2008 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 1 或 2 (D) -1

2. 设集合 $A=\left\{x\middle|\dfrac{x}{x-1}<0\right\}$, $B=\{x|0<x<3\}$, 那么“$m\in A$”是“$m\in B$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, 若 $a_1=7$, $a_5=16$, 则数列 $\{a_n\}$ 前 7 项的和为 ( )

(A) 63 (B) 64 (C) 127 (D) 128

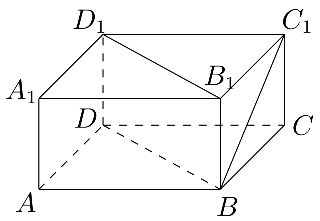
4. 函数 $f(x)=x^3+\sin x+1$ $(x\in\mathbf{R})$, 若 $f(a)=2$, 则 $f(-a)$ 的值为 ( )

(A) 3 (B) 0 (C) -1 (D) -2

5. 某一批花生种子, 如果每 1 粒发牙的概率为 $\dfrac{4}{5}$, 那么播下 4 粒种子恰有 2 粒发芽的概率是 ( )

(A) $\dfrac{16}{625}$ (B) $\dfrac{96}{625}$ (C) $\dfrac{192}{625}$ (D) $\dfrac{256}{625}$

6. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, $AA_1=1$, 则 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成角的正弦值为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

7. 某班级要从 4 名男生、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务, 如果要求至少有 1 名女生, 那么不同的选派方案种数为 ( )

(A) 14 (B) 24 (C) 28 (D) 48

8. 若实数 x、y 满足 $\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\ x>0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是 ( )

(A) $(0,1)$ (B) $(0,1]$ (C) $(1,+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

9. 函数 $f(x)=\cos x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象按向量 $(m,0)$ 平移后, 得到函数 $y=-f'(x)$ 的图象, 则 m 的值可以为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $-\pi$ (D) $-\dfrac{\pi}{2}$

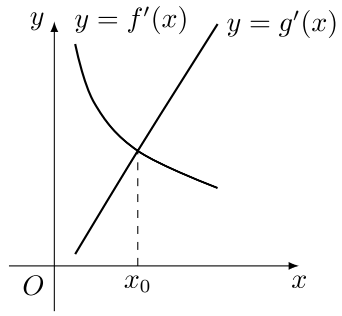
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c. 若 $(a^2+c^2-b^2)\tan B=\sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为 ( )

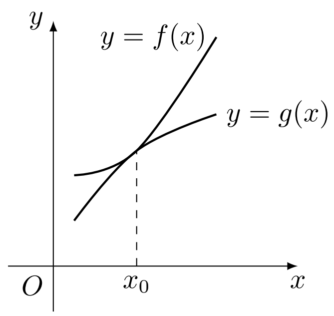
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}$

11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的两个焦点为 F_1、F_2, 若 P 为其上一点, 且 $|PF_1|=2|PF_2|$, 则双曲线离心率的取值范围为 ( )

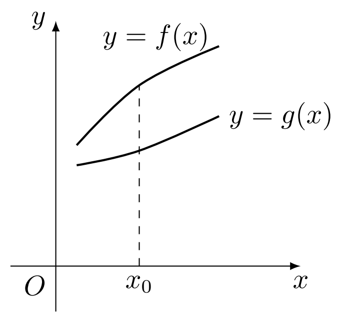
(A) $(1,3)$ (B) $(1,3]$ (C) $(3,+\infty)$ (D) $[3,+\infty)$

12. 已知函数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的导函数的图象如下图, 那么 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 的图象可能是 ( )

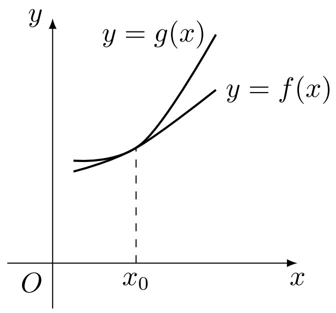




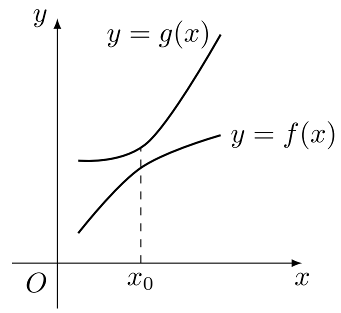
(A)



(B)



(C)



(D)

二、填空题

13. 若 $(x-2)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$______. (用数字作答)

14. 若直线 $3x+4y+m=0$ 与圆 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=-2+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 没有公共点, 则实数 m 的取值范围是______.

15. 若三棱锥的三个侧面两两垂直, 且侧棱长均为 $\sqrt{3}$, 则其外接球的表面积是______.

16. 设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 a、$b\in P$, 都有 $a+b$、$a-b$、ab、$\dfrac{a}{b}\in P$ (除数 $b\neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域; 数集 $F=\left\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbf{Q}\right\}$ 也是数域. 有下列命题: ① 整数集是数域; ② 若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ③ 数域必为无限集; ④ 存在无穷多个数域. 其中正确的命题的序号是______. (把你认为正确的命题的序号填填上)

三、解答题

17. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A,\cos A)$, $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1)$, $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$, 且 A 为锐角.

(1) 求角 A 的大小;

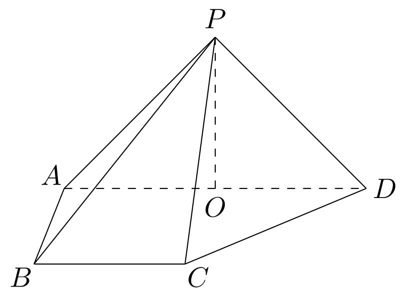
(2) 求函数 $f(x)=\cos 2x+4\cos A\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的值域.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$, 侧棱 $PA=PD=\sqrt{2}$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, 其中 $BC\,/\!/\,AD$, $AB\perp AD$, $AD=2AB=2BC=2$, O 为 AD 中点.

(1) 求证: $PO\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求异面直线 PD 与 CD 所成角的大小;

(3) 线段 AD 上是否存在点 Q, 使得它到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$? 若存在, 求出 $\dfrac{AQ}{QD}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$.

(1) 设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列, 前 n 项和为 S_n, 其中 $a_1=3$. 若点 $(a_n, a_{n+1}^2-2a_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 在函数 $y=f'(x)$ 的图象上, 求证: 点 (n, S_n) 也在 $y=f'(x)$ 的图象上;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $(a-1, a)$ 内的极值.

20. 某项考试按科目 A、科目 B 依次进行, 只有当科目 A 成绩合格时, 才可继续参加科目 B 的考试. 已知每个科目只允许有一次补考机会, 两个科目成绩均合格方可获得证书. 现某人参加这项考试, 科目 A 每次考试成绩合格的概率均为 $\frac{2}{3}$, 科目 B 每次考试成绩合格的概率均为 $\frac{1}{2}$. 假设各次考试成绩合格与否均互不影响.

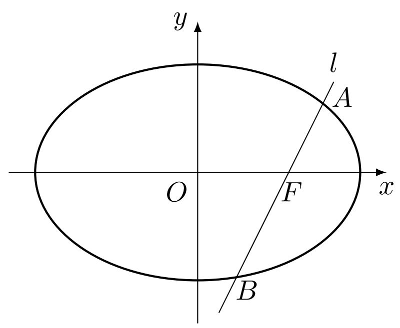
(1) 求他不需要补考就可获得证书的概率;

(2) 在这项考试过程中, 假设他不放弃所有的考试机会, 记他参加考试的次数为 ξ, 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

21. 如图, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$, O 为坐标原点.

(1) 已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形, 求椭圆的方程;

(2) 设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点. 若直线 l 绕点 F 任意转动, 值有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$, 求 a 的取值范围.



22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 记 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 上的最小值为 b_n, 令 $a_n=\ln(1+n)-b_n$.

① 如果对一切 n, 不等式 $\sqrt{a_n}<\sqrt{a_{n+2}}-\frac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$ 恒成立, 求实数 c 的取值范围;

② 求证: $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1a_3}{a_2a_4}+\cdots+\frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}<\sqrt{2a_n+1}-1$.