

## 文科数学

## 一、选择题

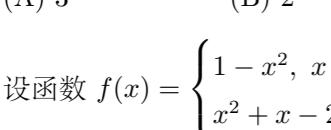
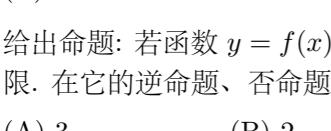
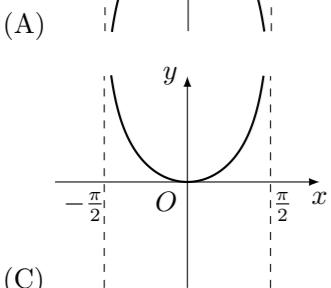
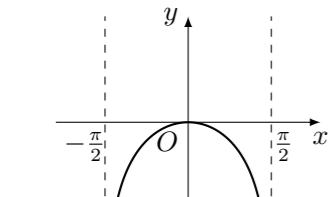
1. 满足  $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 且  $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$  的集合  $M$  的个数是 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设  $z$  的共轭复数是  $\bar{z}$ , 或  $z + \bar{z} = 4$ ,  $z \cdot \bar{z} = 8$ , 则  $\frac{\bar{z}}{z}$  等于 ( )

(A) i (B) -i (C)  $\pm 1$  (D)  $\pm i$

3. 函数  $y = \ln \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象是 ( )



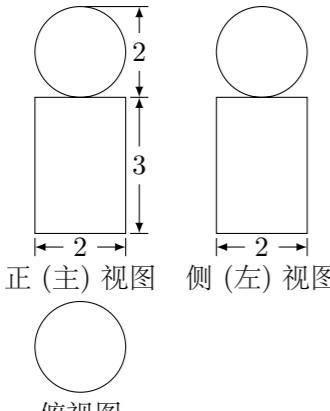
4. 给出命题: 若函数  $y = f(x)$  是幂函数, 则函数  $y = f(x)$  的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$  的值为 ( )

(A)  $\frac{15}{16}$  (B)  $-\frac{27}{16}$  (C)  $\frac{8}{9}$  (D) 18

6. 如图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是 ( )



(A)  $9\pi$  (B)  $10\pi$  (C)  $11\pi$  (D)  $12\pi$

7. 不等式  $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2$  的解集是 ( )

(A)  $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$   
(C)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$  (D)  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$

8. 已知  $a, b, c$  为  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边, 向量  $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1)$ ,  $\mathbf{n} = (\cos A, \sin A)$ . 若  $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ , 且  $a \cos B + b \cos A = c \sin C$ , 则角  $A, B$  的大小分别为 ( )

(A)  $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  (C)  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  (D)  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

9. 从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩, 统计如表, 则这 100 人成绩的标准差为 ( )

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$  (C) 3 (D)  $\frac{8}{5}$

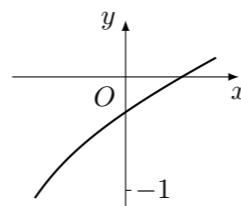
10. 已知  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$ , 则  $\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right)$  的值是 ( )

(A)  $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$  (B)  $\frac{2\sqrt{3}}{5}$  (C)  $-\frac{4}{5}$  (D)  $\frac{4}{5}$

11. 若圆  $C$  的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线  $4x - 3y = 0$  和  $x$  轴相切, 则该圆的标准方程是 ( )

(A)  $(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = 1$  (B)  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$   
(C)  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$  (D)  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$

12. 已知函数  $f(x) = \log_a(2^x + b - 1)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的图象如图所示, 则  $a, b$  满足的关系是 ( )

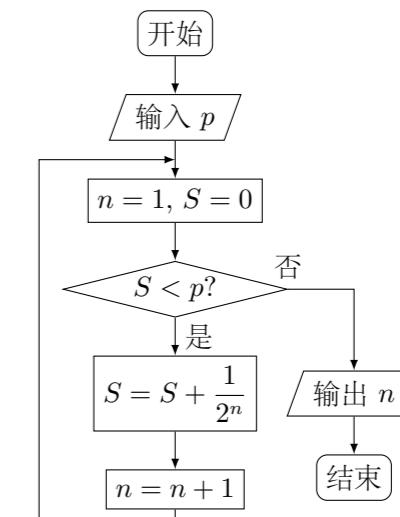


(A)  $0 < a^{-1} < b < 1$  (B)  $0 < b < a^{-1} < 1$   
(C)  $0 < b^{-1} < a < -1$  (D)  $0 < a^{-1} < b^{-1} < 1$

## 二、填空题

13. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ . 以圆  $C$  与坐标轴的交点分别作为双曲线的一个焦点和顶点, 则适合上述条件的双曲线的标准方程为\_\_\_\_\_.

14. 执行下面的程序框图, 若  $p = 0.8$ , 则输出的  $n =$ \_\_\_\_\_.



15. 已知  $f(3^x) = 4x \log_2 3 + 233$ , 则  $f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^8)$  的值等于\_\_\_\_\_.

16. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 5x - y - 10 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi, \omega > 0$ ) 为偶函数, 且函数  $y = f(x)$  图象的两相邻对称轴间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ .

(1) 求  $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$  的值;

(2) 将函数  $y = f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位后, 得到函数  $y = g(x)$  的图象, 求  $g(x)$  的单调递减区间.

18. 现有 8 名奥运会志愿者, 其中志愿者  $A_1, A_2, A_3$  通晓日语,  $B_1, B_2, B_3$  通晓俄语,  $C_1, C_2$  通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名, 组成一个小组.

- (1) 求  $A_1$  被选中的概率;  
(2) 求  $B_1$  和  $C_1$  不全被选中的概率.

20. 将数列  $\{a_n\}$  中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

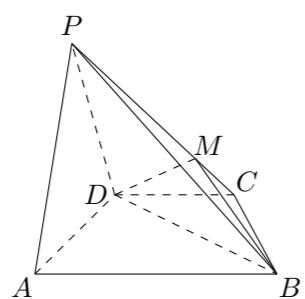
$a_1$			
$a_2$	$a_3$		
$a_4$	$a_5$	$a_6$	
$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
.....			

记表中的第一列数  $a_1, a_2, a_4, a_7, \dots$  构成的数列为  $\{b_n\}$ ,  $b_1 = a_1 = 1$ .  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 且满足  $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1$  ( $n \geq 2$ ).

- (1) 证明数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  成等差数列, 并求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;  
(2) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当  $a_{81} = -\frac{4}{91}$  时, 求上表中第  $k$  ( $k \geq 3$ ) 行所有项和的和.

19. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $\triangle PAD$  是等边三角形, 已知  $BD = 2AD = 8$ ,  $AB = 2DC = 4\sqrt{5}$ .

- (1) 设  $M$  是  $PC$  上的一点, 证明: 平面  $MBD \perp$  平面  $PAD$ ;  
(2) 求四棱锥  $P-ABCD$  的体积.



21. 设函数  $f(x) = x^2 e^{x-1} + ax^3 + bx^2$ , 已知  $x = -2$  和  $x = 1$  为  $f(x)$  的极值点.

- (1) 求  $a$  和  $b$  的值;  
(2) 讨论  $f(x)$  的单调性;  
(3) 设  $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ , 试比较  $f(x)$  与  $g(x)$  的大小.

22. 已知曲线  $C_1: \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 所围成的封闭图形的面积为  $4\sqrt{5}$ , 曲线  $C_1$  的内切圆半径为  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ . 记  $C_2$  为以曲线  $C_1$  与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

- (1) 求椭圆  $C_2$  的标准方程;  
(2) 设  $AB$  是过椭圆  $C_2$  中心的任意弦,  $l$  是线段  $AB$  的垂直平分线.  $M$  是  $l$  上异于椭圆中心的点.  
① 若  $|MO| = \lambda |OA|$  ( $O$  为坐标原点), 当点  $A$  在椭圆  $C_2$  上运动时, 求点  $M$  的轨迹方程;  
② 若  $M$  是  $l$  与椭圆  $C_2$  的交点, 求  $\triangle AMB$  的面积的最小值.