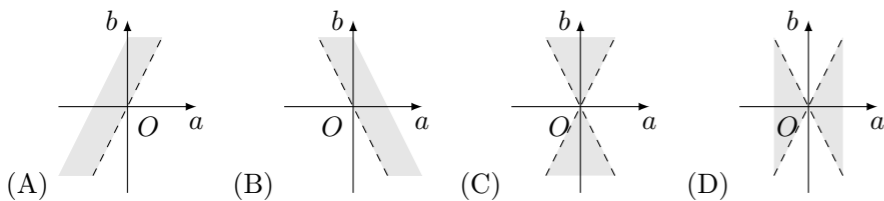


# 数学试卷

## 一、选择题

1. 如果函数  $y = ax^2 + bx + a$  的图象与  $x$  轴有两个交点, 则点  $(a, b)$  在  $aOb$  平面上的区域 (不包含边界) 为 ( )



2. 抛物线  $y = ax^2$  的准线方程是  $y = 2$ , 则  $a$  的值为 ( )

(A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $-\frac{1}{8}$  (C) 8 (D) -8

3. 已知  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x =$  ( )

(A)  $\frac{7}{24}$  (B)  $-\frac{7}{24}$  (C)  $\frac{24}{7}$  (D)  $-\frac{24}{7}$

4. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$ , 若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )

(A)  $(-1, 1)$  (B)  $(-1, +\infty)$   
(C)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$  (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

5.  $O$  是平面上一定点,  $A, B, C$  是平面上不共线的三个点, 动点  $P$  满足  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$ ,  $\lambda \in [0, +\infty)$ , 则  $P$  的轨迹一定通过  $\triangle ABC$  的

(A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 函数  $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x \in (1, +\infty)$  的反函数为 ( )

(A)  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  (B)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$   
(C)  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  (D)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$

7. 棱长为  $a$  的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ( )

(A)  $\frac{a^3}{3}$  (B)  $\frac{a^3}{4}$  (C)  $\frac{a^3}{6}$  (D)  $\frac{a^3}{12}$

8. 设  $a > 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $P(x_0, f(x_0))$  处切线的倾斜角的取值范围为  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , 则  $P$  到曲线  $y = f(x)$  对称轴距离的取值范围为 ( )

(A)  $\left[0, \frac{1}{a}\right]$  (B)  $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$  (C)  $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$  (D)  $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

9. 已知方程  $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$  的四个根组成一个首项为  $\frac{1}{4}$  的等差数列, 则  $|m - n| =$  ( )

(A) 1 (B)  $\frac{3}{4}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{3}{8}$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为  $F(\sqrt{7}, 0)$ , 直线  $y = x - 1$  与其相交于  $M, N$  两点,  $MN$  中点的横坐标为  $-\frac{2}{3}$ , 则此双曲线的方程是 ( )

(A)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

11. 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  的夹角  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ ,  $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ ,  $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角), 设  $P_4$  的坐标为  $(x_4, 0)$ , 若  $1 < x_4 < 2$ , 则  $\tan \theta$  的取值范围是 ( )

(A)  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$  (B)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  (C)  $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$  (D)  $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为  $\sqrt{2}$ , 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

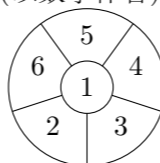
(A)  $3\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $3\sqrt{3}\pi$  (D)  $6\pi$

## 二、填空题

13.  $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$  的展开式中  $x^9$  系数是\_\_\_\_\_.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有\_\_\_\_\_种. (以数字作答)



16. 对于四面体  $ABCD$ , 给出下列四个命题: ① 若  $AB = AC$ ,  $BD = CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ② 若  $AB = CD$ ,  $AC = BD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ③ 若  $AB \perp AC$ ,  $BD \perp CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ④ 若  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ , 则  $BC \perp AD$ . 其中真命题的序号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

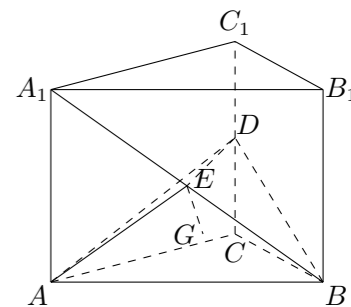
## 三、解答题

17. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.  
(1) 求恰有一件不合格的概率;  
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

18. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) 是  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 其图象关于点  $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$  对称, 且在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上是单调函数. 求  $\omega$  和  $\varphi$  的值.

19. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 底面是等腰直角三角形,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 侧棱  $AA_1 = 2$ ,  $D, E$  分别是  $CC_1$  与  $A_1B$  的中点, 点  $E$  在平面  $ABD$  上的射影是  $\triangle ABD$  的重心  $G$ .

- (1) 求  $A_1B$  与平面  $ABD$  所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)  
(2) 求点  $A_1$  到平面  $AED$  的距离.



20. 已知常数  $a > 0$ , 向量  $\vec{c} = (0, a)$ ,  $\vec{i} = (1, 0)$ . 经过原点  $O$  以  $\vec{c} + \lambda \vec{i}$  为方向向量的直线与经过定点  $A(0, a)$  以  $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$  为方向向量的直线相交于  $P$ , 其中  $\lambda \in \mathbf{R}$ . 试问: 是否存在两个定点  $E$ 、 $F$ , 使得  $|PE| + |PF|$  为定值. 若存在, 求出  $E$ 、 $F$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 已知  $a > 0$ ,  $n$  为正整数.

(1) 设  $y = (x - a)^n$ , 证明:  $y' = n(x - a)^{n-1}$ ;

(2) 设  $f_n(x) = x^n - (x - a)^n$ , 对任意  $n \geq a$ , 证明:  $f'_{n+1}(n+1) > (n+1)f'_n(n)$ .

22. 设  $a > 0$ , 如图, 已知直线  $l: y = ax$  及曲线  $C: y = x^2$ ,  $C$  上的点  $Q_1$  的横坐标为  $a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ). 从  $C$  上的点  $Q_n$  ( $n \geq 1$ ) 作直线平行于  $x$  轴, 交直线  $l$  于点  $P_{n+1}$ , 再从点  $P_{n+1}$  作直线平行于  $y$  轴, 交曲线  $C$  于点  $Q_{n+1}$ .  $Q_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 的横坐标构成数列  $\{a_n\}$ .

(1) 试求  $a_{n+1}$  与  $a_n$  的关系, 并求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 当  $a = 1$ ,  $a_1 \leq \frac{1}{2}$  时, 证明:  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{32}$ ;

(3) 当  $a = 1$  时, 证明:  $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{3}$ .

