

2007 年普通高等学校招生考试 (江西卷)

理科数学

一、选择题

1. 化简 $\frac{2+4i}{(1+i)^2}$ 的结果是 ()

- (A) $2+i$ (B) $-2+i$ (C) $2-i$ (D) $-2-i$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$ ()

- (A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 3 (D) 不存在

3. 若 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 3$, 则 $\cot\alpha$ 等于 ()

- (A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

4. 已知 $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式中, 各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64, 则 n 等于 ()

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

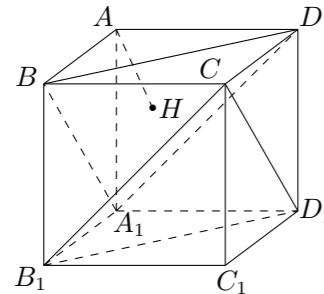
5. 若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则下列命题中正确的是 ()

- (A) $\sin x < \frac{3}{\pi}x$ (B) $\sin x > \frac{3}{\pi}x$ (C) $\sin x < \frac{4}{\pi^2}x^2$ (D) $\sin x > \frac{4}{\pi^2}x^2$

6. 若集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{(x, y) | x - 2y + 1 \geq 0 \text{ 且 } x - 2y - 1 \leq 0, x, y \in M\}$, 则 N 中元素的个数为 ()

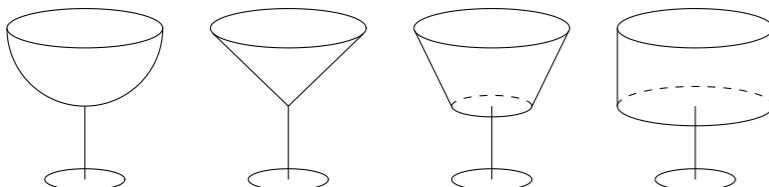
- (A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 2

7. 如图, 正方体 AC_1 的棱长为 1, 过点 A 作平面 A_1BD 的垂线, 垂足为点 H . 则以下命题中, 错误的是 ()



- (A) 点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心 (B) AH 垂直平面 CB_1D_1
(C) AH 的延长线经过点 C_1 (D) 直线 AH 和 BB_1 所成的角为 45°

8. 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1, h_2, h_3, h_4 , 则它们的大小关系正确的是 ()



- (A) $h_2 > h_1 > h_4$ (B) $h_1 > h_2 > h_3$ (C) $h_3 > h_2 > h_4$ (D) $h_2 > h_4 > h_1$

9. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $e = \frac{1}{2}$, 右焦点为 $F(c, 0)$, 方程 $ax^2 + bx - c = 0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2 , 则点 $P(x_1, x_2)$ ()

- (A) 必在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 内 (B) 必在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 上
(C) 必在圆 $x^2 + y^2 = 2$ 外 (D) 以上三种情形都有可能

10. 将一个骰子连续抛掷三次, 它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{18}$

11. 设函数 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上以 5 为周期的可导偶函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 5$ 处的切线的斜率为 ()

- (A) $-\frac{1}{5}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

12. 设 p : $f(x) = e^x + \ln x + 2x^2 + mx + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, q : $m \geq -5$, 则 p 是 q 的 ()

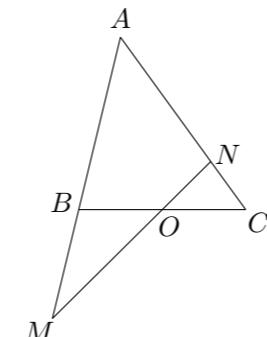
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、填空题

13. 设函数 $y = 4 + \log_2(x - 1)$ ($x \geq 3$), 则其反函数的定义域为 ____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 $p, q \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_p + a_q = a_{p+q}$, 若 $a_1 = \frac{1}{9}$, 则 $a_{36} = ____$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB 、 AC 于不同的两点 M 、 N , 若 $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$, 则 $m+n$ 的值为 ____.



16. 设有一组圆 C_1 : $(x - k + 1)^2 + (y - 3k)^2 = 2k^4$ ($k \in \mathbf{N}^*$). 下面四个命题:

- A. 存在一条定直线与所有的圆均相切;
B. 存在一条定直线与所有的圆均相交;
C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交;
D. 所有的圆均不经过原点.

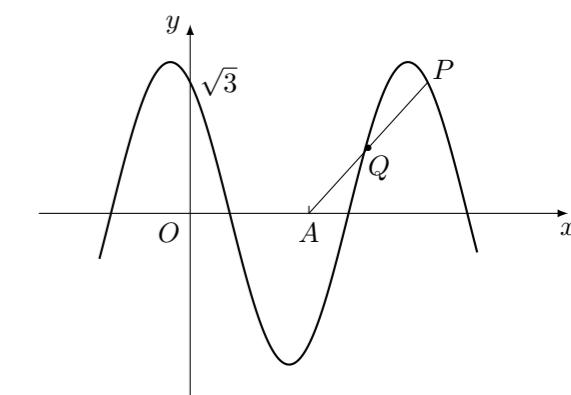
其中真命题的代号是 _____. (写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & 0 < x < c \\ 2^{-\frac{x}{c^2}} + k, & c \leq x < 1 \end{cases}$ 在区间 $(0, 1)$ 内连续, 且

$f(c^2) = \frac{9}{8}$.

- (1) 求实数 k 和 c 的值;
(2) 解不等式 $f(x) > \frac{\sqrt{2}}{8} + 1$.



19. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品，制作过程中必须先后经过两次烧制，当第一次烧制合格后可进入第二次烧制，两次烧制过程相互独立。根据该厂现有的技术水平，经过第一次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5, 0.6, 0.4。经过第二次烧制后，甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6, 0.5, 0.75。

- (1) 求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率；
- (2) 经过前后两次烧制后，合格工艺品的个数为 ξ ，求随机变量 ξ 的期望。

21. 设动点 P 到点 $A(-1, 0)$ 和 $B(1, 0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2 , $\angle APB = 2\theta$. 且存在常数 λ ($0 < \lambda < 1$), 使得 $d_1 d_2 \sin^2 \theta = \lambda$.

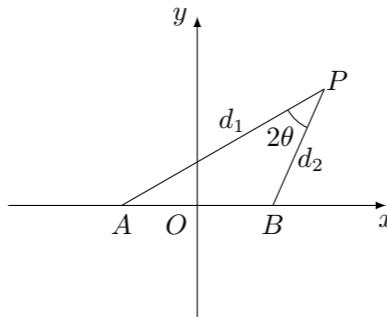
- (1) 证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；
- (2) 过点 B 作直线交双曲线 C 的右支于 M, N 两点，试确定 λ 的范围，使 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ ，其中点 O 为坐标原点。

22. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_2 = 4$ ，且对于任何 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $2 + \frac{1}{a_{n+1}} <$

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} < 2 + \frac{1}{a_n}.$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- (1) 求 a_1, a_3 ；
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 。



20. 如图是一个直三棱柱（以 $A_1B_1C_1$ 为底面）被一平面所截得到的几何体，截面为 ABC . 已知 $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, $AA_1 = 4$, $BB_1 = 2$, $CC_1 = 3$.

- (1) 设点 O 是 AB 的中点，证明： $OC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$ ；
- (2) 求二面角 $B - AC - A_1$ 的大小；
- (3) 求此几何体的体积。

