

数学试卷

一、填空题

- 函数 $f(x) = x^2 + 1$ ($x \leq 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 若复数 z 满足方程 $\bar{z}i = i - 1$ (i 是虚数单位), 则 $z =$ _____.
- 函数 $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ 的最小正周期为_____.
- 二项式 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项的值为_____.
- 若双曲线的一个顶点坐标为 $(3, 0)$, 焦距为 10, 则它的标准方程为_____.
- 圆心在直线 $y = x$ 上且与 x 轴相切于点 $(1, 0)$ 的圆的方程为_____.
- 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n =$ _____.
- 若向量 α, β 满足 $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$, 则 α 与 β 所成角的大小为_____.
- 在大小相同的 6 个球中, 2 个红球, 4 个是白球. 若从中任意选取 3 个, 则所选的 3 个球中至少有 1 个红球的概率是_____. (结果用分数表示)
- 若记号“ $*$ ”表示求两个实数 a 与 b 的算术平均数的运算, 即 $a * b = \frac{a+b}{2}$, 则两边均含有运算符号“ $*$ ”和“ $+$ ”, 且对于任意 3 个实数 a, b, c 都能成立的一个等式可以是_____.
- 关于 x 的函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 有以下命题:
 - (1) 对任意的 φ , $f(x)$ 都是非奇非偶函数;
 - (2) 不存在 φ , 使 $f(x)$ 既是奇函数, 又是偶函数;
 - (3) 存在 φ , 使 $f(x)$ 是奇函数;
 - (4) 对任意的 φ , $f(x)$ 都不是偶函数.
 其中一个假命题的序号是_____. 因为当 $\varphi =$ _____时, 该命题的结论不成立.
- 甲、乙两人于同一天分别携款 1 万元到银行储蓄, 甲存五年期定期储蓄, 年利率为 2.88%. 乙存一年期定期储蓄, 年利率为 2.25%, 并在每年到期时将本息续存一年期定期储蓄. 按规定每次计息时, 储户须交纳利息的 20% 作为利息税, 若存满五年后两人同时从银行取出存款, 则甲与乙所得本息之和的差为_____元. (假定利率五年内保持不变, 结果精确到 1 分)

二、选择题

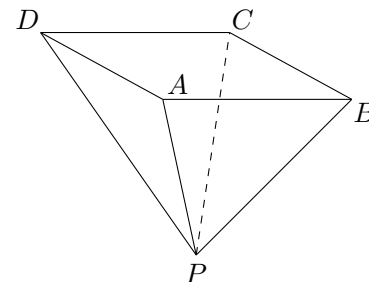
- 若 a, b 为实数, 则 $a > b > 0$ 是 $a^2 > b^2$ 的 ()
 - (A) 充分不必要条件
 - (B) 必要不充分条件
 - (C) 充要条件
 - (D) 既非充分条件也非必要条件
- 若直线 $x = 1$ 的倾斜角为 α , 则 α ()
 - (A) 等于 0
 - (B) 等于 $\frac{\pi}{4}$
 - (C) 等于 $\frac{\pi}{2}$
 - (D) 不存在

- 若有平面 α 与 β , 且 $\alpha \cap \beta = l, \alpha \perp \beta, P \in \alpha, P \notin l$, 则下列命题中的假命题为 ()
 - (A) 过点 P 且垂直于 α 的直线平行于 β
 - (B) 过点 P 且垂直于 l 的平面垂直于 β
 - (C) 过点 P 且垂直于 β 的直线在 α 内
 - (D) 过点 P 且垂直于 l 的直线在 α 内
- 若数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的值各异, 且 $a_{n+8} = a_n$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}$ 都成立, 则下列数列中可取遍 $\{a_n\}$ 前 8 项值的数列为 ()
 - (A) $\{a_{2k+1}\}$
 - (B) $\{a_{3k+1}\}$
 - (C) $\{a_{4k+1}\}$
 - (D) $\{a_{6k+1}\}$

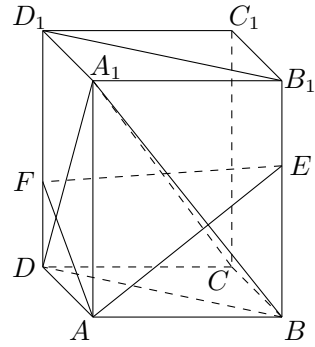
三、解答题

- 已知 \mathbf{R} 为全集, $A = \left\{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geq -2\right\}, B = \left\{x \mid \frac{5}{x+2} \geq 1\right\}$, 求 $\bar{A} \cap B$.
- 已知 $\frac{2\sin^2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \tan \alpha} = k$ ($\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 试用 k 表示 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值.

- 用一块钢锭浇铸一个厚度均匀, 且全面积为 2 平方米的正四棱锥形有盖容器 (如图), 设容器的高为 h 米, 盖子边长为 a 米.
 - (1) 求 a 关于 h 的函数解析式;
 - (2) 设容器的容积为 V 立方米, 则当 h 为何值时, V 最大? 求出 V 的最大值.
 注: 求解本题时, 不计容器的厚度.



20. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 、 F 分别 BB_1 、 DD_1 上, 且 $AE \perp A_1B$, $AF \perp A_1D$.
- (1) 求证: $A_1C \perp$ 平面 AEF ;
- (2) 若规定两个平面所成的角是这两个平面所组成的二面角中的锐角 (或直角), 则在空间中有定理: 若两条直线分别垂直于两个平面, 则这两条直线所成的角与这两个平面所成的角相等. 试根据上述定理, 在 $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$ 时, 求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成的角的大小. (用反三角函数值表示)



21. 已知椭圆 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$, 点 $P(a, b)$ 的坐标满足 $a^2 + \frac{b^2}{2} \leq 1$. 过点 P 的直线 l 与椭圆交于 A 、 B 两点, 点 Q 为线段 AB 的中点, 求:
- (1) 点 Q 的轨迹方程;
- (2) 点 Q 的轨迹与坐标轴的交点的个数.
22. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, S_n 为它的前 n 项和.
- (1) 用 S_n 表示 S_{n+1} ;
- (2) 是否存在自然数 c 和 k , 使得 $\frac{S_{k+1} - c}{S_k - c} > 2$ 成立.