

理科数学

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. 若 $f(\alpha) = 4$, 则实数 $\alpha =$ ()

(A) -4 或 -2 (B) -4 或 2 (C) -2 或 4 (D) -2 或 2

2. 把复数 z 的共轭复数记作 \bar{z} , i 为虚数单位, 若 $z = 1+i$, 则 $(1+z) \cdot \bar{z} =$ ()

(A) $3-i$ (B) $3+i$ (C) $1+3i$ (D) 3

3. 若某几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的直观图可以是 ()



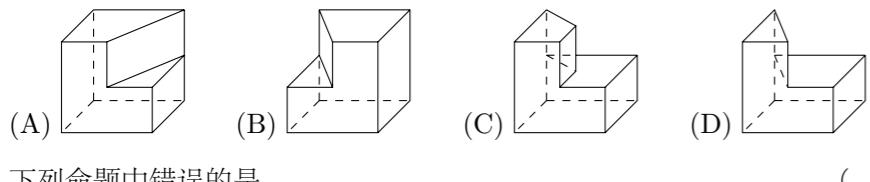
正视图



侧视图



俯视图



4. 下列命题中错误的是 ()

- (A) 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β
(B) 如果平面 α 不垂直于平面 β , 那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β
(C) 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 γ , 平面 $\beta \perp$ 平面 γ , $\alpha \cap \beta = l$, 那么 $l \perp$ 平面 γ
(D) 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

5. 设实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x + 2y - 5 > 0 \\ 2x + y - 7 > 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$. 若 x, y 为整数, 则 $3x + 4y$ 的最小值是 ()

(A) 14 (B) 16 (C) 17 (D) 19

6. 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{3}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) =$ ()

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ (D) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

7. 若 a, b 为实数, 则“ $0 < ab < 1$ ”是“ $a < \frac{1}{b}$ 或 $b > \frac{1}{a}$ ”的 ()

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 有公共的焦点, C_2 的一条渐近线与以 C_1 的长轴为直径的圆相交于 A, B 两点. 若 C_1 恰好将线段 AB 三等分, 则 ()

(A) $a^2 = \frac{13}{2}$ (B) $a^2 = 13$ (C) $b^2 = \frac{1}{2}$ (D) $b^2 = 2$

9. 有 5 本不同的书, 其中语文书 2 本, 数学书 2 本, 物理书 1 本. 若将其随机地抽取并排摆放在书架的同一层上, 则同一科目的书都不相邻的概率为 ()

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

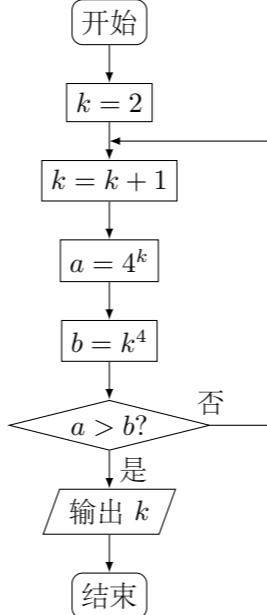
10. 设 a, b, c 为实数, $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$, $g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $T = \{x | g(x) = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $|S|, |T|$ 分别为集合 S, T 的元素个数, 则下列结论不可能的是 ()

(A) $|S| = 1$ 且 $|T| = 0$ (B) $|S| = 1$ 且 $|T| = 1$
(C) $|S| = 2$ 且 $|T| = 2$ (D) $|S| = 2$ 且 $|T| = 3$

二、填空题

11. 若函数 $f(x) = x^2 - |x + a|$ 为偶函数, 则实数 $a =$ _____.

12. 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的 k 的值是 _____.



17. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的焦点, 点 A, B 在椭圆上. 若 $\overrightarrow{F_1A} = 5\overrightarrow{F_2B}$, 则点 A 的坐标是 _____.

三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\sin A + \sin C = p \sin B$ ($p \in \mathbf{R}$), 且 $ac = \frac{1}{4}b^2$.

- (1) 当 $p = \frac{5}{4}$, $b = 1$ 时, 求 a, c 的值;
(2) 若角 B 为锐角, 求 p 的取值范围.

19. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 为 a ($a \in \mathbf{R}$). 设数列的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_4}$ 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n ;
(2) 记 $A_n = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_n}$, $B_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2^n-1}}$. 当 $n \geq 2$ 时, 试比较 A_n 与 B_n 的大小.

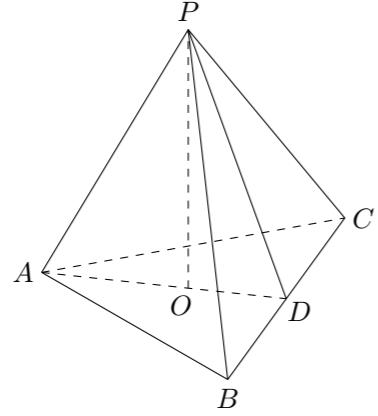
13. 设二项式 $\left(x - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6$ ($a > 0$) 的展开式中 x^3 的系数为 A , 常数项为 B . 若 $B = 4A$, 则 a 的值是 _____.

14. 若平面向量 α, β 满足 $|\alpha| = 1$, $|\beta| \leq 1$, 且以向量 α, β 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$, 则 α 和 β 的夹角 θ 的取值范围是 _____.

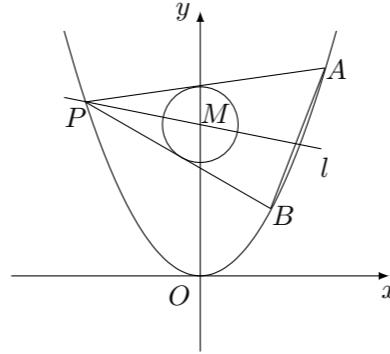
15. 某毕业生参加人才招聘会, 分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历, 假定该毕业生得到甲公司面试的概率为 $\frac{2}{3}$, 得到乙、丙公司面试的概率均为 p , 且三个公司是否让其面试是相互独立的. 记 X 为该毕业生得到面试的公司个数. 若 $P(X=0) = \frac{1}{12}$, 则随机变量 X 的数学期望 $E(X) =$ _____.

16. 设 x, y 为实数, 若 $4x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $2x + y$ 的最大值是 _____.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足 O 落在线段 AD 上, 已知 $BC = 8$, $PO = 4$, $AO = 3$, $OD = 2$.
- (1) 证明: $AP \perp BC$;
 - (2) 在线段 AP 上是否存在点 M , 使得二面角 $A-MC-B$ 为直二面角? 若存在, 求出 AM 的长; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知抛物线 $C_1: x^2 = y$, 圆 $C_2: x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 的圆心为点 M .
- (1) 求点 M 到抛物线 C_1 的准线的距离;
 - (2) 已知点 P 是抛物线 C_1 上一点 (异于原点), 过点 P 作圆 C_2 的两条切线, 交抛物线 C_1 于 A, B 两点, 若过 M, P 两点的直线 l 垂直于 AB , 求直线 l 的方程.



22. 设函数 $f(x) = (x-a)^2 \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 若 $x = e$ 为 $y = f(x)$ 的极值点, 求实数 a ;
 - (2) 求实数 a 的取值范围, 使得对任意的 $x \in (0, 3e]$, 恒有 $f(x) \leq 4e^2$ 成立.
- 注: e 为自然对数的底数.