2012 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

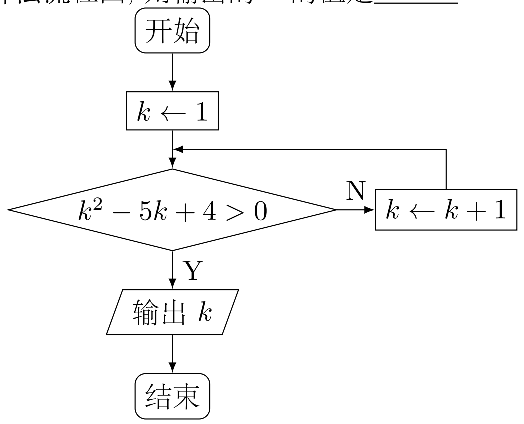
一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,4,6\}$, 则 $A\cup B=$______.

2. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比是 $3:3:4$, 现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 50 的样本, 则应从高二年级抽取______名学生.

3. 设 $a, b\in\mathbf{R}$, $a+b\mathrm{i}=\dfrac{11-7\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位), 则 $a+b$ 的值为______.

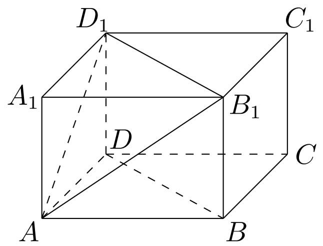
4. 如图是一个算法流程图, 则输出的 k 的值是______.



5. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2\log_6 x}$ 的定义域为______.

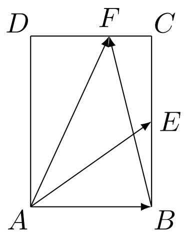
6. 现有 10 个数, 它们能构成一个以 1 为首项, -3 为公比的等比数列, 若从这 10 个数中随机抽取一个数, 则它小于 8 的概率是______.

7. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=3$ cm, $AA_1=2$ cm, 则四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积为______cm^3.



8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m^2+4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 则 m 的值为______.

9. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{2}$, $BC=2$, 点 E 为 BC 的中点, 点 F 在边 CD 上, 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是______.



10. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 且在区间 $[-1,1]$ 上, $f(x)=\begin{cases} ax+1, & -1\leqslant x<0 \\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, 则 $a+3b$ 的值为______.

11. 设 α 为锐角, 若 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的值为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$, 若直线 $y=kx-2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 则 k 的最大值是______.

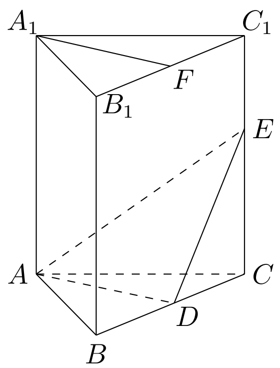
13. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a,\ b\in\mathbf{R}$) 的值域为 $[0,+\infty)$, 若关于 x 的不等式 $f(x)<c$ 的解集为 $(m,m+6)$, 则实数 c 的值为______.

14. 已知正数 a, b, c 满足 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$, $c\ln b\geqslant a+c\ln c$, 则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是______.

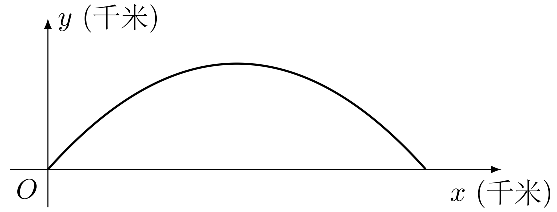
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
(1) 求证: $\tan B=3\tan A$;
(2) 若 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 求 A 的值.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1=A_1C_1$, D, E 分别是棱 BC, CC_1 上的点 (点 D 不同于点 C), 且 $AD\perp DE$, F 为 B_1C_1 的中点. 求证:
(1) 平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1;
(2) 直线 $A_1F\parallel$ 平面 ADE.



17. 如图, 建立平面直角坐标系 xOy, x 轴在地平面上, y 轴垂直于地平面, 单位长度为 1 千米, 某炮位于坐标原点. 已知炮弹发射后的轨迹在方程 $y=kx-\dfrac{1}{20}(1+k^2)x^2$ $(k>0)$ 表示的曲线上, 其中 k 与发射方向有关. 炮的射程是指炮弹落地点的横坐标.
(1) 求炮的最大射程;
(2) 设在第一象限有一飞行物 (忽略其大小), 其飞行高度为 3.2 千米, 试问它的横坐标 a 不超过多少时, 炮弹可以击中它? 请说明理由.



18. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值, 则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点. 已知 a, b 是实数, 1 和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.
(1) 求 a 和 b 的值;
(2) 设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$, 求 $g(x)$ 的极值点;
(3) 设 $h(x)=f(f(x))-c$, 其中 $c\in[-2,2]$, 求函数 $y=h(x)$ 的零点个数.

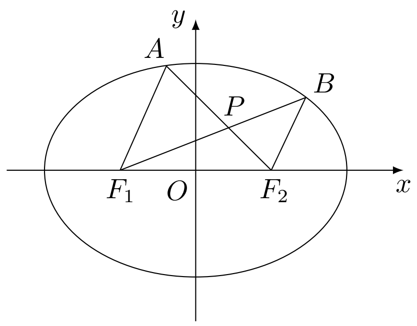
19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 已知点 $(1,e)$ 和 $\left(e,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上, 其中 e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点, 且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行, AF_2 与 BF_1 交于点 P.

① 若 $AF_1-BF_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AF_1 的斜率;

② 求证: PF_1+PF_2 是定值.



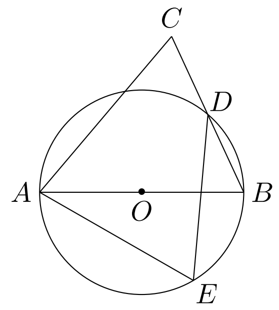
20. 已知各项均为正数的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_{n+1}=1+\dfrac{b_n}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\left\{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是等差数列;

(2) 设 $b_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{b_n}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 a_1 和 b_1 的值.

21. 四选二.

【A】如图, AB 是圆 O 的直径, D, E 为圆 O 上位于 AB 异侧的两点, 连接 BD 并延长至点 C, 使 $BD=DC$, 连接 AC, AE, DE. 求证: $\angle E=\angle C$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【C】在极坐标系中, 已知圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 圆心为直线 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 与极轴的交点, 求圆 C 的极坐标方程.

【D】已知实数 x, y 满足: $|x+y|<\dfrac{1}{3}$, $|2x-y|<\dfrac{1}{6}$, 求证: $|y|<\dfrac{5}{18}$.

22. 设 ξ 为随机变量, 从棱长为 1 的正方体的 12 条棱中任取两条, 当两条棱相交时, $\xi=0$; 当两条棱平行时, ξ 的值为两条棱之间的距离; 当两条棱异面时, $\xi=1$.

(1) 求概率 $P(\xi=0)$;

(2) 求 ξ 的分布列, 并求其数学期望 $E(\xi)$.

23. 设集合 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$, $n\in\mathbf{N}^*$. 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数: ① $A\subseteq P_n$; ② 若 $x\in A$, 则 $2x\notin A$; ③ 若 $x\in\complement_{P_n}A$, 则 $2x\notin\complement_{P_n}A$.

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示).