2012 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{7-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=$ （ ）

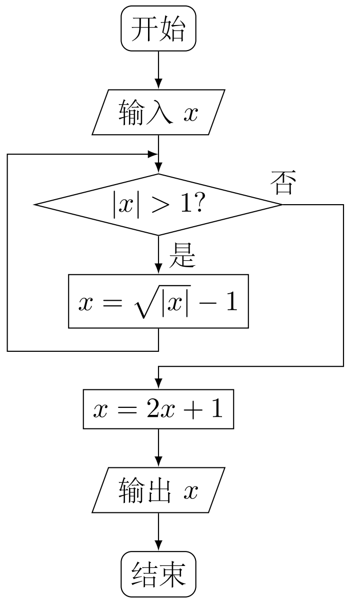
(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-2+\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

2. 设 $\varphi\in\mathbf{R}$, 则“$\varphi=0$”是“$f(x)=\cos(x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R})$ 为偶函数”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 当输入 x 的值为 -25 时, 输出 x 的值为 （ ）



(A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 9

4. 函数 $f(x)=2^x+x^3-2$ 在区间 $(0,1)$ 内的零点个数是 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 在 $\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 的二项展开式中, x 的系数为 （ ）

(A) 10 (B) -10 (C) 40 (D) -40

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c, 已知 $8b=5c$, $C=2B$, 则 $\cos C=$ （ ）

(A) $\dfrac{7}{25}$ (B) $-\dfrac{7}{25}$ (C) $\pm\dfrac{7}{25}$ (D) $\dfrac{24}{25}$

7. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB=2$, 设点 P, Q 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 若 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-\dfrac{3}{2}$, 则 $\lambda=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{2}$ (D) $\dfrac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$

8. 设 $m,n\in\mathbf{R}$, 若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切, 则 $m+n$ 的取值范围是 （ ）

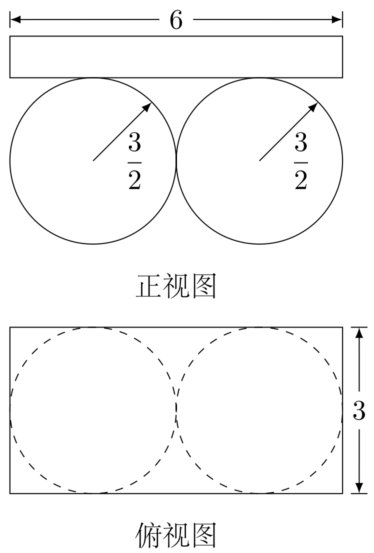
(A) $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$ (B) $(-\infty,1-\sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3},+\infty)$

(C) $[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}]$ (D) $(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$

二、填空题

9. 某地区有小学 150 所, 中学 75 所, 大学 25 所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取 30 所学校对学生进行视力调查, 应从小学中抽取______所学校, 中学中抽取______所学校.

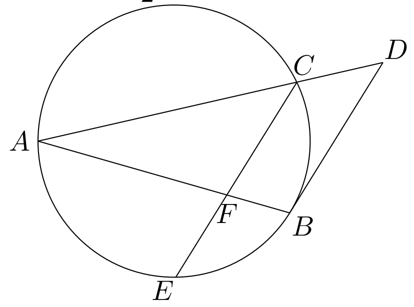
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为______m^3.



11. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid|x+2|<3\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid(x-m)(x-2)<0\}$, 且 $A\cap B=(-1,n)$, 则 $m=$______, $n=$______.

12. 已知抛物线的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$ (t 为参数), 其中 $p>0$, 焦点为 F, 准线为 l, 过抛物线上一点 M 作 l 的垂线, 垂足为 E, 若 $|EF|=|MF|$, 点 M 的横坐标是 3, 则 $p=$______.

13. 如图, 已知 AB 和 AC 是圆的两条弦, 过点 B 作圆的切线与 AC 的延长线相交于点 D. 过点 C 作 BD 的平行线与圆相交于点 E, 与 AB 相交于点 F, $AF=3$, $FB=1$, $EF=\dfrac{3}{2}$, 则线段 CD 的长为______.



14. 已知函数 $y=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点, 则实数 k 的取值范围是______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2x-1$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 有 4 个人去参加某娱乐活动, 该活动有甲、乙两个游戏可供参加者选择. 为增加趣味性, 约定: 每个人通过掷一枚质地均匀的骰子决定自己去参加哪个游戏, 掷出点数为 1 或 2 的人去参加甲游戏, 掷出点数大于 2 的人去参加乙游戏.

(1) 求这 4 个人中恰有 2 人去参加甲游戏的概率;

(2) 求这 4 个人中去参加甲游戏的人数大于去参加乙游戏的人数的概率;

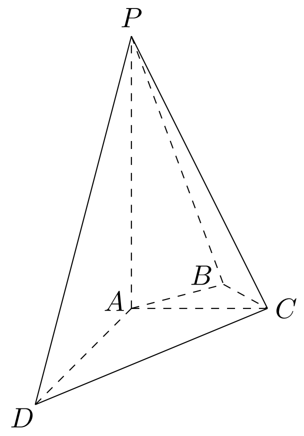
(3) 用 X,Y 分别表示这 4 个人中去参加甲、乙游戏的人数, 记 $\xi=|X-Y|$, 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望 $E\xi$.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AC\perp AD$, $AB\perp BC$, $\angle BAC=45^\circ$, $PA=AD=2$, $AC=1$.

(1) 证明 $PC\perp AD$;

(2) 求二面角 $A-PC-D$ 的正弦值;

(3) 设 E 为棱 PA 上的点, 满足异面直线 BE 与 CD 所成的角为 30°, 求 AE 的长.



18. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1=b_1=2$, $a_4+b_4=27$, $S_4-b_4=10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明 $T_n+12=-2a_n+10b_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A, B, 点 P 在椭圆上且异于 A, B 两点, O 为坐标原点.

(1) 若直线 AP 与 BP 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$, 求椭圆的离心率;

(2) 若 $|AP|=|OA|$, 证明直线 OP 的斜率 k 满足 $|k|>\sqrt{3}$.

20. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0, 其中 $a>0$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若对任意的 $x\in[0,+\infty)$, 有 $f(x)\leqslant kx^2$ 成立, 求实数 k 的最小值;

(3) 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.