

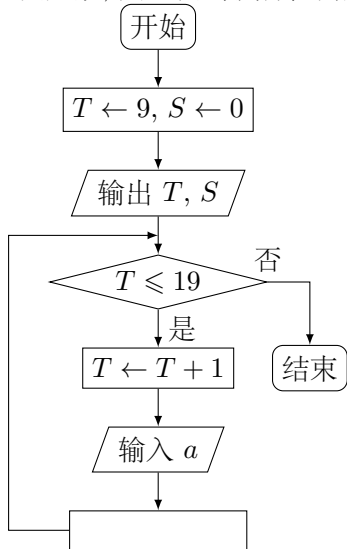
理科数学

一、填空题

- 不等式 $\frac{2-x}{x+4} > 0$ 的解集为_____.
- 若复数 $z = 1 - 2i$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} + z =$ _____.
- 动点 P 到点 $F(2, 0)$ 的距离与它到直线 $x + 2 = 0$ 的距离相等, 则点 P 的轨迹方程为_____.
- 行列式 $\begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}$ 的值是_____.
- 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 的圆心到直线 $l: 3x + 4y + 4 = 0$ 的距离 $d =$ _____.
- 随机变量 ξ 的概率分布由下表给出:

x	7	8	9	10
$P(\xi = x)$	0.3	0.35	0.2	0.15

则该随机变量 ξ 的均值是_____.
- 2010 年上海世博会园区每天 9:00 开园, 20:00 停止入园. 在下边的框图中, S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数, a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入_____.

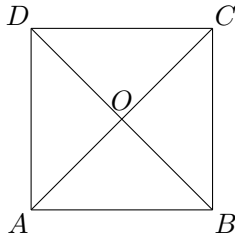


- 对任意不等于 1 的正数 a , 函数 $f(x) = \log_a(x + 3)$ 的反函数的图象都经过点 P , 则点 P 的坐标为_____.
- 从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中, 随机抽取 1 张, 事件 A 为“抽得红桃 K ”, 事件 B 为“抽得为黑桃”, 则概率 $P(A \cup B) =$ _____. (结果用最简分数表示)

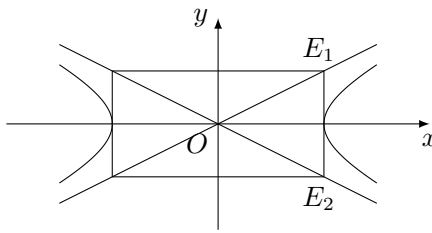
- 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ 中, 记

位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). 当 $n = 9$ 时, $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{99} =$ _____.

- 将直线 $l_1: nx + y - n = 0$, $l_2: x + ny - n = 0$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$), x 轴, y 轴围成的封闭区域的面积记为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.
- 如图所示, 在边长为 4 的正方形纸片 $ABCD$ 中, AC 与 BD 相交于点 O , 剪去 $\triangle AOB$, 将剩余部分沿 OC 、 OD 折叠, 使 OA 、 OB 重合, 则以 $A(B)$ 、 C 、 D 、 O 为顶点的四面体的体积是_____.



- 如图所示, 直线 $x = 2$ 与双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线交于 E_1 、 E_2 两点, 记 $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, 任取双曲线 Γ 上的点 P , 若 $\overrightarrow{OP} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 a 、 b 满足的一个等式是_____.



- 从集合 $U = \{a, b, c, d\}$ 的子集中选出 4 个不同的子集, 需同时满足以下两个条件:
 - \emptyset, U 都要选出;
 - 对选出的任意两个子集 A 和 B , 必有 $A \subseteq B$ 或 $A \supseteq B$.
 那么, 共有_____种不同的选法.

二、选择题

- “ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in \mathbf{Z}$)”是“ $\tan x = 1$ ”成立的 ()
 - 充分不必要条件
 - 必要不充分条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ ($t \in \mathbf{R}$), 则 l 的方向向量 \vec{d} 可以是 ()
 - (1, 2)
 - (2, 1)
 - (-2, 1)
 - (1, -2)
- 若 x_0 是方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 ()
 - $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
 - $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
 - $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
 - $\left(0, \frac{1}{3}\right)$
- 某人要作一个三角形, 要求它的三条高的长度分别是 $\frac{1}{13}$ 、 $\frac{1}{11}$ 、 $\frac{1}{5}$, 则此人将 ()

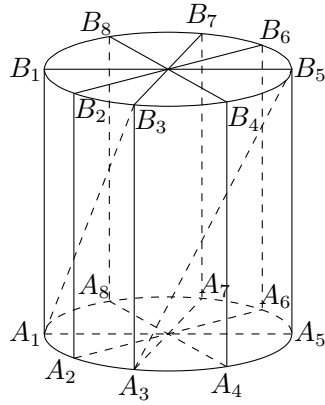
- 不能作出满足要求的三角形
- 作出一个锐角三角形
- 作出一个直角三角形
- 作出一个钝角三角形

三、解答题

- 已知 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 化简:
$$\lg \left(\cos x \cdot \tan x + 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} \right) + \lg \left[\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - \lg (1 + \sin 2x).$$

- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in \mathbf{N}^*$.
 - 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;
 - 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并指出 n 为何值时, S_n 取得最小值, 并说明理由.

21. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝. 骨架将圆柱底面 8 等分, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面).
- (1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到 0.01 平方米);
- (2) 在灯笼内, 以矩形骨架的顶点为端点, 安装一些霓虹灯. 当灯笼底面半径为 0.3 米时, 求图中两根直线型霓虹灯 A_1B_3 、 A_3B_5 所在异面直线所成角的大小 (结果用反三角函数表示)



22. 若实数 x 、 y 、 m 满足 $|x - m| > |y - m|$, 则称 x 比 y 远离 m .
- (1) 若 $x^2 - 1$ 比 1 远离 0, 求 x 的取值范围;
- (2) 对任意两个不相等的正数 a 、 b , 证明: $a^3 + b^3$ 比 $a^2b + ab^2$ 远离 $2ab\sqrt{ab}$;
- (3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D = \left\{ x \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R} \right\}$. 任取 $x \in D$, $f(x)$ 等于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 中远离 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的基本性质 (结论不要求证明).

23. 已知椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 P 的坐标为 $(-a, b)$.
- (1) 若直角坐标平面上的点 M 、 $A(0, -b)$ 、 $B(a, 0)$ 满足 $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, 求点 M 的坐标;
- (2) 设直线 $l_1: y = k_1x + p$ 交椭圆 Γ 于 C 、 D 两点, 交直线 $l_2: y = k_2x$ 于点 E . 若 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;
- (3) 对于椭圆 Γ 上的点 $Q(a \cos \theta, b \sin \theta)$ ($0 < \theta < \pi$), 如果椭圆 Γ 上存在不同的两点 P_1 、 P_2 使 $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{PQ}$, 写出求作点 P_1 、 P_2 的步骤, 并求出使 P_1 、 P_2 存在的 θ 满足的条件.