2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\,|\,(x+1)(x-2)<0\}$，集合 $B=\{x\,|\,1<x<3\}$，则 $A\cup B=$ （ ）

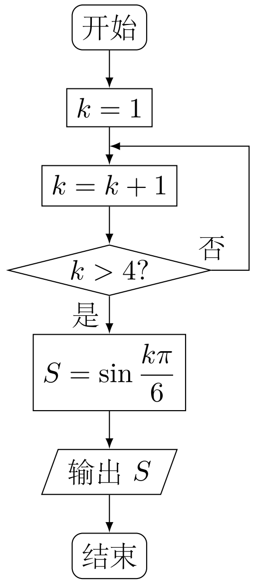
(A) $\{x\,|\,-1<x<3\}$ (B) $\{x\,|\,-1<x<1\}$

(C) $\{x\,|\,1<x<2\}$ (D) $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 设 i 是虚数单位，则复数 $\mathrm{i}^3-\dfrac{2}{\mathrm{i}}=$ （ ）

(A) $-\mathrm{i}$ (B) $-3\mathrm{i}$ (C) i (D) $3\mathrm{i}$

3. 执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为 （ ）



(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

4. 下列函数中，最小正周期为 π 且图象关于原点对称的函数是 （ ）

(A) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (B) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$ (D) $y=\sin x+\cos x$

5. 过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线，交该双曲线的两条渐近线于 A，B 两点，$|AB|=$ （ ）

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

6. 用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中比 40000 大的偶数共有 （ ）

(A) 144 个 (B) 120 个 (C) 96 个 (D) 72 个

7. 设四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=4$. 若点 M，N 满足 $\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{NC}$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NM}=$ （ ）

(A) 20 (B) 15 (C) 9 (D) 6

8. 设 a，b 都是不等于 1 的正数，则“$3^a>3^b>3$”是“$\log_a 3<\log_b 3$”的 （ ）

(A) 充要条件 (B) 充分不必要条件

(C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 如果函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(m-2)x^2+(n-8)x+1$ $(m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，那么 mn 的最大值为 （ ）

(A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) $\dfrac{81}{2}$

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切于点 M，且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条，则 r 的取值范围是 （ ）

(A) $(1,3)$ (B) $(1,4)$ (C) $(2,3)$ (D) $(2,4)$

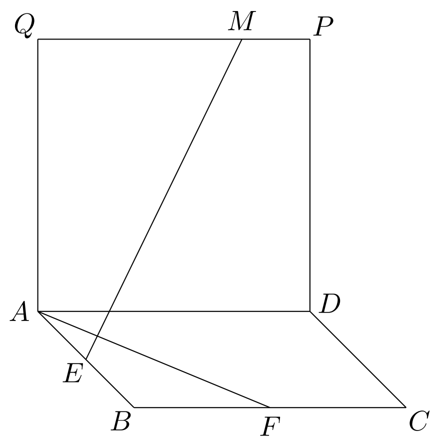
二、填空题

11. 在 $(2x-1)^5$ 的展开式中，含 x^2 的项的系数是______.（用数字填写答案）

12. $\sin 15^\circ+\sin 75^\circ$ 的值是______.

13. 某食品的保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：°C）满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$（$\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k，b 为常数）. 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 22°C 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 33°C 的保鲜时间是______小时.

14. 如图，四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形，它们所在的平面互相垂直，动点 M 在线段 PQ 上，E，F 分别为 AB，BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的最大值为______.



15. 已知函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2+ax$（其中 $a\in\mathbf{R}$）. 对于不相等的实数 x_1，x_2，设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，$n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$，现有如下命题：

① 对于任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $m>0$；

② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1，x_2，都有 $n>0$；

③ 对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=n$；

④ 对于任意的 a，存在不相等的实数 x_1，x_2，使得 $m=-n$.

其中的真命题有______.（写出所有真命题的序号）

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_1$，且 a_1，a_2+1，a_3 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求使得 $|T_n-1|<\dfrac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值.

17. 某市 A，B 两所中学的学生组队参加辩论赛，A 中学推荐了 3 名男生、2 名女生，B 中学推荐了 3 名男生、4 名女生，两校所推荐的学生一起参加集训. 由于集训后队员水平相当，从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队.

(1) 求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率；

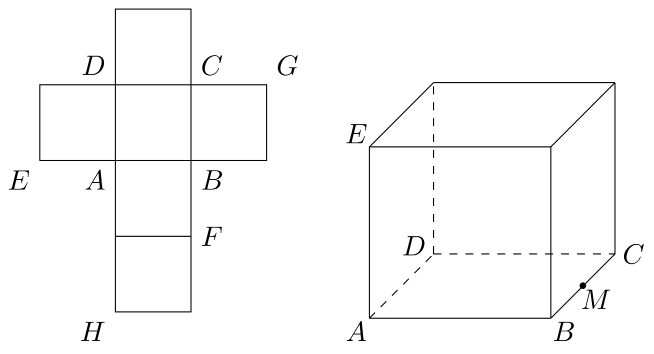
(2) 某场比赛前，从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛，设 X 表示参赛的男生人数，求 X 的分布列和数学期望.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示. 在正方体中, 设 BC 的中点为 M, GH 的中点为 N.

(1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);

(2) 证明: 直线 $MN \mathbin{/\!/}$ 平面 BDH;

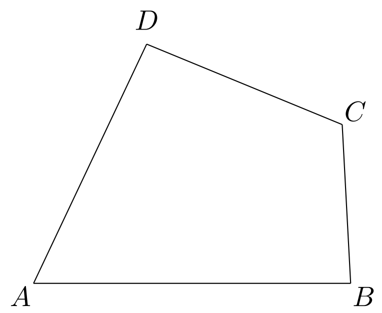
(3) 求二面角 $A-EG-M$ 的余弦值.



19. 如图, A, B, C, D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角.

(1) 证明: $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}$;

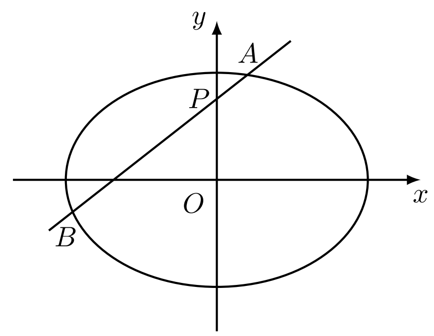
(2) 若 $A+C=180^\circ$, $AB=6$, $BC=3$, $CD=4$, $AD=5$, 求 $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{D}{2}$ 的值.



20. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点. 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 P 不同的定点 Q, 使得 $\dfrac{|QA|}{|QB|}=\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$, 其中 $a>0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a\in(0,1)$, 使得 $f(x)\geqslant 0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.