# 2017 年普通高等学校招生考试（上海卷）

# 数学试卷

## 一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$, 集合 $B=\{3,4,5\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 若排列数 $\mathrm{P}_6^m=6\times5\times4$, 则 $m=$______.

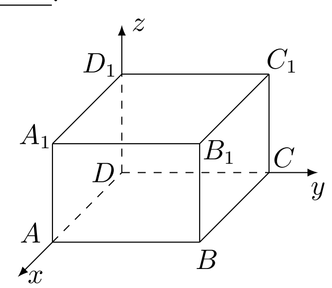
3. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}>1$ 的解集为______.

4. 已知球的体积为 $36\pi$, 则该球主视图的面积等于______.

5. 已知复数 $z$ 满足 $z+\dfrac{3}{z}=0$, 则 $|z|=$______.

6. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的焦点为 $F_1$, $F_2$, $P$ 为该双曲线上的一点, 若 $|PF_1|=5$, 则 $|PF_2|=$______.

7. 如图, 以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $D$ 为坐标原点, 过 $D$ 的三条棱所在的直线为坐标轴, 建立空间直角坐标系, 若 $\overrightarrow{DB_1}$ 的坐标为 $(4,3,2)$, 则 $\overrightarrow{AC_1}$ 的坐标是______.



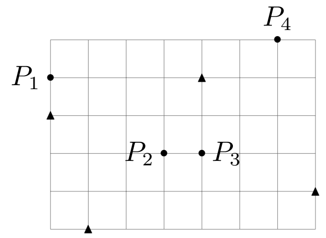

8. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, 若 $g(x)=\begin{cases}3^x-1,\ x\leqslant 0\\ f(x),\ x>0\end{cases}$ 为奇函数, 则 $f^{-1}(x)=2$ 的解为______.

9. 已知四个函数: ① $y=-x$, ② $y=-\dfrac{1}{x}$, ③ $y=x^3$, ④ $y=x^{\frac{1}{2}}$. 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图象有且仅有一个公共点”的概率为______.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $a_n=n^2$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的项是互不相等的正整数, 若对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $\{b_n\}$ 的第 $a_n$ 项都等于 $\{a_n\}$ 的第 $b_n$ 项, 则 $\dfrac{\lg(b_1b_4b_9b_{16})}{\lg(b_1b_2b_3b_4)}=$______.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2\in\mathbf{R}$, 且 $\dfrac{1}{2+\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{2+\sin(2\alpha_2)}=2$, 则 $|10\pi-\alpha_1-\alpha_2|$ 的最小值等于______.

12. 如图, 用 35 个单位正方形拼成一个矩形, 点 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ 以及四个标记为“▲”的点在正方形的顶点处, 设集合 $\Omega=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$, 点 $P\in\Omega$, 过 $P$ 作直线 $l_P$, 使得不在 $l_P$ 上的“▲”的点分布在 $l_P$ 的两侧. 用 $D_1(l_P)$ 和 $D_2(l_P)$ 分别表示 $l_P$ 一侧和另一侧的“▲”的点到 $l_P$ 的距离之和. 若过 $P$ 的直线 $l_P$ 中有且只有一条满足 $D_1(l_P)=D_2(l_P)$, 则 $\Omega$ 中所有这样的 $P$ 为______.




## 二、选择题

13. 关于 $x$, $y$ 的二元一次方程组 $\begin{cases}x+5y=0\\ 2x+3y=4\end{cases}$ 的系数行列式 $D$ 为 ( )

(A) $\begin{vmatrix}0&5\\4&3\end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix}1&5\\2&3\end{vmatrix}$　(D) $\begin{vmatrix}6&0\\5&4\end{vmatrix}$

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ( )

(A) 等于 $-\dfrac{1}{2}$　(B) 等于 0　(C) 等于 $\dfrac{1}{2}$　(D) 不存在

15. 已知 $a$、$b$、$c$ 为实常数, 数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=an^2+bn+c$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则“存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 $x_{100+k}$, $x_{200+k}$, $x_{300+k}$ 成等差数列”的一个必要条件是 ( )

(A) $a\geqslant 0$　(B) $b\leqslant 0$

(C) $c=0$　(D) $a-2b+c=0$

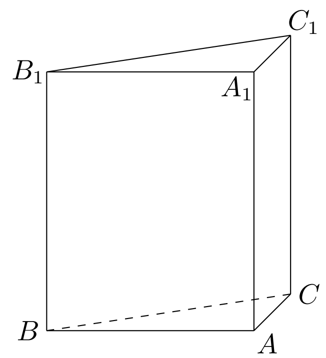
16. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 和 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$. $P$ 为 $C_1$ 上的动点, $Q$ 为 $C_2$ 上的动点, $w$ 是 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最大值. 记 $\Omega=\left\{(P,Q)\mid P\text{ 在 }C_1\text{ 上, }Q\text{ 在 }C_2\text{ 上, 且 }\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=w\right\}$, 则 $\Omega$ 中( )

(A) 元素个数为 2　(B) 元素个数为 4

(C) 元素个数为 8　(D) 含有无穷个元素

## 三、解答题

17. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形, 两直角边 $AB$ 和 $AC$ 的长分别为 4 和 2, 侧棱 $AA_1$ 的长为 5.
(1) 求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积;
(2) 设 $M$ 是 $BC$ 中点, 求直线 $A_1M$ 与平面 $ABC$ 所成角的大小.




18. 已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+\dfrac{1}{2}$, $x\in(0,\pi)$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
(2) 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 角 $A$ 所对边 $a=\sqrt{19}$, 角 $B$ 所对边 $b=5$, 若 $f(A)=0$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 根据预测, 某地第 $n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 个月共享单车的投放量和损失量分别为 $a_n$ 和 $b_n$ (单位: 辆), 其中 $a_n=\begin{cases}5n^4+15,\ 1\leqslant n\leqslant 3\\-10n+470,\ n\geqslant 4\end{cases}$, $b_n=n+5$, 第 $n$ 个月底的共享单车的保有量是前 $n$ 个月的累计投放量与累计损失量的差.
(1) 求该地区第 4 个月底的共享单车的保有量;
(2) 已知该地共享单车停放点第 $n$ 个月底的单车容纳量 $S_n=-4(n-46)^2+8800$ (单位: 辆). 设在某月底, 共享单车保有量达到最大, 问该保有量是否超出了此时停放点的单车容纳量?

20. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, $A$ 为 $\Gamma$ 的上顶点, $P$ 为 $\Gamma$ 上异于上、下顶点的动点, $M$ 为 $x$ 轴正半轴上的动点.
(1) 若 $P$ 在第一象限, 且 $|OP|=\sqrt{2}$, 求 $P$ 的坐标;
(2) 设 $P\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, 若以 $A$, $P$, $M$ 为顶点的三角形是直角三角形, 求 $M$ 的横坐标;
(3) 若 $|MA|=|MP|$, 直线 $AQ$ 与 $\Gamma$ 交于另一点 $C$, 且 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{PM}$, 求直线 $AQ$ 的方程.

21. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对于任意的 $x_1$, $x_2\in\mathbf{R}$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.
(1) 若 $f(x)=ax^3+1$, 求 $a$ 的取值范围;
(2) 若 $f(x)$ 是周期函数, 证明: $f(x)$ 是常值函数;
(3) 设 $f(x)$ 恒大于零. $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的、恒大于零的周期函数, $M$ 是 $g(x)$ 的最大值. 函数 $h(x)=f(x)g(x)$. 证明: "$h(x)$ 是周期函数"的充要条件是"$f(x)$ 是常值函数".