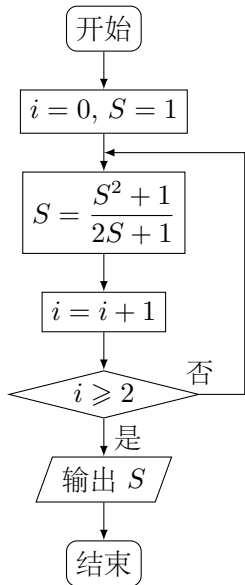


# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $\{0\}$  (B)  $\{-1, 0\}$  (C)  $\{0, 1\}$  (D)  $\{-1, 0, 1\}$
2. 在复平面内, 复数  $(2 - i)^2$  对应的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
3. “ $\varphi = \pi$ ”是“曲线  $y = \sin(2x + \varphi)$  过坐标原点”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
4. 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  值为 ( )

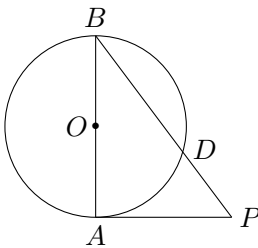


- (A) 1 (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{13}{21}$  (D)  $\frac{610}{987}$
5. 函数  $f(x)$  的图象向右平移 1 个单位长度, 所得图象与曲线  $y = e^x$  关于  $y$  轴对称, 则  $f(x) =$  ( )  
(A)  $e^{x+1}$  (B)  $e^{x-1}$  (C)  $e^{-x+1}$  (D)  $e^{-x-1}$
6. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率为  $\sqrt{3}$ , 则其渐近线方程为 ( )  
(A)  $y = \pm 2x$  (B)  $y = \pm \sqrt{2}x$  (C)  $y = \pm \frac{1}{2}x$  (D)  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$
7. 直线  $l$  过抛物线  $C: x^2 = 4y$  的焦点且与  $y$  轴垂直, 则  $l$  与  $C$  所围成的图形的面积等于 ( )  
(A)  $\frac{4}{3}$  (B) 2 (C)  $\frac{8}{3}$  (D)  $\frac{16\sqrt{2}}{3}$
8. 设关于  $x, y$  的不等式组  $\begin{cases} 2x - y + 1 > 0 \\ x + m < 0 \\ y - m > 0 \end{cases}$  表示的平面区域内存在点  $P(x_0, y_0)$ , 满足  $x_0 - 2y_0 = 2$ , 则  $m$  的取值范围是 ( )

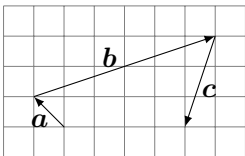
- (A)  $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$  (B)  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$  (C)  $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$  (D)  $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$

## 二、填空题

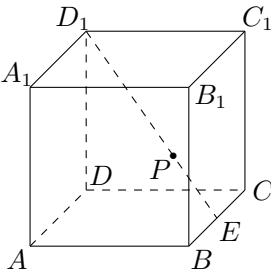
9. 在极坐标系中, 点  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$  到直线  $\rho \sin \theta = 2$  的距离等于\_\_\_\_\_.
10. 若等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2 + a_4 = 20$ ,  $a_3 + a_5 = 40$ , 则公比  $q =$ \_\_\_\_\_, 前  $n$  项和  $S_n =$ \_\_\_\_\_.
11. 如图,  $AB$  为圆  $O$  的直径,  $PA$  为圆  $O$  的切线,  $PB$  与圆  $O$  相交于  $D$ , 若  $PA = 3$ .  $PD : DB = 9 : 16$ , 则  $PD =$ \_\_\_\_\_,  $AB =$ \_\_\_\_\_.



12. 将序号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张参观券全部分给 4 人, 每人至少 1 张, 如果分给同一人的 2 张参观券连号, 那么不同的分法种数是\_\_\_\_\_.
13. 向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  在正方形网格中的位置如图所示, 若  $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ), 则  $\frac{\lambda}{\mu} =$ \_\_\_\_\_.



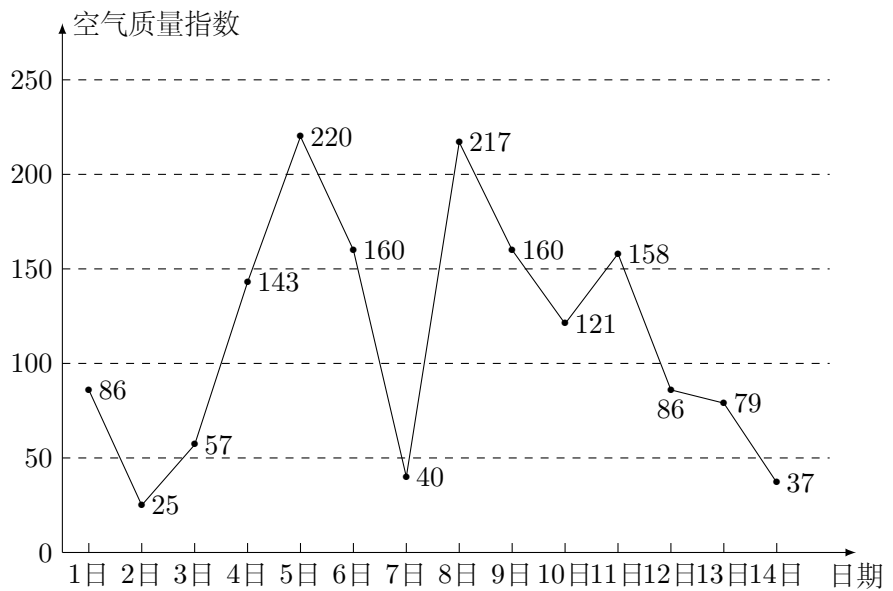
14. 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  为  $BC$  的中点, 点  $P$  在线段  $D_1E$  上, 点  $P$  到直线  $CC_1$  的距离的最小值为\_\_\_\_\_.



## 三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 3$ ,  $b = 2\sqrt{6}$ ,  $\angle B = 2\angle A$ .  
(1) 求  $\cos A$  的值;  
(2) 求  $c$  的值.

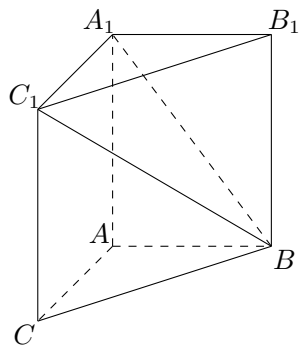
16. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天.



- (1) 求此人到达当日空气重度污染的概率;  
(2) 设  $X$  是此人停留期间空气质量优良的天数, 求  $X$  的分布列与数学期望;  
(3) 由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大? (结论不要求证明)

17. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1C_1C$  是边长为 4 的正方形. 平面  $ABC \perp$  平面  $AA_1C_1C$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ .

- (1) 求证:  $AA_1 \perp$  平面  $ABC$ ;
- (2) 求二面角  $A_1 - BC_1 - B_1$  的余弦值;
- (3) 证明: 在线段  $BC_1$  上存在点  $D$ , 使得  $AD \perp A_1B$ , 并求  $\frac{BD}{BC_1}$  的值.



19. 已知  $A, B, C$  是椭圆  $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  上的三个点,  $O$  是坐标原点.
- (1) 当点  $B$  是  $W$  的右顶点, 且四边形  $OABC$  为菱形时, 求此菱形的面积;
  - (2) 当点  $B$  不是  $W$  的顶点时, 判断四边形  $OABC$  是否可能为菱形, 并说明理由.

20. 已知  $\{a_n\}$  是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前  $n$  项的最大值记为  $A_n$ , 第  $n$  项之后各项  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$  的最小值记为  $B_n$ ,  $d_n = A_n - B_n$ .
- (1) 若  $\{a_n\}$  为  $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \dots$ , 是一个周期为 4 的数列 (即对任意  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_{n+4} = a_n$ ), 写出  $d_1, d_2, d_3, d_4$  的值;
  - (2) 设  $d$  是非负整数, 证明:  $d_n = -d$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的充分必要条件为  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列;
  - (3) 证明: 若  $a_1 = 2, d_n = 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 则  $\{a_n\}$  的项只能是 1 或者 2, 且有无穷多项为 1.

18. 设  $L$  为曲线  $C: y = \frac{\ln x}{x}$  在点  $(1, 0)$  处的切线.

- (1) 求  $L$  的方程;
- (2) 证明: 除切点  $(1, 0)$  之外, 曲线  $C$  在直线  $L$  的下方.