2014 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 设命题 p: $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+1>0$, 则 $\neg p$ 为 ( )

(A) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $x_0^2+1>0$　(B) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $x_0^2+1\leqslant 0$

(C) $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $x_0^2+1<0$　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$, $x^2+1\leqslant 0$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x>2\}$, $B=\{x\mid 1<x<3\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{x\mid x>2\}$　(B) $\{x\mid x>1\}$

(C) $\{x\mid 2<x<3\}$　(D) $\{x\mid 1<x<3\}$

3. 对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本, 当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时, 总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 则 ( )

(A) $p_1=p_2<p_3$　(B) $p_2=p_3<p_1$　(C) $p_1=p_3<p_2$　(D) $p_1=p_2=p_3$

4. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增的是 ( )

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　(B) $f(x)=x^2+1$　(C) $f(x)=x^3$　(D) $f(x)=2^{-x}$

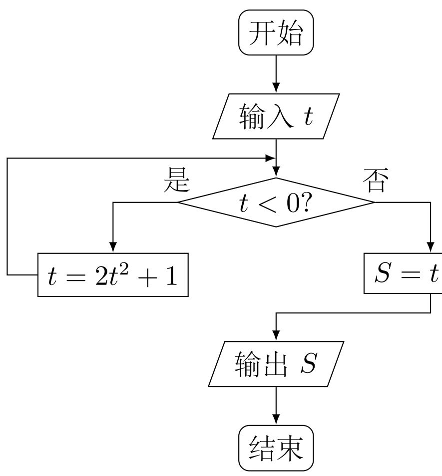
5. 在区间 $[-2,3]$ 上随机选取一个数 X, 则 $X\leqslant 1$ 的概率为 ( )

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

6. 若圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切, 则 $m=$ ( )

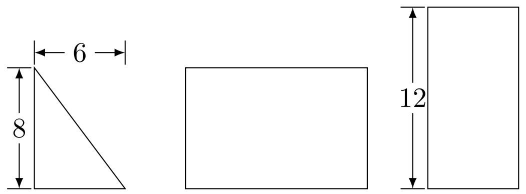
(A) 21　(B) 19　(C) 9　(D) -11

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $t\in[-2,2]$, 则输出的 S 属于 ( )



(A) $[-6,-2]$　(B) $[-5,-1]$　(C) $[-4,5]$　(D) $[-3,6]$

8. 一块石材表示的几何体的三视图如图所示, 将该石材切削、打磨, 加工成球, 则能得到的最大球的半径等于 ( )



正视图　侧视图　俯视图

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

9. 若 $0<x_1<x_2<1$, 则 ( )

(A) $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$　(B) $\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

(C) $x_2\mathrm{e}^{x_1}>x_1\mathrm{e}^{x_2}$　(D) $x_2\mathrm{e}^{x_1}<x_1\mathrm{e}^{x_2}$

10. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $C(3,0)$, 动点 D 满足 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$, 则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right|$ 的取值范围是 ( )

(A) $[4,6]$　(B) $\left[\sqrt{19}-1,\sqrt{19}+1\right]$

(C) $\left[2\sqrt{3},2\sqrt{7}\right]$　(D) $\left[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1\right]$

二、填空题

11. 复数 $\dfrac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}$ (i 为虚数单位) 的实部等于______.

12. 在平面直角坐标系中, 曲线 $C:\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数) 的普通方程为______.

13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\ x+y\leqslant 4\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最大值为______.

14. 平面上一机器人在行进中始终保持与点 $F(1,0)$ 的距离和到直线 $x=-1$ 的距离相等. 若机器人接触不到过点 $P(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线, 则 k 的取值范围是______.

15. 若 $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)+ax$ 是偶函数, 则 $a=$______.

三、解答题

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=2^{a_n}+(-1)^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和.

17. 某企业有甲、乙两个研发小组, 为了比较他们的研发水平, 现随机抽取这两个小组往年研发新产品的结果如下: (a,b), $(a,\overline{b})$, (a,b), $(\overline{a},b)$, $(\overline{a},\overline{b})$, (a,b), (a,b), $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},b)$, $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},\overline{b})$, (a,b), $(a,\overline{b})$, $(\overline{a},b)$, (a,b). 其中 a, $\overline{a}$ 分别表示甲组研发成功和失败; b, $\overline{b}$ 分别表示乙组研发成功和失败.

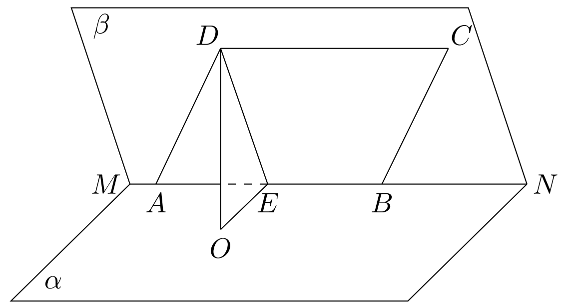
(1) 若某组成功研发一种新产品, 则给该组记 1 分, 否则记 0 分, 试计算甲、乙两组研发新产品的成绩的平均数和方差, 并比较甲、乙两组的研发水平;

(2) 若该企业安排甲、乙两组各自研发一种新产品, 试估计恰有一组研发成功的概率.

18. 如图, 已知二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的大小为 60°, 菱形 $ABCD$ 在面 β 内, A, B 两点在棱 MN 上, $\angle BAD=60^\circ$, E 是 AB 的中点, $DO\perp$ 面 α, 垂足为 O.

(1) 证明: $AB\perp$ 平面 ODE;

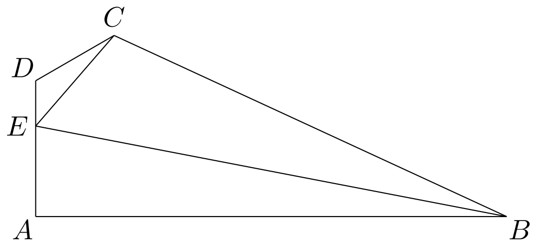
(2) 求异面直线 BC 与 OD 所成角的余弦值.



19. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $DA \perp AB$, $DE=1$, $EC=\sqrt{7}$, $EA=2$, $\angle ADC=\dfrac{2\pi}{3}$, $\angle BEC=\dfrac{\pi}{3}$.

(1) 求 $\sin\angle CED$ 的值;

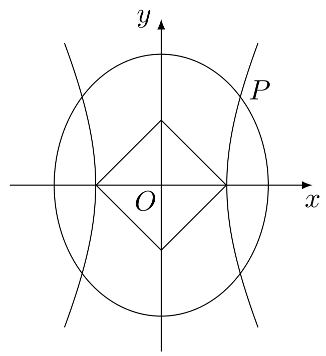
(2) 求 BE 的长.



20. 如图, O 为坐标原点, 双曲线 $C_1: \dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1$ $(a_1>0,\ b_1>0)$ 和椭圆 $C_2: \dfrac{y^2}{a_2^2}+\dfrac{x^2}{b_2^2}=1$ $(a_2>b_2>0)$ 均过点 $P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},1\right)$, 且以 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 是否存在直线 l, 使得 l 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 只有一个公共点, 且 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$? 证明你的结论.



21. 已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x+1$ $(x>0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 i $(i\in\mathbf{N}^*)$ 个零点, 证明: 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}<\dfrac{2}{3}$.