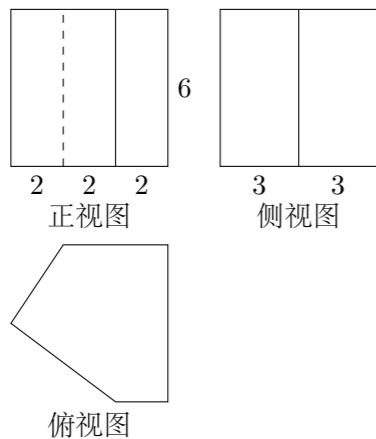


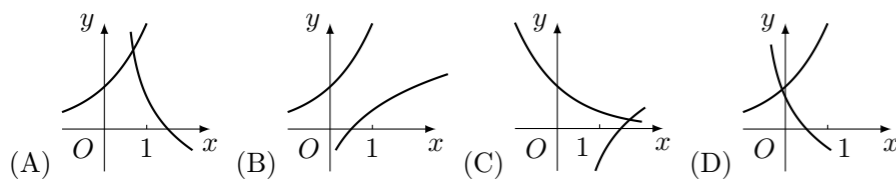
数学试卷

一、选择题

- 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()
(A) $\{-1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 3\}$
- 渐近线方程为 $x \pm y = 0$ 的双曲线的离心率是 ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
- 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 3y + 4 \geq 0 \\ 3x - y - 4 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是 ()
(A) -1 (B) 1 (C) 10 (D) 12
- 祖暅是我国南北朝时代的伟大科学家, 他提出的“幂势既同, 则积不容异”称为祖暅原理, 利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{\text{柱体}} = Sh$, 其中 S 是柱体的底面积, h 是柱体的高. 若某柱体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该柱体的体积 (单位: cm^3) 是 ()



- (A) 158 (B) 162 (C) 182 (D) 324
- 若 $a > 0, b > 0$, 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $ab \leq 4$ ”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}, y = \log_a \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 ()



- 设 $0 < a < 1$, 则随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0, 1)$ 内增大时 ()

- (A) $D(X)$ 增大 (B) $D(X)$ 减小
(C) $D(X)$ 先增大后减小 (D) $D(X)$ 先减小后增大
- 设三棱锥 $V - ABC$ 的底面是正三角形, 侧棱长均相等, P 是棱 VA 上的点 (不含端点), 记直线 PB 与直线 AC 所成角为 α , 直线 PB 与平面 ABC 所成角为 β , 二面角 $P - AC - B$ 的平面角为 γ , 则 ()
(A) $\beta < \gamma, \alpha < \gamma$ (B) $\beta < \alpha, \beta < \gamma$
(C) $\beta < \alpha, \gamma < \alpha$ (D) $\alpha < \beta, \gamma < \beta$
- 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰有 3 个零点, 则 ()
(A) $a < -1, b < 0$ (B) $a < -1, b > 0$
(C) $a > -1, b < 0$ (D) $a > -1, b > 0$
- 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a_n^2 + b, n \in \mathbf{N}^*$, 则 ()
(A) 当 $b = \frac{1}{2}$ 时, $a_{10} > 10$ (B) 当 $b = \frac{1}{4}$ 时, $a_{10} > 10$
(C) 当 $b = -2$ 时, $a_{10} > 10$ (D) 当 $b = -4$ 时, $a_{10} > 10$

二、填空题

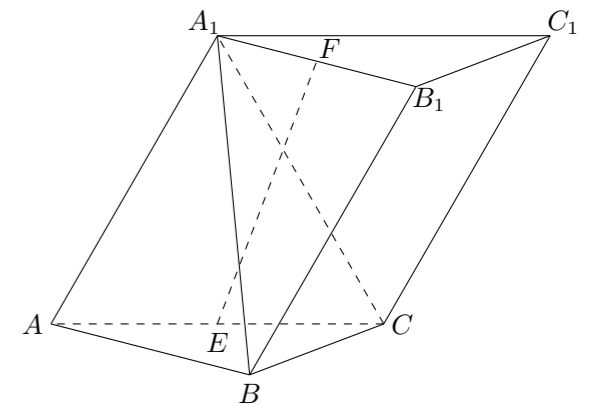
- 复数 $z = \frac{1}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ _____.
- 已知圆 C 的圆心坐标是 $(0, m)$, 半径长是 r . 若直线 $2x - y + 3 = 0$ 与圆相切于点 $A(-2, -1)$, 则 $m =$ _____, $r =$ _____.
- 在二项式 $(\sqrt{2} + x)^9$ 的展开式中, 常数项是_____, 系数为有理数的项的个数是_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, AB = 4, BC = 3$, 点 D 在线段 AC 上, 若 $\angle BDC = 45^\circ$, 则 $BD =$ _____, $\cos \angle ABD =$ _____.
- 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左焦点为 F , 点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方, 若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心, $|OF|$ 为半径的圆上, 则直线 PF 的斜率是_____.
- 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^3 - x$, 若存在 $t \in \mathbf{R}$, 使得 $|f(t+2) - f(t)| \leq \frac{2}{3}$, 则实数 a 的最大值是_____.
- 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 当每个 λ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 取遍 ± 1 时, $|\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{BC} + \lambda_3 \overrightarrow{CD} + \lambda_4 \overrightarrow{DA} + \lambda_5 \overrightarrow{AC} + \lambda_6 \overrightarrow{BD}|$ 的最小值是_____, 最大值是_____.

三、解答题

- 设函数 $f(x) = \sin x, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 已知 $\theta \in [0, 2\pi)$, 函数 $f(x + \theta)$ 是偶函数, 求 θ 的值;
(2) 求函数 $y = \left[f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right]^2 + \left[f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域.

- 如图, 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 $ABC, \angle ABC = 90^\circ, \angle BAC = 30^\circ, A_1A = A_1C = AC, E, F$ 分别是 AC, A_1B_1 的中点.
(1) 证明: $EF \perp BC$;
(2) 求直线 EF 与平面 A_1BC 所成角的余弦值.



20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 4$, $a_4 = S_3$. 数列 $\{b_n\}$ 满足: 对每个 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n + b_n$, $S_{n+1} + b_n$, $S_{n+2} + b_n$ 成等比数列.

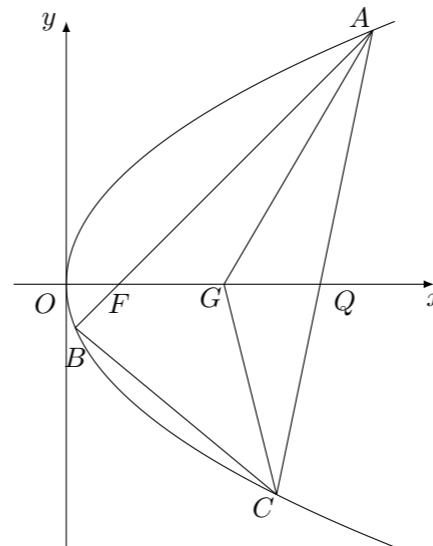
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = \sqrt{\frac{a_n}{2b_n}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 证明: $c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

21. 如图, 已知点 $F(1, 0)$ 为抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 C 在抛物线上, 使得 $\triangle ABC$ 的重心 G 在 x 轴上, 直线 AC 交 x 轴于点 Q , 且 Q 在点 F 的右侧. 记 $\triangle AFG$, $\triangle CQG$ 的面积分别为 S_1 , S_2 .

(1) 求 p 的值及抛物线的准线方程;

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值及此时点 G 的坐标.



22. 已知实数 $a \neq 0$, 设函数 $f(x) = a \ln x + \sqrt{x+1}$, $x > 0$.

(1) 当 $a = -\frac{3}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 对任意 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ 均有 $f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2a}$, 求 a 的取值范围.

注: $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.