

理科数学

一、选择题

1. 若 a 为正实数, i 为虚数单位, $\left| \frac{a+i}{i} \right| = 2$, 则 $a =$ ()
 (A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

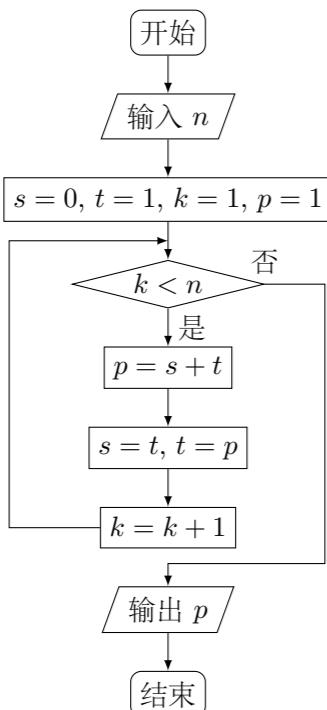
2. 已知 M, N 为集合 I 的非空真子集, 且 M, N 不相等, 若 $N \cap \complement_I M = \emptyset$,
则 $M \cup N =$ ()
 (A) M (B) N (C) I (D) \emptyset

3. 已知 F 是抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, A, B 是该抛物线上的两点, $|AF| + |BF| = 3$, 则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 ()
 (A) $\frac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$

4. $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 并且有 $a \sin A \sin B + b \cos^2 A = \sqrt{2}a$, 则 $\frac{b}{a} =$ ()
 (A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

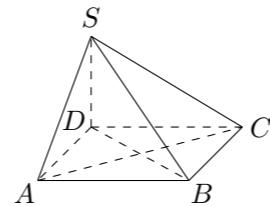
5. 从 $1, 2, 3, 4, 5$ 中任取 2 个不同的数, 事件 A = “取到的 2 个数之和为偶数”, 事件 B = “取到的 2 个数均为偶数”, 则 $P(B|A) =$ ()
 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

6. 执行下面的程序框图, 如果输入的 n 是 4, 则输出的 p 是 ()



7. 设 $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin 2\theta =$ ()
 (A) $-\frac{7}{9}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{7}{9}$

8. 如图, 四棱锥 $S - ABCD$ 的底面为正方形, $SD \perp$ 底面 $ABCD$, 则下列结论中不正确的是 ()



- (A) $AC \perp SB$
 - (B) $AB \parallel$ 平面 SCD
 - (C) SA 与平面 SBD 所成的角等于 SC 与平面 SBD 所成的角
 - (D) AB 与 SC 所成的角等于 DC 与 SA 所成的角

9. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 则满足 $f(x) \leq 2$ 的 x 取值范围是 ()

10. 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 均为单位向量, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \leq 0$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|$ 的最大值为 ()

11. 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-1) = 2$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 2$, 则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集为 ()

(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$ (C) $(-\infty, -1)$ (D) $(-\infty, +\infty)$

12. 已知球的直径 $SC = 4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB = \sqrt{3}$, $\angle ASC = \angle BSC = 30^\circ$, 则棱锥 $S - ABC$ 的体积为 ()
 (A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1

二、填空题

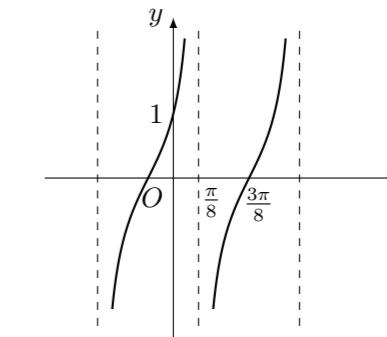
13. 已知点 $(2, 3)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上, C 的焦距为 4, 则它的离心率为_____.

14. 调查了某地若干户家庭的年收入 x (单位: 万元) 和年饮食支出 y (单位: 万元), 调查显示年收入 x 与年饮食支出 y 具有线性相关关系, 并由调查数据得到 y 对 x 的回归直线方程: $\hat{y} = 0.254x + 0.321$. 由回归直线方程可知, 家庭收入每增加 1 万元, 年饮食支出平均增加 0.254 万元.

15. 一个正三棱柱的侧棱长和底面边长相等, 体积为 $2\sqrt{3}$, 它的三视图中的俯视图如图所示, 左视图是一个矩形, 则这个矩形的面积是 .



16. 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $y = f(x)$ 的部分图象如图, 则 $f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.



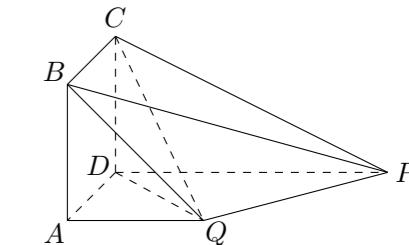
三、解答題

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 0$, $a_6 + a_8 = -10$

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$ 的前 n 项

- (1) 证明: 平面 $POC \perp$ 平面 DCO :

- (2) 求二面角 $Q - BP - C$ 的余弦值



19. 某农场计划种植某种新作物, 为此对这种作物的两个品种(分别称为品种甲和品种乙)进行田间试验, 选取两大块地, 每大块地分成 n 小块地, 在总共 $2n$ 小块地中, 随机选 n 小块地种植品种甲, 另外 n 小块地种植品种乙.
 (1) 假设 $n = 4$, 在第一大块地中, 种植品种甲的小块地的数记为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

- (2) 试验时每大块地分成 8 小块, 即 $n = 8$, 试验结束后得到品种甲和品种乙在各小块地上的每公顷产量(单位: kg/hm^2)如下表:

品种甲	403	397	390	404	388	400	412	406
品种乙	419	403	412	418	408	423	400	413

分别求品种甲和品种乙每公顷产量的样本平均数和样本方差; 根据试验结果, 你应该种植哪一品种?

附: 样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的样本方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为样本平均数.

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2-a)x$.

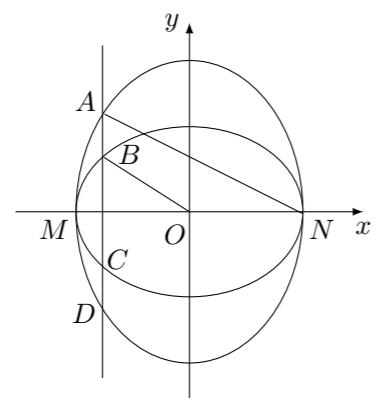
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a > 0$, 证明: 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f\left(\frac{1}{a} + x\right) > f\left(\frac{1}{a} - x\right)$;

(3) 若函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 证明: $f'(x_0) < 0$.

20. 如图, 已知椭圆 C_1 的中心在原点 O , 长轴左、右端点 M, N 在 x 轴上, 椭圆 C_2 的短轴为 MN , 且 C_1, C_2 的离心率都为 e . 直线 $l \perp MN$, l 与 C_1 交于两点, 与 C_2 交于两点, 这四点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D .

- (1) 设 $e = \frac{1}{2}$, 求 $|BC|$ 与 $|AD|$ 的比值;
 (2) 当 e 变化时, 是否存在直线 l , 使得 $BO \parallel AN$, 并说明理由.

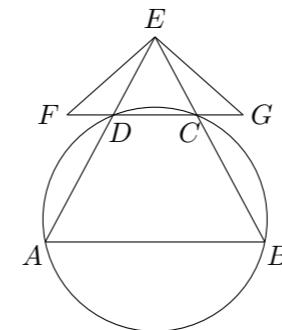


22. 三选一.

【A】如图, A, B, C, D 四点在同一圆上, AD 的延长线与 BC 的延长线交于 E 点, 且 $EC = ED$.

(1) 证明: $CD \parallel AB$;

(2) 延长 CD 到 F , 延长 DC 到 G , 使得 $EF = EG$, 证明: A, B, G, F 四点共圆.



【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ ($a > b > 0$, φ 为参数). 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $l: \theta = \alpha$ 与 C_1, C_2 各有一个交点, 当 $\alpha = 0$ 时, 这两个交点间的距离为 2, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 这两个交点重合.

(1) 分别说明 C_1, C_2 是什么曲线, 并求出 a 与 b 的值;

(2) 设当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_1, B_1 , 当 $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ 时, l 与 C_1, C_2 的交点分别为 A_2, B_2 , 求四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积.

【C】已知函数 $f(x) = |x-2| - |x-5|$.

(1) 证明: $-3 \leq f(x) \leq 3$;

(2) 求不等式 $f(x) \geq x^2 - 8x + 15$ 的解集.