

理科数学

一、选择题

1. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 映射 $f : A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 (x, y) 映射成集合 B 中的元素 $(x + y, x - y)$, 则在映射 f 下, 象 $(2, 1)$ 的原象是 ()

(A) $(3, 1)$ (B) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (C) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (D) $(1, 3)$

2. 在复平面内, 把复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 所得向量对应的复数是 ()

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{3}i$ (C) $\sqrt{3} - 3i$ (D) $3 + \sqrt{3}i$

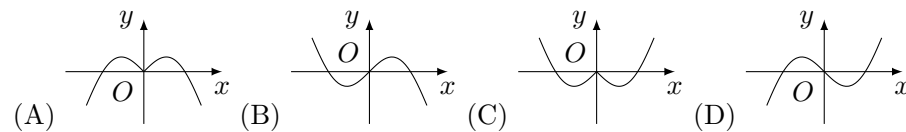
3. 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, 这个长方体对角线的长是 ()

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $\sqrt{6}$

4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是任意的非零平面向量, 且相互不共线, 则① $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = 0$; ② $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$; ③ $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$ 不与 \mathbf{c} 垂直; ④ $(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 9|\mathbf{a}|^2 - 4|\mathbf{b}|^2$ 中, 是真命题的有 ()

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ②④

5. 函数 $y = -x \cos x$ 的部分图象是 ()



6. 《中华人民共和国个人所得税法》规定, 公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税, 超过 800 元的部分为全月应纳税所得额, 此项税款按下表分段累进计算:

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

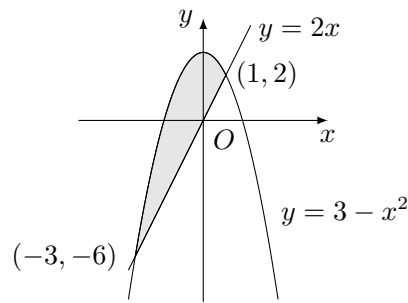
某人一月份交纳此项税款 26.78 元, 则他的当月工资、薪金所得介于 ()

(A) 800 - 900 元 (B) 900 - 1200 元
(C) 1200 - 1500 元 (D) 1500 - 2800 元

7. 若 $a > b > 1$, $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$, $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$, $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则

(A) $R < P < Q$ (B) $P < Q < R$ (C) $Q < P < R$ (D) $P < R < Q$

8. 图中阴影部分的面积是 ()



(A) $2\sqrt{3}$ (B) $9 - 2\sqrt{3}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{35}{3}$

9. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是 ()

(A) $\frac{1+2\pi}{2\pi}$ (B) $\frac{1+4\pi}{4\pi}$ (C) $\frac{1+2\pi}{\pi}$ (D) $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

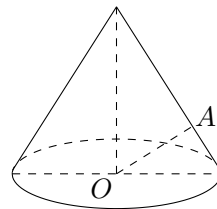
10. 过原点的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ()

(A) $y = \sqrt{3}x$ (B) $y = -\sqrt{3}x$ (C) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ (D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

11. 过抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P 、 Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p 、 q , 则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于 ()

(A) $2a$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) $4a$ (D) $\frac{4}{a}$

12. 如图, OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线, OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为 ()



(A) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\arccos \frac{1}{2}$ (C) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

二、填空题

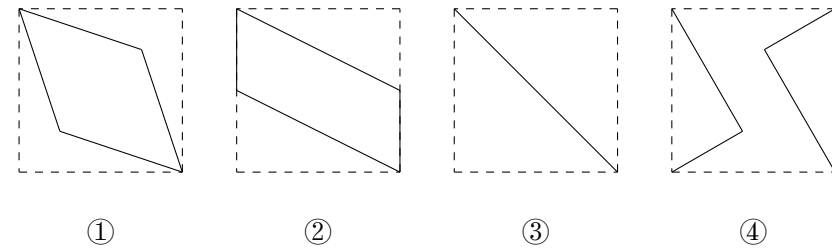
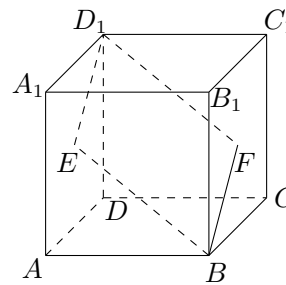
13. 某厂生产电子元件, 其产品的次品率为 5%, 现从一批产品中任意地连续取出 2 件, 其中次品 ξ 的概率分布是:

ξ	0	1	2
p			

14. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点 F_1 、 F_2 , 点 P 为其上的动点, 当 $\angle F_1 P F_2$ 为钝角时, 点 P 横坐标的取值范围是_____.

15. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则它的通项公式是 $a_n =$ _____.

16. 如图, E 、 F 分别为正方体面 ADD_1A_1 、面 BCC_1B_1 的中心, 则四边形 BFD_1E 在该正方体的面上的射影可能是_____. (要求: 把可能的图序号都填上)



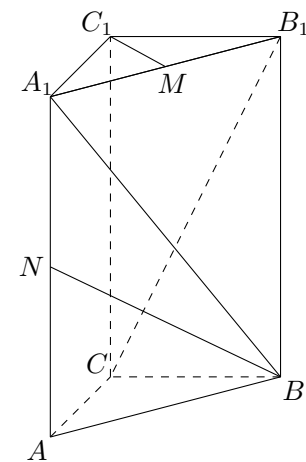
三、解答题

17. 甲、乙二人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题 6 个, 判断题 4 个甲、乙二人依次各抽一题.

- (1) 甲抽到选择题、乙抽到判断题的概率是多少?
(2) 甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率是多少?

18. 【甲】如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB = 1$, $\angle BCA = 90^\circ$, 棱 $AA_1 = 2$, M 、 N 分别是 A_1B_1 、 A_1A 的中点.

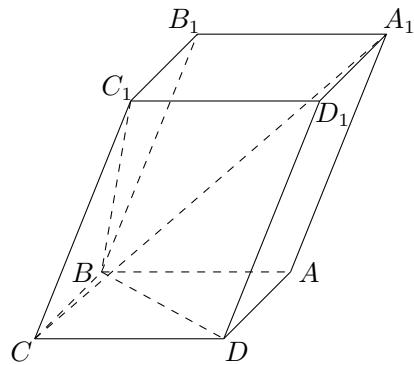
- (1) 求 \overrightarrow{BN} 的长;
(2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle$ 的值;
(3) 求证 $A_1B \perp C_1M$.



【乙】如图, 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 上菱形, 且 $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD$.

(1) 证明: $C_1C \perp BD$;

(2) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时, 能使 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD ? 请给出证明.

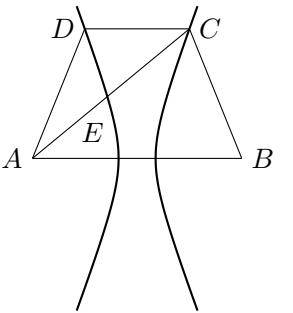


20. 设函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$, 其中 $a > 0$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 1$;

(2) 证明: 当 $a \geq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调函数.

22. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中 $|AB| = 2|CD|$, 点 E 分有向线段 \overrightarrow{AC} 所成的比为 λ , 双曲线过 C 、 D 、 E 三点, 且以 A 、 B 为焦点, 当 $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$ 时, 求双曲线离心率 e 的取值范围.



19. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_7 = 7$, $S_{15} = 75$, T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

21. 用总长 14.8 m 的钢条制成一个长方体容器的框架, 如果所制做容器的底面的一边比另一边长 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 并求出它的最大容积