2013 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

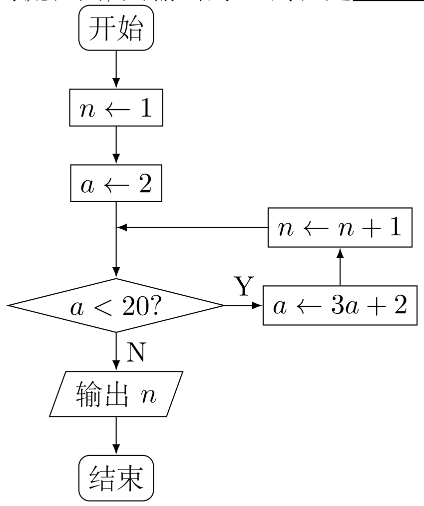
1. 函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为______.

2. 设 $z=(2-\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的模为______.

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的两条渐近线的方程为______.

4. 集合 $\{-1,0,1\}$ 共有______个子集.

5. 如图是一个算法的流程图, 则输出的 n 的值是______.



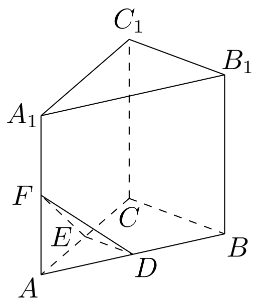
6. 抽样统计甲、乙两位射击运动员的 5 次训练成绩 (单位: 环), 结果如下:

运动员	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定 (方差较小) 的那位运动员成绩的方差为______.

7. 现有某类病毒记作 X_mY_n, 其中正整数 m, n ($m\leqslant 7$, $n\leqslant 9$) 可以任意选取, 则 m, n 都取到奇数的概率为______.

8. 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, AC, AA_1 的中点. 设三棱锥 $F-ADE$ 的体积为 V_1, 三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的体积为 V_2, 则 $V_1:V_2=$______.



9. 抛物线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形区域为 D (包含三角形内部与边界). 若点 $P(x,y)$ 是区域 D 内的任意一点, 则 $x+2y$ 的取值范围是______.

10. 设 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC 上的点, $AD=\dfrac{1}{2}AB$, $BE=\dfrac{2}{3}BC$. 若 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}$ (λ_1, λ_2 为实数), 则 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值为______.

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 当 $x>0$ 时, $f(x)=x^2-4x$, 则不等式 $f(x)>x$ 的解集用区间表示为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, 右焦点为 F, 右准线为 l, 短轴的一个端点为 B, 设原点到直线 BF 的距离为 d_1, F 到 l 的距离为 d_2, 若 $d_2=\sqrt{6}d_1$, 则椭圆 C 的离心率为______.

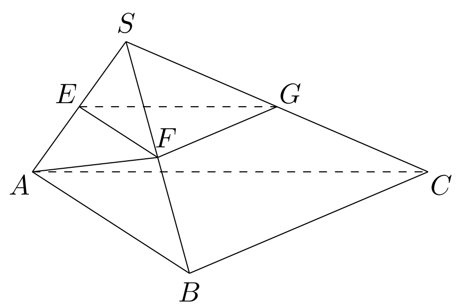
13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设定点 $A(a,a)$, P 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ 图象上一动点, 若点 P, A 之间的最短距离为 $2\sqrt{2}$, 则满足条件的实数 a 的所有值为______.

14. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=\dfrac{1}{2}$, $a_6+a_7=3$, 则满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n>a_1a_2\cdots a_n$ 的最大正整数 n 的值为______.

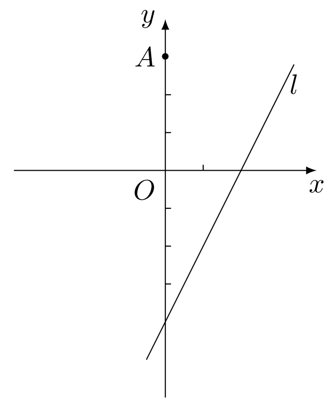
二、解答题

15. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $0<\beta<\alpha<\pi$.
(1) 若 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 求证: $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;
(2) 设 $\boldsymbol{c}=(0,1)$, 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 求 α, β 的值.

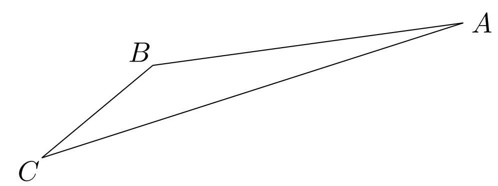
16. 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, 平面 $SAB\perp$ 平面 SBC, $AB\perp BC$, $AS=AB$. 过 A 作 $AF\perp SB$, 垂足为 F, 点 E, G 分别是棱 SA, SC 的中点. 求证:
(1) 平面 $EFG\parallel$ 平面 ABC;
(2) $BC\perp SA$.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(0,3)$, 直线 $l:y=2x-4$. 设圆 C 的半径为 1, 圆心在 l 上.
(1) 若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上, 过点 A 作圆 C 的切线, 求切线的方程;
(2) 若圆 C 上存在点 M, 使 $MA=2MO$, 求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围.



18. 如图, 游客从某旅游景区的景点 A 处下山至 C 处有两种路径. 一种是从 A 沿直线步行到 C, 另一种是先从 A 沿索道乘缆车到 B, 然后从 B 沿直线步行到 C. 现有甲、乙两位游客从 A 处下山, 甲沿 AC 匀速步行, 速度为 50 m/min. 在甲出发 2 min 后, 乙从 A 乘缆车到 B, 在 B 处停留 1 min 后, 再从 B 匀速步行到 C. 假设缆车匀速直线运动的速度为 130 m/min, 山路 AC 长为 1260 m, 经测量, $\cos A=\dfrac{12}{13}$, $\cos C=\dfrac{3}{5}$.
(1) 求索道 AB 的长;
(2) 问乙出发多少分钟后, 乙在缆车上与甲的距离最短?
(3) 为使两位游客在 C 处互相等待的时间不超过 3 分钟, 乙步行的速度应控制在什么范围内?



19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a, 公差为 d 的等差数列 $(d \neq 0)$, S_n 是其前 n 项的和. 记 $b_n = \dfrac{nS_n}{n^2+c}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 其中 c 为实数.

(1) 若 $c=0$, 且 b_1, b_2, b_4 成等比数列, 证明: $S_{nk} = n^2 S_k$ $(k,\ n \in \mathbf{N}^*)$;

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列, 证明: $c=0$.

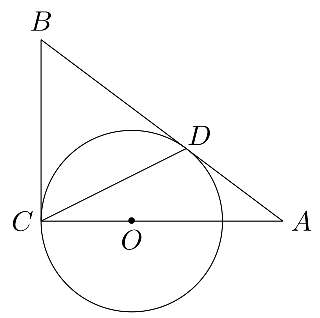
20. 设函数 $f(x) = \ln x - ax$, $g(x) = \mathrm{e}^x - ax$, 其中 a 为实数.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是单调减函数, 且 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有最小值, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调增函数, 试求 $f(x)$ 的零点个数, 并证明你的结论.

21. 四选二.

【A】如图, AB 和 BC 分别与圆 O 相切于点 D, C, AC 经过圆心 O, 且 $BC = 2OC$. 求证: $AC = 2AD$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

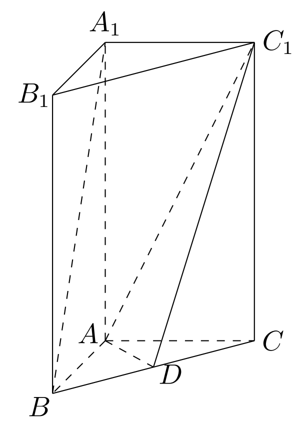
【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\tan^2\theta \\ y = 2\tan\theta \end{cases}$ (θ 为参数). 试求直线 l 和曲线 C 的普通方程, 并求出它们的公共点的坐标.

【D】已知 $a \geqslant b > 0$, 求证: $2a^3 - b^3 \geqslant 2ab^2 - a^2 b$.

22. 如图, 在直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, 点 D 是 BC 的中点.

(1) 求异面直线 A_1B 与 C_1D 所成角的余弦值;

(2) 求平面 ADC_1 与平面 ABA_1 所成二面角的正弦值.



23. 设数列 $\{a_n\}$: $1,\ -2,\ -2,\ 3,\ 3,\ 3,\ -4,\ -4,\ -4,\ -4,\ \cdots,\ \overbrace{(-1)^{k-1}k, \cdots, (-1)^{k-1}k}^{k\text{ 个}},\ \cdots$, 即当 $\dfrac{(k-1)k}{2} < n \leqslant \dfrac{k(k+1)}{2}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $a_n = (-1)^{k-1}k$. 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. 对于 $l \in \mathbf{N}^*$, 定义集合 $P_l = \{n \mid S_n$ 是 a_n 的整数倍, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $1 \leqslant n \leqslant l\}$.

(1) 求集合 P_{11} 中元素的个数;

(2) 求集合 P_{2000} 中元素的个数.