绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，

2，本卷共9小题，每小题5分，共45分

参考公式：

•如果事件 *A*、*B* 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ **.**

•如果事件 *A*、*B* 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)\,P(B)$ **.**

•球的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^3$**，其中 *R* 表示球的半径．**

•圆锥的体积公式 $V=\dfrac{1}{3}Sh$**，其中 *S* 表示圆锥的底面面积，*h* 表示圆锥的高．**

一、选择题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{1,3,5\},C=\{0,2,4\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$（　　）

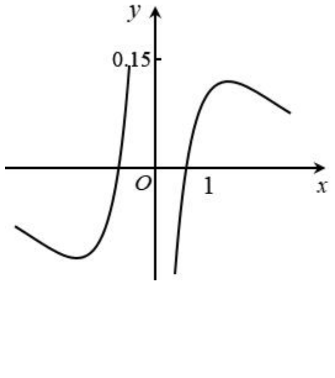
A. $\{0\}$　　B. $\{0,1,3,5\}$　　C. $\{0,1,2,4\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

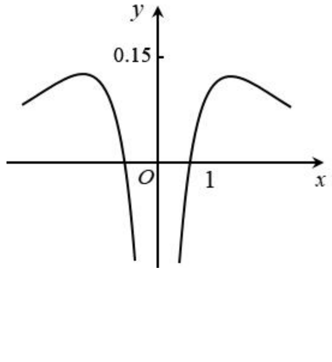
2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>6$”是“$a^2>36$”的（　　）

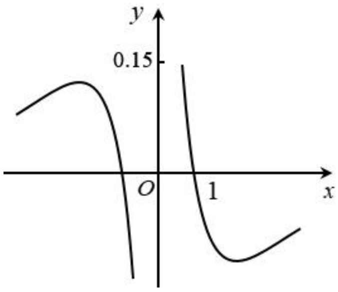
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

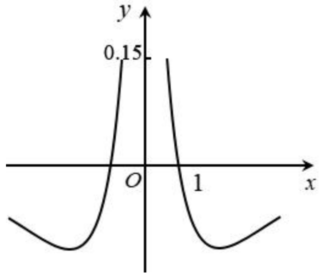
C. 充要条件　　D. 既不允分也不必要条件

3. 函数 $y=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图象大致为（　　）

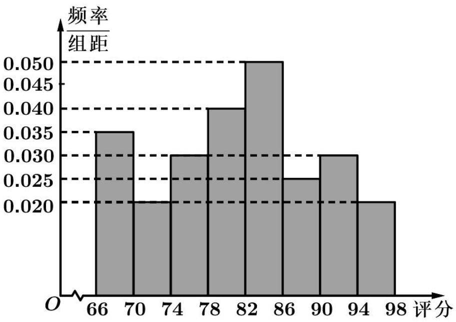
A.


B.


C. 

D. 

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取400部，统计其评分分数据，将所得400个评分数据分为8组：$\left[66,70\right)$、$\left[70,74\right)$、…、$\left[94,98\right]$，并整理得到如下的费率分布直方图，则评分在区间$\left[82,86\right)$内的影视作品数量是（　　）



A. 20　　B. 40　　C. 64　　D. 80

5. 设$a=\log_2 0.3, b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4, c=0.4^{0.3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为$\frac{32\pi}{3}$，两个圆锥的高之比为$1:3$，则这两个圆锥的体积之和为（　　）

A. 3π　　B. 4π　　C. 9π　　D. 12π

7. 若$2^a=5^b=10$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$（　　）

A. -1　　B. $\lg 7$　　C. 1　　D. $\log_7 10$

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点与抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点重合，抛物线的准线交双曲线于$A,B$两点，交双曲线的渐近线于$C$、$D$两点，若$\left|CD\right|=\sqrt{2}\,|AB|$. 则双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

9. 设$a\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a). & x<a\\ x^2-2(a+1)x+a^2+5, & x\geq a\end{cases}$，若$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内恰有6个零点，则$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right]$　　B. $\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left(\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right)$

C. $\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$　　D. $\left(\frac{7}{4},2\right)\cup\left[\frac{11}{4},3\right)$

第 II 卷

注意事项

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2．本卷共 11 小题，共 105 分.

二、填空题，本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，试题中包含两个空的，答对 1 个的给 3 分，全部答对的给 5 分.

10. i是虚数单位，复数$\frac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$____________.

11. 在$\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中，$x^6$的系数是__________.

12. 若斜率为$\sqrt{3}$的直线与y轴交于点A，与圆$x^2+\left(y-1\right)^2=1$相切于点B，则$\left|AB\right|=$____________.

13. 若$a>0$，$b>0$，则$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$的最小值为____________.

14. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语，若一方猜对且另一方猜错，则猜对的一方获胜，否则本次平局，已知每次活动中，甲、乙猜对的概率分别为$\frac{5}{6}$和$\frac{1}{5}$，且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响，各次活动也互不影响，则一次活动中，甲获胜的概率为____________，3 次活动中，甲至少获胜 2 次的概率为_____________.

15. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中，D 为线段 BC 上的动点，$DE\perp AB$ 且交 AB 于点 E．$DF//AB$ 且交 AC 于点 F,则$|2\overline{BE}+\overline{DF}|$的值为____________；$(\overline{DE}+\overline{DF})\cdot\overline{DA}$的最小值为____________.

三、解答题，本大题共 5 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程成演算步骤.

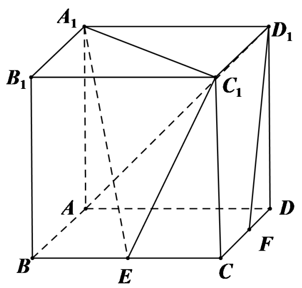
16. 在$\triangle ABC$，角 A,B,C 所对的边分别为a,b,c，已知$\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$．

（I）求 a 的值；

（II）求$\cos C$的值；

（III）求$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

17. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点.



（I）求证：$D_1F\ //$ 平面 A_1EC_1；

（II）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值.

（III）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.

18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点为 F，上顶点为 B，离心率为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，且 $\left|BF\right|=\sqrt{5}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M，与 y 轴的正半轴交于点 N，过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P．若 $MP//BF$，求直线 l 的方程.

19. 已知 $\left\{a_n\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，其前 8 项和为 64．$\left\{b_n\right\}$ 是公比大于 0 的等比数列，

$b_1=4,b_3-b_2=48$.

（I）求 $\left\{a_n\right\}$ 和 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（II）记 $c_n=b_{2n}+\dfrac{1}{b_n},n\in N^*$，

（i）证明 $\left\{c_n^2-c_{2n}\right\}$ 是等比数列；（ii）证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<2\sqrt{2}\left(n\in N^*\right)$

20. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-xe^x$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程：

（II）证明 $f(x)$ 存在唯一的极值点

（III）若存在 a，使得 $f(x)\le a+b$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，求实数 b 的取值范围.