

2004 年普通高等学校招生考试 (福建卷)

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 则 $C_U(A \cap B)$ 等于 ()

(A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{4\}$ (C) $\{3, 5\}$ (D) \emptyset

2. $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ 的值是 ()

(A) 2 (B) $2 + \sqrt{3}$ (C) 4 (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 命题 p : 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a + b| > 1$ 的充要条件. 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x - 1| - 2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. 则 ()

(A) “ p 或 q ”为假 (B) “ p 且 q ”为真 (C) p 真 q 假 (D) p 假 q 真

4. 已知 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点, 过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 ()

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{a_5}{a_3} = \frac{5}{9}$, 则 $\frac{S_9}{S_5} =$ ()

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

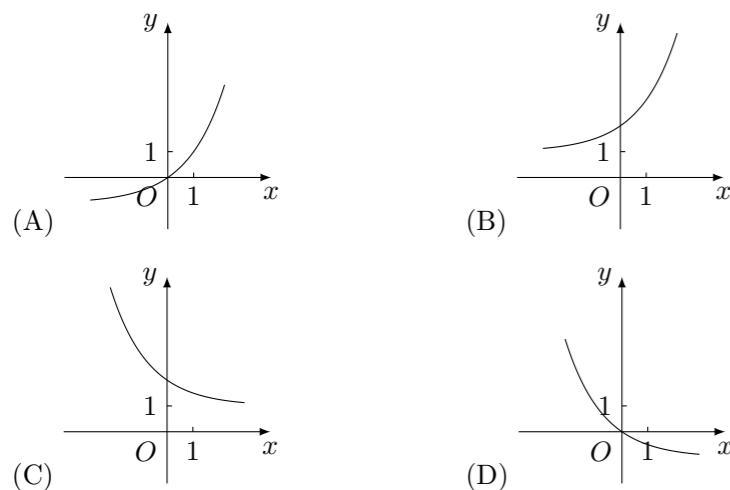
6. 已知 m, n 是不重合的直线, α, β 是不重合的平面, 有下列命题:

- ① 若 $m \subset \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$;
- ② 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
- ③ 若 $\alpha \cap \beta = n, m \parallel n$, 则 $m \parallel \alpha$ 且 $m \parallel \beta$;
- ④ 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$.

其中真命题的个数是 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 已知函数 $y = \log_2 x$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(1-x)$ 的图象是 ()



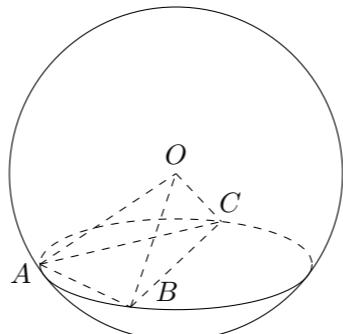
8. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是非零向量且满足 $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角是 ()

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

9. 已知 $\left(x - \frac{a}{x}\right)^8$ 展开式中常数项为 1120, 其中实数 a 是常数, 则展开式中各项系数的和是 ()

(A) 2^8 (B) 3^8 (C) 1 或 3^8 (D) 1 或 2^8

10. 如图, A, B, C 是表面积为 48π 的球面上三点, $AB = 2, BC = 4, \angle ABC = 60^\circ$, O 为球心, 则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 ()

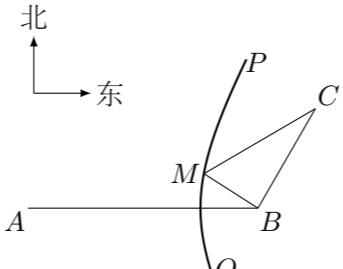


(A) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 当 $x \in [3, 4]$ 时, $f(x) = x - 2$, 则 ()

(A) $f\left(\sin \frac{1}{2}\right) < f\left(\cos \frac{1}{2}\right)$ (B) $f\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) > f\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)$
 (C) $f(\sin 1) < f(\cos 1)$ (D) $f\left(\sin \frac{3}{2}\right) > f\left(\cos \frac{3}{2}\right)$

12. 如图, B 地在 A 地的正东方向 4 km 处, C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处, 河流的没岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km. 现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头, 向 B, C 两地转运货物. 经测算, 从 M 到 B, C 两地修建公路的费用分别是 a 万元/km, $2a$ 万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 ()



(A) $(\sqrt{7} + 1)a$ 万元 (B) $(2\sqrt{7} - 2)a$ 万元
 (C) $2\sqrt{7}a$ 万元 (D) $(\sqrt{7} - 1)a$ 万元

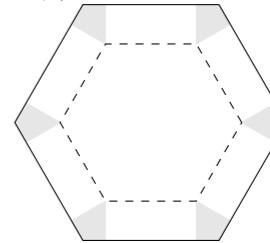
二、填空题

13. 直线 $x + 2y = 0$ 被曲线 $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ 所截得的弦长等于_____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & (x \geq 0) \\ \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}$. 若 $f(a) > a$, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 一个总体中有 100 个个体, 随机编号 0, 1, 2, …, 99, 依编号顺序平均分成 10 个小组, 组号依次为 1, 2, 3, …, 10. 现用系统抽样方法抽取一个容量为 10 的样本, 规定如果在第 1 组随机抽取的号码为 m , 那么在第 k 组中抽取的号码个位数字与 $m + k$ 的个位数字相同, 若 $m = 6$, 则在第 7 组中抽取的号码是_____.

16. 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时, 其容积最大.



三、解答题

17. 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 其中向量 $\mathbf{a} = (2 \cos x, 1)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sqrt{3} \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) = 1 - \sqrt{3}$ 且 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 求 x ;

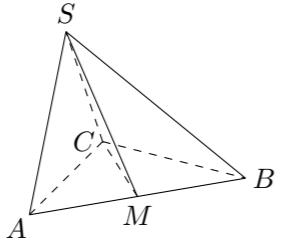
(2) 若函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象按向量 $\mathbf{c} = (m, n)$ ($|m| < \frac{\pi}{2}$) 平移后得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 求实数 m, n 的值.

18. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.

- (1) 分别求甲、乙两人考试合格的概率;
 (2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

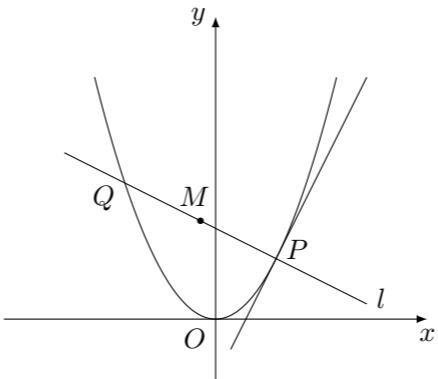
19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形, 平面 $SAC \perp$ 平面 ABC , $SA = SC = 2\sqrt{2}$, M 为 AB 的中点.

- (1) 证明: $AC \perp SB$;
- (2) 求二面角 $S-CM-B$ 的大小;
- (3) 求点 B 到平面 SCM 的距离.



21. 如图, P 是抛物线 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ 上一点, 直线 l 过点 P 并与抛物线 C 在点 P 的切线垂直, l 与抛物线 C 相交于另一点 Q .

- (1) 当点 P 的横坐标为 2 时, 求直线 l 的方程;
- (2) 当点 P 在抛物线 C 上移动时, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程, 并求点 M 到 x 轴的最短距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第 n 年 (今年为第一年) 的利润为 $500\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ 万元 (n 为正整数).

- (1) 设从今年起的前 n 年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元, 进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元 (须扣除技术改造资金), 求 A_n 、 B_n 的表达式;
- (2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

22. 已知 $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3$ ($x \in \mathbf{R}$) 在区间 $[-1, 1]$ 上是增函数.

- (1) 求实数 a 的值组成的集合 A ;
- (2) 设关于 x 的方程 $f(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1 、 x_2 . 试问: 是否存在实数 m , 使得不等式 $m^2 + tm + 1 \geq |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1, 1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.