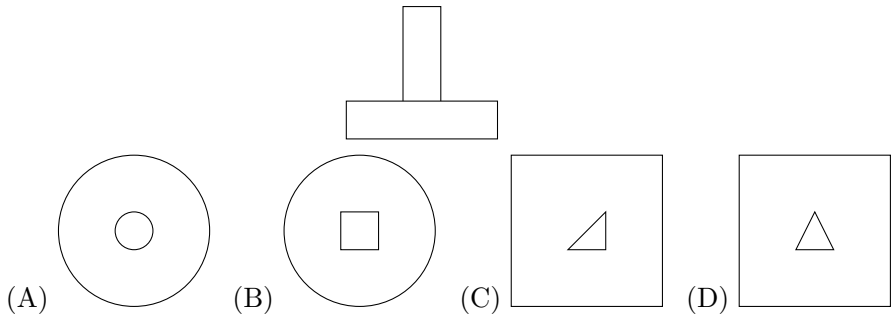


文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x \mid x^2 = x\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{1\}$ (D) $\{0\}$
2. 复数 $z = i(i + 1)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数是 ()
(A) $-1 - i$ (B) $-1 + i$ (C) $1 - i$ (D) $1 + i$
3. 命题“若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha = 1$ ”的逆否命题是 ()
(A) 若 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$ (B) 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha \neq 1$
(C) 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ (D) 若 $\tan \alpha \neq 1$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$
4. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 ()



5. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$), 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y} = 0.85x - 85.71$, 则下列结论中不正确的是 ()
(A) y 与 x 具有正的线性相关关系
(B) 回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})
(C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg
(D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10, 点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ (B) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ (C) $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ (D) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$
7. 设 $a > b > 1, c < 0$, 给出下列三个结论:
① $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$; ② $a^c < b^c$; ③ $\log_b(a - c) > \log_a(b - c)$.
其中所有正确结论的序号是 ()
(A) ① (B) ①② (C) ②③ (D) ①②③
8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{7}, BC = 2, B = 60^\circ$, 则 BC 边上的高等于 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{39}}{4}$

9. 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 是最小正周期为 2π 的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数. 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $0 < f(x) < 1$; 当 $x \in (0, \pi)$ 且 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时, $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) f'(x) > 0$, 则函数 $y = f(x) - \sin x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的零点个数为 ()
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 8

二、填空题

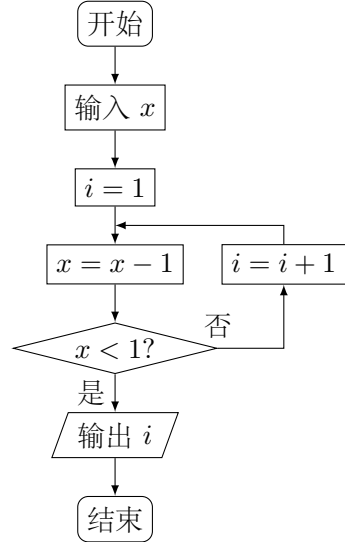
10. 在极坐标系中, 曲线 $C_1: \rho(\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta) = 1$ 与曲线 $C_2: \rho = a$ ($a > 0$) 的一个交点在极轴上, 则 $a =$ _____.
11. 某制药企业为了对某种药用液体进行生物测定, 需要优选培养温度, 试验范围定为 $29^\circ\text{C} \sim 63^\circ\text{C}$, 精确度要求 $\pm 1^\circ\text{C}$. 用分数法进行优选时, 能保证找到最佳培养温度需要的最少试验次数为_____.
12. 不等式 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ 的解集为_____.

13. 如图是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图, 则该运动员在这五场比赛中得分的方差为_____.

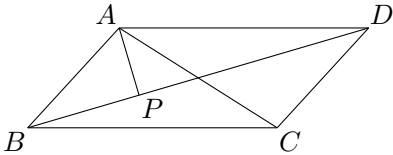
0	8	9	
1	0	3	5

(注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x = 4.5$, 则输出的数 $i =$ _____.



15. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$, 垂足为 P , 且 $AP = 3$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



16. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n = a_k \times 2^k + a_{k-1} \times 2^{k-1} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0$, 当 $i = k$ 时, $a_i = 1$, 当 $0 \leq i \leq k - 1$ 时, a_i 为 0 或 1. 定义 b_n 如下: 在 n 的上述表示中, 当 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ 中等于 1 的个数为奇数时, $b_n = 1$; 否则 $b_n = 0$.

- (1) $b_2 + b_4 + b_6 + b_8 =$ _____;
- (2) 记 c_m 为数列 $\{b_n\}$ 中第 m 个为 0 的项与第 $m + 1$ 个为 0 的项之间的项数, 则 c_m 的最大值是_____.

三、解答题

17. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

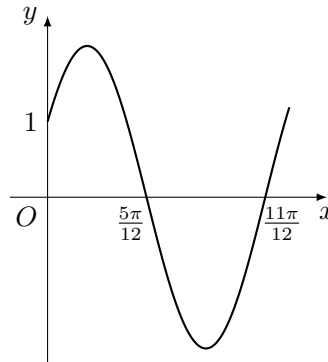
一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

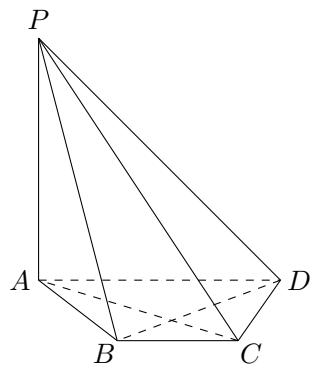
- (1) 确定 x, y 的值, 并估计顾客一次购物的结算时间的平均值;
- (2) 求一位顾客一次购物的结算时间不超过 2 分钟的概率. (将频率视为概率)

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 求函数 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$.
- (1) 证明: $BD \perp PC$;
- (2) 若 $AD = 4$, $BC = 2$, 直线 PD 与平面 PAC 所成的角为 30° , 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. 在直角坐标系 xOy 中, 已知中心在原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆 E 的一个焦点为圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ 的圆心.
- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 设 P 是椭圆 E 上一点, 过 P 作两条斜率之积为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l_1, l_2 , 当直线 l_1, l_2 都与圆 C 相切时, 求 P 的坐标.

22. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$, 其中 $a > 0$.
- (1) 若对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;
- (2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$), 记直线 AB 的斜率为 k , 证明: 存在 $x_0 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(x_0) = k$ 成立.

20. 某公司一下属企业从事某种高科技产品的生产. 该企业第一年年初有资金 2000 万元, 将其投入生产, 到当年年底资金增长了 50%, 预计以后每年资金年增长率与第一年的相同. 公司要求企业从第一年开始, 每年年底上缴资金 d 万元, 并将剩余资金全部投入下一年生产. 设第 n 年年底企业上缴资金后的剩余资金为 a_n 万元.
- (1) 用 d 表示 a_1, a_2 , 并写出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式;
- (2) 若公司希望经过 m ($m \geq 3$) 年使企业的剩余资金为 4000 万元, 试确定企业每年上缴资金 d 的值 (用 m 表示).