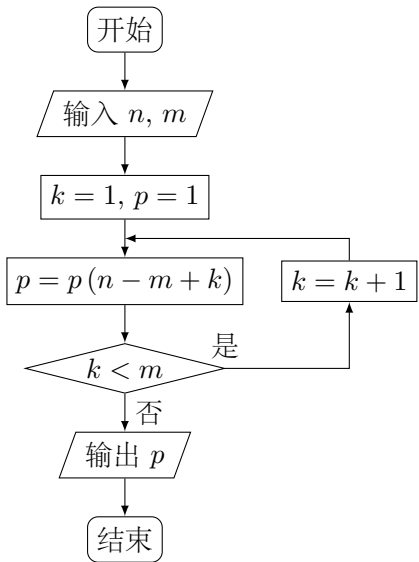


理科数学

一、选择题

- 已知 A, B 均为集合 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的子集, 且 $A \cap B = \{3\}$, $\complement_U B \cap A = \{9\}$, 则 $A =$ ()
(A) $\{1, 3\}$ (B) $\{3, 7, 9\}$ (C) $\{3, 5, 9\}$ (D) $\{3, 9\}$
- 设 a, b 为实数, 若复数 $\frac{1+2i}{a+bi} = 1+i$, 则 ()
(A) $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$ (B) $a = 3, b = 1$ (C) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ (D) $a = 1, b = 3$
- 两个实习生每人加工一个零件, 加工为一等品的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$, 两个零件是否加工为一等品相互独立, 则这两个零件中恰有一个一等品的概率为 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$
- 如果执行如图所示的程序框图, 输入正整数 n, m , 满足 $n \geq m$, 那么输出的 p 等于 ()

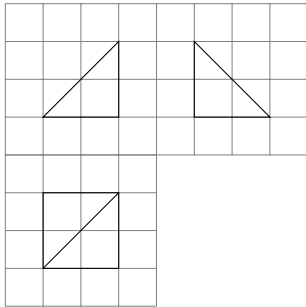


- (A) C_n^{m-1} (B) A_n^{m-1} (C) C_n^m (D) A_n^m
- 设 $\omega > 0$, 函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合, 则 ω 的最小值是 ()
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3
- 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 为其前 n 项和. 已知 $a_2 a_4 = 1$, $S_3 = 7$, 则 $S_5 =$ ()
(A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{31}{4}$ (C) $\frac{33}{4}$ (D) $\frac{17}{2}$
- 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 准线为 l , P 为抛物线上一点, $PA \perp l$, A 为垂足, 如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 那么 $|PF| =$ ()
(A) $4\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $8\sqrt{3}$ (D) 16

- 平面上 O, A, B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于 ()
(A) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (B) $\sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$
(C) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$ (D) $\frac{1}{2} \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$
- 设双曲线的一个焦点为 F , 虚轴的一个端点为 B , 如果直线 FB 与该双曲线的一条渐近线垂直, 那么此双曲线的离心率为 ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- 已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x + 1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 ()
(A) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
- 已知 $a > 0$, 则 x_0 满足关于 x 的方程 $ax = b$ 的充要条件是 ()
(A) $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
(B) $\exists x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
(C) $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \geq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
(D) $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{2}ax^2 - bx \leq \frac{1}{2}ax_0^2 - bx_0$
- 有四根长都为 2 的直铁条, 若再选两根长都为 a 的直铁条, 使这六根铁条端点处相连能够焊接成一个三棱锥形的铁架, 则 a 的取值范围是 ()
(A) $(0, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ (B) $(1, 2\sqrt{2})$
(C) $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ (D) $(0, 2\sqrt{2})$

二、填空题

- $(1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为_____.
- 已知 $-1 < x+y < 4$ 且 $2 < x-y < 3$, 则 $z = 2x-3y$ 的取值范围是_____. (答案用区间表示)
- 如图, 网格纸的小正方形的边长是 1, 在其上用粗线画出了某多面体的三视图, 则这个多面体最长的一条棱的长为_____.



- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 33, a_{n+1} - a_n = 2n$, 则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为_____.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边, 且 $2a \sin A = (2b+c) \sin B + (2c+b) \sin C$.
(1) 求 A 的大小;
(2) 求 $\sin B + \sin C$ 的最大值.
- 为了比较注射 A, B 两种药物后产生的皮肤疱疹的面积, 选 200 只家兔做试验, 将这 200 只家兔随机地分成两组, 每组 100 只, 其中一组注射药物 A , 另一组注射药物 B .
(1) 甲、乙是 200 只家兔中的 2 只, 求甲、乙分在不同组的概率;
(2) 下表 1 和表 2 分别是注射药物 A 和 B 后的试验结果. (疱疹面积单位: mm^2)

表 1: 注射药物 A 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60, 65)	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)
频数	30	40	20	10

表 2: 注射药物 B 后皮肤疱疹面积的频数分布表

疱疹面积	[60, 65)	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80)	[80, 85)
频数	10	25	20	30	15

- 完成下面频率分布直方图, 并比较注射两种药物后疱疹面积的中位数大小;

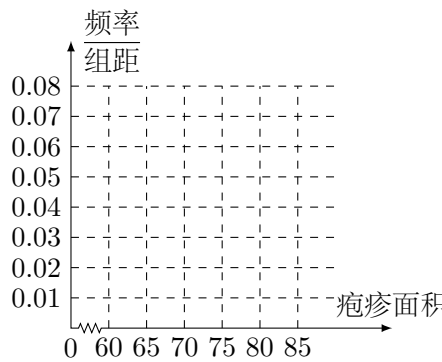


图 1: 注射药物 A

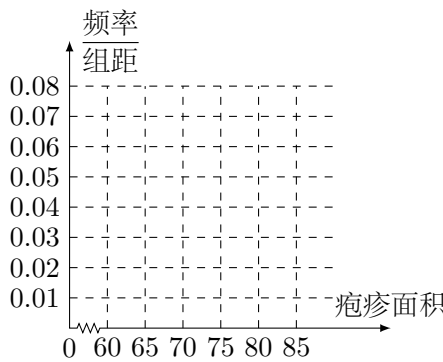


图 2: 注射药物 B

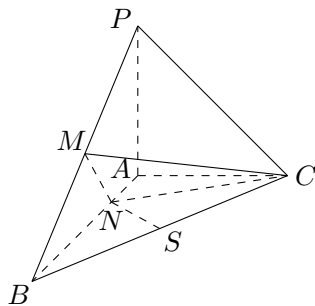
- 完成下面 2×2 列联表, 并回答能否有 99.9% 的把握认为“注射药物 A 后的疱疹面积与注射药物 B 后的疱疹面积有差异”.

	疱疹面积小于 70 mm^2	疱疹面积不小于 70 mm^2	合计
注射药物 A	$a =$	$b =$	
注射药物 B	$c =$	$d =$	
合计			$n =$

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

19. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $PA = AC = \frac{1}{2}AB$, N 为 AB 上一点, $AB = 4AN$, M, S 分别为 PB, BC 的中点.
- (1) 证明: $CM \perp SN$;
- (2) 求 SN 与平面 CMN 所成角的大小.

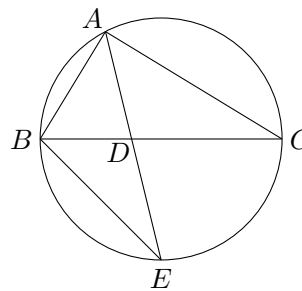


21. 已知函数 $f(x) = (a+1)\ln x + ax^2 + 1$.
- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 设 $a < -1$, 如果对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$, 求 a 的取值范围.

23. 已知 P 为半圆 $C: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数, $0 \leq \theta \leq \pi$) 上的点, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, O 为坐标原点, 点 M 在射线 OP 上, 线段 OM 与 C 的弧 \widehat{AP} 的长度均为 $\frac{\pi}{3}$.
- (1) 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 求点 M 的极坐标;
- (2) 求直线 AM 的参数方程.

20. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 过点 F 的直线与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 直线 l 的倾斜角为 60° , $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$.
- (1) 求椭圆 C 的离心率;
- (2) 如果 $|AB| = \frac{15}{4}$, 求椭圆 C 的方程.

22. 如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 的延长线交它的外接圆于点 E .
- (1) 证明: $\triangle ABE \sim \triangle ADC$;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}AD \cdot AE$, 求 $\angle BAC$ 的大小.



24. 已知 a, b, c 均为正数, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 6\sqrt{3}$, 并确定 a, b, c 为何值时, 等号成立.