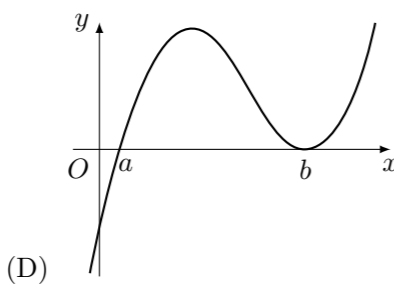
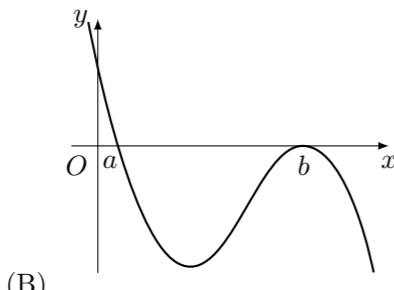
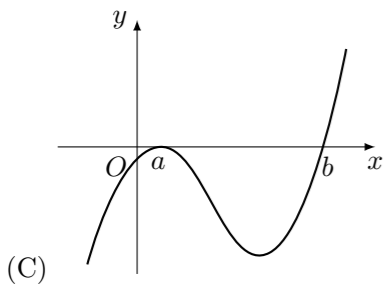
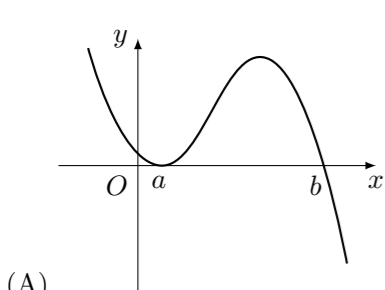


# 理科数学

## 一、选择题

- $i$  是虚数单位, 若  $\frac{1+7i}{2-i} = a+bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ), 则乘积  $ab$  的值是 ( )  
(A) -15 (B) -3 (C) 3 (D) 15
- 若集合  $A = \{x | |2x-1| < 3\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{2x+1}{3-x} < 0\right\}$ , 则  $A \cap B$  是 ( )  
(A)  $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } 2 < x < 3\right\}$   
(B)  $\{x | 2 < x < 3\}$   
(C)  $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$   
(D)  $\left\{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2}\right\}$
- 下列曲线中离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  的是 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{10} = 1$
- 下列选项中,  $p$  是  $q$  的必要不充分条件的是 ( )  
(A)  $p: a+c > b+d, q: a > b$  且  $c > d$   
(B)  $p: a > 1, b > 1, q: f(x) = a^x - b$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象不过第二象限  
(C)  $p: x = 1, q: x^2 = x$   
(D)  $p: a > 1, q: f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在  $(0, +\infty)$  上为增函数
- 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $a_1 + a_3 + a_5 = 105$ ,  $a_2 + a_4 + a_6 = 99$ . 以  $S_n$  表示  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则使得  $S_n$  达到最大值的  $n$  是 ( )  
(A) 21 (B) 20 (C) 19 (D) 18
- 设  $a < b$ , 函数  $y = (x-a)^2(x-b)$  的图象可能是 ( )



- 若不等式组  $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 4 \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$  所表示的平面区域被直线  $y = kx + \frac{4}{3}$  分为面积相等的两部分, 则  $k$  的值是 ( )

(A)  $\frac{7}{3}$  (B)  $\frac{3}{7}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$

- 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$  ( $\omega > 0$ ),  $y = f(x)$  的图象与直线  $y = 2$  的两个相邻交点的距离等于  $\pi$ , 则  $f(x)$  的单调递增区间是 ( )

(A)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$  (B)  $\left[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}$

(C)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in \mathbf{Z}$  (D)  $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbf{Z}$

- 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上满足  $f(x) = 2f(2-x) - x^2 + 8x - 8$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程是 ( )

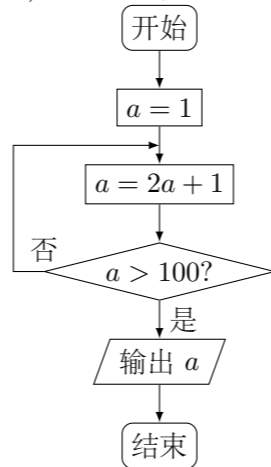
(A)  $y = 2x - 1$  (B)  $y = x$  (C)  $y = 3x - 2$  (D)  $y = -2x + 3$

- 考察正方体 6 个面的中心, 甲从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 乙也从这 6 个点中任意选两个点连成直线, 则所得的两条直线相互平行但不重合的概率等于 ( )

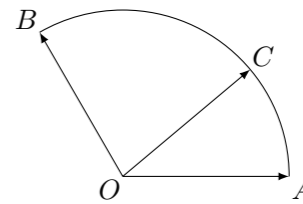
(A)  $\frac{1}{75}$  (B)  $\frac{2}{75}$  (C)  $\frac{3}{75}$  (D)  $\frac{4}{75}$

## 二、填空题

- 若随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(X \leq \mu) =$ \_\_\_\_\_.
- 以直角坐标系的原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴, 并在两种坐标系中取相同的长度单位. 已知直线的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ), 它与曲线  $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \alpha \\ y = 2 + 2 \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数) 相交于两点  $A$  和  $B$ , 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.
- 程序框图 (即算法流程图) 如图所示, 其输出结果是\_\_\_\_\_.



- 给定两个长度为 1 的平面向量  $\vec{OA}$  和  $\vec{OB}$ , 它们的夹角为  $120^\circ$ . 如图所示, 点  $C$  在以  $O$  为圆心的圆弧  $\widehat{AB}$  上变动. 若  $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ , 其中  $x, y \in \mathbf{R}$ , 则  $x+y$  的最大值是\_\_\_\_\_.



- 对于四面体  $ABCD$ , 下列命题正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)

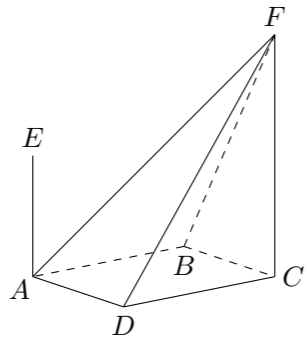
- 相对棱  $AB$  与  $CD$  所在的直线异面;
- 由顶点  $A$  作四面体的高, 其垂足是  $\triangle BCD$  的三条高线的交点;
- 若分别作  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的边  $AB$  上的高, 则这两条高所在直线异面;
- 分别作三组相对棱中点的连线, 所得的三条线段相交于一点;
- 最长棱必有某个端点, 由它引出的另两条棱的长度之和大于最长棱.

## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin(C-A) = 1$ ,  $\sin B = \frac{1}{3}$ .  
(1) 求  $\sin A$  的值;  
(2) 设  $AC = \sqrt{6}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

- 某地有  $A, B, C, D$  四人先后感染了甲型 H1N1 流感, 其中只有  $A$  到过疫区.  $B$  肯定是受  $A$  感染的. 对于  $C$ , 因为难以断定他是受  $A$  还是受  $B$  感染的, 于是假定他受  $A$  和受  $B$  感染的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 同样也假定  $D$  受  $A, B$  和  $C$  感染的概率都是  $\frac{1}{3}$ . 在这种假定之下,  $B, C, D$  中直接受  $A$  感染的人数  $X$  就是一个随机变量. 写出  $X$  的分布列 (不要求写出计算过程), 并求  $X$  的均值 (即数学期望).

18. 如图, 四棱锥  $F-ABCD$  的底面  $ABCD$  是菱形, 其对角线  $AC = 2$ ,  $BD = \sqrt{2}$ ,  $AE$ 、 $CF$  都与平面  $ABCD$  垂直,  $AE = 1$ ,  $CF = 2$ .
- (1) 求二面角  $B-AF-D$  的大小;
- (2) 求四棱锥  $E-ABCD$  与四棱锥  $F-ABCD$  公共部分的体积.



20. 点  $P(x_0, y_0)$  在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上,  $x_0 = a \cos \beta$ ,  $y_0 = b \sin \beta$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . 直线  $l_2$  与直线  $l_1: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$  垂直,  $O$  为坐标原点, 直线  $OP$  的倾斜角为  $\alpha$ , 直线  $l_2$  的倾斜角为  $\gamma$ .
- (1) 证明: 点  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  与直线  $l_1$  的唯一交点;
- (2) 证明:  $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$ ,  $\tan \gamma$  构成等比数列.
21. 首项为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n^2 + 3)$ ,  $n \in \mathbf{N}_+$ .
- (1) 证明: 若  $a_1$  为奇数, 则对一切  $n \geq 2$ ,  $a_n$  都是奇数;
- (2) 若对一切  $n \in \mathbf{N}_+$  都有  $a_{n+1} > a_n$ , 求  $a_1$  的取值范围.

19. 已知函数  $f(x) = x - \frac{2}{x} + a(2 - \ln x)$ , ( $a > 0$ ). 讨论  $f(x)$  的单调性.