

理科数学

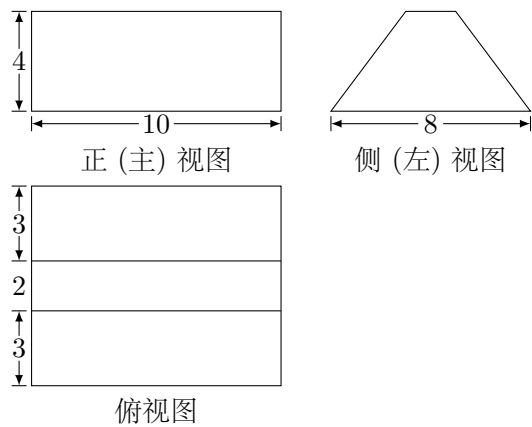
一、选择题

- 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()
(A) $\{1, 3, 4\}$ (B) $\{3, 4\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{4\}$
- 命题“对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 \geq 0$ ”的否定为 ()
(A) 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 < 0$ (B) 不存在 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $x^2 < 0$
(C) 存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 \geq 0$ (D) 存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 < 0$
- $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ ($-6 \leq a \leq 3$) 的最大值为 ()
(A) 9 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 3 (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 以下茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩 (单位: 分).

甲组		乙组
9	0	9
x 2	1	5 y 8
7 4	2	4

已知甲组数据的中位数为 15, 乙组数据的平均数为 16.8, 则 x, y 的值分别为

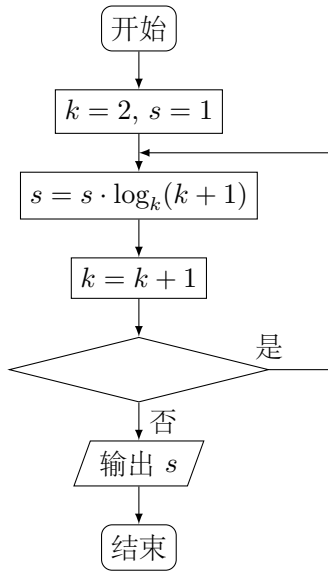
- (A) 2, 5 (B) 5, 5 (C) 5, 8 (D) 8, 8
5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- (A) $\frac{560}{3}$ (B) $\frac{580}{3}$ (C) 200 (D) 240
6. 若 $a < b < c$, 则函数 $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间 ()
(A) (a, b) 和 (b, c) 内 (B) $(-\infty, a)$ 和 (a, b) 内
(C) (b, c) 和 $(c, +\infty)$ 内 (D) $(-\infty, a)$ 和 $(c, +\infty)$ 内
7. 已知圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$, M, N 分别是圆 C_1, C_2 上的动点, P 为 x 轴上的动点, 则 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 ()

- (A) $5\sqrt{2} - 4$ (B) $\sqrt{17} - 1$ (C) $6 - 2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{17}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输出 $s = 3$, 那么判断框内应填入的条件是 ()



- (A) $k \leq 6$ (B) $k \leq 7$ (C) $k \leq 8$ (D) $k \leq 9$

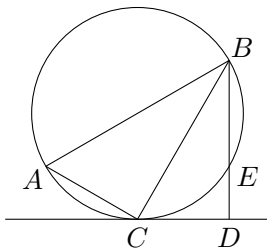
9. $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$ ()

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2} - 1$

10. 在平面上, $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{AB_2}$, $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$. 若 $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是 ()
(A) $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ (B) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ (C) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}\right]$ (D) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}\right]$

二、填空题

11. 已知复数 $z = \frac{5i}{1+2i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
12. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, 公差 $d \neq 0$, S_n 为其前 n 项和, 若 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $S_8 =$ _____.
13. 从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组, 则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是_____. (用数字作答)
14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 20$, 过 C 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 CD , $BD \perp CD$, BD 与外接圆交于点 E , 则 DE 的长为_____.



15. 在直角坐标系 xOy 中, 以原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若极坐标方程为 $\rho \cos \theta = 4$ 的直线与曲线 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ (t 为参数) 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

16. 若关于实数 x 的不等式 $|x-5| + |x+3| < a$ 无解, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

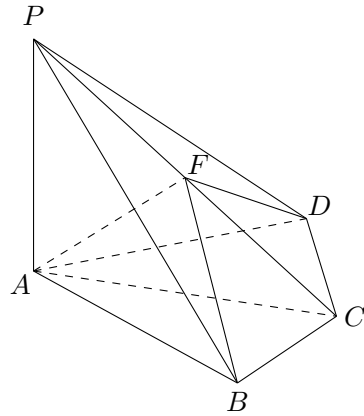
17. 设 $f(x) = a(x-5)^2 + 6 \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, 6)$.
(1) 确定 a 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.
18. 某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定: 在一次摸奖中, 摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球, 再从装有 1 个蓝球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球, 根据摸出 4 个球中红球与蓝球的个数, 设一、二、三等奖如下:

奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

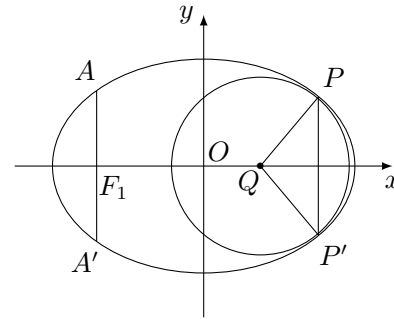
其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级.

- (1) 求一次摸球恰好摸到 1 个红球的概率;
(2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $BC = CD = 2$, $AC = 4$, $\angle ACB = \angle ACD = \frac{\pi}{3}$, F 为 PC 的中点, $AF \perp PB$.
- (1) 求 PA 的长;
 - (2) 求二面角 $B-AF-D$ 的正弦值.



21. 如图, 椭圆的中心为原点 O , 长轴在 x 轴上, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 过左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于 A, A' 两点, $|AA'| = 4$.
- (1) 求该椭圆的标准方程;
 - (2) 取垂直于 x 轴的直线与椭圆相交于不同的两点 P, P' , 过 P, P' 作圆心为 Q 的圆, 使椭圆上的其余点均在圆 Q 外. 若 $PQ \perp P'Q$, 求圆 Q 的标准方程.



22. 对正整数 n , 记 $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $P_n = \left\{ \frac{m}{\sqrt{k}} \mid m \in I_n, k \in I_n \right\}$.
- (1) 求集合 P_7 中元素的个数;
 - (2) 若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称 A 为“稀疏集”. 求 n 的最大值, 使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2$.
- (1) 求 C ;
 - (2) 设 $\cos A \cos B = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, $\frac{\cos(\alpha + A) \cos(\alpha + B)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, 求 $\tan \alpha$ 的值.