

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $S = \{x \in \mathbf{R} | x + 1 \geq 2\}$, $T = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $S \cap T =$ ()
 (A) $\{2\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{0, 1, 2\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x + y \leq 4 \\ y \geq 2 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x + 4y$ 的最大值为 ()
 (A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14

3. “ $a = 2$ ”是“直线 $ax + 2y = 0$ 平行于直线 $x + y = 1$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 设 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.2}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$, 则 ()
 (A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $b < a < c$

5. 函数 $y = \log_2(x + 4)$ ($x > 0$) 的反函数是 ()
 (A) $y = 2^x + 4$ ($x > 2$) (B) $y = 2^x + 4$ ($x > 0$)
 (C) $y = 2^x - 4$ ($x > 2$) (D) $y = 2^x - 4$ ($x > 0$)

6. 设 a, b 为两条直线, α, β 为两个平面. 下列四个命题中, 正确的命题是 ()
 (A) 若 a, b 与 α 所成的角相等, 则 $a \parallel b$
 (B) 若 $a \parallel \alpha, b \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $a \parallel b$
 (C) 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 (D) 若 $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $a \perp b$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 且它的一条准线与抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线重合, 则此双曲线的方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1$ (B) $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{96} = 1$ (C) $\frac{x^2}{3} - \frac{2y^2}{3} = 1$ (D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, $a_1 = 9d$. 若 a_k 是 a_1 与 a_{2k} 的等比中项, 则 $k =$ ()
 (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 设函数 $f(x) = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $f(x)$ ()
 (A) 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6} \right]$ 上是增函数 (B) 在区间 $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right]$ 上是减函数
 (C) 在区间 $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} \right]$ 上是增函数 (D) 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$ 上是减函数

10. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$. 若对任意的 $x \in [t, t + 2]$, 不等式 $f(x + t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 ()
 (A) $[\sqrt{2}, +\infty)$ (B) $[2, +\infty)$
 (C) $(0, 2]$ (D) $[-\sqrt{2}, -1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

二、填空题

11. 从一堆苹果中任取了 20 只, 并得到它们的质量 (单位: 克) 数据分布表如下:

分组	[90, 100)	[100, 110)	[110, 120)	[120, 130)	[130, 140)	[140, 150)
频数	1	2	3	10	3	1

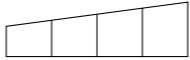
则这堆苹果中, 质量不小于 120 克的苹果数约占苹果总数的_____%.

12. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^9$ 的二项展开式中常数项是_____. (用数字作答)
 13. 一个长方体的各顶点均在同一球的球面上, 且一个顶点上的三条棱的长分别为 1, 2, 3, 则此球的表面积为_____.

14. 已知两圆 $x^2 + y^2 = 10$ 和 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 20$ 相交于 A, B 两点, 则直线 AB 的方程是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, AC = 3, D$ 是边 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

16. 如图, 用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色, 每个格子涂一种颜色. 要求相邻的两个格子颜色不同, 且两端的格子的颜色也不同, 则不同的涂色方法共有_____种. (用数字作答)

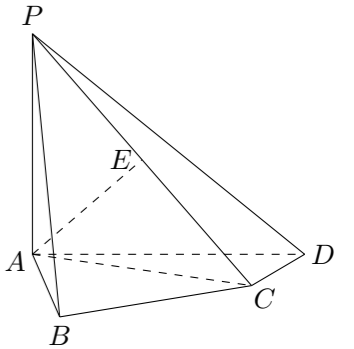


三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC = 2, BC = 3, \cos A = -\frac{4}{5}$.
 (1) 求 $\sin B$ 的值;
 (2) 求 $\sin \left(2B + \frac{\pi}{6} \right)$ 的值.

18. 已知甲盒内有大小相同的 3 个红球和 4 个黑球, 乙盒内有大小相同的 5 个红球和 4 个黑球. 现从甲、乙两个盒内各任取 2 个球.
 (1) 求取出的 4 个球均为红球的概率;
 (2) 求取出的 4 个球中恰有 1 个红球的概率;

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AC \perp CD$, $\angle ABC = 60^\circ, PA = AB = BC, E$ 是 PC 的中点.
 (1) 求 PB 和平面 PAD 所成的角的大小;
 (2) 证明 $AE \perp$ 平面 PCD ;
 (3) 求二面角 $A-PD-C$ 的大小.



20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 3n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 证明数列 $\{a_n - n\}$ 是等比数列;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
 - (3) 证明不等式 $S_{n+1} \leq 4S_n$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 皆成立.

21. 设函数 $f(x) = -x(x-a)^2$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;
 - (2) 当 $a \neq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值;
 - (3) 当 $a > 3$ 时, 证明存在 $k \in [-1, 0]$, 使得不等式 $f(k - \cos x) \geq f(k^2 - \cos^2 x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.

22. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 是椭圆上的一点, $AF_2 \perp F_1F_2$, 原点 O 到直线 AF_1 的距离为 $\frac{1}{3}|OF_1|$.
- (1) 证明 $a = \sqrt{2}b$;
 - (2) 求 $t \in (0, b)$ 使得下述命题成立: 设圆 $x^2 + y^2 = t^2$ 上任意点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线交椭圆于 Q_1, Q_2 两点, 则 $OQ_1 \perp OQ_2$.