2012 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{x\mid x^2\leqslant x\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

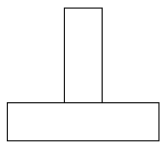
(A) $\{0\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,1\}$ (D) $\{-1,0,1\}$

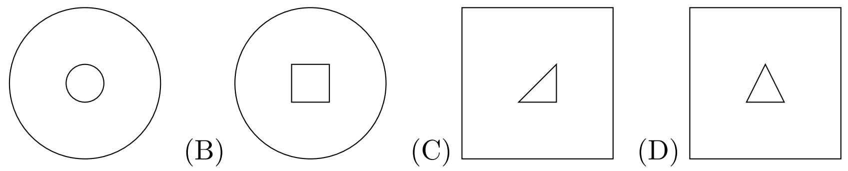
2. 命题“若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha=1$”的逆否命题是 （ ）

(A) 若 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$ (B) 若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\tan\alpha\neq1$

(C) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$ (D) 若 $\tan\alpha\neq1$, 则 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

3. 某几何体的正视图和侧视图均如下图所示, 则该几何体的俯视图不可能是 （ ）





(A) (B) (C) (D)

4. 设某大学的女生体重 y (单位: kg) 与身高 x (单位: cm) 具有线性相关关系, 根据一组样本数据 (x_i,y_i) $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 用最小二乘法建立的回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.71$, 则下列结论中不正确的是 （ ）

(A) y 与 x 具有正的线性相关关系

(B) 回归直线过样本点的中心 $(\overline{x},\overline{y})$

(C) 若该大学某女生身高增加 1 cm, 则其体重约增加 0.85 kg

(D) 若该大学某女生身高为 170 cm, 则可断定其体重必为 58.79 kg

5. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10, 点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{80}-\dfrac{y^2}{20}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{20}-\dfrac{y^2}{80}=1$

6. 函数 $f(x)=\sin x-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值域为 （ ）

(A) $[-2,2]$ (B) $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ (C) $[-1,1]$ (D) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2$, $AC=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, 则 $BC=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{7}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{23}$

8. 已知两条直线 $l_1:y=m$ 和 $l_2:y=\dfrac{8}{2m+1}$ $(m>0)$, l_1 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 A, B, l_2 与函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象从左至右相交于点 C, D. 记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a, b. 当 m 变化时, $\dfrac{b}{a}$ 的最小值为 （ ）

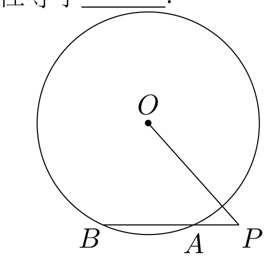
(A) $16\sqrt{2}$ (B) $8\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt[3]{4}$ (D) $4\sqrt[3]{4}$

二、填空题

9. 在直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C_1 : $\begin{cases}x=t+1,\\ y=1-2t\end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 C_2 : $\begin{cases}x=a\sin\theta\\ y=3\cos\theta\end{cases}$ (θ 为参数, $a>0$) 有一个公共点在 x 轴上, 则 $a=$______.

10. 不等式 $|2x+1|-2|x-1|>0$ 的解集为______.

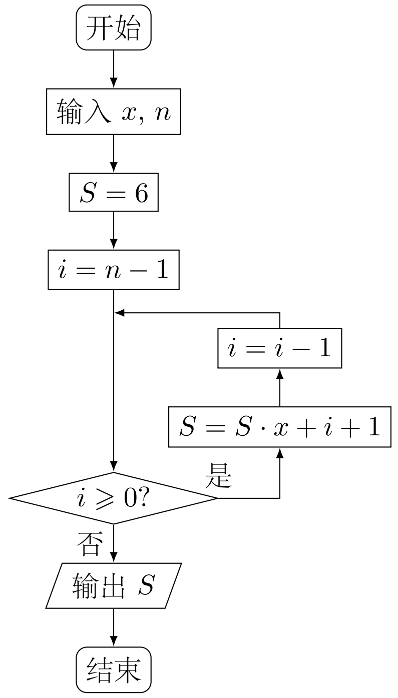
11. 如图, 过点 P 的直线与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点. 若 $PA=1$, $AB=2$, $PO=3$, 则 $\odot O$ 的半径等于______.



12. 已知复数 $z=(3+\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则 $|z|=$______.

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为______. (用数字作答)

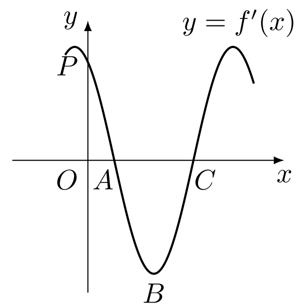
14. 如果执行如图所示的程序框图, 输入 $x=-1$, $n=3$, 则输出的数 $S=$______.



15. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的部分图象如图所示, 其中, P 为图象与 y 轴的交点, A, C 为图象与 x 轴的两个交点, B 为图象的最低点.

(1) 若 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$, 点 P 的坐标为 $\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $\omega=$______;

(2) 若在曲线段 $\widehat{ABC}$ 与 x 轴所围成的区域内随机取一点, 则该点在 $\triangle ABC$ 内的概率为______.



16. 设 $N=2^n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant2)$, 将 N 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 依次放入编号为 1, 2, $\cdots$, N 的 N 个位置, 得到排列 $P_0=x_1x_2\cdots x_N$. 将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出, 并按原顺序依次放入对应的前 $\dfrac{N}{2}$ 和后 $\dfrac{N}{2}$ 个位置, 得到排列 $P_1=x_1x_3\cdots x_{N-1}x_2x_4\cdots x_N$, 将此操作称为 C 变换. 将 P_1 分成两段, 每段 $\dfrac{N}{2}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_2; 当 $2\leqslant i\leqslant n-2$ 时, 将 P_i 分成 2^i 段, 每段 $\dfrac{N}{2^i}$ 个数, 并对每段作 C 变换, 得到 P_{i+1}. 例如, 当 $N=8$ 时, $P_2=x_1x_5x_3x_7x_2x_6x_4x_8$, 此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置.

(1) 当 $N=16$ 时, x_7 位于 P_2 中的第______个位置;

(2) 当 $N=2^n$ $(n\geqslant8)$ 时, x_{173} 位于 P_4 中的第______个位置.

三、解答题

17. 某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息, 安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据, 如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数 (人)	x	30	25	y	10
结算时间 (分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中一次购物量超过 8 件的顾客占 55%.

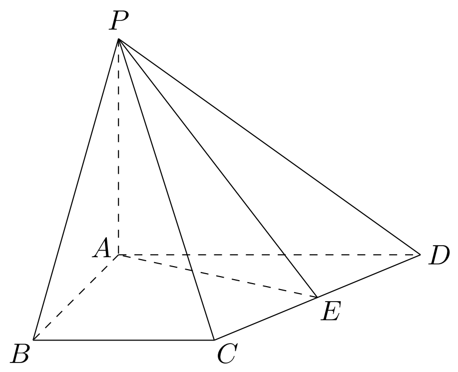
(1) 确定 x, y 的值, 并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望;

(2) 若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算, 且各顾客的结算相互独立, 求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率. (注: 将频率视为概率)

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $BC=3$, $AD=5$, $\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$, E 是 CD 的中点.

(1) 证明: $CD\perp$ 平面 PAE;

(2) 若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角相等, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $A(n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $B(n)=a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}$, $C(n)=a_3+a_4+\cdots+a_{n+2}$, $n=1, 2, \cdots$.

(1) 若 $a_1=1$, $a_2=5$, 且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列的充分必要条件是: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 三个数 $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ 组成公比为 q 的等比数列.

20. 某企业接到生产 3000 台某产品的 A, B, C 三种部件的订单, 每台产品需要这三种部件的数量分别为 2, 2, 1 (单位: 件). 已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件, 或 B 部件 3 件, 或 C 部件 2 件, 该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件, 生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比, 比例系数为 k (k 为正整数).

(1) 设生产 A 部件的人数为 x, 分别写出完成 A, B, C 三种部件生产需要的时间;

(2) 假设这三种部件的生产同时开工, 试确定正整数 k 的值, 使完成订单任务的时间最短, 并给出时间最短时具体的人数分组方案.

21. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 上的点均在圆 $C_2:(x-5)^2+y^2=9$ 外, 且对 C_1 上任意一点 M, M 到直线 $x=-2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值.

(1) 求曲线 C_1 的方程;

(2) 设 $P(x_0,y_0)$ $(y_0\neq\pm3)$ 为圆 C_2 外一点, 过 P 作圆 C_2 的两条切线, 分别与曲线 C_1 相交于点 A, B 和 C, D. 证明: 当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时, 四点 A, B, C, D 的纵坐标之积为定值.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-x$, 其中 $a\neq0$.

(1) 若对一切 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant1$ 恒成立, 求 a 的取值集合;

(2) 在函数 $f(x)$ 的图象上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$, 记直线 AB 的斜率为 k. 问: 是否存在 $x_0\in(x_1,x_2)$, 使 $f'(x_0)>k$ 成立? 若存在, 求 x_0 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.