2008 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\dfrac{i^3(i+1)}{i-1}=$ （　）

(A) -1　(B) 1　(C) $-i$　(D) i

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 1 \\ x+2y\geqslant 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z=5x+y$ 的最大值为 （　）

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 设函数 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 是 （　）

(A) 最小正周期为 π 的奇函数　(B) 最小正周期为 π 的偶函数

(C) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　(D) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

4. 设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 则 $a\perp b$ 的一个充分条件是 （　）

(A) $a\perp\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$　(B) $a\perp\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$

(C) $a\subset\alpha, b\perp\beta, \alpha\parallel\beta$　(D) $a\subset\alpha, b\parallel\beta, \alpha\perp\beta$

5. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{m^2-1}=1\ (m>1)$ 上一点 P 到其左焦点的距离为 3, 到右焦点的距离为 1, 则 P 点到右准线的距离为 （　）

(A) 6　(B) 2　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

6. 设集合 $S=\{x\,|\,|x-2|>3\}$, $T=\{x|a<x<a+8\}$, $S\cup T=\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 （　）

(A) $-3<a<-1$　(B) $-3\leqslant a\leqslant -1$

(C) $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$　(D) $a<-3$ 或 $a>-1$

7. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\ (0\leqslant x<1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 （　）

(A) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最大值为 1

(B) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最小值为 0

(C) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数且最大值为 1

(D) $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是增函数且最小值为 0

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x+1,\ x<0 \\ x-1,\ x\geqslant 0 \end{cases}$, 则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集是 （　）

(A) $\{x|-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　(B) $\{x|x\leqslant 1\}$

(C) $\{x|x\leqslant\sqrt{2}-1\}$　(D) $\{x|-\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}-1\}$

9. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数. 令 $a=f\left(\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $b=f\left(\cos\dfrac{5\pi}{7}\right)$, $c=f\left(\tan\dfrac{5\pi}{7}\right)$, 则 （　）

(A) $b<a<c$　(B) $c<b<a$　(C) $b<c<a$　(D) $a<b<c$

10. 有 8 张卡片分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 从中取出 6 张卡片排成 3 行 2 列, 要求 3 行中仅有中间行的两张卡片上的数字之和为 5, 则不同的排法共有 （　）

(A) 1344 种　(B) 1248 种　(C) 1056 种　(D) 960 种

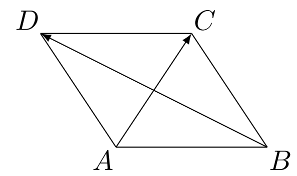
二、填空题

11. $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的二项展开式中, x^2 的系数是______. (用数字作答)

12. 一个正方体的各定点均在同一球的球面上, 若该球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则该正方体的表面积为______.

13. 已知圆 C 的圆心与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点关于直线 $y=x$ 对称. 直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB|=6$, 则圆 C 的方程为______.

14. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}=(1,2)$, $\overrightarrow{BD}=(-3,2)$, 则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______.

16. 设 $a>1$, 若仅有一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$, 都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$, 这时, a 的取值的集合为______.

三、解答题

17. 已知 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $\sin x$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 p, 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\dfrac{1}{16}$.

(1) 求乙投球的命中率 p;

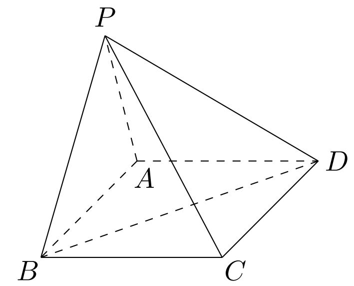
(2) 若甲投球 1 次, 乙投球 2 次, 两人共命中的次数记为 ξ, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AB=3$, $AD=2$, $PA=2$, $PD=2\sqrt{2}$, $\angle PAB=60^\circ$.

(1) 证明 $AD\perp$ 平面 PAB;

(2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;

(3) 求二面角 $P-BD-A$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b\ (x\neq 0)$, 其中 $a, b\in\mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=3x+1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(3) 若对于任意的 $a\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$, 不等式 $f(x)\leqslant 10$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

21. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3,0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x-2y=0$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若以 $k\ (k\neq 0)$ 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N, 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\dfrac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.

22. 在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中, $a_1=1$, $b_1=4$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$, $2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2, b_2 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中的通项公式;

(3) 设 $T_n=(-1)^{a_1}b_1+(-1)^{a_2}b_2+\cdots+(-1)^{a_n}b_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $|T_n|<2n^2$, $n\geqslant 3$.