

## 文科数学

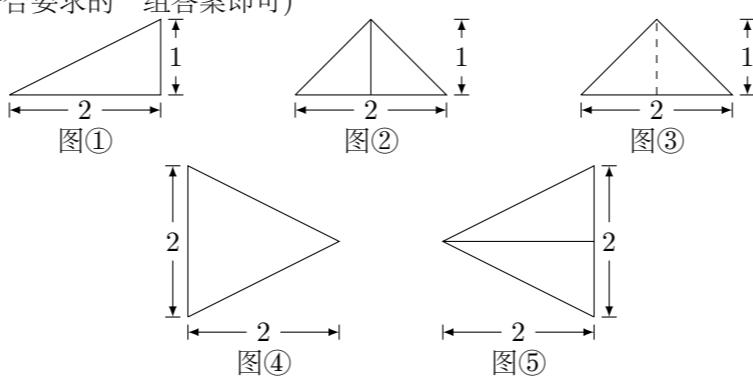
## 一、选择题

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{1, 2\}$ ,  $N = \{3, 4\}$ , 则  $\complement_U(M \cup N) =$  ( )  
 (A)  $\{5\}$  (B)  $\{1, 2\}$  (C)  $\{3, 4\}$  (D)  $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 设  $iz = 4 + 3i$ , 则  $z =$  ( )  
 (A)  $-3 - 4i$  (B)  $-3 + 4i$  (C)  $3 - 4i$  (D)  $3 + 4i$
3. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$ ; 命题  $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geqslant 1$ , 则下列命题中为真命题的是 ( )  
 (A)  $p \wedge q$  (B)  $\neg p \wedge q$  (C)  $p \wedge \neg q$  (D)  $\neg(p \vee q)$
4. 函数  $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$  的最小正周期和最大值分别是 ( )  
 (A)  $3\pi$  和  $\sqrt{2}$  (B)  $3\pi$  和 2 (C)  $6\pi$  和  $\sqrt{2}$  (D)  $6\pi$  和 2
5. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geqslant 4 \\ x-y \leqslant 2 \\ y \leqslant 3 \end{cases}$ , 则  $z = 3x+y$  的最小值为 ( )  
 (A) 18 (B) 10 (C) 6 (D) 4
6.  $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. 在区间  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  随机取一个数, 则取到的数小于  $\frac{1}{3}$  的概率为 ( )  
 (A)  $\frac{3}{4}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{6}$
8. 下列函数中最小值为 4 的是 ( )  
 (A)  $y = x^2 + 2x + 4$  (B)  $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$   
 (C)  $y = 2^x + 2^{2-x}$  (D)  $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$
9. 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则下列函数中是奇函数的是 ( )  
 (A)  $f(x-1)-1$  (B)  $f(x-1)+1$   
 (C)  $f(x+1)-1$  (D)  $f(x+1)+1$
10. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为  $B_1D_1$  的中点, 则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为 ( )  
 (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$
11. 设  $B$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  的上顶点, 点  $P$  在  $C$  上, 则  $|PB|$  的最大值是 ( )  
 (A)  $\frac{5}{2}$  (B)  $\sqrt{6}$  (C)  $\sqrt{5}$  (D) 2

12. 设  $a \neq 0$ , 若  $x=a$  是函数  $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$  的极大值点, 则 ( )  
 (A)  $a < b$  (B)  $a > b$  (C)  $ab < a^2$  (D)  $ab > a^2$

## 二、填空题

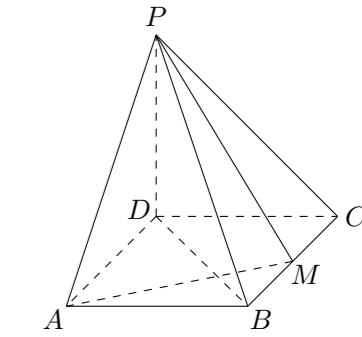
13. 已知向量  $\mathbf{a} = (2, 5)$ ,  $\mathbf{b} = (\lambda, 4)$ , 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.  
 14. 双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  的右焦点到直线  $x + 2y - 8 = 0$  的距离为 \_\_\_\_\_.  
 15. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a^2 + c^2 = 3ac$ , 则  $b =$  \_\_\_\_\_.  
 16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为 \_\_\_\_\_. (写出符合要求的一组答案即可)



## 三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:
- |     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 旧设备 | 9.8  | 10.3 | 10.0 | 10.2 | 9.9  | 9.8  | 10.0 | 10.1 | 10.2 | 9.7  |
| 新设备 | 10.1 | 10.4 | 10.1 | 10.0 | 10.1 | 10.3 | 10.6 | 10.5 | 10.4 | 10.5 |
- 旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ , 样本方差分别记为  $s_1^2$  和  $s_2^2$ .
- (1) 求  $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$ ;  
 (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果  $\bar{y} - \bar{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ , 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是矩形,  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $M$  为  $BC$  的中点, 且  $PB \perp AM$ .
- (1) 证明: 平面  $PAM \perp$  平面  $PBD$ ;  
 (2) 若  $PD = DC = 1$ , 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.



20. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  到准线的距离为 2.  
(1) 求  $C$  的方程;  
(2) 已知  $O$  为坐标原点, 点  $P$  在  $C$  上, 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$ , 求直线  $OQ$  斜率的最大值.
21. 设函数  $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$ .  
(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;  
(2) 求曲线  $y = f(x)$  过坐标原点的切线与曲线  $y = f(x)$  的公共点的坐标.
22. 在直角坐标系  $xOy$  中,  $\odot C$  的圆心为  $C(2, 1)$ , 半径为 1.  
(1) 写出  $\odot C$  的一个参数方程;  
(2) 过点  $F(4, 1)$  作  $\odot C$  的两条切线, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.
23. 已知函数  $f(x) = |x - a| + |x + 3|$ .  
(1) 当  $a = 1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;  
(2) 若  $f(x) > -a$ , 求  $a$  的取值范围.