2020 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

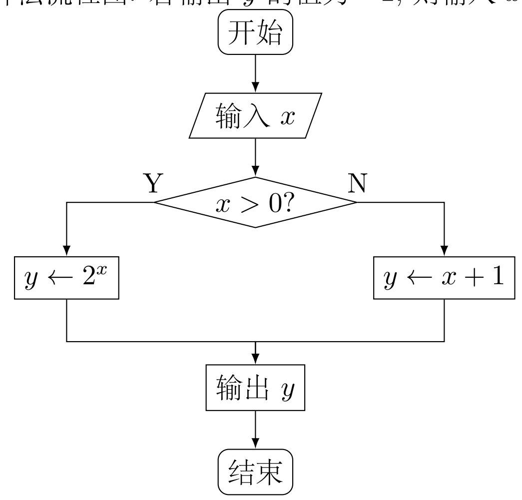
1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{0,2,3\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z=(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$ 的实部是______.

3. 已知一组数据 4, $2a$, $3-a$, 5, 6 的平均数为 4, 则 a 的值是______.

4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次, 观察向上的点数, 则点数和为 5 的概率是______.

5. 如图是一个算法流程图. 若输出 y 的值为 -2, 则输入 x 的值是______.

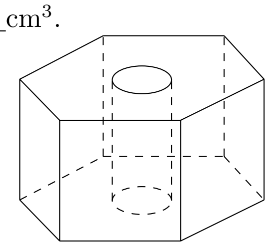


6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5}=1\ (a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$, 则该双曲线的离心率是______.

7. 已知 $y=f(x)$ 是奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(-8)$ 的值是______.

8. 已知 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是______.

9. 如图, 六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm, 高为 2 cm, 内孔半径为 0.5 cm, 则此六角螺帽毛坯的体积是______cm^3.

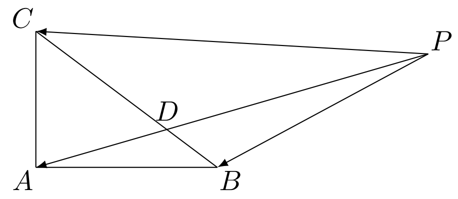


10. 将函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是______.

11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 则 $d+q$ 的值是______.

12. 已知 $5x^2y^2+y^4=1\ (x,\ y\in\mathbf{R})$, 则 x^2+y^2 的最小值是______.

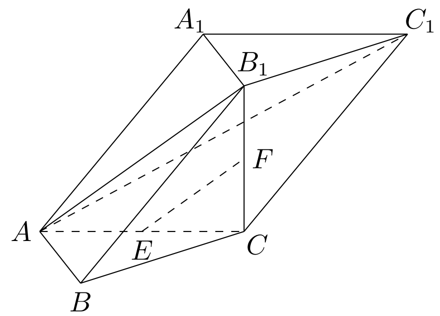
13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=3$, $\angle BAC=90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P, 使得 $AP=9$, 若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是______.



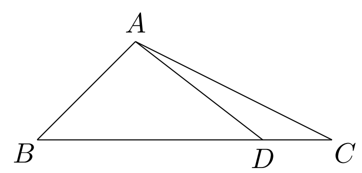
14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, A, B 是圆 C: $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=36$ 上的两个动点, 满足 $PA=PB$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是______.

二、解答题

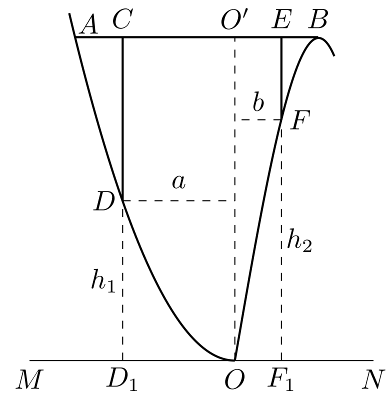
15. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp AC$, $B_1C\perp$ 平面 ABC, E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.
(1) 求证: $EF\parallel$ 平面 AB_1C_1;
(2) 求证: 平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABB_1.



16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a=3$, $c=\sqrt{2}$, $B=45^\circ$.
(1) 求 $\sin C$ 的值;
(2) 在边 BC 上取一点 D, 使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$, 求 $\tan\angle DAC$ 的值.



17. 某地准备在山谷中建一座桥梁, 桥址位置的竖直截面图如图所示: 谷底 O 在水平线 MN 上、桥 AB 与 MN 平行, OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上). 经测量, 左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米) 与 D 到 OO' 的距离 a (米) 之间满足关系式 $h_1=\dfrac{1}{40}a^2$; 右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米) 与 F 到 OO' 的距离 b (米) 之间满足关系式 $h_2=-\dfrac{1}{800}b^3+6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.
(1) 求桥 AB 的长度;
(2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF, 且 CE 为 80 米, 其中 C, E 在 AB 上 (不包括端点). 桥墩 EF 每米造价 k (万元)、桥墩 CD 每米造价 $\dfrac{3}{2}k$ (万元) ($k>0$). 问 $O'E$ 为多少米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内, $AF_2\perp F_1F_2$, 直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B.
(1) 求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;
(2) 在 x 轴上任取一点 P, 直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q, 求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值;
(3) 设点 M 在椭圆 E 上, 记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2, 若 $S_2=3S_1$, 求点 M 的坐标.

19. 已知关于 x 的函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 与 $h(x)=kx+b$ $(k,\ b\in\mathbf{R})$ 在区间 D 上恒有 $f(x)\geqslant h(x)\geqslant g(x)$.
(1) 若 $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=-x^2+2x$, $D=(-\infty,+\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;
(2) 若 $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=k\ln x$, $h(x)=kx-k$, $D=(0,+\infty)$, 求 k 的取值范围;
(3) 若 $f(x)=x^4-2x^2$, $g(x)=4x^2-8$, $h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2$ $\left(0<|t|\leqslant\sqrt{2}\right)$, $D=[m,n]\subseteq\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, 求证: $n-m\leqslant\sqrt{7}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n. 设 λ 与 k 是常数, 若对一切正整数 n, 均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}}-S_n^{\frac{1}{k}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立, 则称此数列为 "$\lambda\sim k$" 数列.
(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是 "$\lambda\sim 1$" 数列, 求 λ 的值;
(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是 "$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sim 2$" 数列, 且 $a_n>0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 对于给定的 λ, 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为 "$\lambda\sim 3$" 数列, 且 $a_n\geqslant 0$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

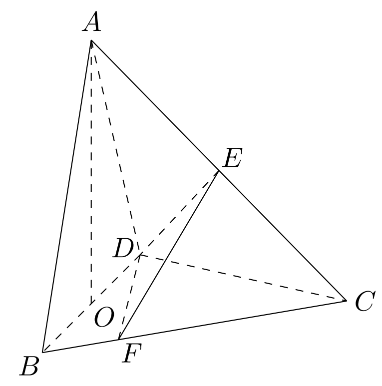
21. 三选二.

【A】平面上点 $A(2,-1)$ 在矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a & 1\\ -1 & b\end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3,-4)$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

【B】在极坐标系中, 已知点 $A\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在直线 l: $\rho\cos\theta=2$ 上, 点 $B\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在圆 C: $\rho=4\sin\theta$ 上 (其中 $\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).
(1) 求 ρ_1, ρ_2 的值;
(2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

【C】设 $x\in\mathbf{R}$, 解不等式 $2|x+1|+|x|\leqslant 4$.

22. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $CB=CD=\sqrt{5}$, $BD=2$, O 为 BD 的中点, $AO\perp$ 平面 BCD, $AO=2$, E 为 AC 的中点.
(1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值;
(2) 若点 F 在 BC 上, 满足 $BF=\dfrac{1}{4}BC$, 设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ, 求 $\sin\theta$ 的值.



23. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球个数为 X_n, 恰有 2 个黑球的概率为 p_n, 恰有 1 个黑球的概率为 q_n.
(1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2;
(2) 求 $2p_n+q_n$ 与 $2p_{n-1}+q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示).