2007 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M, $g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{x|x>-1\}$　　(B) $\{x|x<1\}$

(C) $\{x|-1<x<1\}$　　(D) $\varnothing$

2. 若复数 $(1+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$ 是纯虚数 (i 是虚数单位, b 是实数), 则 $b=$ ( )

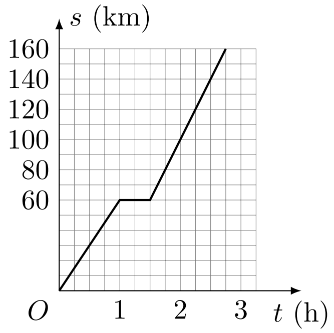
(A) 2　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) -2

3. 若函数 $f(x)=\sin^2 x-\dfrac{1}{2}$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 是 ( )

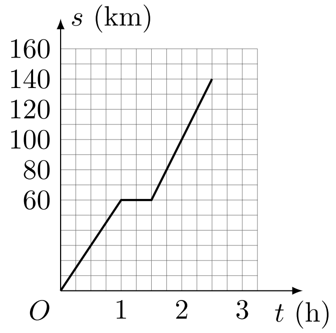
(A) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数　　(B) 最小正周期为 π 的奇函数

(C) 最小正周期为 2π 的偶函数　　(D) 最小正周期为 π 的偶函数

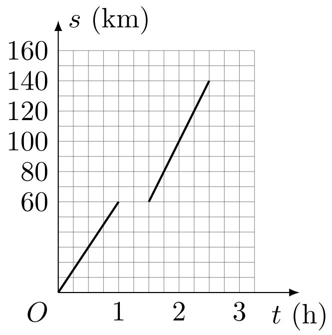
4. 客车从甲地以 60 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达乙地, 在乙地停留了半小时, 然后以 80 km/h 的速度匀速行驶 1 小时到达丙地. 下列描述客车从甲地出发, 经过乙地, 最后到达丙地所经过的路程 s 与时间 t 之间关系的图象中, 正确的是 ( )



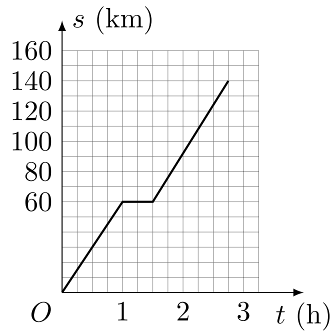
(A)



(B)



(C)



(D)

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-9n$, 第 k 项满足 $5<a_k<8$, 则 $k=$ ( )

(A) 9　　(B) 8　　(C) 7　　(D) 6

6. 图 1 是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图, 从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{10} (如 A_2 表示身高 (单位: cm) 在 $[150,155)$ 内的学生人数). 图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 ~ 180 cm (含 160 cm, 不含 180 cm) 的学生人数, 那么在流程图中的判断框内应填写的条件是 ( )

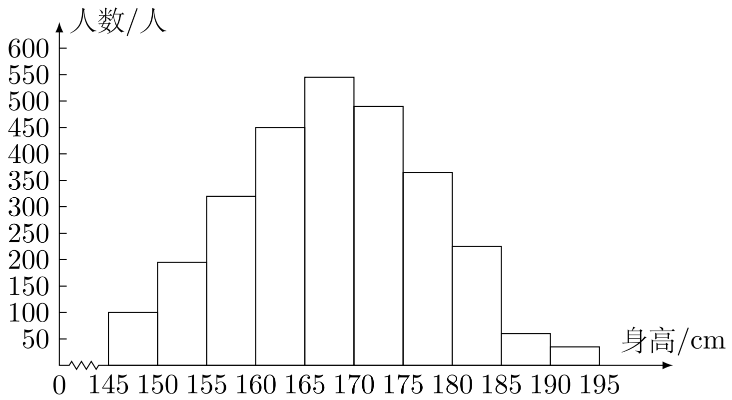


图 1

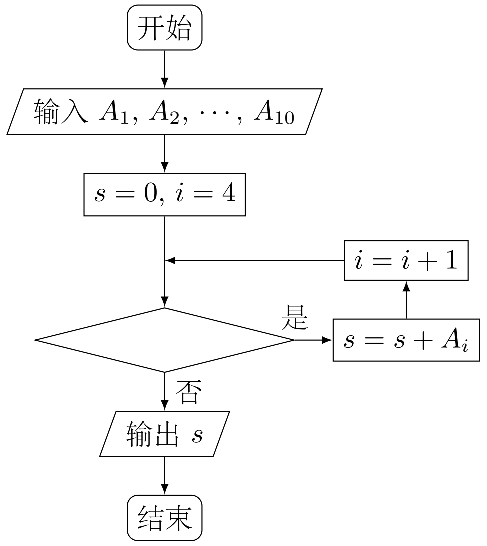
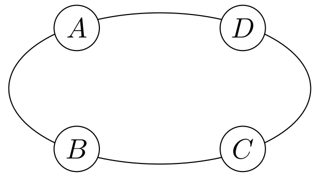


图 2

(A) $i<6$　　(B) $i<7$　　(C) $i<8$　　(D) $i<9$

7. 如图是某汽车维修公司的维修点环形分布图. 公司在年初分配给 A, B, C, D 四个维修点某种配件各 50 件. 在使用前发现需将 A, B, C, D 四个维修点的这批配件分别调整为 40, 45, 54, 61 件, 但调整只能在相邻维修点之间进行, 那么要完成上述调整, 最少的调动件次 (n 件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为 n) 为 ( )



(A) 15　　(B) 16　　(C) 17　　(D) 18

8. 设 S 是至少含有两个元素的集合. 在 S 上定义了一个二元运算“$*$”(即对任意的 a, $b\in S$, 对于有序元素对 (a,b), 在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应). 若对任意的 a, $b\in S$, 有 $a*(b*a)=b$, 则对任意的 a, $b\in S$, 下列等式中不恒成立的是 ( )

(A) $(a*b)*a=a$　　(B) $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

(C) $b*(b*b)=b$　　(D) $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

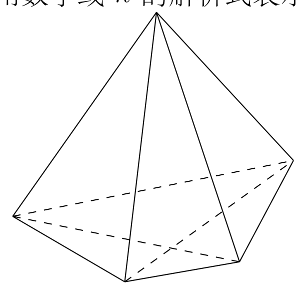
二、填空题

9. 甲, 乙两个袋中装有红, 白两种颜色的小球, 这些小球除颜色外完全相同. 其中甲袋装有 4 个红球, 2 个白球, 乙袋装有 1 个红球, 5 个白球. 现分别从甲, 乙两袋中各随机取出一个球, 则取出的两球是红球的概率为______. (答案用分数表示)

10. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$______.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一定点 $A(2,1)$. 若线段 OA 的垂直平分线过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, 则该抛物线的准线方程是______.

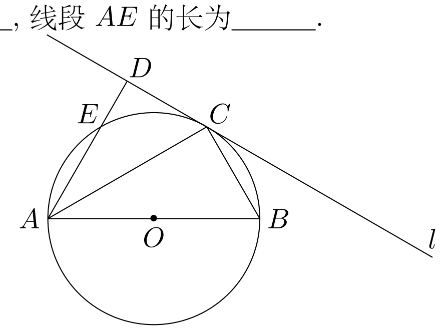
12. 如果一个凸多面体是 n 棱锥, 那么这个凸多面体的所有顶点所确定的直线共有______条. 这些直线中共有 $f(n)$ 对异面直线, 则 $f(4)=$______; $f(n)=$______. (答案用数字或 n 的解析式表示)



13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+3\\ y=3-t\end{cases}$ (参数 $t\in\mathbf{R}$), 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=2\sin\theta+2\end{cases}$ (参数 $\theta\in[0,2\pi]$), 则圆 C 的圆心坐标为______, 圆心到直线 l 的距离为______.

14. 设函数 $f(x)=|2x-1|+x+3$, 则 $f(-2)=$______; 若 $f(x)\leqslant 5$, 则 x 的取值范围是______.

15. 如图所示, 圆 O 的直径 $AB=6$, C 为圆周上一点, $BC=3$. 过点 C 作圆的切线 l, 过 A 做 l 的垂线 AD, AD 分别与直线 l, 圆交于点 D, E, 则 $\angle DAC=$______, 线段 AE 的长为______.



三、解答题

16. 已知 $\triangle ABC$ 顶点的直角坐标分别为 $A(3,4)$, $B(0,0)$, $C(c,0)$.
(1) 若 $c=5$, 求 $\sin\angle A$ 的值;
(2) 若 $\angle A$ 是钝角, 求 c 的取值范围.

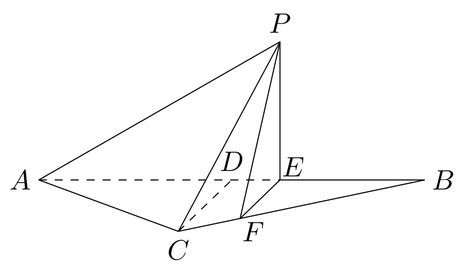
17. 下表提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据.

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(1) 请画出上表的散点图;
(2) 请根据上表提供的数据, 用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y=\widehat{b}x+\widehat{a}$;
(3) 已知该厂技改前 100 吨甲产品的生产能耗为 90 吨标准煤. 试根据 (2) 求出的线性回归方程, 预测生产 100 吨甲产品的生产能耗比技改前降低多少吨标准煤?
(*参考数值*: $3\times2.5+4\times3+5\times4+6\times4.5=66.5$)

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆心在第二象限, 半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆 C 与直线 $y=x$ 相切于坐标原点 O. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与圆 C 的一个交点到椭圆两点的距离之和为 10.
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 试探求 C 上是否存在异于原点的点 Q, 使 Q 到椭圆右焦点 F 的距离等于线段 OF 的长. 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. 如图所示, 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $AB=6\sqrt{6}$, 高 $CD=3$, 点 E 是线段 BD 上异于点 B, D 的动点, 点 F 在 BC 边上, 且 $EF\perp AB$, 现沿 EF 将 $\triangle BEF$ 折起到 $\triangle PEF$ 的位置, 使 $PE\perp AC$, 记 $BE=x$, $V(x)$ 表示四棱锥 $P-ACFE$ 的体积.
(1) 求 $V(x)$ 的表达式;
(2) 当 x 为何值时, $V(x)$ 取得最大值?
(3) 当 $V(x)$ 取得最大值时, 求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.



20. 已知 a 是实数, 函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2+x-1$, α, β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根 $(\alpha>\beta)$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$.
(1) 求 α, β 的值;
(2) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $a_n>\alpha$;
(3) 记 $b_n=\ln\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.