2016 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为______.

2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的虚部等于______.

3. 已知平行直线 $l_1: 2x+y-1=0$, $l_2: 2x+y+1=0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是______.

4. 某次体检, 5 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76, 则这组数据的中位数是______(米).

5. 若函数 $f(x)=4\sin x+a\cos x$ 的最大值为 5, 则常数 $a=$______.

6. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

7. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y \geqslant x+1 \end{cases}$, 则 $x-2y$ 的最大值为______.

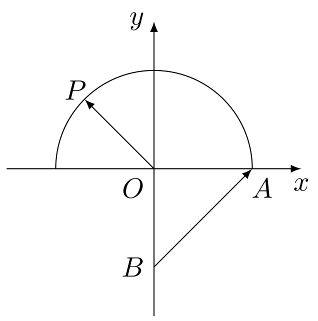
8. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为______.

9. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于______.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于______.

11. 某食堂规定, 每份午餐可以在四种水果中任选两种, 则甲、乙两同学各自所选的两种水果相同的概率为______.

12. 如图, 已知点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,-1)$, P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是______.



13. 设 $a>0, b>0$, 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+by=1 \end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是______.

14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \in \{2,3\}$, 则 k 的最大值为______.

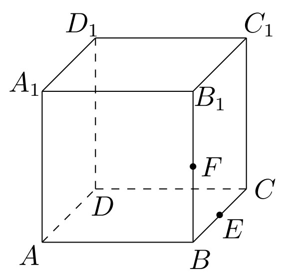
二、选择题

15. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“$a>1$”是“$a^2>1$”的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BC, BB_1 的中点, 则下列直线中与直线 EF 相交的是 ( )



(A) 直线 AA_1 (B) 直线 A_1B_1 (C) 直线 A_1D_1 (D) 直线 B_1C_1

17. 设 $a \in \mathbf{R}$, $b \in [0,2\pi)$. 若对任意实数 x 都有 $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin(ax+b)$, 则满足条件的有序实数对 (a,b) 的对数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题 (B) ①和②均为假命题

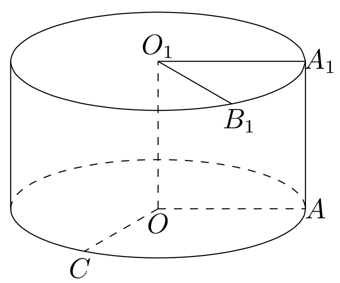
(C) ①为真命题, ②为假命题 (D) ①为假命题, ②为真命题

三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕 OO_1 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overparen{AC}$ 长为 $\dfrac{5\pi}{6}$, $\overparen{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

(1) 求圆柱的体积与侧面积;

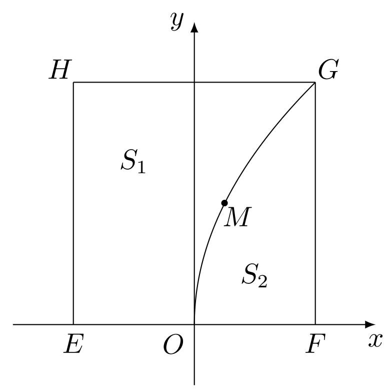
(2) 求异面直线 O_1B_1 与 OC 所成的角的大小.



20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2, 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 C 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\dfrac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 EH 为一边, 另一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A、B 两点.

(1) 若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $|AB|=4$, 求 l 的斜率.

22. 对于无穷数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, 记 $A=\{x\mid x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{x\mid x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$, 若同时满足条件: ① $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均单调递增; ② $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\mathbf{N}^*$, 则称 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列.

(1) 若 $a_n=2n-1$, $b_n=4n-2$, 判断 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是否为无穷互补数列, 并说明理由;

(2) 若 $a_n=2^n$ 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 16 项的和;

(3) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 是无穷互补数列, $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_{16}=36$, 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

23. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x}+a\right)$.

(1) 当 $a=1$ 时, 解不等式 $f(x)>1$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)+\log_2(x^2)=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的值;

(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.