2006 年普通高等学校招生考试（安徽卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

(A) i (B) $-$i (C) $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ (D) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x||x-2|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 ( )

(A) $\mathbf{R}$ (B) $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

(C) $\{0\}$ (D) $\varnothing$

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}$ 的右焦点重合, 则 p 的值为( )

(A) -2 (B) 2 (C) -4 (D) 4

4. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, 已知命题 $p:a=b$; 命题 $q:\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{2}$, 则 p 是 q 成立的 ( )

(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件

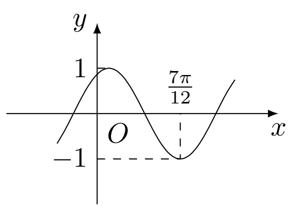
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 函数 $y=\begin{cases}2x & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数是 ( )

(A) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ (B) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

(C) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ (D) $y=\begin{cases}2x, & x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$

6. 将函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 的图象按向量 $\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 平移, 平移后的图象如图所示, 则平移后的图象所对应的函数解析式是 ( )



(A) $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(C) $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 若曲线 $y=x^4$ 的一条切线 l 与直线 $x+4y-8=0$ 垂直, 则 l 的方程为 ( )

(A) $4x-y-3=0$ (B) $x+4y-5=0$

(C) $4x-y+3=0$ (D) $x+4y+3=0$

8. 设 $a>0$, 对于函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+a}{\sin x}$ $(0<x<\pi)$, 下列结论正确的是( )

(A) 有最大值而无最小值 (B) 有最小值而无最大值

(C) 有最大值且有最小值 (D) 既无最大值又无最小值

9. 表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一球面上, 则此球的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\dfrac{1}{3}\pi$ (C) $\dfrac{2}{3}\pi$ (D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

10. 如果实数 x, y 满足条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ y+1\geqslant 0\\ x+y+1\leqslant 0\end{cases}$, 那么 $2x-y$ 的最大值为( )

(A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) -3

11. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值, 则 ( )

(A) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

(B) $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

(C) $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

(D) $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形, $\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

12. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形, 则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{7}$ (B) $\dfrac{2}{7}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

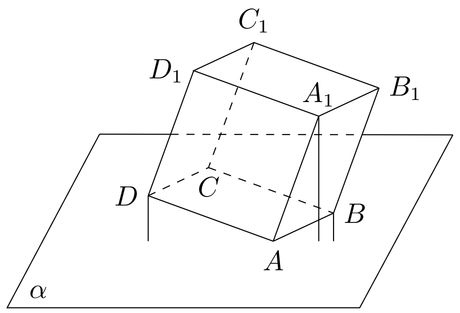
二、填空题

13. 设常数 $a>0$, $\left(ax^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\dfrac{3}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=$______.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$, M 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{MN}=$______. (用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示)

15. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$, 若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$______.

16. 多面体上, 位于同一条棱两端的顶点称为相邻的. 如图, 正方体的一个顶点 A 在平面 α 内, 其余顶点在 α 的同侧, 正方体上与顶点 A 相邻的三个顶点到 α 的距离分别为 1, 2 和 4. P 是正方体的其余四个顶点中的一个, 则 P 到平面 α 的距离可能是: ① 3; ② 4; ③ 5; ④ 6; ⑤ 7.
以上结论正确的是______. (写出所有正确结论的编号)



三、解答题

17. 已知 $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, $\tan\alpha+\cot\alpha=-\dfrac{10}{3}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{5\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+8\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}+11\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值.

18. 在添加剂的搭配适用中, 为了找到最佳的搭配方案, 需要对各种不同的搭配方式作比较, 在试制某种牙膏新品种时, 需要选用两种不同的添加剂. 现有芳香度分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5 的六种添加剂可供选用. 根据实验设计学原理, 通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配实验. 用 ξ 表示所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和.

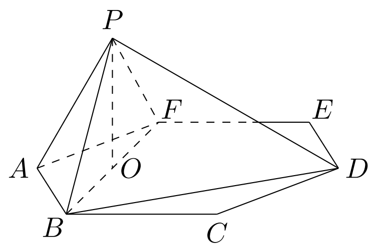
(1) 写出 ξ 的分布列; (以列表的形式给出结论, 不必写计算过程)

(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$. (要求写出计算过程或说明道理)

19. 如图, P 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 所在平面外一点, $PA=1$, P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O.

(1) 证明: $PA\perp BF$;

(2) 求面 APB 与面 DPB 所成二面角的大小.



20. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义, 对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x, 都有 $f(ax)=af(x)$.

(1) 证明 $f(0)=0$;

(2) 证明 $f(x)=\begin{cases} kx,\ x\geqslant 0 \\ hx,\ x<0 \end{cases}$, 其中 k 和 h 均为常数;

(3) 当 (2) 中的 $k>0$ 时, 设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)\ \ (x>0)$, 讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性并求极值.

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_n=n^2a_n-n(n-1)$, $n=1, 2, \cdots$.

(1) 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式 $(n\geqslant 2)$, 并求 S_n 关于 n 的表达式;

(2) 设 $f_n(x)=\dfrac{S_n}{n}x^{n+1}$, $b_n=f_n'(p)$ $(p\in\mathbf{R})$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. 如图, F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点, P 为双曲线 C 右支上一点, 且位于 x 轴上方, M 为左准线上一点, O 为坐标原点. 已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形, $|PF|=\lambda|OF|$.

(1) 写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式;

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点, 若 $|AB|=12$, 求此时的双曲线方程.