2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80°, \sin 80°)$, $B(\cos 20°, \sin 20°)$, 则 $|AB|$ 的值是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上为减函数的是 ( )

(A) $y = \cos^2 x$ (B) $y = 2|\sin x|$ (C) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x}$ (D) $y = -\cot x$

4. 64 个直径都为 $\dfrac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{甲}$, 表面积之和为 $S_{甲}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{乙}$, 表面积为 $S_{乙}$, 则 ( )

(A) $V_{甲} > V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (B) $V_{甲} < V_{乙}$, $S_{甲} < S_{乙}$

(C) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$ (D) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} = S_{乙}$

5. 已知某曲线的参数方程是 $\begin{cases} x = \sec\varphi \\ y = \tan\varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 若以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 长度单位不便变, 建立极坐标系, 则该曲线的极坐标方程是 ( )

(A) $\rho = 1$ (B) $\rho\cos 2\theta = 1$ (C) $\rho^2 \sin 2\theta = 1$ (D) $\rho^2 \cos 2\theta = 1$

6. 给定四条曲线: ① $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}$, ② $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, ③ $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, ④ $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 其中与直线 $x + y - \sqrt{5} = 0$ 仅有一个交点的曲线是 ( )

(A) ①②③ (B) ②③④ (C) ①②④ (D) ①③④

7. 已知 z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$, 且 $|z_1| = 1$. 若 $z_1 + z_2 = 2$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的最大值是( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

8. 若 $\dfrac{\cot\theta - 1}{2\cot\theta + 1} = 1$, 则 $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ 的值为 ( )

(A) 3 (B) -3 (C) -2 (D) $-\dfrac{1}{2}$

9. 12 名学生分别到三个不同的路口进行车流量的调查, 若每个路口 4 人, 则不同的分配方案共有 ( )

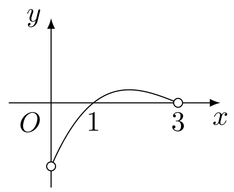
(A) $\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4$ 种 (B) $3\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4$ 种 (C) $\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{A}_3^3$ 种 (D) $\dfrac{\mathrm{C}_{12}^4\mathrm{C}_8^4\mathrm{C}_4^4}{\mathrm{A}_3^3}$ 种

10. 设命题: "直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直"; 命题乙: "直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体", 那么, 甲是乙的 ( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件 (D) 即非充分又非必要条件

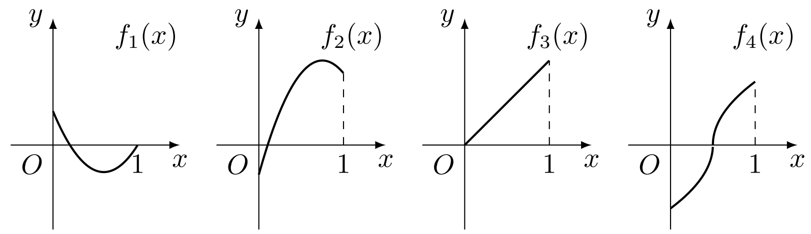
11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x)\cos x < 0$ 的解集是 ( )



(A) $\left(-3, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup (0,1) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$ (B) $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -1\right) \cup (0,1) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$

(C) $(-3,-1) \cup (0,1) \cup (1,3)$ (D) $\left(-3, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup (0,1) \cup (1,3)$

12. 如图所示, $f_i(x)$ ($i = 1,2,3,4$) 是定义在 $[0,1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: "对 $[0,1]$ 中任意的 x_1 和 x_2, 任意 $\lambda \in [0,1]$, $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立"的只有 ( )



(A) $f_1(x)$, $f_3(x)$ (B) $f_2(x)$ (C) $f_2(x)$, $f_3(x)$ (D) $f_4(x)$

二、填空题

13. $\arcsin\left(-\dfrac{2}{5}\right)$, $\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, $\arctan\left(-\dfrac{5}{4}\right)$ 从小到大的顺序是______.

14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1 = 2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于______.

15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 $0°$ 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 $180°$ 的角. 其中正确的序号是______. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)

16. 已知 P 是直线 $3x+4y+8=0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2+y^2-2x-2y+8=0$ 的两条切线, A, B 是切点, C 是圆心, 那么四边形 $PACB$ 面积的最小值为______.

三、解答题

17. 解不等式 $\left|\sqrt{2x-1} - x\right| < 2$.

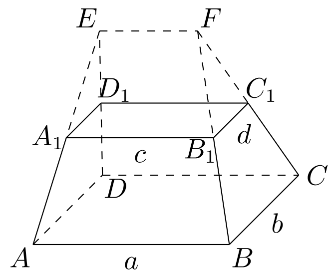
18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b, 且 $a > c$, $b > d$, 两底面间的距离为 h.

(1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(2) 证明: $EF \parallel ABCD$;

(3) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{估} = S_{中截面} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \dfrac{h}{6}(S_{上底面} + 4S_{中截面} + S_{下底面})$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$.

(1) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant \sqrt{a}$;

(2) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant x_{n+1}$;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 且大于零, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 的值.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

(1) 当 $n=4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2) 当 $n=128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(b,c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G, 外心 F, 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2) = 2$, $u_n = \dfrac{f(2^{-n})}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, 求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项的和 S_n.