2019 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

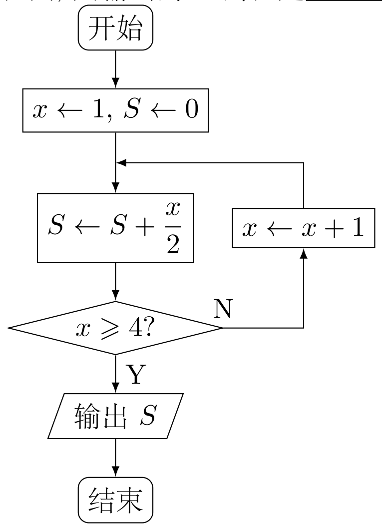
数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$, $B=\{x\mid x>0, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 已知复数 $(a+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 的实部为 0, 其中 i 为虚数单位, 则实数 a 的值是______.

3. 如图是一个算法流程图, 则输出的 S 的值是______.



4. 函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是______.

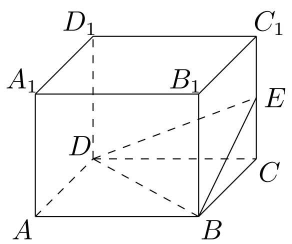
5. 已知一组数据 6, 7, 8, 8, 9, 10, 则该组数据的方差是______.

6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务, 则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是______.

7. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(b>0)$ 经过点 $(3,4)$, 则该双曲线的渐近线方程是______.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_2a_5+a_8=0$, $S_9=27$, 则 S_8 的值是______.

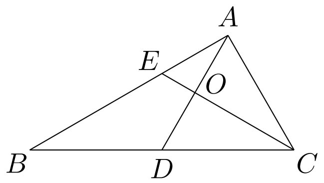
9. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积是 120, E 为 CC_1 的中点, 则三棱锥 $E-BCD$ 的体积是______.



10. 在平面直角坐标系 xOy 中, P 是曲线 $y=x+\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$ 上的一个动点, 则点 P 到直线 $x+y=0$ 的距离的最小值是______.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-\mathrm{e},-1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是______.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE=2EA$, AD 与 CE 交于点 O. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$, 则 $\dfrac{AB}{AC}$ 的值是______.



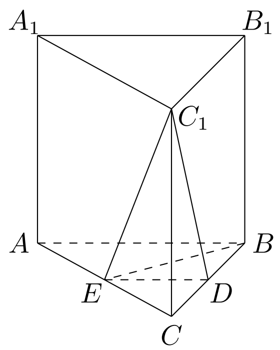
13. 已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值是______.

14. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x\in(0,2]$ 时, $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$, $g(x)=\begin{cases}k(x+2),\ 0<x\leqslant 1\\ -\dfrac{1}{2},\ 1<x\leqslant 2\end{cases}$, 其中 $k>0$. 若在区间 $(0,9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是______.

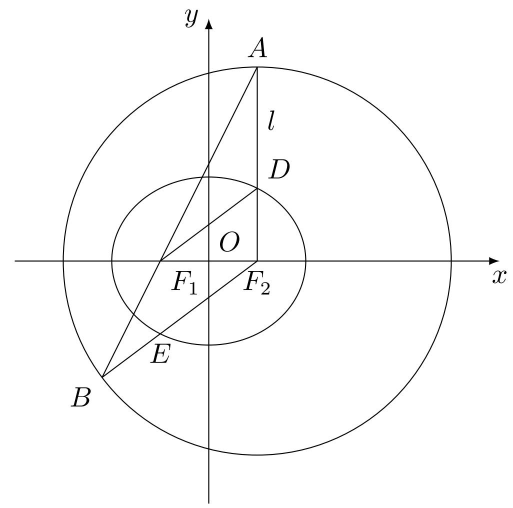
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c.
(1) 若 $a=3c$, $b=\sqrt{2}$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$, 求 c 的值;
(2) 若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$, 求 $\sin\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值.

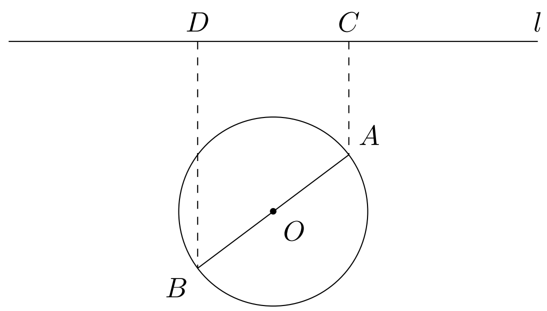
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB=BC$. 求证:
(1) $A_1B_1\,/\!/$ 平面 DEC_1;
(2) $BE\perp C_1E$.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l, 在 x 轴的上方, l 与圆 F_2: $(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A, 与椭圆 C 交于点 D. 连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B, 连接 BF_2 交椭圆 C 于点 E, 连接 DF_1. 已知 $DF_1=\dfrac{5}{2}$.
(1) 求椭圆 C 的标准方程;
(2) 求点 E 的坐标.



18. 如图, 一个湖的边界是圆心为 O 的圆, 湖的一侧有一条直线型公路 l, 湖上有桥 AB (AB 是圆 O 的直径). 规划在公路 l 上选两个点 P, Q, 并修建两段直线型道路 PB, QA. 规划要求: 线段 PB, QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A, B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD (C, D 为垂足), 测得 $AB=10$, $AC=6$, $BD=12$ (单位: 百米).
(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直, 求道路 PB 的长;
(2) 在规划要求下, P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处? 并说明理由;
(3) 在规划要求下, 若道路 PB 和 QA 的长度均为 d (单位: 百米). 求当 d 最小时, P, Q 两点间的距离.



19. 设函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, a, b, $c\in\mathbf{R}$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 若 $a=b=c$, $f(4)=8$, 求 a 的值;

(2) 若 $a\neq b$, $b=c$, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;

(3) 若 $a=0$, $0<b\leqslant 1$, $c=1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M, 求证: $M\leqslant\dfrac{4}{27}$.

20. 定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“$M-$ 数列”.

(1) 已知等比数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足: $a_2a_4=a_5$, $a_3-4a_2+4a_1=0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 满足: $b_1=1$, $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 b_n 的前 n 项和.

① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

② 设 m 为正整数, 若存在“$M-$ 数列”$\{c_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 对任意正整数 k, 当 $k\leqslant m$ 时, 都有 $c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$ 成立, 求 m 的最大值.

21. 三选二.

【A】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1\\2&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^2$;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

【B】在极坐标系中, 已知两点 $A\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=3$.

(1) 求 A, B 两点间的距离;

(2) 求点 B 到直线 l 的距离.

【C】设 $x\in\mathbf{R}$, 解不等式 $|x|+|2x-1|>2$.

22. 设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $n\geqslant 4$, $n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2=2a_2a_4$.

(1) 求 n 的值;

(2) 设 $\left(1+\sqrt{3}\right)^n=a+b\sqrt{3}$, 其中 a, $b\in\mathbf{N}^*$, 求 a^2-3b^2 的值.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n=\{(0,0),(1,0),(2,0),\cdots,(n,0)\}$, $B_n=\{(0,1),(n,1)\}$, $C_n=\{(0,2),(1,2),(2,2),\cdots,(n,2)\}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 令 $M_n=A_n\cup B_n\cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

(1) 当 $n=1$ 时, 求 X 的概率分布;

(2) 对给定的正整数 n $(n\geqslant 3)$, 求概率 $P(X\leqslant n)$ (用 n 表示).