2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,4,6\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$ （ ）

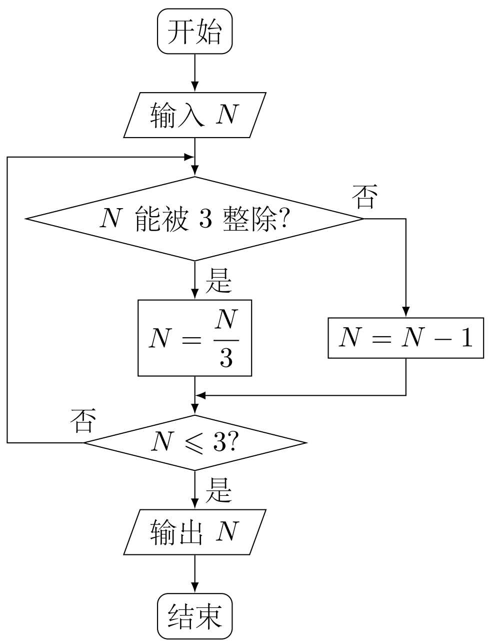
(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2,4\}$

(C) $\{1,2,4,5\}$　(D) $\{x\in\mathbf{R}\,|\,-1\leqslant x\leqslant 5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y\geqslant 0\\ x+2y-2\geqslant 0\\ x\leqslant 0\\ y\leqslant 3\end{cases}$, 则目标函数 $z=x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) 1　(C) $\dfrac{3}{2}$　(D) 3

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 24, 则输出 N 的值为 （ ）



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

4. 设 $\theta\in\mathbf{R}$, 则“$\left|\theta-\dfrac{\pi}{12}\right|<\dfrac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左焦点为 F, 离心率为 $\sqrt{2}$. 若经过 F 和 $P(0,4)$ 两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $g(x)=xf(x)$. 若 $a=g(-\log_2 5.1)$, $b=g(2^{0.8})$, $c=g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $c<b<a$　(C) $b<a<c$　(D) $b<c<a$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则 （ ）

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}$, $\varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,\ x\leqslant 1\\ x+\dfrac{2}{x},\ x>1\end{cases}$, 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{47}{16},2\right]$　(B) $\left[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}\right]$　(C) $[-2\sqrt{3},2]$　(D) $\left[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}\right]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为______.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为______.

11. 在极坐标系中, 直线 $4\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1=0$ 与圆 $\rho=2\sin\theta$ 的公共点的个数为______.

12. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为______.

14. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有______个. (用数字作答)

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a>b$, $a=5$, $c=6$, $\sin B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求 b 和 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

16. 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{4}$.

(1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

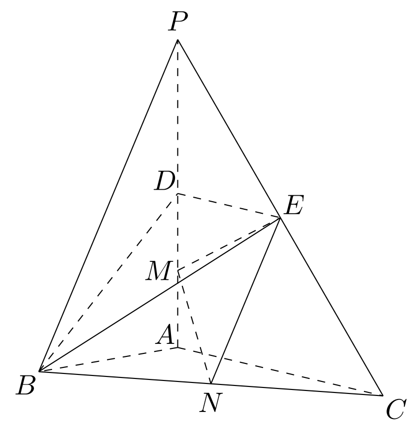
(2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

17. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $\angle BAC=90^\circ$. 点 D, E, N 分别为棱 PA, PC, BC 的中点, M 是线段 AD 的中点, $PA=AC=4$, $AB=2$.

(1) 求证: $MN\,/\!/$ 平面 BDE;

(2) 求二面角 $C-EM-N$ 的正弦值;

(3) 已知点 H 在棱 PA 上, 且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{21}$, 求线段 AH 的长.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$ 的前 n 项和 $(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 F, 右顶点为 A, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$. 已知 A 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, F 到抛物线的准线 l 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.
(1) 求椭圆的方程和抛物线的方程;
(2) 设 l 上两点 P, Q 关于 x 轴对称, 直线 AP 与椭圆相交于点 B (B 异于 A), 直线 BQ 与 x 轴相交于点 D. 若 $\triangle APD$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 求直线 AP 的方程.

20. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
(1) 求 $g(x)$ 的单调区间;
(2) 设 $m \in [1,x_0) \cup (x_0,2]$, 函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$, 求证: $h(m)h(x_0)<0$;
(3) 求证: 存在大于 0 的常数 A, 使得对于任意的正整数 p, q, 且 $\dfrac{p}{q} \in [1,x_0) \cup (x_0,2]$, 满足 $\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right| \geqslant \dfrac{1}{Aq^4}$.