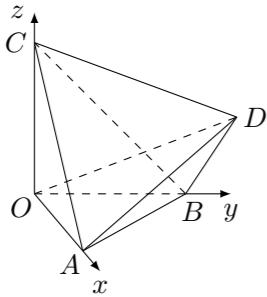


# 理科数学

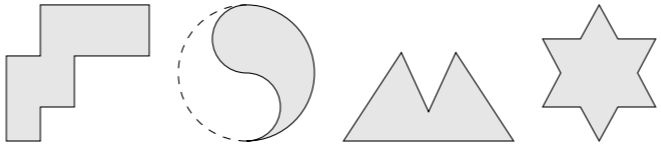
## 一、选择题

- 若复数  $z = (x^2 - 1) + (x - 1)i$  为纯虚数, 则实数  $x$  的值为 ( )  
(A)  $-1$  (B)  $0$  (C)  $1$  (D)  $-1$  或  $1$
- 函数  $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$  的定义域为 ( )  
(A)  $(-4, -1)$  (B)  $(-4, 1)$  (C)  $(-1, 1)$  (D)  $(-1, 1]$
- 已知全集  $U = A \cup B$  中有  $m$  个元素,  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$  中有  $n$  个元素. 若  $A \cap B$  非空, 则  $A \cap B$  的元素个数为 ( )  
(A)  $mn$  (B)  $m + n$  (C)  $n - m$  (D)  $m - n$
- 若函数  $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , 则  $f(x)$  的最大值为 ( )  
(A)  $1$  (B)  $2$  (C)  $\sqrt{3} + 1$  (D)  $\sqrt{3} + 2$
- 设函数  $f(x) = g(x) + x^2$ , 曲线  $y = g(x)$  在点  $(1, g(1))$  处的切线方程为  $y = 2x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处切线的斜率为 ( )  
(A)  $4$  (B)  $-\frac{1}{4}$  (C)  $2$  (D)  $-\frac{1}{2}$
- 过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点  $F_1$  作  $x$  轴的垂线交椭圆于点  $P, F_2$  为右焦点, 若  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ , 则椭圆的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{3}$
- $(1 + ax + by)^n$  展开式中不含  $x$  的项的系数绝对值的和为  $243$ , 不含  $y$  的项的系数绝对值的和为  $32$ , 则  $a, b, n$  的值可能为 ( )  
(A)  $a = 2, b = -1, n = 5$  (B)  $a = -2, b = -1, n = 6$   
(C)  $a = -1, b = 2, n = 6$  (D)  $a = 1, b = 2, n = 5$
- 数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = n^2 \left( \cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$ , 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_{30}$  为 ( )  
(A)  $470$  (B)  $490$  (C)  $495$  (D)  $510$
- 如图, 正四面体  $ABCD$  的顶点  $A, B, C$  分别在两两垂直的三条射线  $Ox, Oy, Oz$  上, 则在下列命题中, 错误的为 ( )



- (A)  $O - ABC$  是正三棱锥 (B) 直线  $OB \parallel$  平面  $ACD$   
(C) 直线  $AD$  与  $OB$  所成的角是  $45^\circ$  (D) 二面角  $D - OB - A$  为  $45^\circ$

- 为了庆祝六一儿童节, 某食品厂制作了  $3$  种不同的精美卡片, 每袋食品随机装入一张卡片, 集齐  $3$  种卡片可获奖, 现购买该种食品  $5$  袋, 能获奖的概率为  
(A)  $\frac{31}{81}$  (B)  $\frac{33}{81}$  (C)  $\frac{48}{81}$  (D)  $\frac{50}{81}$
- 一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的“直径”, 封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的“周率”, 下面四个平面区域(阴影部分) 的周率从左到右依次记为  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ , 则下列关系中正确的为 ( )



- (A)  $\tau_1 > \tau_4 > \tau_3$  (B)  $\tau_3 > \tau_1 > \tau_2$  (C)  $\tau_4 > \tau_2 > \tau_3$  (D)  $\tau_3 > \tau_4 > \tau_2$

- 设函数  $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} (a < 0)$  的定义域为  $D$ , 若所有点  $(s, f(t)) (s, t \in D)$  构成一个正方形区域, 则  $a$  的值为 ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-4$  (C)  $-8$  (D) 不能确定

## 二、填空题

- 已知向量  $a = (3, 1), b = (1, 3), c = (k, 7)$ . 若  $(a - c) \parallel b$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 正三棱柱  $ABC - A_1 B_1 C_1$  内接于半径为  $2$  的球, 若  $A, B$  两点的球面距离为  $\pi$ , 则正三棱柱的体积为\_\_\_\_\_.
- 若不等式  $\sqrt{9 - x^2} \leq k(x + 2) - \sqrt{2}$  的解集为区间  $[a, b]$ , 且  $b - a = 2$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 设直线系  $M: x \cos \theta + (y - 2) \sin \theta = 1 (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ , 对于下列四个命题:  
A.  $M$  中所有直线均经过一个定点;  
B. 存在定点  $P$  不在  $M$  中的任一条直线上;  
C. 对于任意整数  $n (n \geq 3)$ , 存在正  $n$  边形, 其所有边均在  $M$  中的直线上;  
D.  $M$  中的直线所能围成的正三角形面积都相等.  
其中真命题的代号是\_\_\_\_\_ (写出所有真命题的代号)

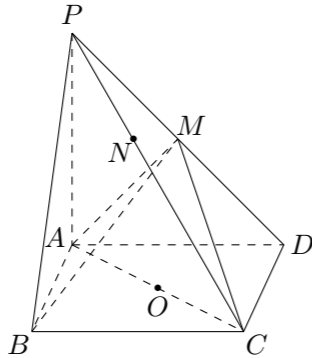
## 三、解答题

- 设函数  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .  
(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 若  $k > 0$ , 求不等式  $f'(x) + k(1 - x)f(x) > 0$  的解集.

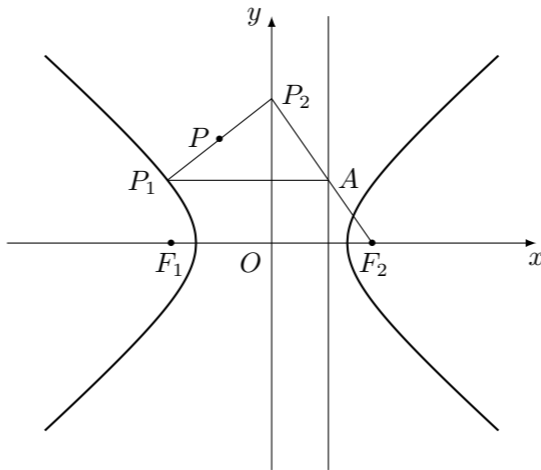
- 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是  $\frac{1}{2}$ . 若某人获得两个“支持”, 则给予  $10$  万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予  $5$  万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助, 令  $\xi$  表示该公司的资助总额.  
(1) 写出  $\xi$  的分布列;  
(2) 求数学期望  $E\xi$ .

- $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ ,  $\sin(B - A) = \cos C$ .  
(1) 求  $A, C$ ;  
(2) 若  $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$ , 求  $a, c$ .

20. 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  是矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = AD = 4$ ,  $AB = 2$ . 以  $AC$  的中点  $O$  为球心、 $AC$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ , 交  $PC$  于点  $N$ .
- (1) 求证: 平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$ ;
  - (2) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的大小;
  - (3) 求点  $N$  到平面  $ACM$  的距离.



21. 已知点  $P_1(x_0, y_0)$  为双曲线  $\frac{x^2}{8b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b$  为正常数) 上任一点,  $F_2$  为双曲线的右焦点, 过  $P_1$  作右准线的垂线, 垂足为  $A$ , 连接  $F_2A$  并延长交  $y$  轴于  $P_2$ .
- (1) 求线段  $P_1P_2$  的中点  $P$  的轨迹  $E$  的方程;
  - (2) 设轨迹  $E$  与  $x$  轴交于  $B, D$  两点, 在  $E$  上任取一点  $Q(x_1, y_1)$  ( $y_1 \neq 0$ ), 直线  $QB, QD$  分别交  $y$  轴于  $M, N$  两点. 求证: 以  $MN$  为直径的圆过两定点.



22. 各项均为正数的数列  $\{a_n\}$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ , 且对满足  $m + n = p + q$  的正整数  $m, n, p, q$  都有  $\frac{a_m + a_n}{(1 + a_m)(1 + a_n)} = \frac{a_p + a_q}{(1 + a_p)(1 + a_q)}$ .
- (1) 当  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{4}{5}$  时, 求通项  $a_n$ ;
  - (2) 证明: 对任意  $a$ , 存在与  $a$  有关的常数  $\lambda$ , 使得对于每个正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{\lambda} \leq a_n \leq \lambda$ .