2004 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{x\,||x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 ( )

(A) $\{1,2\}$ (B) $\{3,4\}$

(C) $\{1\}$ (D) $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 函数 $y=2\cos^2 x+1$ ($x\in\mathbf{R}$) 的最小正周期为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会, 若这 4 人中必须既有男生又有女生, 则不同的选法共有 ( )

(A) 140 种 (B) 120 种 (C) 35 种 (D) 34 种

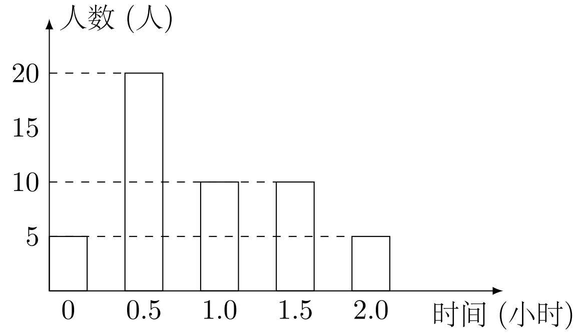
4. 一平面截一球得到直径是 6 cm 的圆面, 球心到这个平面的距离是 4 cm, 则该球的体积是 ( )

(A) $\dfrac{100\pi}{3}$ cm^3 (B) $\dfrac{208\pi}{3}$ cm^3 (C) $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3 (D) $\dfrac{416\sqrt{3}\pi}{3}$ cm^3

5. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条准线与抛物线 $y^2=8x$ 的准线重合, 则双曲线离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

6. 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用下面的条形图表示. 根据条形图可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为 ( )



(A) 0.6 小时 (B) 0.9 小时 (C) 1.0 小时 (D) 1.5 小时

7. $(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是 ( )

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 48

8. 若函数 $y=\log_a(x+b)$ ($a>0$, $a\neq 1$) 的图象过两点 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$, 则 ( )

(A) $a=2$, $b=2$ (B) $a=\sqrt{2}$, $b=2$

(C) $a=2$, $b=1$ (D) $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$

9. 将一颗质地均匀的骰子 (它是一种各面上分别标有点数 1, 2, 3, 4, 5, 6 的正方体玩具) 先后抛掷 3 次, 至少出现的概率是 ( )

(A) $\dfrac{5}{216}$ (B) $\dfrac{25}{216}$ (C) $\dfrac{31}{216}$ (D) $\dfrac{91}{216}$

10. 函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在闭区间 $[-3,0]$ 上的最大值、最小值分别是( )

(A) $1, -1$ (B) $1, -17$ (C) $3, -17$ (D) $9, -19$

11. 设 $k>1$, $f(x)=k(x-1)$ ($x\in\mathbf{R}$). 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点, 它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点, 并且这两个函数的图象交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3, 则 k 等于 ( )

(A) 3 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) $\dfrac{6}{5}$

12. 设函数 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}$ ($x\in\mathbf{R}$), 区间 $M=[a,b]$ ($a<b$), 集合 $N=\{y\,|y=f(x), x\in M\}$, 则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 ( )

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 无数多个

二、填空题

13. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($x\in\mathbf{R}$) 的部分对应值如下表:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是______.

14. 以点 $(1,2)$ 为圆心, 与直线 $4x+3y-35=0$ 相切的圆的方程是______.

15. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$ (对于所有 $n\geqslant 1$), 且 $a_4=54$, 则 a_1 的数值是______.

16. 平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 中, 已知 $\vec{a}=(4,-3)$, $\left|\vec{b}\right|=1$, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$, 则向量 $\vec{b}=$______.

三、解答题

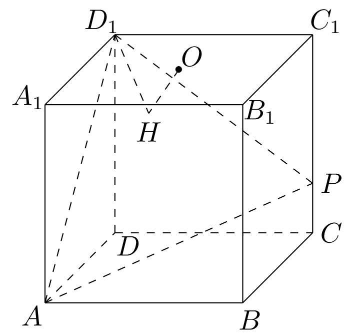
17. 已知 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{5}{2}$, 求 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的值.

18. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心, 点 P 在棱 CC_1 上, 且 $CC_1=4CP$.

(1) 求直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小 (结果用反三角函数值表示);

(2) 设 O 点在平面 D_1AP 上的射影是 H, 求证: $D_1H\perp AP$;

(3) 求点 P 到平面 ABD_1 的距离.



19. 制定投资计划时, 不仅要考虑可能获得的盈利, 而且要考虑可能出现的亏损. 某投资人打算投资甲、乙两个项目. 根据预测, 甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%, 可能的最大亏损分别为 30% 和 10%. 投资人计划投资金额不超过 10 万元, 要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元. 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元, 才能使可能的盈利最大?

20. 设无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.
(1) 若首项 $a_1=\dfrac{3}{2}$, 公差 $d=1$, 求满足 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 的正整数 k;
(2) 求所有的无穷等差数列 $\{a_n\}$, 使得对于一切正整数 k 都有 $S_{k^2}=(S_k)^2$ 成立.

21. 已知椭圆的中心在原点, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 一个焦点是 $F(-m,0)$ (m 是大于 0 的常数).
(1) 求椭圆的方程;
(2) 设 Q 是椭圆上的一点, 且过点 F、Q 的直线 l 与 y 轴交于点 M. 若 $\left|\overrightarrow{MQ}\right|=2\left|\overrightarrow{QF}\right|$, 求直线 l 的斜率.

22. 已知函数 $f(x)$ ($x\in\mathbf{R}$) 满足下列条件: 对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$, 其中 λ 是大于 0 的常数. 设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$.
(1) 证明: $\lambda\leqslant 1$, 并且不存在 $b_0\neq a_0$, 使得 $f(b_0)=0$;
(2) 证明: $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$;
(3) 证明: $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.