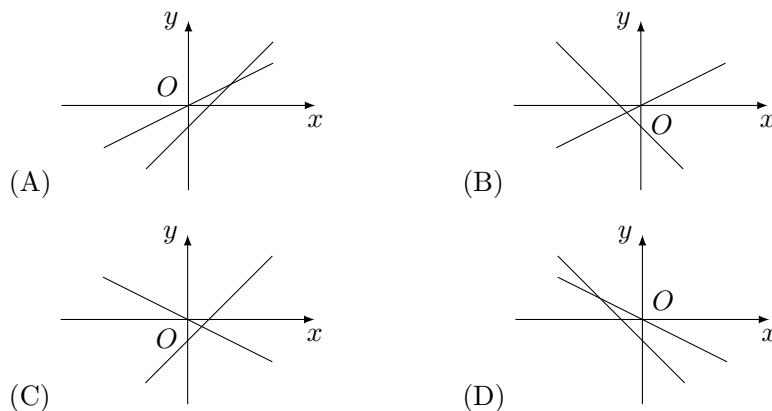


数学试卷

一、选择题

1. 在同一坐标系中, 表示直线 $y = ax$ 与 $y = x + a$ 正确的是 ()



2. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()

(A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

3. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ 的准线方程是 ()

(A) $\rho \cos \theta = -2$ (B) $\rho \cos \theta = 2$ (C) $\rho \sin \theta = -2$ (D) $\rho \sin \theta = 2$

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$, 则 n 为 ()

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51

5. 双曲线虚轴的一个端点为 M , 两个焦点为 F_1, F_2 , $\angle F_1 M F_2 = 120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ()

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

(A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

7. 函数 $y = 2 \sin x (\sin x + \cos x)$ 的最大值为 ()

(A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$ ($a > 0$) 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, a 的值等于 ()

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$

9. 已知圆锥的底面半径为 R , 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 ()

(A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$

10. 函数 $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()

(A) $-\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$
(C) $\pi + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (D) $-\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD 、 DA 和 AB 上的点 P_2 、 P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()

(A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

(A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

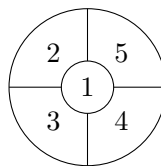
二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{4x - x^2} < x$ 的解集是_____.

14. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

15. 在平面几何里, 有勾股定理: “设 $\triangle ABC$ 的两边 AB , AC 互相垂直, 则 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.” 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是: “设三棱锥 $A - BCD$ 的三个侧面 ABC 、 ACD 、 ADB 两两互相垂直, 则_____.”

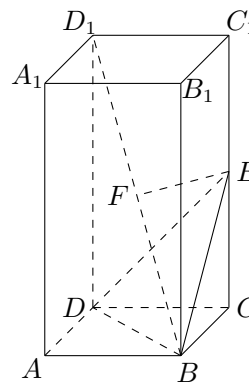
16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种_____ (以数字作答)



三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

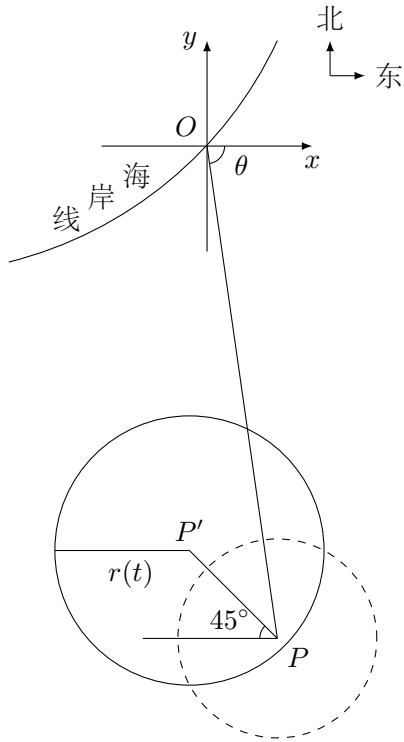
- (1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;
(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



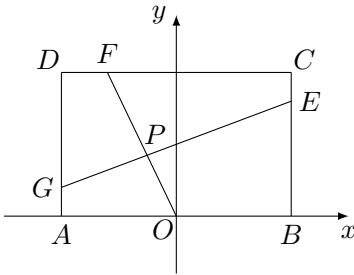
18. 已知复数 z 的辐角为 60° , 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

19. 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; Q : 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 \mathbf{R} . 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ ($\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}$) 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



21. 已知常数 $a > 0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 4a$, O 为 AB 的中点, 点 E 、 F 、 G 分别在 BC 、 CD 、 DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



22. 设 a_0 为常数, 且 $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 证明对任意 $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$;
 - (2) 假设对任意 $n \geq 1$ 有 $a_n > a_{n-1}$, 求 a_0 的取值范围.