

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $N = \{x \mid -2 < x < 1\}$, 则 $M \cap N = (\)$

- (A)
- $(-2, 1)$
- (B)
- $(-1, 1)$
- (C)
- $(1, 3)$
- (D)
- $(-2, 3)$

2. 若 $\tan \alpha > 0$, 则 $()$

- (A)
- $\sin 2\alpha > 0$
- (B)
- $\cos \alpha > 0$
- (C)
- $\sin \alpha > 0$
- (D)
- $\cos 2\alpha > 0$

3. 设 $z = \frac{1}{1+i} + i$, 则 $|z| = (\)$

- (A)
- $\frac{1}{2}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (D) 2

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的离心率为 2, 则 $a = (\)$

- (A) 2 (B)
- $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (D) 1

5. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论正确的是 $()$

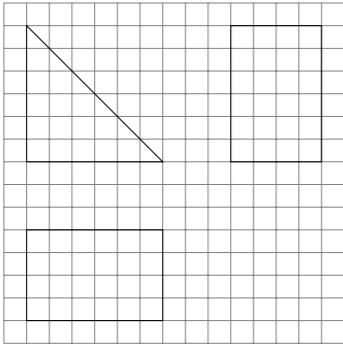
- (A)
- $f(x)|g(x)|$
- 是奇函数 (B)
- $|f(x)|g(x)$
- 是奇函数
-
- (C)
- $f(x)g(x)$
- 是偶函数 (D)
- $|f(x)g(x)|$
- 是奇函数

6. 设 D , E , F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC , CA , AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = (\)$

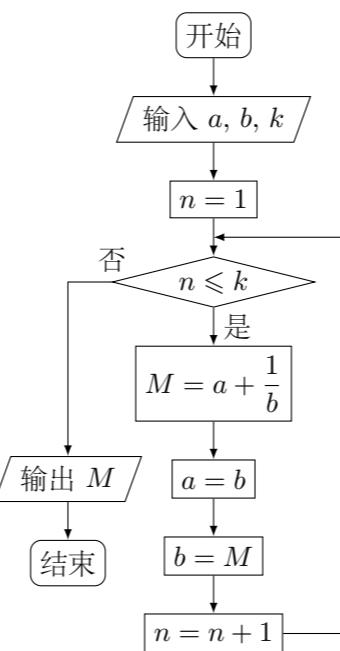
- (A)
- \overrightarrow{BC}
- (B)
- $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- (C)
- \overrightarrow{AD}
- (D)
- $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

7. 在函数① $y = \cos|2x|$, ② $y = |\cos x|$, ③ $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, ④ $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为 $()$

- (A) ②④ (B) ①③④ (C) ①②③ (D) ①③

8. 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是 $()$ 

- (A) 三棱锥 (B) 三棱柱 (C) 四棱锥 (D) 四棱柱

9. 执行如图的程序框图, 若输入的 a , b , k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M = (\)$ 4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 的离心率为 2, 则 $a = (\)$

- (A)
- $\frac{20}{3}$
- (B)
- $\frac{7}{2}$
- (C)
- $\frac{16}{5}$
- (D)
- $\frac{15}{8}$

10. 已知抛物线 $C : y^2 = x$ 的焦点为 F , $A(x_0, y_0)$ 是 C 上一点, $|AF| = \frac{5}{4}x_0$, 则 $x_0 = (\)$

- (A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 8

11. 设 x , y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq a \\ x-y \leq -1 \end{cases}$ 且 $z = x+ay$ 的最小值为 7, 则 $a = (\)$

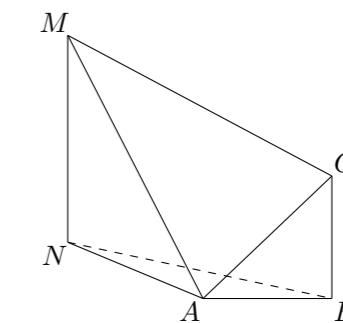
- (A) -5 (B) 3 (C) -5 或 3 (D) 5 或 -3

12. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0 , 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围为 $()$

- (A)
- $(-\infty, -2)$
- (B)
- $(1, +\infty)$
- (C)
- $(2, +\infty)$
- (D)
- $(-\infty, -1)$

二、填空题

13. 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为_____.

14. 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A , B , C 三个城市时, 甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市; 乙说: 我没去过 C 城市; 丙说: 我们三人去过同一个城市. 由此可判断乙去过的城市为_____.15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则使得 $f(x) \leq 2$ 成立的 x 的取值范围是_____.16. 如图, 为测量山高 MN , 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60^\circ$, C 点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA = 60^\circ$. 已知山高 $BC = 100$ m, 则山高 $MN = \underline{\hspace{2cm}}$ m.

三、解答题

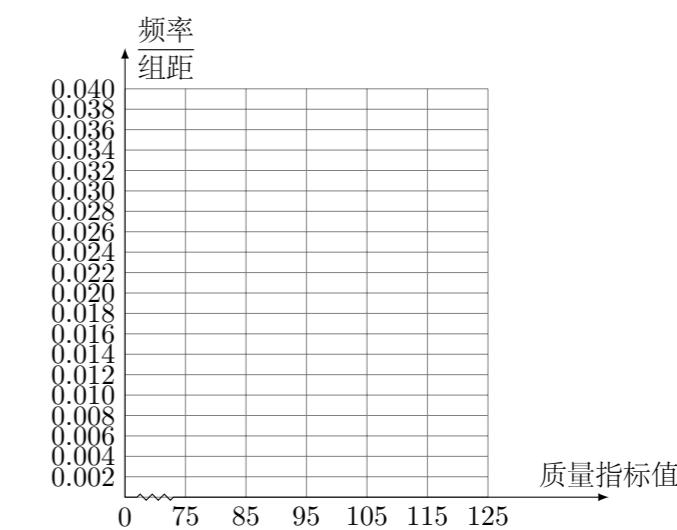
17. 已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列, a_2 , a_4 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

- (1) 求
- $\{a_n\}$
- 的通项公式;
-
- (2) 求数列
- $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$
- 的前
- n
- 项和.

18. 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得如下频数分布表:

质量指标值分组	[75, 85)	[85, 95)	[95, 105)	[105, 115)	[115, 125]
频数	6	26	38	22	8

- (1) 作出这些数据的频率分布直方图;



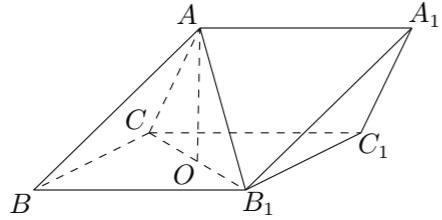
- (2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

- (3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定?

19. 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, B_1C 的中点为 O , 且 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C .

(1) 证明: $B_1C \perp AB$;

(2) 若 $AC \perp AB_1$, $\angle CBB_1 = 60^\circ$, $BC = 1$, 求三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的高.



20. 已知点 $P(2, 2)$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 8y = 0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 M , O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

(2) 当 $|OP| = |OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

21. 设函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1-a}{2}x^2 - bx (a \neq 1)$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(1) 求 b ;

(2) 若存在 $x_0 \geq 1$ 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

23. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases} (t \text{ 为参数})$.

(1) 写出曲线 C 的参数方程, 直线 l 的普通方程;

(2) 过曲线 C 上任一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线, 交 l 于点 A , 求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

22. 如图, 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, AB 的延长线与 DC 的延长线交于点 E , 且 $CB = CE$.

(1) 证明: $\angle D = \angle E$;

(2) 设 AD 不是 $\odot O$ 的直径, AD 的中点为 M , 且 $MB = MC$, 证明: $\triangle ADE$ 为等边三角形.

24. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$.

(1) 求 $a^3 + b^3$ 的最小值;

(2) 是否存在 a, b , 使得 $2a + 3b = 6$? 并说明理由.

