2013 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

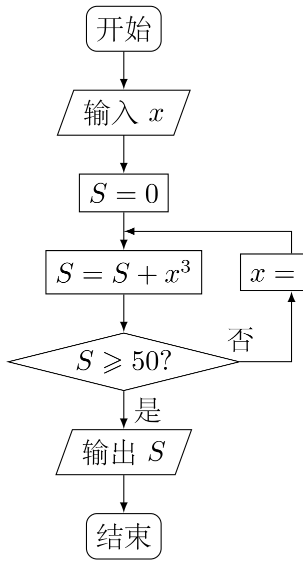
1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|\leqslant 2\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant 1\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $(-\infty,2]$　(B) $[1,2]$　(C) $[-2,2]$　(D) $[-2,1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y-6\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为 （ ）

(A) -7　(B) -4　(C) 1　(D) 2

3. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 1, 则输出 S 的值为 （ ）



(A) 64　(B) 73　(C) 512　(D) 585

4. 已知下列三个命题:

① 若一个球的半径缩小到原来的 $\dfrac{1}{2}$, 则其体积缩小到原来的 $\dfrac{1}{8}$;

② 若两组数据的平均数相等, 则它们的标准差也相等;

③ 直线 $x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 相切.

其中真命题的序号是 （ ）

(A) ①②③　(B) ①②　(C) ①③　(D) ②③

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线分别交于 A, B 两点, O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $p=$ （ ）

(A) 1　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$, $AB=\sqrt{2}$, $BC=3$, 则 $\sin\angle BAC=$ （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　(D) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

7. 函数 $f(x)=2^x\left|\log_{0.5}x\right|-1$ 的零点个数为 （ ）

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

8. 已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A, 若 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$　(B) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$

(C) $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$　(D) $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

二、填空题

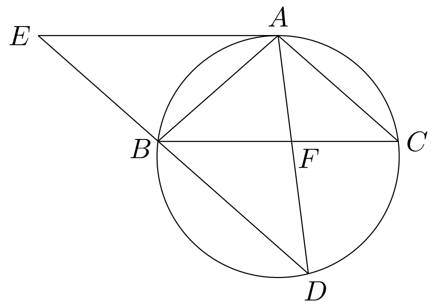
9. 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位. 若 $(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})=b\mathrm{i}$, 则 $a+b\mathrm{i}=$______.

10. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为______.

11. 已知圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$, 圆心为 C, 点 P 的极坐标为 $\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 则 $|CP|=$______.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$, 则 AB 的长为______.

13. 如图, $\triangle ABC$ 为圆的内接三角形, BD 为圆的弦, 且 $BD\,/\!/\,AC$. 过点 A 作圆的切线与 DB 的延长线交于点 E, AD 与 BC 交于点 F. 若 $AB=AC$, $AE=6$, $BD=5$, 则线段 CF 的长为______.



14. 设 $a+b=2$, $b>0$, 则当 $a=$______时, $\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 取得最小值.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2x+1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 一个盒子里装有 7 张卡片, 其中有红色卡片 4 张, 编号分别为 1, 2, 3, 4; 白色卡片 3 张, 编号分别为 2, 3, 4. 从盒子中任取 4 张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).

(1) 求取出的 4 张卡片中, 含有编号为 3 的卡片的概率.

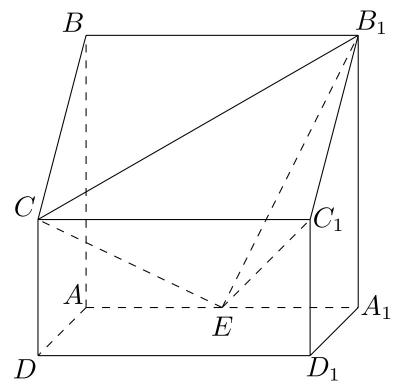
(2) 在取出的 4 张卡片中, 红色卡片编号的最大值设为 X, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图所示, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\,/\!/\,DC$, $AB\perp AD$, $AD=CD=1$, $AA_1=AB=2$, E 为棱 AA_1 的中点.

(1) 证明: $B_1C_1\perp CE$;

(2) 求二面角 B_1-CE-C_1 的平面角的正弦值;

(3) 设点 M 在线段 C_1E 上, 且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$, 求线段 AM 的长.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$, 求 k 的值.

19. 已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列, 其前 n 项和为 $S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 且 S_3+a_3, S_5+a_5, S_4+a_4 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $T_n=S_n-\dfrac{1}{S_n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值.

20. 已知函数 $f(x)=x^2\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 证明: 对任意的 $t>0$, 存在唯一的 s, 使 $t=f(s)$;

(3) 设 (2) 中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s=g(t)$, 证明: 当 $t>\mathrm{e}^2$ 时, 有 $\dfrac{2}{5}<\dfrac{\ln g(t)}{\ln t}<\dfrac{1}{2}$.