2008 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\sin 2+\mathrm{i}\cos 2$ 对应的点位于 (　)

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

2. 定义集合运算: $A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $A*B$ 的所有元素之和为 (　)

(A) 0　(B) 2　(C) 3　(D) 6

3. 若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$, 则函数 $F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$ 的值域是 (　)

(A) $\left[\frac{1}{2},3\right]$　(B) $\left[2,\frac{10}{3}\right]$　(C) $\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　(D) $\left[3,\frac{10}{3}\right]$

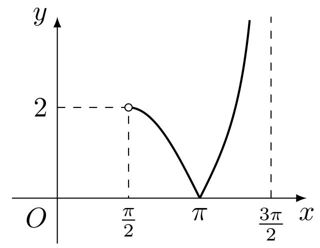
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=$ (　)

(A) $\frac{1}{2}$　(B) 0　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) 不存在

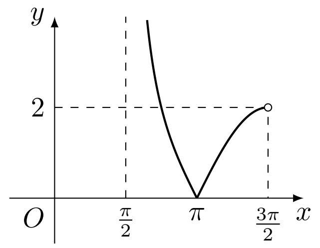
5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n=$ (　)

(A) $2+\ln n$　(B) $2+(n-1)\ln n$(C) $2+n\ln n$　(D) $1+n+\ln n$

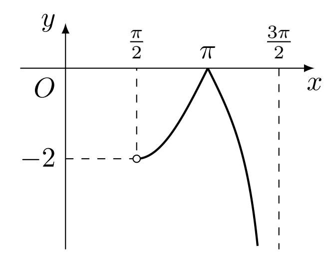
6. 函数 $y=\tan x+\sin x-|\tan x-\sin x|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是 (　)



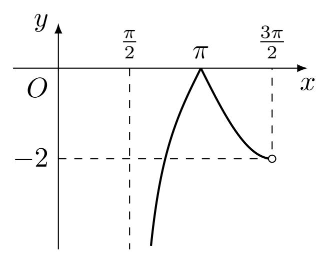
(A)



(B)



(C)



(D)

7. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部, 则椭圆离心率的取值范围是 (　)

(A) $(0,1)$　(B) $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　(C) $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

8. $(1+\sqrt[3]{x})^6\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为 (　)

(A) 1　(B) 46　(C) 4245　(D) 4246

9. 若 $0<a_1<a_2$, $0<b_1<b_2$, 且 $a_1+a_2=b_1+b_2=1$, 则下列代数式中值最大的是 (　)

(A) $a_1b_1+a_2b_2$　(B) $a_1a_2+b_1b_2$　(C) $a_1b_2+a_2b_1$　(D) $\frac{1}{2}$

10. 连结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为 4 的球的两条弦 AB、CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}$、$4\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、CD 的中点, 每条弦的两端都在球面上运动, 有下列四个命题:

① 弦 AB、CD 可能相交于点 M;
② 弦 AB、CD 可能相交于点 N;
③ MN 的最大值为 5;
④ MN 的最小值为 1.
其中真命题的个数为 (　)

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

11. 电子钟一天显示的时间是从 00 : 00 到 23 : 59, 每一时刻都由四个数字组成, 则一天中任一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为 (　)

(A) $\frac{1}{180}$　(B) $\frac{1}{288}$　(C) $\frac{1}{360}$　(D) $\frac{1}{480}$

12. 已知函数 $f(x)=2mx^2-2(4-m)x+1$, $g(x)=mx$, 若对于任一实数 x, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 (　)

(A) $(0,2)$　(B) $(0,8)$　(C) $(2,8)$　(D) $(-\infty,0)$

二、填空题

13. 直角坐标平面内三点 $A(1,2)$, $B(3,-2)$, $C(9,7)$, 若 E、F 为线段 BC 的三等分点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$______.

14. 不等式 $2^{x-\frac{3}{x}+1}\leqslant\frac{1}{2}$ 的解集为______.

15. 过抛物线 $x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 30° 的直线, 与抛物线分别交于 A、B 两点 (点 A 在 y 轴左侧), 则 $\frac{|AF|}{|FB|}=$______.

16. 如图 1, 一个正四棱柱形的密闭容器水平放置, 其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块, 容器内盛有 a 升水时, 水面恰好经过正四棱锥的顶点 P. 如果将容器倒置, 水面也恰好过点 P (图 2). 有下列四个命题:

A. 正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半;
B. 将容器侧面水平放置时, 水面也恰好过点 P;
C. 任意摆放该容器, 当水面静止时, 水面都恰好经过点 P;
D. 若往容器内再注入 a 升水, 则容器恰好能装满.
其中真命题的代号是______. (写出所有真命题的代号)

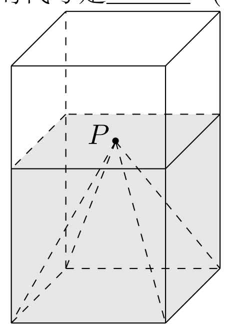


图 1

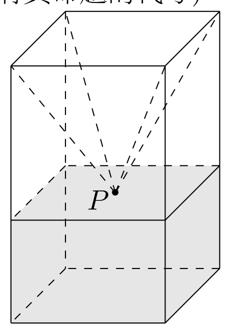


图 2

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, a、b、c 分别为角 A、B、C 所对的边长, $a=2\sqrt{3}$, $\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{C}{2}=4$, $\sin B\sin C=\cos^2\frac{A}{2}$. 求 A、B 及 b、c.

18. 因冰雪灾害, 某柑桔基地果林严重受损, 为此有关专家提出两种拯救果树的方案, 每种方案都需分两年实施. 若实施方案一, 预计第一年可以使柑桔产量恢复到灾前的 1.0 倍、0.9 倍、0.8 倍的概率分别是 0.3、0.3、0.4; 第二年可以使柑桔产量为第一年产量的 1.25 倍、1.0 倍的概率分别是 0.5、0.5. 若实施方案二, 预计第一年可以使柑桔产量达到灾前的 1.2 倍、1.0 倍、0.88 倍的概率分别是 0.2、0.3、0.5; 第二年可以使柑桔产量为第一年产量的 1.2 倍、1.0 倍的概率分别是 0.4、0.6. 实施每种方案第一年与第二年相互独立, 令 ξ_i $(i=1,\ 2)$ 表示方案 i 实施两年后柑桔产量达到灾前产量的倍数.

(1) 写出 ξ_1、ξ_2 的分布列;
(2) 实施哪种方案, 两年后柑桔产量超过灾前产量的概率更大?
(3) 不管哪种方案, 如果实施两年后柑桔产量达不到、恰好达到、超过灾前产量, 预计利润分别为 10 万元、15 万元、20 万元. 问实施哪种方案的平均利润更大?

19. 等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正整数, $a_1=3$, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1=1$, 且 $b_2S_2=64$, $\{b_n\}$ 是公比为 64 的等比数列.

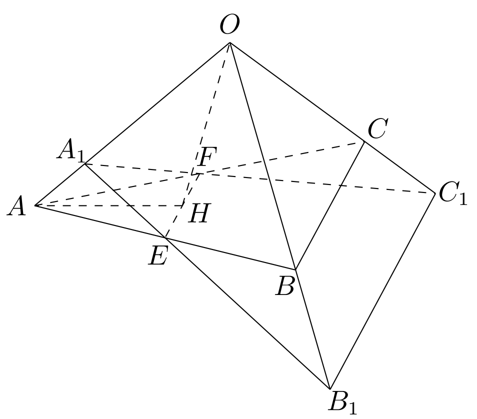
(1) 求 a_n 与 b_n;

(2) 证明: $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{3}{4}$.

20. 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 的三条侧棱 OA、OB、OC 两两垂直, 且长度均为 2. E、F 分别是 AB、AC 的中点, H 是 EF 的中点, 过 EF 的一个平面与侧棱 OA、OB、OC 或其延长线分别相交于 A_1、B_1、C_1, 已知 $OA_1=\frac{3}{2}$.

(1) 证明: $B_1C_1\perp$ 平面 OAH;

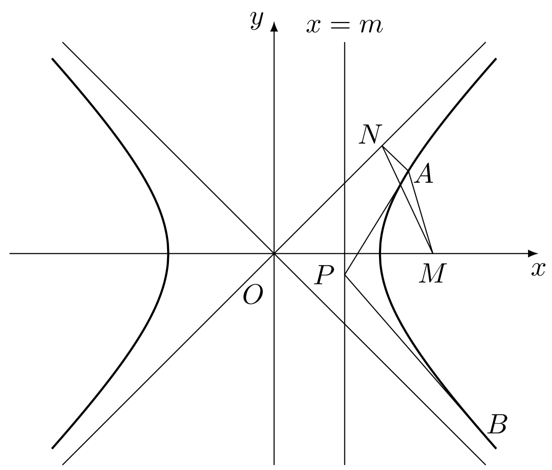
(2) 求二面角 $O-A_1B_1-C_1$ 的大小.



21. 设点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x=m$ $(y\neq\pm m,\ 0<m<1)$ 上, 过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA、PB, 切点为 A、B, 定点 $M\left(\frac{1}{m},0\right)$.

(1) 过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线, 垂足为 N, 试求 $\triangle AMN$ 的重心 G 所在的曲线方程;

(2) 求证: A、M、B 三点共线.



22. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$, $x\in(0,+\infty)$.

(1) 当 $a=8$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意正数 a, 证明: $1<f(x)<2$.