

2013 年普通高等学校招生考试 (重庆卷)

# 理科数学

一、选择题

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ , 集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$  ( )  
 (A)  $\{1, 3, 4\}$  (B)  $\{3, 4\}$  (C)  $\{3\}$  (D)  $\{4\}$

2. 命题“对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $x^2 \geq 0$ ”的否定为 ( )

- (A) 对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $x^2 < 0$  (B) 不存在  $x \in \mathbf{R}$ , 使得  $x^2 < 0$   
 (C) 存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $x_0^2 \geq 0$  (D) 存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $x_0^2 < 0$

3.  $\sqrt{(3-a)(a+6)}$  ( $-6 \leq a \leq 3$ ) 的最大值为 ( )  
 (A) 9 (B)  $\frac{9}{2}$  (C) 3 (D)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

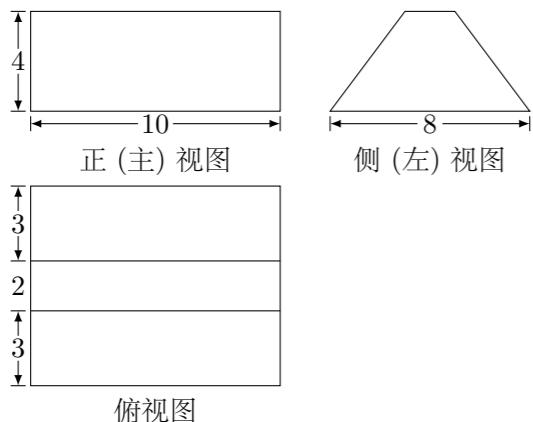
4. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩 (单位: 分). ( )

甲组		乙组
9	0	9
x 2	1	5 y 8
7 4	2	4

已知甲组数据的中位数为 15, 乙组数据的平均数为 16.8, 则  $x, y$  的值分别为 ( )

- (A) 2, 5 (B) 5, 5 (C) 5, 8 (D) 8, 8

5. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $\frac{560}{3}$  (B)  $\frac{580}{3}$  (C) 200 (D) 240

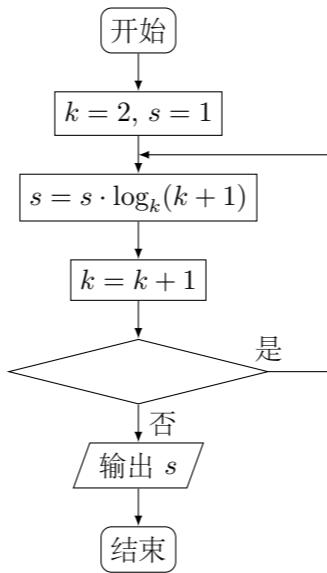
6. 若  $a < b < c$ , 则函数  $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$  的两个零点分别位于区间 ( )

- (A)  $(a, b)$  和  $(b, c)$  内 (B)  $(-\infty, a)$  和  $(a, b)$  内  
 (C)  $(b, c)$  和  $(c, +\infty)$  内 (D)  $(-\infty, a)$  和  $(c, +\infty)$  内

7. 已知圆  $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ , 圆  $C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ ,  $M, N$  分别是圆  $C_1, C_2$  上的动点,  $P$  为  $x$  轴上的动点, 则  $|PM| + |PN|$  的最小值为 ( )

- (A)  $5\sqrt{2} - 4$  (B)  $\sqrt{17} - 1$  (C)  $6 - 2\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{17}$

8. 执行如图所示的程序框图, 如果输出  $s = 3$ , 那么判断框内应填入的条件是 ( )



- (A)  $k \leq 6$  (B)  $k \leq 7$  (C)  $k \leq 8$  (D)  $k \leq 9$

9.  $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$  ( )

- (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D)  $2\sqrt{2} - 1$

10. 在平面上,  $\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{AB_2}$ ,  $|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$ ,  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$ . 若  $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$ , 则  $|\overrightarrow{OA}|$  的取值范围是 ( )

- (A)  $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$  (B)  $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$  (C)  $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}\right]$  (D)  $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \sqrt{2}\right]$

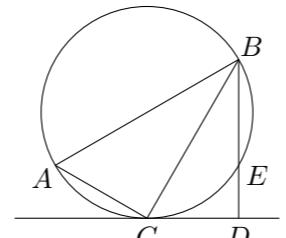
二、填空题

11. 已知复数  $z = \frac{5i}{1+2i}$  ( $i$  是虚数单位), 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.

12. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_1 = 1$ , 公差  $d \neq 0$ ,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列, 则  $S_8 =$  \_\_\_\_\_.

13. 从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组, 则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是 \_\_\_\_\_.(用数字作答)

14. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 20$ , 过  $C$  作  $\triangle ABC$  的外接圆的切线  $CD$ ,  $BD \perp CD$ ,  $BD$  与外接圆交于点  $E$ , 则  $DE$  的长为 \_\_\_\_\_.



15. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以原点  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若极坐标方程为  $\rho \cos \theta = 4$  的直线与曲线  $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$  ( $t$  为参数) 相交于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

16. 若关于实数  $x$  的不等式  $|x-5| + |x+3| < a$  无解, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题

17. 设  $f(x) = a(x-5)^2 + 6 \ln x$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线与  $y$  轴相交于点  $(0, 6)$ .

- (1) 确定  $a$  的值;  
 (2) 求函数  $f(x)$  的单调区间与极值.

18. 某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定: 在一次摸奖中, 摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球, 再从装有 1 个蓝球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球, 根据摸出 4 个球中红球与蓝球的个数, 设一二、三等奖如下:

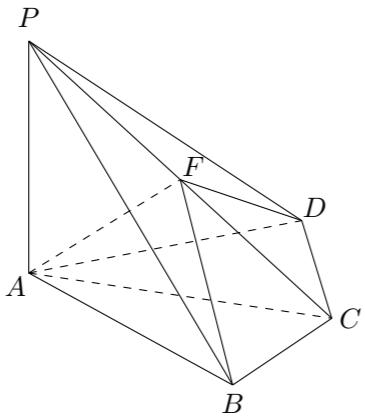
奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级.

- (1) 求一次摸球恰好摸到 1 个红球的概率;  
 (2) 求摸奖者在一次摸奖中获奖金额  $X$  的分布列与期望  $E(X)$ .

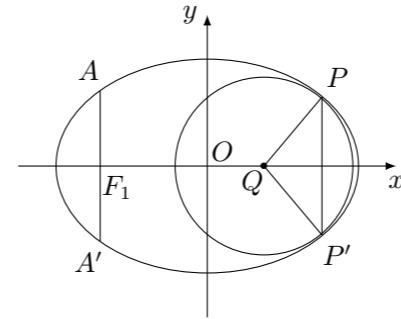
19. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $BC = CD = 2$ ,  $AC = 4$ ,  $\angle ACB = \angle ACD = \frac{\pi}{3}$ ,  $F$  为  $PC$  的中点,  $AF \perp PB$ .

- (1) 求  $PA$  的长;
- (2) 求二面角  $B-AF-D$  的正弦值.



21. 如图, 椭圆的中心为原点  $O$ , 长轴在  $x$  轴上, 离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 过左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于  $A, A'$  两点,  $|AA'| = 4$ .

- (1) 求该椭圆的标准方程;
- (2) 取垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交于不同的两点  $P, P'$ , 过  $P, P'$  作圆心为  $Q$  的圆, 使椭圆上的其余点均在圆  $Q$  外. 若  $PQ \perp P'Q$ , 求圆  $Q$  的标准方程.



20. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 且  $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2$ .

- (1) 求  $C$ ;
- (2) 设  $\cos A \cos B = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ ,  $\frac{\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{5}$ , 求  $\tan \alpha$  的值.

22. 对正整数  $n$ , 记  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $P_n = \left\{ \frac{m}{\sqrt{k}} \mid m \in I_n, k \in I_n \right\}$ .

- (1) 求集合  $P_7$  中元素的个数;
- (2) 若  $P_n$  的子集  $A$  中任意两个元素之和不是整数的平方, 则称  $A$  为“稀疏集”. 求  $n$  的最大值, 使  $P_n$  能分成两个不相交的稀疏集的并.