

理科数学

一、选择题

- 复数 $\frac{3+2i}{2-3i} =$ ()
(A) i (B) $-i$ (C) $12-13i$ (D) $12+13i$
- 记 $\cos(-80^\circ) = k$, 那么 $\tan 100^\circ =$ ()
(A) $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (B) $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (C) $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ (D) $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 1 \\ x+y \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - 2y$ 的最大值为 ()
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
- 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 a_2 a_3 = 5$, $a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 =$ ()
(A) $5\sqrt{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) $4\sqrt{2}$
- $(1+2\sqrt{x})^3(1-\sqrt[3]{x})^5$ 的展开式中 x 的系数是 ()
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4
- 某校开设 A 类选修课 3 门, B 类选修课 4 门, 一位同学从中共选 3 门. 若要求两类课程中各至少选一门, 则不同的选法共有 ()
(A) 30 种 (B) 35 种 (C) 42 种 (D) 48 种
- 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, BB_1 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- 设 $a = \log_3 2$, $b = \ln 2$, $c = 5^{-\frac{1}{2}}$, 则 ()
(A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $c < a < b$ (D) $c < b < a$
- 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, 则 P 到 x 轴的距离为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{6}$
- 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $a + 2b$ 的取值范围是 ()
(A) $(2\sqrt{2}, +\infty)$ (B) $[2\sqrt{2}, +\infty)$ (C) $(3, +\infty)$ (D) $[3, +\infty)$
- 已知圆 O 的半径为 1, PA, PB 为该圆的两条切线, A, B 为两切点, 那么 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 ()
(A) $-4 + \sqrt{2}$ (B) $-3 + \sqrt{2}$ (C) $-4 + 2\sqrt{2}$ (D) $-3 + 2\sqrt{2}$

- 已知在半径为 2 的球面上有 A, B, C, D 四点, 若 $AB = CD = 2$, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值为 ()
(A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

二、填空题

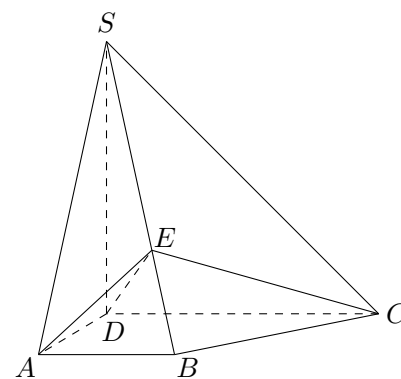
- 不等式 $\sqrt{2x^2+1} - x \leq 1$ 的解集是_____.
- 已知 α 为第三象限的角, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) =$ _____.
- 直线 $y = 1$ 与曲线 $y = x^2 - |x| + a$ 有四个交点, 则 a 的取值范围是_____.
- 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点, B 是短轴的一个端点, 线段 BF 的延长线交 C 于点 D , 且 $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{FD}$, 则 C 的离心率为_____.

三、解答题

- 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B 及其对边 a, b 满足 $a + b = a \cot A + b \cot B$, 求内角 C .

- 投到某杂志的稿件, 先由两位初审专家进行评审. 若能通过两位初审专家的评审, 则予以录用; 若两位初审专家都未予通过, 则不予录用; 若恰能通过一位初审专家的评审, 则再由第三位专家进行复审, 若能通过复审专家的评审, 则予以录用, 否则不予录用. 设稿件能通过各初审专家评审的概率均为 0.5, 复审的稿件能通过评审的概率为 0.3. 各专家独立评审.
(1) 求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;
(2) 记 X 表示投到该杂志的 4 篇稿件中被录用的篇数, 求 X 的分布列及期望.

- 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AB = AD = 1$, $DC = SD = 2$, E 为棱 SB 上的一点, 平面 $EDC \perp$ 平面 SBC .
(1) 证明: $SE = 2EB$;
(2) 求二面角 $A-DE-C$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x) = (x + 1) \ln x - x + 1$.

(1) 若 $xf'(x) \leq x^2 + ax + 1$, 求 a 的取值范围;

(2) 证明: $(x - 1)f(x) \geq 0$.

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $K(-1, 0)$ 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 D .

(1) 证明: 点 F 在直线 BD 上;

(2) 设 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = \frac{8}{9}$, 求 $\triangle BDK$ 的内切圆 M 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = c - \frac{1}{a_n}$.

(1) 设 $c = \frac{5}{2}$, $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使不等式 $a_n < a_{n+1} < 3$ 成立的 c 的取值范围.