2015 年普通高等学校招生考试（四川卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$, 集合 $B=\{x\mid 1<x<3\}$, 则 $A\cup B=$(　)

(A) $\{x\mid -1<x<3\}$　(B) $\{x\mid -1<x<1\}$

(C) $\{x\mid 1<x<2\}$　(D) $\{x\mid 2<x<3\}$

2. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,4)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(x,6)$ 共线, 则实数 $x=$　(　)

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 6

3. 某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是　(　)

(A) 抽签法　(B) 系统抽样法　(C) 分层抽样法　(D) 随机数法

4. 设 a, b 为正实数, 则“$a>b>1$”是“$\log_2 a>\log_2 b>0$”的　(　)

(A) 充要条件　(B) 充分不必要条件

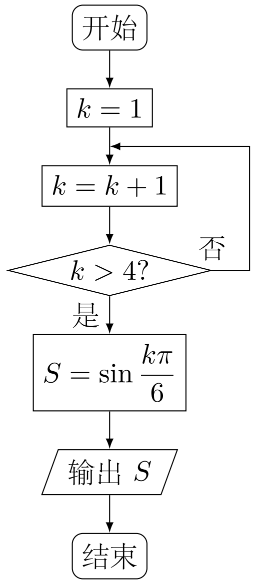
(C) 必要不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 下列函数中, 最小正周期为 π 的奇函数是　(　)

(A) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　(B) $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $y=\sin 2x+\cos 2x$　(D) $y=\sin x+\cos x$

6. 执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为　(　)



(A) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

7. 过双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, $|AB|=$　(　)

(A) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 6　(D) $4\sqrt{3}$

8. 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: °C) 满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$ ($\mathrm{e}=2.718\cdots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 22°C 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33°C 的保鲜时间是　(　)

(A) 16 小时　(B) 20 小时　(C) 24 小时　(D) 28 小时

9. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 10\\ x+2y\leqslant 14\\ x+y\geqslant 6\end{cases}$, 则 xy 的最大值为　(　)

(A) $\dfrac{25}{2}$　(B) $\dfrac{49}{2}$　(C) 12　(D) 16

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A, B 两点, 与圆 $(x-5)^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切于点 M, 且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是　(　)

(A) $(1,3)$　(B) $(1,4)$　(C) $(2,3)$　(D) $(2,4)$

二、填空题

11. 设 i 是虚数单位, 则复数 $\mathrm{i}-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=$______.

12. $\lg 0.01+\log_2 16$ 的值是______.

13. 已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$, 则 $2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$ 的值是______.

14. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC=90°$, 其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形, 俯视图是直角边的长为 1 的等腰直角三角形. 设点 M, N, P 分别是棱 AB, BC, B_1C_1 的中点, 则三棱锥 $P-A_1MN$ 的体积是______.

15. 已知函数 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2+ax$ (其中 $a\in\mathbf{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2, 设 $m=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $n=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$, 现有如下命题:

① 对于任意不相等的实数 x_1, x_2, 都有 $m>0$;

② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2, 都有 $n>0$;

③ 对于任意的 a, 存在不相等的实数 x_1, x_2, 使得 $m=n$;

④ 对于任意的 a, 存在不相等的实数 x_1, x_2, 使得 $m=-n$.

其中的真命题有______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-a_1$, 且 a_1, a_2+1, a_3 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求 T_n.

17. 一辆小客车上有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5. 乘客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号从小到大的顺序先后上车. 乘客 P_1 因身体原因没有坐自己的 1 号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位; 如果自己的座位已有乘客就座, 就在这 5 个座位的剩余空位中任意选择座位.

(1) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出了其中两种坐法, 请填入余下两种坐法 (将乘客就座的座位号填入表中空格处);

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

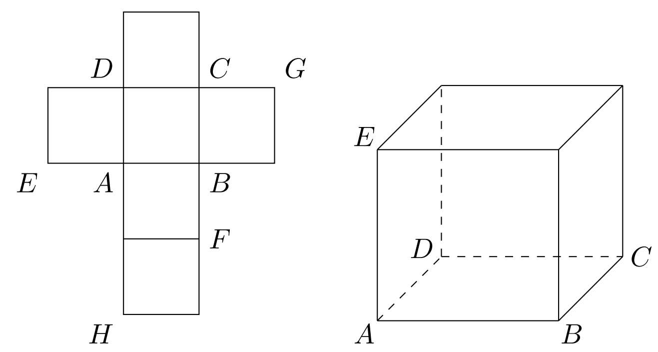
(2) 若乘客 P_1 坐到了 2 号座位, 其他乘客按规则就座, 求乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

(1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);

(2) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系, 并证明你的结论;

(3) 证明: 直线 $DF\perp$ 平面 BEG ·



19. 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\tan A$, $\tan B$ 是关于 x 的方程 $x^2+\sqrt{3}px-p+1=0$ $(p\in\mathbf{R})$ 的两个实根.

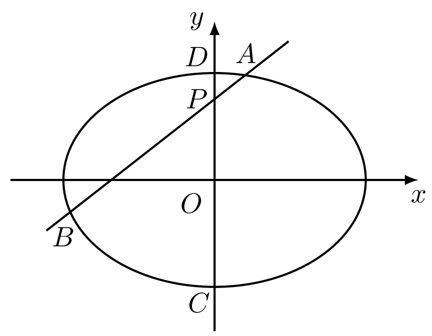
(1) 求 C 的大小;

(2) 若 $AB=3$, $AC=\sqrt{6}$, 求 p 的值.

20. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0,1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}=-1$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A, B 两点. 是否存在常数 λ, 使得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x)=-2x\ln x+x^2-2ax+a^2$, 其中 $a>0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a\in(0,1)$, 使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立, 且 $f(x)=0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.