

2010 年普通高等学校招生考试（天津卷）

# 文科数学

## 一、选择题

1.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{3+i}{1-i} =$  ( )

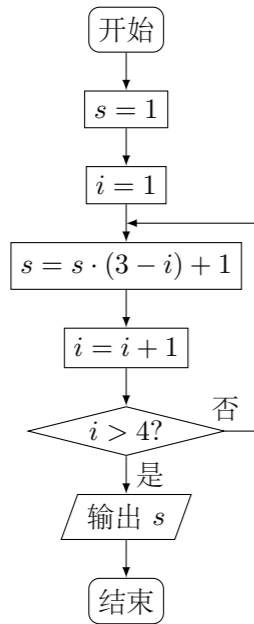
- (A)  $1+2i$  (B)  $2+4i$  (C)  $-1-2i$  (D)  $2-i$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x-y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ , 则目标函数  $z=4x+2y$  的最

大值为 ( )

- (A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 2

3. 阅读下面的程序框图, 若输出  $s$  的值为  $-7$ , 则判断框内可填写 ( )



- (A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $1$  (D)  $3$

4. 函数  $f(x) = e^x + x - 2$  的零点所在的一个区间是 ( )

- (A)  $(-2, -1)$  (B)  $(-1, 0)$  (C)  $(0, 1)$  (D)  $(1, 2)$

5. 下列命题中, 真命题是 ( )

- (A)  $\exists m \in \mathbf{R}$ , 使函数  $f(x) = x^2 + mx$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是偶函数  
 (B)  $\exists m \in \mathbf{R}$ , 使函数  $f(x) = x^2 + mx$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是奇函数  
 (C)  $\forall m \in \mathbf{R}$ , 使函数  $f(x) = x^2 + mx$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是偶函数  
 (D)  $\forall m \in \mathbf{R}$ , 使函数  $f(x) = x^2 + mx$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 是奇函数

6. 设  $a = \log_5 4$ ,  $b = (\log_5 3)^2$ ,  $c = \log_4 5$ , 则 ( )

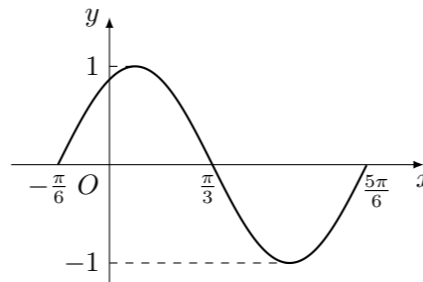
- (A)  $a < c < b$  (B)  $b < c < a$  (C)  $a < b < c$  (D)  $b < a < c$

7. 设集合  $A = \{x \mid |x-a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{x \mid 1 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$ . 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $\{a \mid 0 \leq a \leq 6\}$  (B)  $\{a \mid a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 4\}$

- (C)  $\{a \mid a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 6\}$  (D)  $\{a \mid 2 \leq a \leq 4\}$

8. 如图是函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 在区间  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$  上的图象, 为了得到这个函数的图象, 只要将  $y = \sin x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 的图象上所有的点 ( )



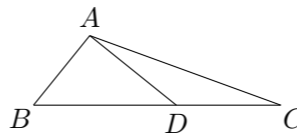
(A) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍, 纵坐标不变

(B) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

(C) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍, 纵坐标不变

(D) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

9. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AD \perp AB$ ,  $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}$ ,  $|\overrightarrow{AD}| = 1$ , 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$  ( )



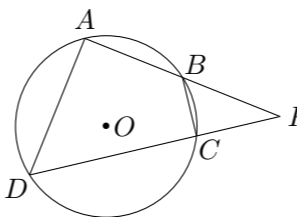
- (A)  $2\sqrt{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\sqrt{3}$

10. 设函数  $g(x) = x^2 - 2$  ( $x \in \mathbf{R}$ ),  $f(x) = \begin{cases} g(x) + x + 4, & x < g(x) \\ g(x) - x, & x \geq g(x) \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的值域是 ( )

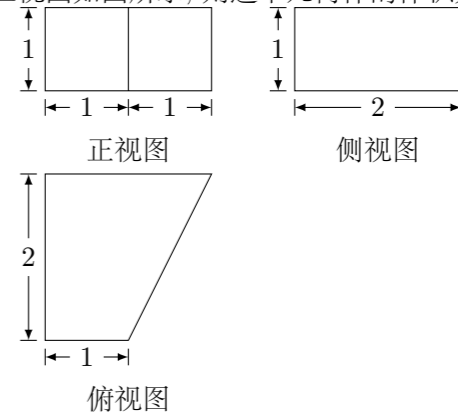
- (A)  $[-\frac{9}{4}, 0] \cup (1, +\infty)$  (B)  $[0, +\infty)$   
 (C)  $[-\frac{9}{4}, +\infty)$  (D)  $[-\frac{9}{4}, 0] \cup (2, +\infty)$

## 二、填空题

11. 如图, 四边形  $ABCD$  是圆  $O$  的内接四边形, 延长  $AB$  和  $DC$  相交于点  $P$ . 若  $PB = 1$ ,  $PD = 3$ , 则  $\frac{BC}{AD}$  的值为\_\_\_\_\_.



12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为\_\_\_\_\_.



13. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线方程是  $y = \sqrt{3}x$ , 它的一个焦点与抛物线  $y^2 = 16x$  的焦点相同. 则双曲线的方程为\_\_\_\_\_.

14. 已知圆  $C$  的圆心是直线  $x - y + 1 = 0$  与  $x$  轴的交点, 且圆  $C$  与直线  $x + y + 3 = 0$  相切, 则圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.

15. 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 公比  $q = \sqrt{2}$ ,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 记  $T_n = \frac{17S_n - S_{2n}}{a_{n+1}}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . 设  $T_{n_0}$  为数列  $\{T_n\}$  的最大项, 则  $n_0 =$ \_\_\_\_\_.

16. 设函数  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ , 对任意  $x \in [1, +\infty)$ ,  $f(mx) + mf(x) < 0$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 在  $\triangle ABC$  中,  $\frac{AC}{AB} = \frac{\cos B}{\cos C}$ .  
 (1) 证明:  $B = C$ ;  
 (2) 若  $\cos A = -\frac{1}{3}$ , 求  $\sin\left(4B + \frac{\pi}{3}\right)$  的值.

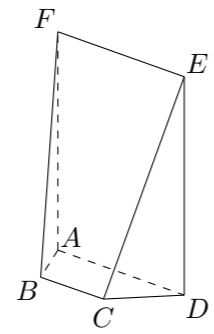
18. 有编号为  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  的 10 个零件, 测量其直径 (单位: cm), 得到下面数据:

编号	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$
直径	1.51	1.49	1.49	1.51	1.49	1.51	1.47	1.46	1.53	1.47

其中直径在区间  $[1.48, 1.52]$  内的零件为一等品.

- (1) 从上述 10 个零件中, 随机抽取一个, 求这个零件为一等品的概率;  
 (2) 从一等品零件中, 随机抽取 2 个.  
 ① 用零件的编号列出所有可能的抽取结果;  
 ② 求这 2 个零件直径相等的概率.

19. 如图, 在五面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ADEF$  是正方形,  $FA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $BC \parallel AD$ ,  $CD = 1$ ,  $AD = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle BAD = \angle CDA = 45^\circ$ .  
 (1) 求异面直线  $CE$  与  $AF$  所成角的余弦值;  
 (2) 证明  $CD \perp$  平面  $ABF$ ;  
 (3) 求二面角  $B-EF-A$  的正切值.



20. 已知函数  $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 其中  $a > 0$ .  
 (1) 若  $a = 1$ , 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程;  
 (2) 若在区间  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  上,  $f(x) > 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

21. 已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.  
 (1) 求椭圆的方程;  
 (2) 设直线  $l$  与椭圆相交于不同的两点  $A, B$ , 已知点  $A$  的坐标为  $(-a, 0)$ .  
 ① 若  $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ , 求直线  $l$  的倾斜角;  
 ② 若点  $Q(0, y_0)$  在线段  $AB$  的垂直平分线上, 且  $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$ . 求  $y_0$  的值.

22. 在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 0$ , 且对任意  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$  成等差数列, 其公差为  $2k$ .  
 (1) 证明  $a_4, a_5, a_6$  成等比数列;  
 (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (3) 记  $T_n = \frac{2^2}{a_2} + \frac{3^2}{a_3} + \dots + \frac{n^2}{a_n}$ , 证明  $\frac{3}{2} < 2n - T_n \leq 2$  ( $n \geq 2$ ).