2004 年普通高等学校春季招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 在函数 $y=\sin 2x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan\dfrac{x}{2}$ 中, 最小正周期为 π 的函数是 ( )

(A) $y=\sin 2x$ (B) $y=\sin x$ (C) $y=\cos x$ (D) $y=\tan\dfrac{x}{2}$

2. 当 $\dfrac{2}{3}<m<1$ 时, 复数 $z=(3m-2)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面上对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程是 ( )

(A) $y=\pm\dfrac{3}{2}x$ (B) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{9}{4}x$ (D) $y=\pm\dfrac{4}{9}x$

4. 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 ( )

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

5. 在极坐标系中, 圆心在 $(\sqrt{2},\pi)$ 且过极点的圆的方程为 ( )

(A) $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ (B) $\rho=-2\sqrt{2}\cos\theta$

(C) $\rho=2\sqrt{2}\sin\theta$ (D) $\rho=-2\sqrt{2}\sin\theta$

6. 已知 $\sin(\theta+\pi)<0$, $\cos(\theta-\pi)>0$, 则下列不等关系中必定成立的是( )

(A) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\cot\dfrac{\theta}{2}$ (B) $\tan\dfrac{\theta}{2}>\cot\dfrac{\theta}{2}$

(C) $\sin\dfrac{\theta}{2}<\cos\dfrac{\theta}{2}$ (D) $\sin\dfrac{\theta}{2}>\cos\dfrac{\theta}{2}$

7. 已知三个不等式: $ab>0$, $bc-ad>0$, $\dfrac{c}{a}-\dfrac{d}{b}>0$ (其中 a, b, c, d 均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是( )

(A) $\sqrt{77}$ cm (B) $7\sqrt{2}$ cm (C) $5\sqrt{5}$ cm (D) $10\sqrt{2}$ cm

9. 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 ( )

(A) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{94}^2$ (B) $\mathrm{C}_6^1\mathrm{C}_{99}^2$ (C) $\mathrm{C}_{100}^3-\mathrm{C}_{94}^3$ (D) $\mathrm{A}_{100}^3-\mathrm{A}_{94}^3$

10. 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为 M, 如果把 M 当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为 N, 那么 $M:N$ 为 ( )

(A) $\dfrac{40}{41}$ (B) 1 (C) $\dfrac{41}{40}$ (D) 2

二、填空题

11. 若 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\lg(x+1)$ 的反函数, 则 $f^{-1}(x)$ 的值域是______.

12. $\dfrac{\sin(\alpha+30^\circ)-\sin(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}$ 的值为______.

13. 据某校环保小组调查, 某区垃圾量的年增长率为 b, 2003 年产生的垃圾量为 a 吨. 由此预测, 该区下一年的垃圾量为______吨, 2008 年的垃圾量为______吨.

14. 若直线 $mx+ny-3=0$ 与圆 $x^2+y^2=3$ 没有公共点, 则 m, n 满足的关系式为______; 以 (m,n) 为点 P 的坐标, 过点 P 的一条直线与椭圆 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的公共点有______个.

三、解答题

15. 当 $0<a<1$ 时, 解关于 x 的不等式: $a^{\sqrt{2x-1}}<a^{x-2}$.

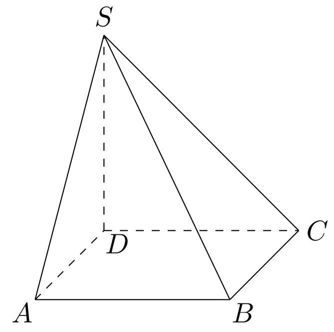
16. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边长, 已知 a, b, c 成等比数列, 且 $a^2-c^2=ac-bc$, 求 $\angle A$ 的大小及 $\dfrac{b\sin B}{c}$ 的值.

17. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, SD 垂直于底面 $ABCD$, $SB=\sqrt{3}$.

(1) 求证: $BC\perp SC$;

(2) 求面 ASD 与面 BSC 所成二面角的大小;

(3) 设棱 SA 的中点为 M, 求异面直线 DM 与 SB 所成的角的大小.

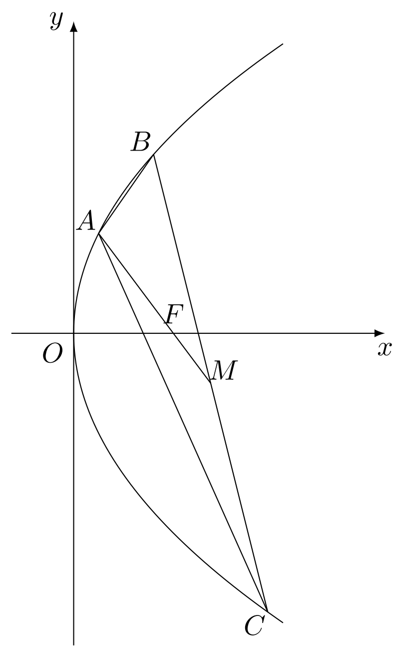


18. 已知点 $A(2,8)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上, $\triangle ABC$ 的重心与此抛物线的焦点 F 重合 (如图).

(1) 写出该抛物线的方程和焦点 F 的坐标;

(2) 求线段 BC 中点 M 的坐标;

(3) 求 BC 所在直线的方程.



19. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元.

(1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?

(2) 设一次订购量为 x 个, 零件的实际出厂单价为 P 元, 写出函数 $P=f(x)$ 的表达式;

(3) 当销售商一次订购 500 个零件时, 该厂获得的利润是多少元? 如果订购 1000 个, 利润又是多少元? (工厂售出一个零件的利润 = 实际出厂单价 − 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

4	7	(　)	(　)	(　)	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$
7	12	(　)	(　)	(　)	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$
(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	$\cdots$	a_{3j}	$\cdots$
(　)	(　)	(　)	(　)	(　)	$\cdots$	a_{4j}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

其中每行、每列都是等差数列, a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数.

(1) 写出 a_{45} 的值;

(2) 写出 a_{ij} 的计算公式;

(3) 证明: 正整数 N 在该等差数列阵中的充要条件是 $2N+1$ 可以分解成两个不是 1 的正整数之积.