

2013 年普通高等学校招生考试 (湖南卷)

# 理科数学

## 一、选择题

1. 复数  $z = i \cdot (1+i)$  ( $i$  为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ( )

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 某学校有男、女学生各 500 名. 为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异, 拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查, 则宜采用的抽样方法是 ( )

- (A) 抽签法 (B) 随机数法 (C) 系统抽样法 (D) 分层抽样法

3. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B$  所对的边长分别为  $a, b$ . 若  $2a \sin B = \sqrt{3}b$ , 则角  $A$  等于 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{12}$  (B)  $\frac{\pi}{6}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{3}$

4. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \leq 2x \\ x+y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$ , 则  $x+2y$  的最大值是 ( )

- (A)  $-\frac{5}{2}$  (B) 0 (C)  $\frac{5}{3}$  (D)  $\frac{5}{2}$

5. 函数  $f(x) = 2 \ln x$  的图象与函数  $g(x) = x^2 - 4x + 5$  的图象的交点个数为 ( )

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

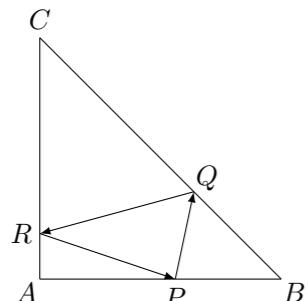
6. 已知  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是单位向量,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . 若向量  $\mathbf{c}$  满足  $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ , 则  $|\mathbf{c}|$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$  (B)  $[\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+2]$   
(C)  $[1, \sqrt{2}+1]$  (D)  $[1, \sqrt{2}+2]$

7. 已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形, 则该正方体的正视图的面积不可能等于 ( )

- (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

8. 在等腰直角三角形  $ABC$  中,  $AB = AC = 4$ , 点  $P$  是边  $AB$  上异于  $A, B$  的一点, 光线从点  $P$  出发, 经  $BC, CA$  反射后又回到点  $P$  (如图). 若光线  $QR$  经过  $\triangle ABC$  的重心, 则  $AP$  等于 ( )



- (A) 2 (B) 1 (C)  $\frac{8}{3}$  (D)  $\frac{4}{3}$

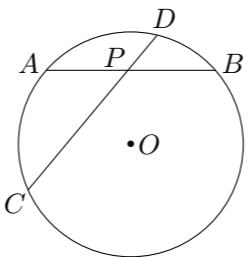
## 二、填空题

9. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若直线  $l: \begin{cases} x = t \\ y = t - a \end{cases}$  ( $t$  为参数) 过椭圆

$$C: \begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数}) \text{ 的右顶点, 则常数 } a \text{ 的值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

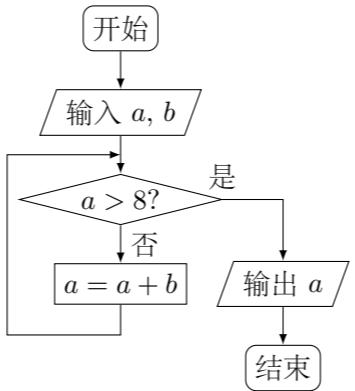
10. 已知  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $a + 2b + 3c = 6$ , 则  $a^2 + 4b^2 + 9c^2$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 如图, 在半径为  $\sqrt{7}$  的  $\odot O$  中, 弦  $AB, CD$  相交于点  $P$ ,  $PA = PB = 2$ ,  $PD = 1$ , 则圆心  $O$  到弦  $CD$  的距离为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



12. 若  $\int_0^T x^2 dx = 9$ , 则常数  $T$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 执行如图所示的程序框图, 如果输入  $a = 1, b = 2$ , 则输出的  $a$  的值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



14. 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两个焦点,  $P$  是  $C$  上一点, 若  $|PF_1| + |PF_2| = 6a$ , 且  $\triangle PF_1F_2$  的最小内角为  $30^\circ$ , 则  $C$  的离心率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 则  
(1)  $a_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ; (2)  $S_1 + S_2 + \dots + S_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16. 设函数  $f(x) = a^x + b^x - c^x$ , 其中  $c > a > 0, b > 0$ .

- (1) 记集合  $M = \{(a, b, c) \mid a, b, c \text{ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 } a = b\}$ , 则  $(a, b, c) \in M$  所对应的  $f(x)$  的零点的取值集合为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

- (2) 若  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三条边长, 则下列结论正确的是  $\underline{\hspace{2cm}}$ . (写出所有正确结论的序号)

- ①  $\forall x \in (-\infty, 1), f(x) > 0$ ;  
②  $\exists x \in \mathbf{R}$ , 使  $a^x, b^x, c^x$  不能构成一个三角形的三条边长;  
③ 若  $\triangle ABC$  为钝角三角形, 则  $\exists x \in (1, 2)$ , 使  $f(x) = 0$ .

## 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $g(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ .

- (1) 若  $\alpha$  是第一象限角, 且  $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$ , 求  $g(\alpha)$  的值;  
(2) 求使  $f(x) \geq g(x)$  成立的  $x$  的取值集合.

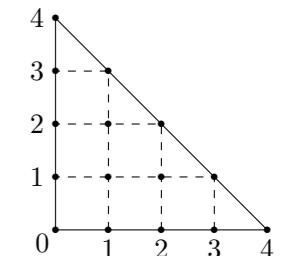
X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

(1) 从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物, 求它们恰好“相

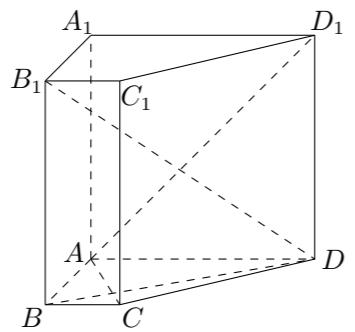
近”的概率;

(2) 从所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量的分布列与数学期望.



19. 如图, 在直棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD \parallel BC$ ,  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AC \perp BD$ ,  $BC = 1$ ,  $AD = AA_1 = 3$ .

- (1) 证明:  $AC \perp B_1D$ ;  
(2) 求直线  $B_1C_1$  与平面  $ACD_1$  所成角的正弦值.



21. 过抛物线  $E: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  作斜率分别为  $k_1, k_2$  的两条不同的直线  $l_1, l_2$ , 且  $k_1 + k_2 = 2$ ,  $l_1$  与  $E$  相交于点  $A, B$ ,  $l_2$  与  $E$  相交于点  $C, D$ . 以  $AB, CD$  为直径的圆  $M$ , 圆  $N$  ( $M, N$  为圆心) 的公共弦所在的直线记为  $l$ .

- (1) 若  $k_1 > 0, k_2 > 0$ , 证明:  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} < 2p^2$ ;  
(2) 若点  $M$  到直线  $l$  的距离的最小值为  $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ , 求抛物线  $E$  的方程.

22. 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \left| \frac{x-a}{x+2a} \right|$ .

- (1) 记  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值为  $g(a)$ , 求  $g(a)$  的表达式;  
(2) 是否存在  $a$ , 使函数  $y = f(x)$  在区间  $(0, 4)$  内的图象上存在两点, 在该两点处的切线相互垂直? 若存在, 求  $a$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

20. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 将从点  $M$  出发沿纵、横方向到达点  $N$  的任一路径称为  $M$  到  $N$  的一条“L 路径”. 如图所示的路径  $MM_1M_2M_3N$  与路径  $MN_1N$  都是  $M$  到  $N$  的“L 路径”. 某地有三个新建的居民区, 分别位于平面  $xOy$  内三点  $A(3, 20)$ ,  $B(-10, 0)$ ,  $C(14, 0)$  处. 现计划在  $x$  轴上方区域 (包含  $x$  轴) 内的某一点  $P$  处修建一个文化中心.

- (1) 写出点  $P$  到居民区  $A$  的“L 路径”长度最小值的表达式 (不要求证明);  
(2) 若以原点  $O$  为圆心, 半径为 1 的圆的内部是保护区, “L 路径”不能进入保护区, 请确定点  $P$  的位置, 使其到三个居民区的“L 路径”长度之和最小.

