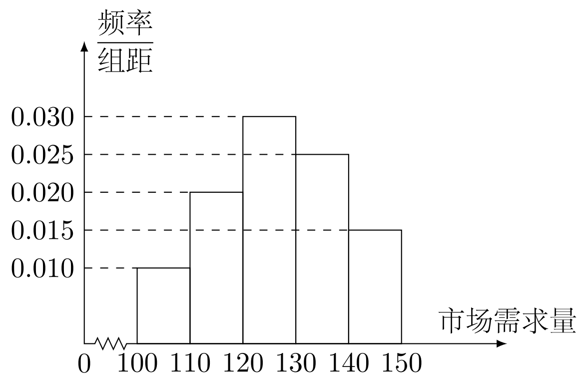
18. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点, $AA_1=AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$.

(1) 证明: $BC_1\parallel$ 平面 A_1CD;

(2) 求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值.



19. 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位: t, $100 \leqslant X \leqslant 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位: 元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.

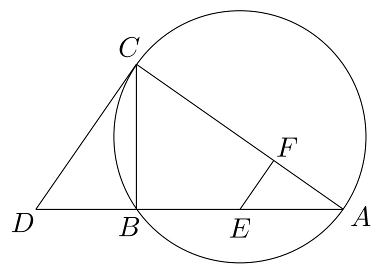


(1) 将 T 表示为 X 的函数;
(2) 根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率;
(3) 在直方图的需求量分组中, 以各组的区间中点值代表该组的各个值, 需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率 (例如: 若需求量 $X \in [100, 110)$, 则取 $X = 105$, 且 $X = 105$ 的概率等于需求量落入 $[100, 110)$ 的频率), 求 T 的数学期望.

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求 M 的方程;
(2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

21. 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x + m)$.
(1) 设 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m, 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 当 $m \leqslant 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

22. 如图, CD 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线, AB 的延长线交直线 CD 于点 D, E, F 分别为弦 AB 与弦 AC 上的点, 且 $BC \cdot AE = DC \cdot AF$, B, E, F, C 四点共圆.
(1) 证明: CA 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径;
(2) 若 $DB = BE = EA$, 求过 B, E, F, C 四点的圆的面积与 $\triangle ABC$ 外接圆面积的比值.



23. 已知动点 P, Q 都在曲线 $C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数) 上, 对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$, M 为 PQ 的中点.
(1) 求 M 的轨迹的参数方程;
(2) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数, 并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

24. 设 a, b, c 均为正数, 且 $a + b + c = 1$, 证明:
(1) $ab + bc + ca \leqslant \dfrac{1}{3}$;
(2) $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geqslant 1$.