

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $S = \{x|x| < 5\}$, $T = \{x|(x+7)(x-3) < 0\}$, 则 $S \cap T =$ ()
 (A) $\{x|-7 < x < -5\}$ (B) $\{x|3 < x < 5\}$
 (C) $\{x|-5 < x < 3\}$ (D) $\{x|-7 < x < 5\}$

2. 函数 $y = 2^{x+1}$ ($x \in \mathbf{R}$) 的反函数是 ()

- (A) $y = 1 + \log_2 x$ ($x > 0$) (B) $y = \log_2(x-1)$ ($x > 1$)
 (C) $y = -1 + \log_2 x$ ($x > 0$) (D) $y = \log_2(x+1)$ ($x > -1$)

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, 首项 $a_1 = 1$, a_2 是 a_1 和 a_5 的等比中项, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项之和是 ()

- (A) 90 (B) 100 (C) 145 (D) 190

4. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 下面结论错误的是 ()

- (A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 (B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数
 (C) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称
 (D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

5. 设矩形的长为 a , 宽为 b , 其比满足 $b:a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, 这种矩形给人以美感, 称为黄金矩形. 黄金矩形常应用于工艺品设计中. 下面是某工艺品厂随机抽取两个批次的初加工矩形宽度与长度的比值样本:

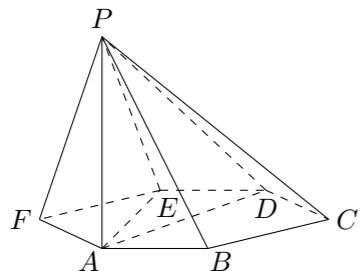
甲批次: 0.598 0.625 0.628 0.595 0.639

乙批次: 0.618 0.613 0.592 0.622 0.620

根据上述两个样本来估计两个批次的总体平均数, 与标准值 0.618 比较, 正确结论是 ()

- (A) 甲批次的总体平均数与标准值更接近
 (B) 乙批次的总体平均数与标准值更接近
 (C) 两个批次总体平均数与标准值接近程度相同
 (D) 两个批次总体平均数与标准值接近程度不能确定

6. 如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 2AB$, 则下列结论正确的是 ()



- (A) $PA \perp AD$

- (B) 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC
 (C) 直线 $BC \parallel$ 平面 PAE
 (D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°

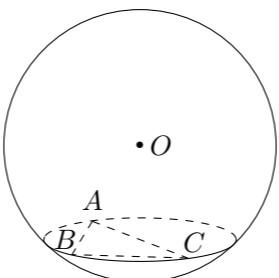
7. 已知 a, b, c, d 为实数, 且 $c > d$. 则“ $a > b$ ”是“ $a - c > b - d$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 其一条渐近线方程为 $y = x$, 点 $P(\sqrt{3}, y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} =$ ()

- (A) -12 (B) -2 (C) 0 (D) 4

9. 如图, 在半径为 3 的球面上有 A, B, C 三点, $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B, C 两点的球面距离是 ()



- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) π (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) 2π

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、 B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、 B 原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一定生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 ()

- (A) 12 万元 (B) 20 万元 (C) 25 万元 (D) 27 万元

11. 2 位男生和 3 位女生共 5 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 ()

- (A) 60 (B) 48 (C) 42 (D) 36

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 \mathbf{R} 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1) = (1+x)f(x)$, 则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值是 ()

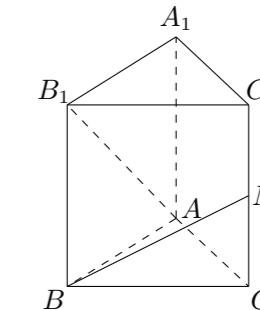
- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{2}$

二、填空题

13. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到准线的距离是_____.

14. $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的常数项是_____. (用数字作答)

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是_____.



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合. 对于映射 $f: V \rightarrow V$, $\mathbf{a} \in V$, 记 \mathbf{a} 的象为 $f(\mathbf{a})$. 若映射 $f: V \rightarrow V$ 满足: 对所有 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda f(\mathbf{a}) + \mu f(\mathbf{b})$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题:

- ① 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, 则 $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$;
 ② 若 \mathbf{e} 是平面 M 上的单位向量, 对 $\mathbf{a} \in V$, 设 $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \mathbf{e}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
 ③ 对 $\mathbf{a} \in V$, 设 $f(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;
 ④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\mathbf{a} \in V$, 则对任意实数 k 均有 $f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$.

其中真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

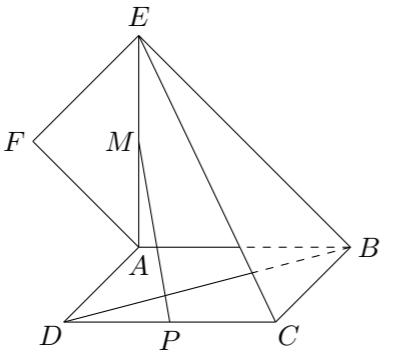
- (1) 求 $A+B$ 的值;
 (2) 若 $a-b = \sqrt{2}-1$, 求 a, b, c 的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\frac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有 $\frac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\frac{2}{3}$ 持银卡.

- (1) 在该团中随机采访 2 名游客, 求恰有 1 人持银卡的概率;
 (2) 在该团中随机采访 2 名游客, 求其中持金卡与持银卡人数相等的概率.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB = AE$, $FA = FE$, $\angle AEF = 45^\circ$.

- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 BCE ;
- (2) 设线段 CD 、 AE 的中点分别为 P 、 M , 求证: $PM \parallel$ 平面 BCE ;
- (3) 求二面角 $F - BD - A$ 的大小.



21. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 , F_2 , 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x = 2$.
- (1) 求椭圆的标准方程;
 - (2) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M , N 两点, 且 $|\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程.

20. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2bx^2 + cx - 2$ 的图象在与 x 轴交点处的切线方程是 $y = 5x - 10$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 设函数 $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}mx$, 若 $g(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $g(x)$ 取得极值时对应的自变量 x 的值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $a_n = 5S_n + 1$ 成立, 记 $b_n = \frac{4+a_n}{1-a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n , 是否存在正整数 k , 使得 $R_n \geq 4k$ 成立? 若存在, 找出一个正整数 k ; 若不存在, 请说明理由;
 - (3) 记 $c_n = b_{2n} - b_{2n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n < \frac{3}{2}$.