

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{i}{1+i} =$ ()
 (A) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 如果双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$, 那么它的两条渐近线间的距离是 ()
 (A) $6\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 2 (D) 1

3. 设变量 x , y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq x \\ x+y \geq 2 \\ y \geq 3x-6 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 2x+y$ 的最小值为 ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 9

4. 设集合 $M = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 那么“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

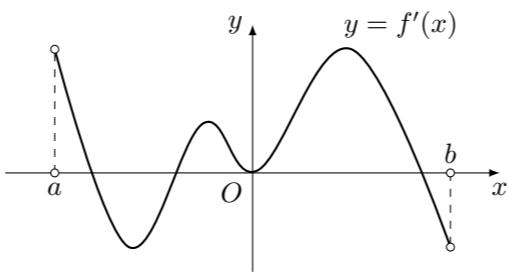
5. 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里, 使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号, 则不同的放球方法有 ()
 (A) 10 种 (B) 20 种 (C) 36 种 (D) 52 种

6. 设 m , n 是两条不同的直线, α , β 是两个不同的平面. 考查下列命题, 其中正确的命题是 ()
 (A) $m \perp \alpha$, $n \subset \beta$, $m \perp n \Rightarrow \alpha \perp \beta$
 (B) $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta \Rightarrow m \perp n$
 (C) $\alpha \perp \beta$, $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta \Rightarrow m \perp n$
 (D) $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, $n \perp m \Rightarrow n \perp \beta$

7. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列, 其首项分别为 a_1 , b_1 , 且 $a_1 + b_1 = 5$, $a_1, b_1 \in \mathbf{N}^*$. 设 $C_n = a_{b_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则数列 $\{C_n\}$ 的前 10 项和等于 ()
 (A) 55 (B) 70 (C) 85 (D) 100

8. 已知函数 $f(x) = a \sin x - b \cos x$ (a, b 为常数, $a \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$) 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处取得最小值, 则函数 $y = f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$ 是 ()
 (A) 偶函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
 (B) 偶函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ 对称
 (C) 奇函数且它的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ 对称
 (D) 奇函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称

9. 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图像如图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有极小值点 ()



- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

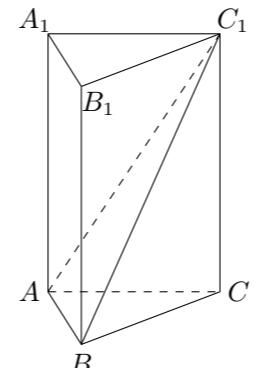
10. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象与函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 记 $g(x) = f(x)[f(x) + f(2) - 1]$. 若 $y = g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $[2, +\infty)$ (B) $(0, 1) \cup (1, 2)$
 (C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

二、填空题

11. $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的二项展开式中 x 的系数是 _____. (用数字作答)

12. 设向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 θ , 且 $\mathbf{a} = (3, 3)$, $2\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-1, 1)$, 则 $\cos \theta =$ _____.

13. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 1$. 若二面角 $C - AB - C_1$ 的大小为 60° , 则点 C 到平面 ABC_1 的距离为 _____.



14. 设直线 $ax - y + 3 = 0$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 相交于 A , B 两点, 且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

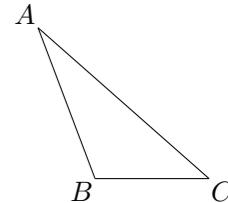
15. 某公司一年购买某种货物 400 吨, 每次都购买 x 吨, 运费为 4 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则 $x =$ _____. 吨.

16. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 点 A_0 表示坐标原点, 点 $A_n(n, f(n))$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 若向量 $\vec{a}_n = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, θ_n 是 \vec{a}_n 与 \vec{i} 的夹角 (其中 $\vec{i} = (1, 0)$), 设 $S_n = \tan \theta_1 + \tan \theta_2 + \cdots + \tan \theta_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

三、解答题

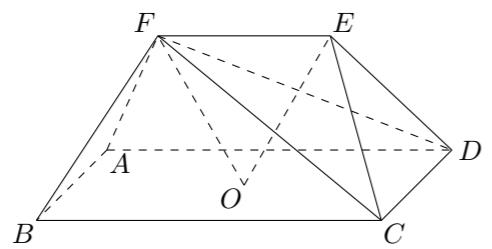
17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = 1$, $\cos C = \frac{3}{4}$.

- (1) 求 AB 的值;
 (2) 求 $\sin(2A + C)$ 的值.



19. 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 点 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线的交点, 面 CDE 是等边三角形, 棱 $EF \parallel BC$ 且 $EF = \frac{1}{2}BC$.

- (1) 证明: $FO \parallel$ 平面 CDE ;
(2) 设 $BC = \sqrt{3}CD$, 证明: $EO \perp$ 平面 CDF .

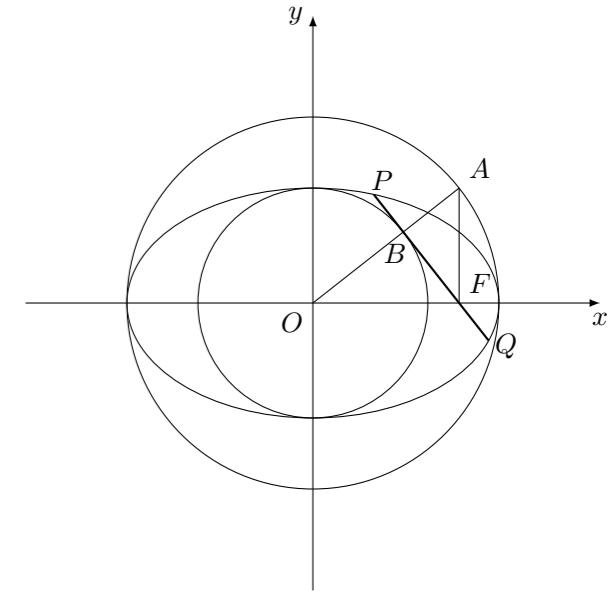


21. 已知数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 满足 $x_1 = x_2 = 1$, $y_1 = y_2 = 2$, 并且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \lambda \frac{y_n}{y_{n-1}}$ (λ 为非零参数, $n = 2, 3, 4, \dots$).

- (1) 若 x_1, x_3, x_5 成等比数列, 求参数 λ 的值;
(2) 当 $\lambda > 0$ 时, 证明: $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$);
(3) 当 $\lambda > 1$, 证明: $\frac{x_1 - y_1}{x_2 - y_2} + \frac{x_2 - y_2}{x_3 - y_3} + \dots + \frac{x_n - y_n}{x_{n+1} - y_{n+1}} < \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

22. 如图, 以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的中心 O 为圆心, 分别以 a 和 b 为半径作大圆和小圆. 过椭圆右焦点 $F(c, 0)$ ($c > b$) 作垂直于 x 轴的直线交大圆于第一象限内的点 A . 连结 OA 交小圆于点 B . 设直线 BF 是小圆的切线.

- (1) 证明 $c^2 = ab$, 并求直线 BF 与 y 轴的交点 M 的坐标;
(2) 设直线 BF 交椭圆于 P, Q 两点, 证明: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}b^2$.



20. 已知函数 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 \cos \theta + \frac{3}{16} \cos \theta$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, θ 为参数, 且 $0 \leq \theta < 2\pi$.

- (1) 当 $\cos \theta = 0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 是否有极值;
(2) 要使函数 $f(x)$ 的极小值大于零, 求参数 θ 的取值范围;
(3) 若对 (2) 中所求的取值范围内的任意参数 θ , 函数 $f(x)$ 在区间 $(2a-1, a)$ 内都是增函数, 求实数 a 的取值范围.