

文科数学

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x \mid x > -1\}$, $B = \{x \mid x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $(-1, +\infty)$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-1, 2)$ (D) \emptyset
- 设 $z = i(2 + i)$, 则 $\bar{z} =$ ()
(A) $1 + 2i$ (B) $-1 + 2i$ (C) $1 - 2i$ (D) $-1 - 2i$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $5\sqrt{2}$ (D) 50
- 生物实验室有 5 只兔子, 其中只有 3 只测量过某项指标, 若从这 5 只兔子中随机取出 3 只, 则恰有 2 只测量过该指标的概率为 ()
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$
- 在“一带一路”知识测验后, 甲、乙、丙三人对成绩进行预测.
甲: 我的成绩比乙高.
乙: 丙的成绩比我和甲的都高.
丙: 我的成绩比乙高.
成绩公布后, 三人成绩互不相同且只有一个人预测正确, 那么三人按成绩由高到低的次序为 ()
(A) 甲、乙、丙 (B) 乙、甲、丙 (C) 丙、乙、甲 (D) 甲、丙、乙
- 设 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ ()
(A) $e^{-x} - 1$ (B) $e^{-x} + 1$ (C) $-e^{-x} - 1$ (D) $-e^{-x} + 1$
- 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是 ()
(A) α 内有无数条直线与 β 平行 (B) α 内有两条相交直线与 β 平行
(C) α, β 平行于同一条直线 (D) α, β 垂直于同一平面
- 若 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 两个相邻的极值点, 则 $\omega =$ ()
(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
- 若抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 8
- 曲线 $y = 2 \sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 ()
(A) $x - y - \pi - 1 = 0$ (B) $2x - y - 2\pi - 1 = 0$
(C) $2x + y - 2\pi + 1 = 0$ (D) $x + y - \pi + 1 = 0$
- 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $2 \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1$, 则 $\sin \alpha =$ ()
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

- 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点, O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 交于 P, Q 两点. 若 $|PQ| = |OF|$, 则 C 的离心率为 ()
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

二、填空题

- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x - y$ 的最大值是_____.
- 我国高铁发展迅速, 技术先进. 经统计, 在经停某站的高铁列车中, 有 10 个车次的正点率为 0.97, 有 20 个车次的正点率为 0.98, 有 10 个车次的正点率为 0.99, 则经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为_____.
- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b \sin A + a \cos B = 0$, 则 $B =$ _____.
- 中国有悠久的金石文化, 印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体, 但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 1). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 2 是一个棱数为 48 的半正多面体, 它的所有顶点都在同一个正方体的表面上, 且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有_____个面, 其棱长为_____.



图 1

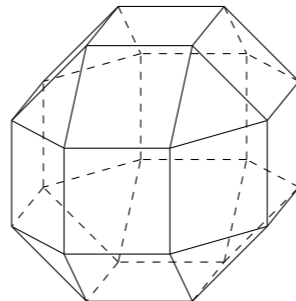
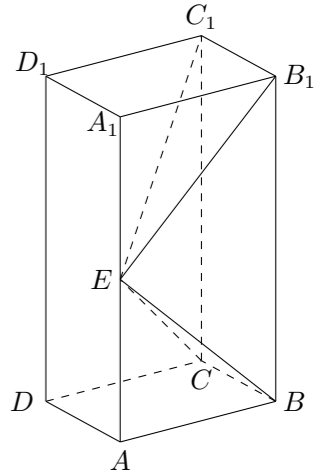


图 2

三、解答题

- 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形, 点 E 在棱 AA_1 上, $BE \perp EC_1$.
(1) 证明: $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 ;
(2) 若 $AE = A_1E$, $AB = 3$, 求四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积.



- 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $a_1 = 2$, $a_3 = 2a_2 + 16$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 某行业主管部门为了解本行业中小企业的生产情况, 随机调查了 100 个企业, 得到这些企业第一季度相对于前一年第一季度产值增长率 y 的频数分布表.

y 的分组	$[-0.20, 0)$	$[0, 0.20)$	$[0.20, 0.40)$	$[0.40, 0.60)$	$[0.60, 0.80)$
企业数	2	24	53	14	7

- (1) 分别估计这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例、产值负增长的企业比例;
- (2) 求这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (精确到 0.01)
- 附: $\sqrt{74} \approx 8.602$.

20. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点, P 为 C 上一点, O 为坐标原点.

(1) 若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形, 求 C 的离心率;

(2) 如果存在点 P , 使得 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 16, 求 b 的值和 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = (x - 1) \ln x - x - 1$. 证明:

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(2) $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

22. 在极坐标系中, O 为极点, 点 $M(\rho_0, \theta_0)$ ($\rho_0 > 0$) 在曲线 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上, 直线 l 过点 $A(4, 0)$ 且与 OM 垂直, 垂足为 P .

(1) 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, 求 ρ_0 及 l 的极坐标方程;

(2) 当 M 在 C 上运动且 P 在线段 OM 上时, 求 P 点轨迹的极坐标方程.

23. 已知 $f(x) = |x - a|x + |x - 2|(x - a)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集;

(2) 若 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $f(x) < 0$, 求 a 的取值范围.