

文科数学

一、选择题

1. 已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

2. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

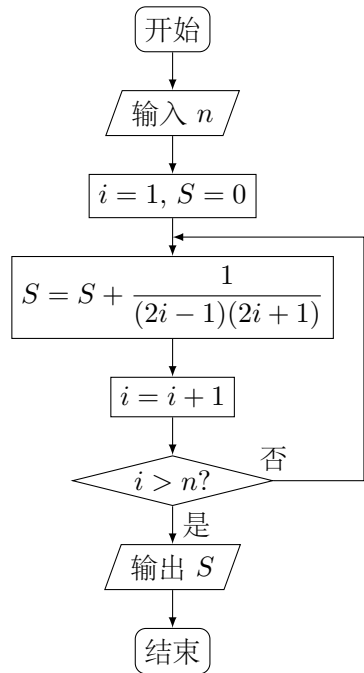
13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5
15	0	1	2	2	3	3	3				

 若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139, 151]$ 上的运动员的人数是 ()
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-x \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最小值为 ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n = 3$, 则输出的 $S =$ ()



- (A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$
6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线经过点 $(3, -4)$, 则此双曲线的离心率为 ()

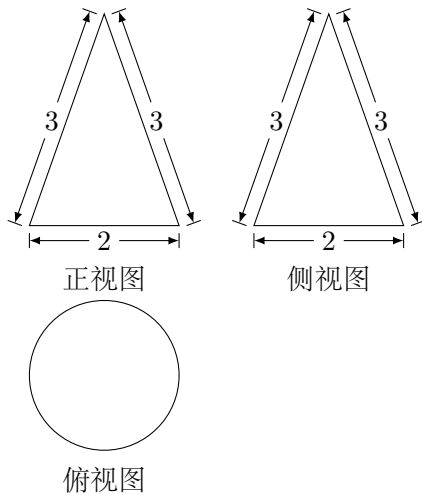
- (A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

7. 若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$, 则 ab 的最小值为 ()
 (A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

8. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 ()
 (A) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (B) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数
 (C) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (D) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数

9. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $AB \perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2, 0)$, 则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 的最大值为 ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的正方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) ()



- (A) $\frac{8}{9\pi}$ (B) $\frac{8}{27\pi}$ (C) $\frac{24(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$ (D) $\frac{8(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

二、填空题

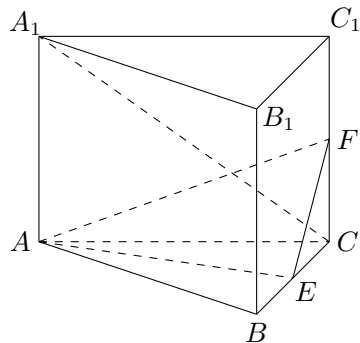
11. 已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cup (\complement_U B) =$ _____.
12. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$, 则曲线 C 的直角坐标方程为_____.
13. 若直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点, 且 $\angle AOB = 120^\circ$ (O 为坐标原点), 则 $r =$ _____.
14. 若函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点, 则实数 b 的取值范围是_____.
15. 已知 $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin\omega x$ 与 $y = 2\cos\omega x$ 的图象的交点中, 距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$, 则 $\omega =$ _____.

三、解答题

16. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 抽奖方法是: 从装有 2 个红球 A_1, A_2 和 1 个白球 B 的甲箱与装有 2 个红球 a_1, a_2 和 2 个白球 b_1, b_2 的乙箱中, 各随机摸出 1 个球, 若摸出的 2 个球都是红球则中奖, 否则不中奖.
 (1) 用球的标号列出所有可能的摸出结果;
 (2) 有人认为: 两个箱子中的红球比白球多, 所以中奖的概率大于不中奖的概率, 你认为正确吗? 请说明理由.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$.
 (1) 证明: $\sin B = \cos A$;
 (2) 若 $\sin C - \sin A \cos B = \frac{3}{4}$, 且 B 为钝角, 求 A, B, C .

18. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 BC, CC_1 的中点.
- (1) 证明: 平面 $AEF \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;
- (2) 若直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角为 45° , 求三棱锥 $F - AEC$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$. 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BD} 同向.
- (1) 求 C_2 的方程;
- (2) 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率.

21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ae^x \cos x$ ($x \in [0, +\infty)$). 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个极值点.
- (1) 证明: 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;
- (2) 若对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leq |f(x_n)|$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $a_{n+2} = 3S_n - S_{n+1} + 3, n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 证明: $a_{n+2} = 3a_n$;
- (2) 求 S_n .