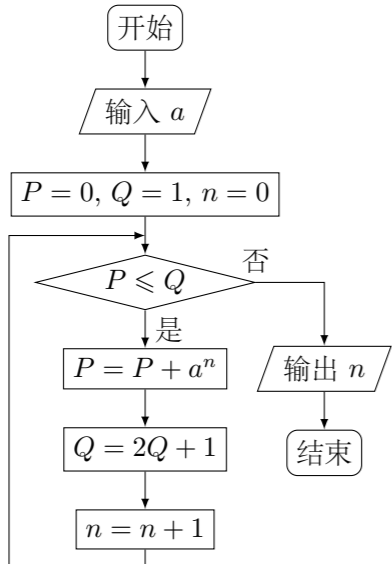


理科数学

一、选择题

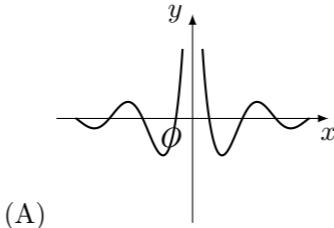
- 若复数 z 满足 $z(2-i) = 11+7i$ (i 为虚数单位), 则 z 为 ()
 (A) $3+5i$ (B) $3-5i$ (C) $-3+5i$ (D) $-3-5i$
- 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $(\complement_U A) \cup B =$ ()
 (A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{2, 3, 4\}$ (C) $\{0, 2, 4\}$ (D) $\{0, 2, 3, 4\}$
- 设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则“函数 $f(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上是减函数”是“函数 $g(x) = (2-a)x^3$ 在 \mathbf{R} 上是增函数”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查. 为此将他们随机编号为 1, 2, \dots , 960, 分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9. 抽到的 32 人中, 编号落入区间 $[1, 450]$ 的人做问卷 A, 编号落入区间 $[451, 750]$ 的人做问卷 B, 其余的人做问卷 C. 则抽到的人中, 做问卷 B 的人数为 ()
 (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 15
- 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ 2x+y \leq 4 \\ 4x-y \geq -1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 3x-y$ 的取值范围是 ()
 (A) $\left[-\frac{3}{2}, 6\right]$ (B) $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ (C) $[-1, 6]$ (D) $\left[-6, \frac{3}{2}\right]$
- 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a = 4$, 那么输出的 n 的值为 ()



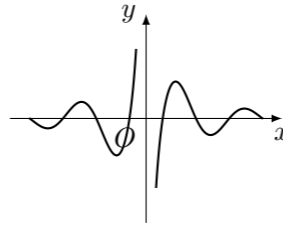
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

- 若 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin 2\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, 则 $\sin \theta =$ ()
 (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$
- 定义在 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6) = f(x)$. 当 $-3 \leq x < -1$ 时, $f(x) = -(x+2)^2$; 当 $-1 \leq x < 3$ 时, $f(x) = x$. 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(2012) =$ ()
 (A) 335 (B) 338 (C) 1678 (D) 2012

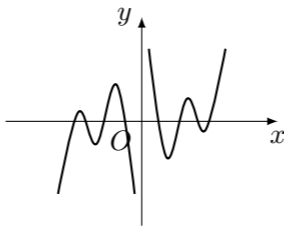
- 函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 ()



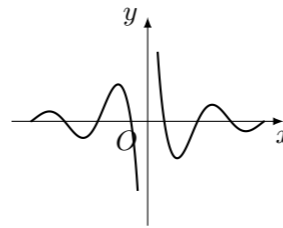
(A)



(B)



(C)



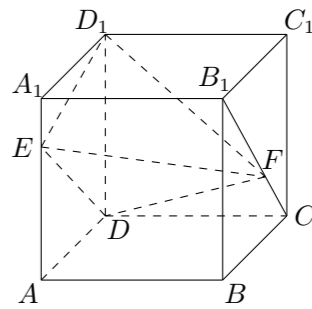
(D)

- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线与椭圆 C 有四个交点, 以这四个交点为顶点的四边形的面积为 16, 则椭圆 C 的方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ (C) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$
- 现有 16 张不同的卡片, 其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各 4 张, 从中任取 3 张. 要求这 3 张卡片不能是同一种颜色, 且红色卡片至多 1 张. 不同的取法种数为 ()
 (A) 232 (B) 252 (C) 472 (D) 484

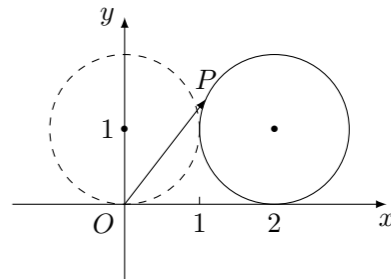
- 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = ax^2 + bx$ ($a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$). 若 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则下列判断正确的是 ()
 (A) 当 $a < 0$ 时, $x_1 + x_2 < 0$, $y_1 + y_2 > 0$
 (B) 当 $a < 0$ 时, $x_1 + x_2 > 0$, $y_1 + y_2 < 0$
 (C) 当 $a > 0$ 时, $x_1 + x_2 < 0$, $y_1 + y_2 < 0$
 (D) 当 $a > 0$ 时, $x_1 + x_2 > 0$, $y_1 + y_2 > 0$

二、填空题

- 若不等式 $|kx - 4| \leq 2$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 则实数 $k =$ _____.
- 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别为线段 AA_1, B_1C 上的点, 则三棱锥 $D_1 - EDF$ 的体积为_____.



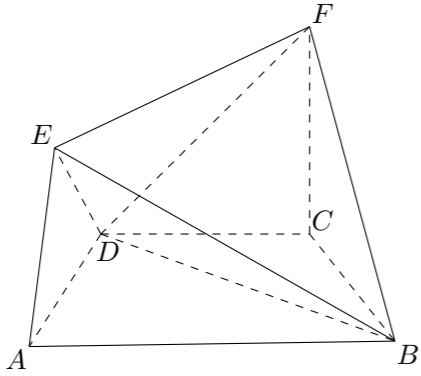
- 设 $a > 0$, 若曲线 $y = \sqrt{x}$ 与直线 $x = a, y = 0$ 所围成封闭图形的面积为 a^2 , 则 $a =$ _____.
- 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一单位圆的圆心的初始位置在 $(0, 1)$, 此时圆上一点 P 的位置在 $(0, 0)$, 圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2, 1)$ 时, \overrightarrow{OP} 的坐标为_____.



三、解答题

- 已知向量 $\mathbf{m} = (\sin x, 1)$, $\mathbf{n} = \left(\sqrt{3}A \cos x, \frac{A}{2} \cos 2x\right)$ ($A > 0$), 函数 $f(x) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ 的最大值为 6.
 (1) 求 A ;
 (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{24}\right]$ 上的值域.

18. 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 60^\circ$, $FC \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \perp BD$, $CB = CD = CF$.
- (1) 求证: $BD \perp$ 平面 AED ;
- (2) 求二面角 $F - BD - C$ 的余弦值.



19. 现有甲乙两个靶, 某射手向甲靶射击一次命中的概率为 $\frac{3}{4}$, 命中得 1 分, 没有命中得 0 分; 向乙靶射击两次, 每次命中的概率为 $\frac{2}{3}$, 每命中一次得 2 分, 没有命中得 0 分. 该射手每次射击的结果相互独立, 假设该射手完成以上三次射击.
- (1) 求该射手恰好命中一次的概率;
- (2) 求该射手的总得分 X 的分布列及数学期望 EX .

20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 + a_5 = 84$, $a_9 = 73$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 对任意 $m \in \mathbf{N}^*$, 将数列 $\{a_n\}$ 中落入区间 $(9^m, 9^{2m})$ 内的项的个数记为 b_m , 求数列 $\{b_m\}$ 的前 m 项和 S_m .

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点, M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点, 过 M, F, O 三点的圆的圆心为 Q , 点 Q 到抛物线 C 的准线的距离为 $\frac{3}{4}$.
- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 是否存在点 M , 使得直线 MQ 与抛物线 C 相切于点 M ? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由;
- (3) 若点 M 的横坐标为 $\sqrt{2}$, 直线 $l: y = kx + \frac{1}{4}$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B , l 与圆 Q 有两个不同的交点 D, E , 求当 $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$ 时, $|AB|^2 + |DE|^2$ 的最小值.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + k}{e^x}$ (k 为常数, $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.
- (1) 求 k 的值;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 设 $g(x) = xf'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 证明: 对任意 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$.