

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = (\)$
- (A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)

2. 若复数 z 满足 $\frac{\bar{z}}{1-i} = i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z = (\)$
- (A) $1-i$ (B) $1+i$ (C) $-1-i$ (D) $-1+i$

3. 要得到函数 $y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需要将函数 $y = \sin 4x$ 的图象
(A) 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位
(C) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 (D) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

4. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a , $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = (\)$
- (A) $-\frac{3}{2}a^2$ (B) $-\frac{3}{4}a^2$ (C) $\frac{3}{4}a^2$ (D) $\frac{3}{2}a^2$

5. 不等式 $|x-1| - |x-5| < 2$ 的解集是
(A) $(-\infty, 4)$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) $(1, 4)$ (D) $(1, 5)$

6. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \geqslant 0 \\ x+y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$, 若 $z = ax+y$ 的最大值为 4, 则
 $a = (\)$
- (A) 3 (B) 2 (C) -2 (D) -3

7. 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD = 2AB = 2$. 将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为
(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{3}$ (D) 2π

8. 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布 $N(0, 3^2)$, 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 (3, 6) 内的概率为
(附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) = 68.26\%$, $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = 95.44\%$)
(A) 4.56% (B) 13.59% (C) 27.18% (D) 31.74%

9. 一条光线从点 $(-2, -3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为
(A) $-\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{5}{4}$ 或 $-\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{3}{4}$

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < 1 \\ 2^x, & x \geqslant 1 \end{cases}$, 则满足 $f(f(a)) = 2^{f(a)}$ 的 a 取值范围
是

- (A) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (B) $[0, 1]$ (C) $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ (D) $[1, +\infty)$

二、填空题

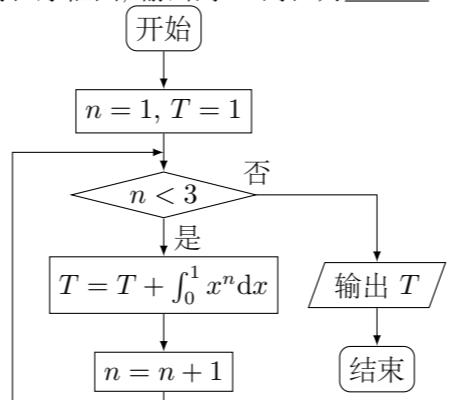
11. 观察下列各式:

$$\begin{aligned} C_1^0 &= 4^0; \\ C_3^0 + C_3^1 &= 4^1; \\ C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 &= 4^2; \\ C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 &= 4^3; \\ \dots\dots \end{aligned}$$

照此规律, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 若“ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan x \leqslant m$ ”是真命题, 则实数 m 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 执行如图所示的程序框图, 输出的 T 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. 已知函数 $f(x) = a^x + b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) 的定义域和值域都是 $[-1, 0]$, 则 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的渐近线与抛物线 $C_2: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 交于 O, A, B . 若 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点, 则 C_1 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

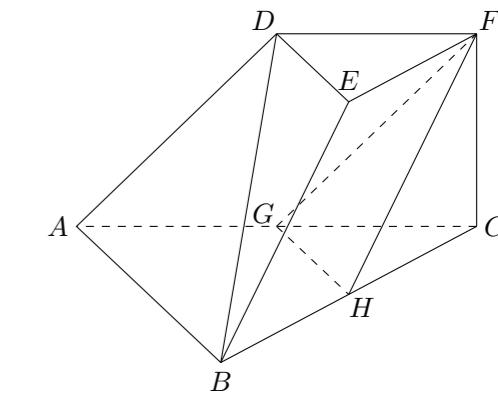
16. 设 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $f\left(\frac{A}{2}\right) = 0$, $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

17. 如图, 在三棱台 $DEF-ABC$ 中, $AB = 2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点.

- (1) 求证: $BD \parallel$ 平面 FGH ;

- (2) 若 $CF \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $CF = DE$, $\angle BAC = 45^\circ$, 求平面 FGH 与平面 $ACFD$ 所成的角 (锐角) 的大小.



18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $2S_n = 3^n + 3$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n b_n = \log_3 a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 若 n 是一个三位正整数, 且 n 的个位数字大于十位数字, 十位数字大于百位数字, 则称 n 为“三位递增数”(如 137, 359, 567 等). 在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次. 得分规则如下: 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除, 参加者得 0 分; 若能被 5 整除, 但不能被 10 整除, 得 -1 分; 若能被 10 整除, 得 1 分.
- (1) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;
- (2) 若甲参加活动, 求甲得分 X 的分布列和数学期望 EX .
20. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别是 F_1, F_2 . 以 F_1 为圆心以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y = kx + m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q .
- ① 求 $\frac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;
- ② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.
21. 设函数 $f(x) = \ln(x+1) + a(x^2 - x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数, 并说明理由;
- (2) 若 $\forall x > 0, f(x) \geq 0$ 成立, 求 a 的取值范围.