2016 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

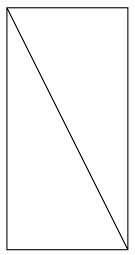
1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{y\mid y=2x-1, x\in A\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{1,3\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{2,3\}$ (D) $\{1,2,3\}$

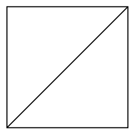
2. 甲、乙两人下棋, 两人下成和棋的概率是 $\dfrac{1}{2}$, 甲获胜的概率是 $\dfrac{1}{3}$, 则甲不输的概率为 ( )

(A) $\dfrac{5}{6}$ (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

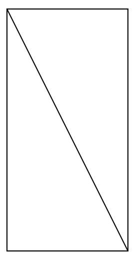
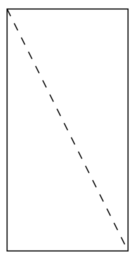
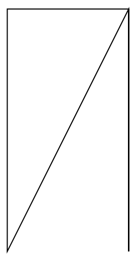
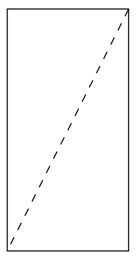
3. 将一个长方形沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥, 得到的几何体的正视图与俯视图如图所示, 则该几何体的侧 (左) 视图为 ( )



正视图



俯视图

(A)  (B)  (C)  (D) 

4. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 且双曲线的一条渐近线与直线 $2x+y=0$ 垂直, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (B) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ (C) $\dfrac{3x^2}{20}-\dfrac{3y^2}{5}=1$ (D) $\dfrac{3x^2}{5}-\dfrac{3y^2}{20}=1$

5. 设 $x>0$, $y\in\mathbf{R}$, 则“$x>y$”是“$x>|y|$”的 ( )

(A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f\left(2^{|a-1|}\right)>f\left(-\sqrt{2}\right)$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

(C) $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F, 使得 $DE=2EF$, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{8}{5}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $\dfrac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}$ $(\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{8},1\right)$

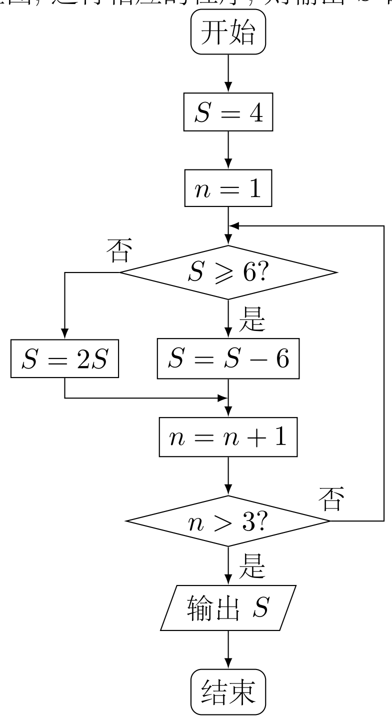
(C) $\left(0,\dfrac{5}{8}\right]$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{8}\right]\cup\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{8}\right]$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\,z=2$, 则 z 的实部为______.

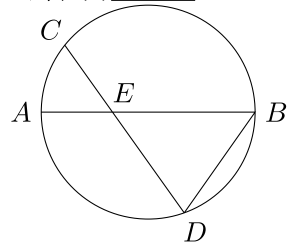
10. 已知函数 $f(x)=(2x+1)\,\mathrm{e}^x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(0)$ 的值为______.

11. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为______.



12. 已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上, 点 $M\left(0,\sqrt{5}\right)$ 在圆 C 上, 且圆心到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, 则圆 C 的方程为______.

13. 如图, AB 是圆的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E, $BE=2AE=2$, $BD=ED$, 则线段 CE 的长为______.



14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)\,x+3a, & x<0\\ \log_a(x+1)+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-\dfrac{x}{3}$ 恰有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin 2B=\sqrt{3}b\sin A$.

(1) 求 B;

(2) 若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, 求 $\sin C$ 的值.

16. 某化肥厂生产甲、乙两种混合肥料, 需要 A, B, C 三种主要原料. 生产 1 车皮甲种肥料和生产 1 车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如下表所示:

原料 / 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有 A 种原料 200 吨, B 种原料 360 吨, C 种原料 300 吨, 在此基础上生产甲乙两种肥料. 已知生产 1 车皮甲种肥料, 产生的利润为 2 万元; 生产 1 车皮乙种肥料, 产生的利润为 3 万元. 分别用 x、y 表示生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1) 用 x, y 列出满足生产条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

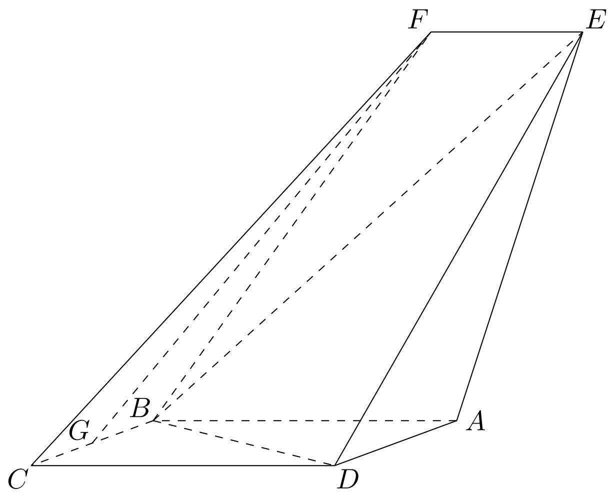
(2) 问分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮, 能够产生最大的利润? 并求出此最大利润.

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$, $EF /\!/ AB$, $AB=2$, $BC=EF=1$, $AE=\sqrt{6}$, $DE=3$, $\angle BAD=60^{\circ}$, G 为 BC 的中点.

(1) 求证: $FG /\!/$ 平面 BED;

(2) 求证: 平面 $BED \perp$ 平面 AED;

(3) 求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$, $S_6=63$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 $\log_2 a_n$ 和 $\log_2 a_{n+1}$ 的等差中项, 求数列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 项和.

19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$ $(a>\sqrt{3})$ 的右焦点为 F, 右顶点为 A. 已知 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M, 与 y 轴交于点 H. 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA=\angle MAO$, 求直线 l 的斜率.

20. 设函数 $f(x)=x^3-ax-b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0, 且 $f(x_1)=f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1+2x_0=0$;

(3) 设 $a>0$, 函数 $g(x)=|f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.