2012 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 若复数 z 满足 $zi = 1 - i$, 则 z 等于 ( )

(A) $-1-i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $1+i$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_5 = 10$, $a_4 = 7$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 下列命题中, 真命题是 ( )

(A) $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, $e^{x_0} \leqslant 0$

(B) $\forall x \in \mathbf{R}$, $2^x > x^2$

(C) $a + b = 0$ 的充要条件是 $\dfrac{a}{b} = -1$

(D) $a > 1$, $b > 1$ 是 $ab > 1$ 的充分条件

4. 一个几何体的三视图形状都相同, 大小均相等, 那么这个几何体不可以是 ( )

(A) 球 (B) 三棱锥 (C) 正方体 (D) 圆柱

5. 下列不等式一定成立的是 ( )

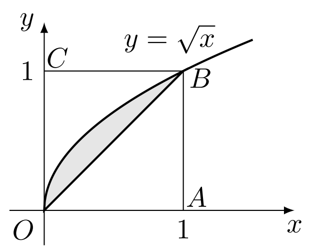
(A) $\lg\left(x^2 + \dfrac{1}{4}\right) > \lg x \ (x > 0)$

(B) $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} \geqslant 2 \ (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$

(C) $x^2 + 1 \geqslant 2|x| \ (x \in \mathbf{R})$

(D) $\dfrac{1}{x^2+1} > 1 \ (x \in \mathbf{R})$

6. 如图所示, 在边长为 1 的正方形 $OABC$ 中任取一点 P, 则点 P 恰好取自阴影部分的概率为 ( )



(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{7}$

7. 设函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则下列结论错误的是 ( )

(A) $D(x)$ 的值域为 $\{0, 1\}$ (B) $D(x)$ 是偶函数

(C) $D(x)$ 不是周期函数 (D) $D(x)$ 不是单调函数

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点重合, 则该双曲线的焦点到其渐近线的距离等于 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 3 (D) 5

9. 若函数 $y = 2^x$ 图象上存在点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 3 \leqslant 0 \\ x - 2y - 3 \leqslant 0 \\ x \geqslant m \end{cases}$, 则实数 m 的最大值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 2

10. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 有 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有性质 P. 设 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上具有性质 P, 现给出如下命题:

① $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的图象是连续不断的;

② $f(x^2)$ 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上具有性质 P;

③ 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得最大值 1, 则 $f(x) = 1$, $x \in [1, 3]$;

④ 对任意 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [1, 3]$, 有 $f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leqslant \dfrac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$.

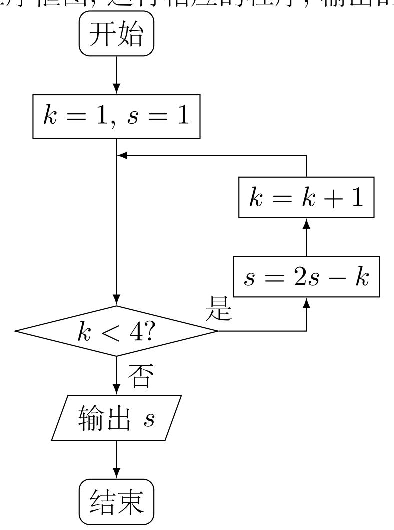
其中真命题的序号是 ( )

(A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

二、填空题

11. $(a + x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数等于 8, 则实数 $a =$______.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 s 值等于______.



13. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为______.

14. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n\cos\dfrac{n\pi}{2} + 1$, 前 n 项和为 S_n, 则 $S_{2012} =$______.

15. 对于实数 a 和 b, 定义运算“$*$”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leqslant b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$.

设 $f(x) = (2x - 1) * (x - 1)$, 且关于 x 的方程 $f(x) = m \ (m \in \mathbf{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3, 则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是______.

三、解答题

16. 受轿车在保修期内维修费等因素的影响, 企业生产每辆轿车的利润与该轿车首次出现故障的时间有关. 某轿车制造厂生产甲、乙两种品牌轿车, 保修期均为 2 年. 现从该厂已售出的两种品牌轿车中各随机抽取 50 辆, 统计数据如下:

品牌	甲			乙	
首次出现故障的时间 x (年)	$0 < x \leqslant 1$	$1 < x \leqslant 2$	$x > 2$	$0 < x \leqslant 2$	$x > 2$
轿车数量 (辆)	2	3	45	5	45
每辆利润 (万元)	1	2	3	1.8	2.9

将频率视为概率, 解答下列问题:

(1) 从该厂生产的甲品牌轿车中随机抽取一辆, 求其首次出现故障发生在保修期内的概率;

(2) 若该厂生产的轿车均能售出, 记生产一辆甲品牌轿车的利润为 X_1, 生产一辆乙品牌轿车的利润为 X_2, 分别求 X_1, X_2 的分布列;

(3) 该厂预计今后这两种品牌轿车销量相当, 由于资金限制, 只能生产其中一种品牌的轿车. 若从经济效益的角度考虑, 你认为应生产哪种品牌的轿车? 请说明理由.

17. 某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数:

① $\sin^2 13° + \cos^2 17° - \sin 13° \cos 17°$;

② $\sin^2 15° + \cos^2 15° - \sin 15° \cos 15°$;

③ $\sin^2 18° + \cos^2 12° - \sin 18° \cos 12°$;

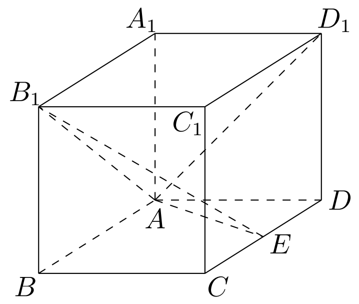
④ $\sin^2(-18°) + \cos^2 48° - \sin(-18°) \cos 48°$;

⑤ $\sin^2(-25°) + \cos^2 55° - \sin(-25°) \cos 55°$.

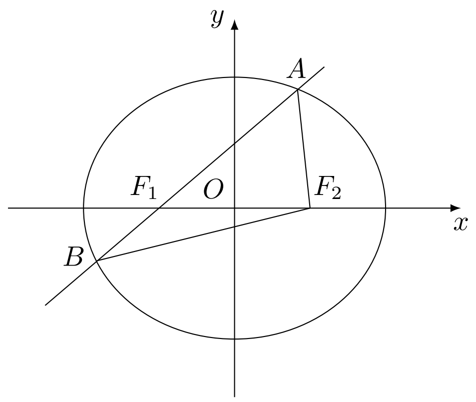
(1) 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数;

(2) 根据 (1) 的计算结果, 将该同学的发现推广为三角恒等式, 并证明你的结论.

18. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AD=1$, E 为 CD 的中点.
(1) 求证: $B_1E\perp AD_1$;
(2) 在棱 AA_1 上是否存在一点 P, 使得 $DP\,/\!/$ 平面 B_1AE? 若存在, 求 AP 的长; 若不存在, 请说明理由;
(3) 若二面角 $A-B_1E-A_1$ 的大小为 30°, 求 AB 的长.



19. 如图, 椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F_1, 右焦点为 F_2, 离心率 $e=\dfrac{1}{2}$, 过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点, 且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8.
(1) 求椭圆 E 的方程;
(2) 设动直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 P, 且与直线 $x=4$ 相交于点 Q. 试探究: 在坐标平面内是否存在定点 M, 使得以 PQ 为直径的圆恒过点 M? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-\mathrm{e}x$, $a\in\mathbf{R}$.
(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 试确定 a 的取值范围, 使得曲线 $y=f(x)$ 上存在唯一的点 P, 曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点 P.

21. 三选二.
【A】设曲线 $2x^2+2xy+y^2=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0\\b&1\end{pmatrix}\ (a>0)$ 对应的变换作用下得到的曲线为 $x^2+y^2=1$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求 $\boldsymbol{A}^2$ 的逆矩阵.

【B】在平面直角坐标系中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 上两点 M, N 的极坐标分别为 $(2,0)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=-\sqrt{3}+2\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).
(1) 设 P 为线段 MN 的中点, 求直线 OP 的平面直角坐标方程;
(2) 判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

【C】已知函数 $f(x)=m-|x-2|$, $m\in\mathbf{R}$, 且 $f(x+2)\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,1]$.
(1) 求 m 的值;
(2) 若 a, b, $c\in\mathbf{R}^+$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c}=m$, 求证: $a+2b+3c\geqslant 9$.