2014 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$，则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $[-2,-1]$ (B) $[-1,2)$ (C) $[-1,1]$ (D) $[1,2)$

2. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}=$ （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$ (B) $1-\mathrm{i}$ (C) $-1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

3. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是 （ ）

(A) $f(x)g(x)$ 是偶函数 (B) $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

(C) $|g(x)|f(x)$ 是奇函数 (D) $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

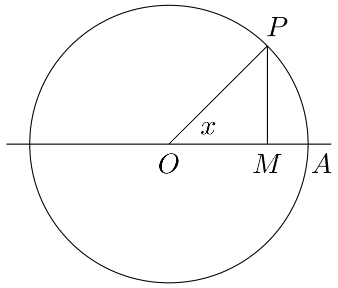
4. 已知 F 是双曲线 $C:x^2-my^2=3m\ (m>0)$ 的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 （ ）

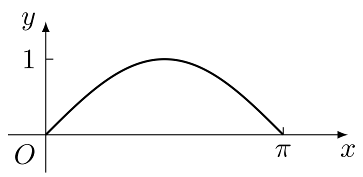
(A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $\sqrt{3}m$ (D) $3m$

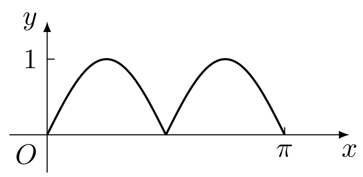
5. 4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 （ ）

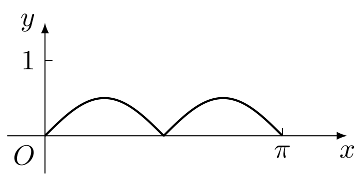
(A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $\dfrac{3}{8}$ (C) $\dfrac{5}{8}$ (D) $\dfrac{7}{8}$

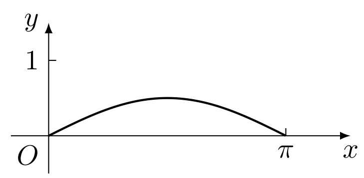
6. 如图，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象大致为 （ ）



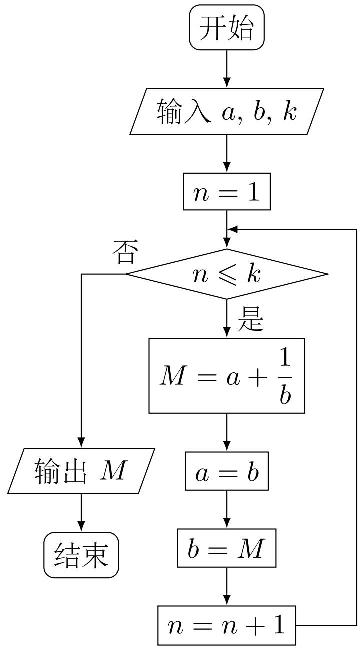
(A)


(B)


(C)


(D)


7. 执行如图的程序框图，若输入的 a,b,k 分别为 1, 2, 3，则输出的 $M=$（ ）



(A) $\dfrac{20}{3}$ (B) $\dfrac{7}{2}$ (C) $\dfrac{16}{5}$ (D) $\dfrac{15}{8}$

8. 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则 （ ）

(A) $3\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (B) $3\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (C) $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (D) $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

9. 不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的解集记为 D。有下面四个命题：

p_1：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant -2$； p_2：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\geqslant 2$；

p_3：$\forall(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant 3$； p_4：$\exists(x,y)\in D$，$x+2y\leqslant -1$.

其中真命题是 （ ）

(A) p_2,p_3 (B) p_1,p_2 (C) p_1,p_4 (D) p_1,p_3

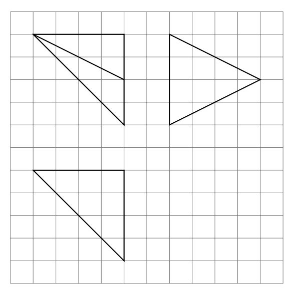
10. 已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$ （ ）

(A) $\dfrac{7}{2}$ (B) 3 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 2

11. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围为 （ ）

(A) $(2,+\infty)$ (B) $(1,+\infty)$ (C) $(-\infty,-2)$ (D) $(-\infty,-1)$

12. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为 （ ）



(A) $6\sqrt{2}$ (B) 6 (C) $4\sqrt{2}$ (D) 4

二、填空题

13. $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为______.（用数字填写答案）

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A,B,C 三个城市时，甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；乙说：我没去过 C 城市；丙说：我们三人去过同一个城市．由此可判断乙去过的城市为______.

15. 已知 A,B,C 是圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为______.

16. 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 的对边，$a=2$，且 $(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为______.

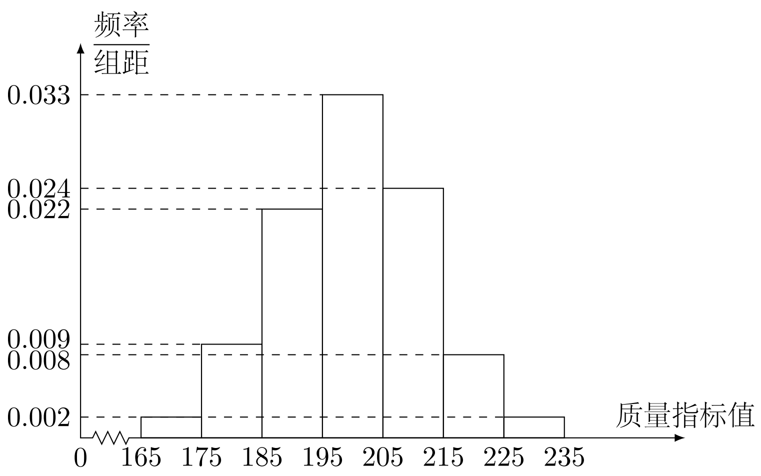
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中 λ 为常数.

(1) 证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$；

(2) 是否存在 λ，使得 $\{a_n\}$ 为等差数列？并说明理由.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频率分布直方图:



(1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2.

① 利用该正态分布, 求 $P(187.8<Z<212.2)$;

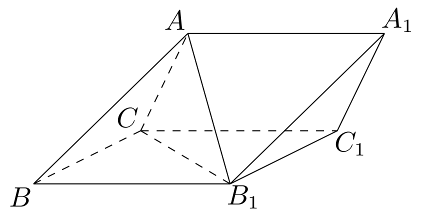
② 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品件数, 利用①的结果, 求 EX.

附: $\sqrt{150}\approx 12.2$, 若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, $AB\perp B_1C$.

(1) 证明: $AC=AB_1$;

(2) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $AB=BC$, 求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.



20. 已知点 $A(0,-2)$, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, F 是椭圆的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

21. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$.

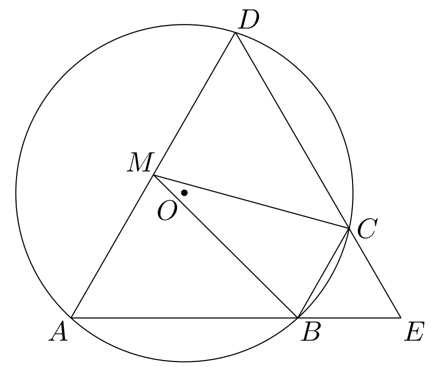
(1) 求 a, b;

(2) 证明: $f(x)>1$.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E, 且 $CB=CE$.

(1) 证明: $\angle D=\angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M, 且 $MB=MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.



23. 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A, 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

24. 若 $a>0$, $b>0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$.

(1) 求 a^3+b^3 的最小值;

(2) 是否存在 a, b, 使得 $2a+3b=6$? 并说明理由.