

文科数学

一、填空题

1. 函数 $y = 1 - 2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是_____.
 2. 若复数 $z = 1 + 2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 $(z + \frac{1}{\bar{z}}) \cdot \bar{z} =$ _____.
 3. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = |x - 1| + |x^2 - a|$, 若 $f(2) = 1$, 则 $f(1) =$ _____.
 4. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为_____.
 5. 某校高一、高二、高三分别有学生 1600 名、1200 名、800 名. 为了解该校高中学生的牙齿健康状况, 按各年级的学生数进行分层抽样. 若高三抽出 20 名学生, 则高一、高二共抽取的学生数为_____.
 6. 若实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $x^2 + 2y^2$ 的最小值为_____.
 7. 在长方体中割去两个小长方体后的几何体的三视图如图, 则切割掉的两个小长方体的体积之和等于_____.
-
8. 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与轴所成角的大小为_____.
(结果用反三角函数值表示)
 9. 设 $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x \leq 0 \\ x + \frac{1}{x} + a, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为_____.
 10. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $a_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_3 + a_4 + \dots + a_n)$, 则 $q =$ _____.
 11. 若 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是_____.
 12. 方程 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的所有解的和等于_____.
 13. 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是_____. (结果用最简分数表示)

14. 已知曲线 $C : x = -\sqrt{4 - y^2}$, 直线 $l : x = 6$. 若对于点 $A(m, 0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \vec{0}$, 则 m 的取值范围为_____.

二、选择题

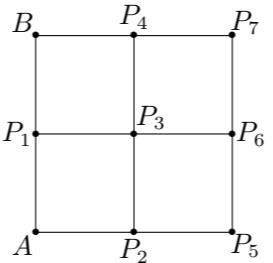
15. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a + b > 4$ ”是“ $a > 2$ 且 $b > 2$ ”的_____.

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

16. 已知互异的复数 a, b 满足 $ab \neq 0$, 集合 $\{a, b\} = \{a^2, b^2\}$, 则 $a + b =$ _____.

- (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

17. 如图, 四个边长为 1 的小正方形排成一个大正方形, AB 是大正方形的一边, P_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 是小正方形的其余顶点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) 的不同值的个数为_____.



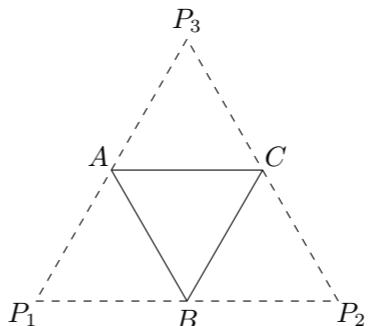
- (A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1

18. 已知 $P_1(a_1, b_1)$ 与 $P_2(a_2, b_2)$ 是直线 $y = kx + 1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 1 \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$ 的解的情况是_____.

- (A) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总是无解 (B) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总有唯一解
(C) 存在 k, P_1, P_2 , 使之恰有两解 (D) 存在 k, P_1, P_2 , 使之有无穷多解

三、解答题

19. 底面边长为 2 的正三棱锥 $P - ABC$, 其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$, 如图, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V .



20. 设常数 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$.

- (1) 若 $a = 4$, 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$;
(2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在 A 、 B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD , 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A 、 B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β .
- (1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geq 2\beta$, 问 CD 的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?
- (2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12^\circ$, $\beta = 18.45^\circ$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).
22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于直线 $l: ax + by + c = 0$ 和点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 记 $\eta = (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c)$. 若 $\eta < 0$, 则称点 P_1 , P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点, 且曲线 C 上存在点 P_1 , P_2 被直线 l 分隔, 则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.
- (1) 求证: 点 $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ 被直线 $x + y - 1 = 0$ 分隔;
- (2) 若直线 $y = kx$ 是曲线 $x^2 - 4y^2 = 1$ 的分隔线, 求实数 k 的取值范围;
- (3) 动点 M 到点 $Q(0, 2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1, 设点 M 的轨迹为 E . 求 E 的方程, 并证明 y 轴为曲线 E 的分隔线.
23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{3}a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n$, $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$.
- (1) 若 $a_2 = 2$, $a_3 = x$, $a_4 = 9$, 求 x 的取值范围;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_m = \frac{1}{1000}$, 求正整数 m 的最小值, 以及 m 取最小值时相应 $\{a_n\}$ 的公比;
- (3) 若 a_1, a_2, \dots, a_{100} 成等差数列, 求 a_1, a_2, \dots, a_{100} 的公差的取值范围.

