2004 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是 ( )

(A) $[1,+\infty)$ (B) $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$ (C) $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ (D) $\left(\dfrac{2}{3},1\right]$

2. 设复数 $Z=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$, 则 $Z^2-2Z=$ ( )

(A) -3 (B) 3 (C) $-3\mathrm{i}$ (D) $3\mathrm{i}$

3. 圆 $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ 的圆心到直线 $x-y=1$ 的距离为 ( )

(A) 2 (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

4. 不等式 $x+\dfrac{2}{x+1}>2$ 的解集是 ( )

(A) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(0,1)$
(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

5. $\sin 163^\circ\sin 223^\circ+\sin 253^\circ\sin 313^\circ=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°, $\left|\vec{b}\right|=4$, $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=-72$, 则向量 $\vec{a}$ 的模为 ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12

7. 一元二次方程 $ax^2+2x+1=0\ (a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是 ( )

(A) $a<0$ (B) $a>0$ (C) $a<-1$ (D) $a>1$

8. 设 P 是 60° 的二面角 $\alpha-l-\beta$ 内一点, $PA\perp$ 平面 α, $PB\perp$ 平面 β, A, B 为垂足, $PA=4$, $PB=2$, 则 AB 的长为 ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $4\sqrt{2}$

9. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项 $a_1>0$, $a_{2003}+a_{2004}>0$, $a_{2003}\cdot a_{2004}<0$, 则使前 n 项和 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 是 ( )

(A) 4005 (B) 4006 (C) 4007 (D) 4008

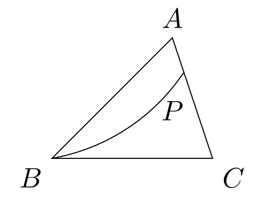
10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2, 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1|=4|PF_2|$, 则此双曲线的离心率 e 的最大值为 ( )

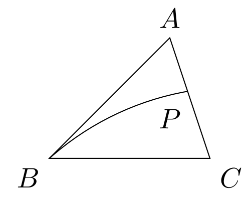
(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\dfrac{7}{3}$

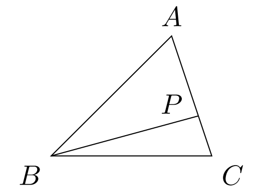
11. 某校高三年级举行一次演讲赛共有 10 位同学参赛, 其中一班有 3 位, 二班有 2 位, 其它班有 5 位, 若采用抽签的方式确定他们的演讲顺序, 则一班有 3 位同学恰好被排在一起 (指演讲序号相连), 而二班的 2 位同学没有被排在一起的概率为 ( )

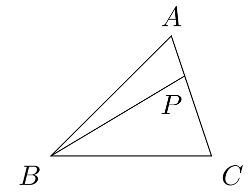
(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{20}$ (C) $\dfrac{1}{40}$ (D) $\dfrac{1}{120}$

12. 若三棱锥 $A-BCD$ 的侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等, 则动点 P 的轨迹与 $\triangle ABC$ 组成图形可能是 ( )

(A)


(B)


(C)


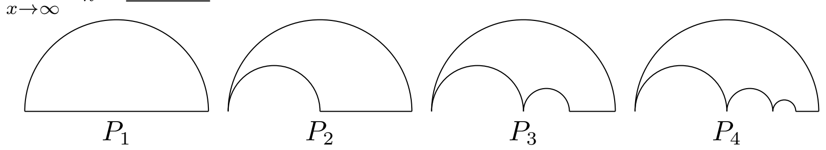
(D)


二、填空题

13. 若在 $(1+ax)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 -80, 则 $a=$______.

14. 曲线 $y=2-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $y=\dfrac{1}{4}x^3-2$ 在交点处切线的夹角是______. (用弧度数作答)

15. 如图 P_1 是一块半径为 1 的半圆形纸板, 在 P_1 的左下端剪去一个半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的半圆后得到图形 P_2, 然后依次剪去一个更小半圆 (其直径为前一个被剪掉半圆的半径) 得圆形 P_3、P_4、$\cdots$、P_n、$\cdots$, 记纸板 P_n 的面积为 S_n, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}S_n=$______.



16. 对任意实数 k, 直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta\\ y=1+4\sin\theta\end{cases}\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 恰有一个公共点, 则 b 取值范围是______.

三、解答题

17. 求函数 $y=\sin^4x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^4x$ 的取小正周期和取小值; 并写出该函数在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间.

18. 设一汽车在前进途中要经过 4 个路口, 汽车在每个路口遇到绿灯的概率为 $\dfrac{3}{4}$, 遇到红灯 (禁止通行) 的概率为 $\dfrac{1}{4}$. 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地才停止前进, ξ 表示停车时已经通过的路口数, 求:

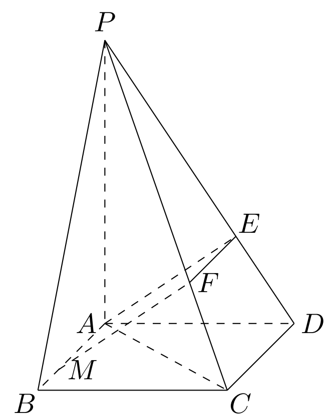
(1) ξ 的概率的分布列及期望 $E\xi$;

(2) 停车时最多已通过 3 个路口的概率.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AE\perp PD$, $EF\parallel CD$, $AM=EF$.

(1) 证明: MF 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线;

(2) 若 $PA=3AB$, 求直线 AC 与平面 EAM 所成角的正弦值.



20. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x-a)\ (a>1)$.

(1) 求导数 $f'(x)$; 并证明 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2;

(2) 若不等式 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

21. 设 $p>0$ 是一常数, 过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B, 以线段 AB 为直经作圆 H (H 为圆心). 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上; 并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

(1) 证明 $a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立;

(2) 令 $b_n=\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, 判断 b_n 与 b_{n+1} 的大小, 并说明理由.