2005 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $(0,0)$ 对称的圆的方程为 ( )

(A) $(x-2)^2+y^2=5$ (B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=5$ (D) $x^2+(y+2)^2=5$

2. $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2005}=$ ( )

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 2^{2005} (D) -2^{2005}

3. 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数, 且 $f(2)=0$, 则使得 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,2)$ (B) $(2,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-2,2)$

4. 已知 $A(3,1)$, $B(6,1)$, $C(4,3)$, D 为线段 BC 的中点, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 的夹角为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{4}{5}$ (B) $\arccos\dfrac{4}{5}$

(C) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ (D) $-\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$

5. 若 x, y 是正数, 则 $\left(x+\dfrac{1}{2y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2x}\right)^2$ 的最小值是 ( )

(A) 3 (B) $\dfrac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\dfrac{9}{2}$

6. 已知 α、β 均为锐角, 若 $p:\sin\alpha<\sin(\alpha+\beta)$, $q:\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 对于不重合的两个平面 α 与 β, 给定下列条件:

① 存在平面 γ, 使得 α、β 都垂直于 γ;

② 存在平面 γ, 使得 α、β 都平行于 γ;

③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等;

④ 存在异面直线 l、m, 使得 $l\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$.

其中, 可以判定 α 与 β 平行的条件有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

8. 若 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展开式中含 $\dfrac{1}{x^2}$ 项的系数与含 $\dfrac{1}{x^4}$ 项的系数之比为 -5, 则 n 等于 ( )

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

9. 若动点 (x,y) 在曲线 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 上变化, 则 x^2+2y 的最大值为 ( )

(A) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<4,\\ 2b, & b\geqslant 4\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\dfrac{b^2}{4}+4, & 0<b<2,\\ 2b, & b\geqslant 2\end{cases}$

(C) $\dfrac{b^2}{4}+4$ (D) $2b$

10. 在体积为 1 的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G, 使 $AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$, 记 O 为三平面 BCG、CDE、DBF 的交点, 则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{7}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

11. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x-6<0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbf{R}||x-2|<2\}$, 则 $A\cap B=$______.

12. 曲线 $y=x^3$ 在点 (a,a^3) $(a\neq 0)$ 处的切线与 x 轴、直线 $x=a$ 所围成的三角形的面积为 $\dfrac{1}{6}$, 则 $a=$______.

13. 已知 α、β 均为锐角, 且 $\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$, 则 $\tan\alpha=$______.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n}-3^{2n+1}}{2^{3n}+3^{2n}}=$______.

15. 某轻轨列车有 4 节车厢, 现有 6 位乘客准备乘坐, 设每一位乘客进入每节车厢是等可能的, 则这 6 位乘客进入各节车厢的人数恰好为 0, 1, 2, 3 的概率为______.

16. 连接抛物线上任意四点组成的四边形可能是______. (填写所有正确选项的序号)

① 菱形; ② 有 3 条边相等的四边形; ③ 梯形; ④ 平行四边形; ⑤ 有一组对角相等的四边形.

三、解答题

17. 若函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}-a\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(\pi-\dfrac{x}{2}\right)$ 的最大值为 2, 试确定常数 a 的值.

18. 在一次购物抽奖活动中, 假设某 10 张券中有一等奖券 1 张, 可获价值 50 元的奖品; 有二等奖券 3 张, 每张可获价值 10 元的奖品; 其余 6 张没有奖, 某顾客从此 10 张券中任抽 2 张, 求:

(1) 该顾客中奖的概率;

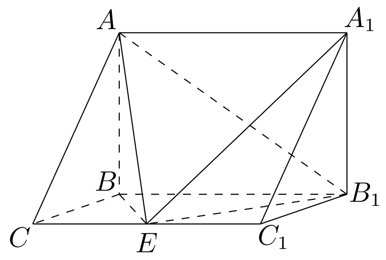
(2) 该顾客获得的奖品总价值 ξ (元) 的概率分布列和期望 $E\xi$.

19. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 讨论函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+ax+a+1)$ 的极值点的个数.

20. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp$ 侧面 BB_1C_1C, E 为棱 CC_1 上异于 C、C_1 的一点, $EA\perp EB_1$, 已知 $AB=\sqrt{2}$, $BB_1=2$, $BC=1$, $\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$, 求:

(1) 异面直线 AB 与 EB_1 的距离;

(2) 二面角 $A-EB_1-A_1$ 的平面角的正切值.



21. 已知椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 双曲线 C_2 的左、右焦点分别为 C_1 的左、右顶点, 而 C_2 的左、右顶点分别是 C_1 的左、右焦点.

(1) 求双曲线 C_2 的方程;

(2) 若直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与椭圆 C_1 及双曲线 C_2 都恒有两个不同的交点, 且 l 与 C_2 的两个交点 A 和 B 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<6$ (其中 O 为原点), 求 k 的取值范围.

22. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)a_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 用数学归纳法证明: $a_n\geqslant 2$ $(n\geqslant 2)$;

(2) 已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立, 证明:$a_n<\mathrm{e}^2$ $(n\geqslant 1)$, 其中无理数 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$.