

## 数学试卷

## 一、选择题

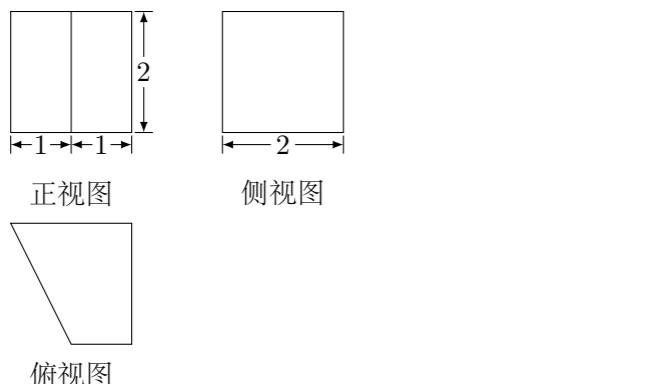
1. 已知全集
- $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ,
- $A = \{1, 3\}$
- , 则
- $\complement_U A =$
- ( )

(A)  $\emptyset$  (B)  $\{1, 3\}$  (C)  $\{2, 4, 5\}$  (D)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 

2. 双曲线
- $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$
- 的焦点坐标是 ( )

(A)  $(-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)$  (B)  $(-2, 0), (2, 0)$   
(C)  $(0, -\sqrt{2}), (0, \sqrt{2})$  (D)  $(0, -2), (0, 2)$ 

3. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积 (单位:
- $\text{cm}^3$
- ) 是 ( )

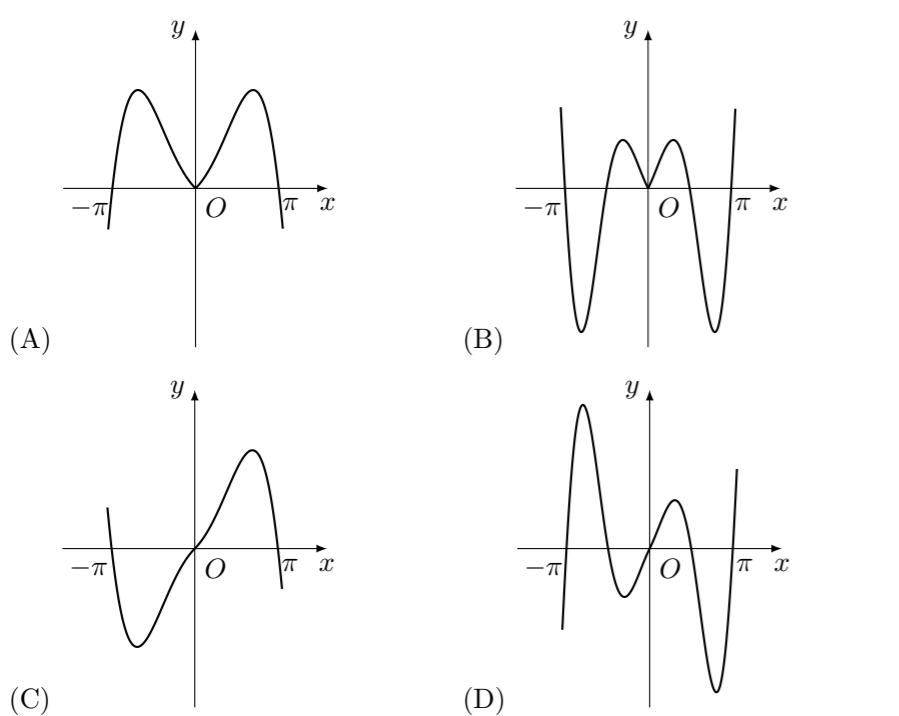


(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

4. 复数
- $\frac{2}{1-i}$
- (
- $i$
- 为虚数单位) 的共轭复数是 ( )

(A)  $1+i$  (B)  $1-i$  (C)  $-1+i$  (D)  $-1-i$ 

5. 函数
- $y = 2^{|x|} \sin 2x$
- 的图象可能是 ( )



6. 已知平面
- $\alpha$
- , 直线
- $m, n$
- 满足
- $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$
- , 则 "
- $m // n$
- " 是 "
- $m // \alpha$
- " 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设
- $0 < p < 1$
- , 随机变量
- $\xi$
- 的分布列是

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当  $p$  在  $(0, 1)$  内增大时, ( )(A)  $D(\xi)$  减小 (B)  $D(\xi)$  增大  
(C)  $D(\xi)$  先减小后增大 (D)  $D(\xi)$  先增大后减小

8. 已知四棱锥
- $S-ABCD$
- 的底面是正方形, 侧棱长均相等,
- $E$
- 是线段
- $AB$
- 上的点 (不含端点), 设
- $SE$
- 与
- $BC$
- 所成的角为
- $\theta_1$
- ,
- $SE$
- 与平面
- $ABCD$
- 所成的角为
- $\theta_2$
- , 二面角
- $S-AB-C$
- 的平面角为
- $\theta_3$
- , 则 ( )

(A)  $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$  (B)  $\theta_3 \leq \theta_2 \leq \theta_1$  (C)  $\theta_1 \leq \theta_3 \leq \theta_2$  (D)  $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \theta_1$ 

9. 已知
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$
- 是平面向量,
- $\mathbf{e}$
- 是单位向量. 若非零向量
- $\mathbf{a}$
- 与
- $\mathbf{e}$
- 的夹角为
- $\frac{\pi}{3}$
- , 向量
- $\mathbf{b}$
- 满足
- $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{e} \cdot \mathbf{b} + 3 = 0$
- , 则
- $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$
- 的最小值是 ( )

(A)  $\sqrt{3} - 1$  (B)  $\sqrt{3} + 1$  (C) 2 (D)  $2 - \sqrt{3}$ 

10. 已知
- $a_1, a_2, a_3, a_4$
- 成等比数列, 且
- $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \ln(a_1 + a_2 + a_3)$
- . 若
- $a_1 > 1$
- , 则 ( )

(A)  $a_1 < a_3, a_2 < a_4$  (B)  $a_1 > a_3, a_2 < a_4$   
(C)  $a_1 < a_3, a_2 > a_4$  (D)  $a_1 > a_3, a_2 > a_4$ 

## 二、填空题

11. 我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题: “今有鸡翁一, 值钱五; 鸡母一, 值钱三; 鸡雏三, 值钱一. 凡百钱, 买鸡百只, 问鸡翁、母、雏各几何?”设鸡翁, 鸡母, 鸡雏个数分别为
- $x, y, z$
- , 则
- $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$
- ,

当  $z = 81$  时,  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $y = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 若
- $x, y$
- 满足约束条件
- $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$
- , 则
- $z = x + 3y$
- 的最小值是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- , 最大值是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- .

13. 在
- $\triangle ABC$
- 中, 角
- $A, B, C$
- 所对的边分别为
- $a, b, c$
- . 若
- $a = \sqrt{7}$
- ,
- $b = 2$
- ,
- $A = 60^\circ$
- , 则
- $\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$
- ,
- $c = \underline{\hspace{2cm}}$
- .

14. 二项式
- $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$
- 的展开式的常数项是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- .

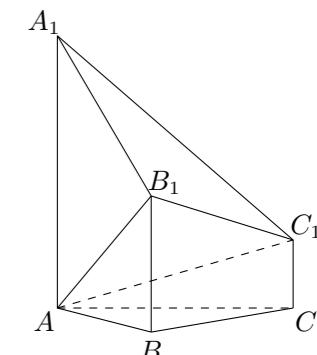
15. 已知
- $\lambda \in \mathbf{R}$
- , 函数
- $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq \lambda \\ x^2 - 4x + 3, & x < \lambda \end{cases}$
- , 当
- $\lambda = 2$
- 时, 不等式
- $f(x) < 0$
- 的解集是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- . 若函数
- $f(x)$
- 恰有 2 个零点, 则
- $\lambda$
- 的取值范围是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- .

16. 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取 2 个数字, 从 0, 2, 4, 6 中任取 2 个数字, 一共可以组成
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- 个没有重复数字的四位数. (用数字作答)

17. 已知点
- $P(0, 1)$
- , 椭圆
- $\frac{x^2}{4} + y^2 = m$
- (
- $m > 1$
- ) 上两点
- $A, B$
- 满足
- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$
- , 则当
- $m = \underline{\hspace{2cm}}$
- 时, 点
- $B$
- 横坐标的绝对值最大.

## 三、解答题

18. 已知角
- $\alpha$
- 的顶点与原点
- $O$
- 重合, 始边与
- $x$
- 轴的非负半轴重合, 它的终边过点
- $P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
- .

(1) 求  $\sin(\alpha + \pi)$  的值;  
(2) 若角  $\beta$  满足  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$ , 求  $\cos \beta$  的值.

20. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ , 且  $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ,  $a_4 + 2$  是  $a_3$ ,  $a_5$  的等差中项. 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ , 数列  $\{(b_{n+1} - b_n)a_n\}$  的前  $n$  项和为  $2n^2 + n$ .
- 求  $q$  的值;
  - 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.
21. 如图, 已知点  $P$  是  $y$  轴左侧 (不含  $y$  轴) 一点, 抛物线  $C: y^2 = 4x$  上存在不同的两点  $A, B$  满足  $PA, PB$  的中点均在  $C$  上.
- 设  $AB$  中点为  $M$ , 证明:  $PM$  垂直于  $y$  轴;
  - 若  $P$  是半椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x < 0)$  上的动点, 求  $\triangle PAB$  面积的取值范围.
22. 已知函数  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .
- 若  $f(x)$  在  $x = x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$  处导数相等, 证明:  $f(x_1) + f(x_2) > 8 - 8 \ln 2$ ;
  - 若  $a \leq 3 - 4 \ln 2$ , 证明: 对于任意  $k > 0$ , 直线  $y = kx + a$  与曲线  $y = f(x)$  有唯一公共点.

