2007 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 方程 $3^{x-1}=\dfrac{1}{9}$ 的解是______.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

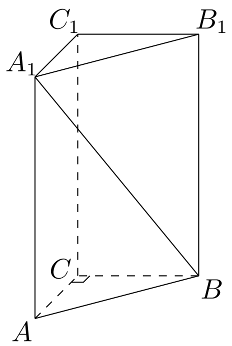
3. 直线 $4x+y-1=0$ 的倾斜角 $\theta=$______.

4. 函数 $y=\sec x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T=$______.

5. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的中心为顶点, 且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是______.

6. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$, $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$, 则 $\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$______.

7. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AA_1=2$, $AC=BC=1$, 则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小是______. (结果用反三角函数值表示)

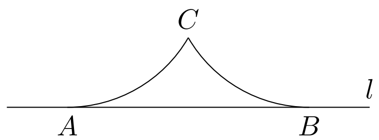


8. 某工程由 A, B, C, D 四道工序组成, 完成它们需用时间依次为 2, 5, x, 4 天. 四道工序的先后顺序及相互关系是: A, B 可以同时开工; A 完成后, C 可以开工; BC 完成后, D 可以开工. 若该工程总时数为 9 天, 则完成工序 C 需要的天数 x 最大是______.

9. 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是______. (结果用数值表示)

10. 对于非零实数 a, b, 以下四个命题都成立: ① $a+\dfrac{1}{a}\neq 0$; ② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; ③ 若 $|a|=|b|$, 则 $a=\pm b$; ④ 若 $a^2=ab$, 则 $a=b$. 那么, 对于非零复数 a, b, 仍然成立的命题的所有序号是______.

11. 如图, AB 是直线 l 上的两点, 且 $AB=2$. 两个半径相等的动圆分别与 l 相切于 AB 点, C 是这两个圆的公共点, 则圆弧 AC, CB 与线段 AB 围成图形面积 S 的取值范围是______.



二、选择题

12. 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, 且 $2+a\mathrm{i}$, $b+3\mathrm{i}$ (i 是虚数单位) 是一个实系数一元二次方程的两个根, 那么 a, b 的值分别是 ( )

(A) $a=-3$, $b=2$ (B) $a=3$, $b=-2$

(C) $a=-3$, $b=-2$ (D) $a=3$, $b=2$

13. 圆 $x^2+y^2-2x-1=0$ 关于直线 $2x-y+3=0$ 对称的圆的方程是( )

(A) $(x+3)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{2}$ (B) $(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{1}{2}$

(C) $(x+3)^2+(y-2)^2=2$ (D) $(x-3)^2+(y+2)^2=2$

14. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^2}, & 1\leqslant n\leqslant 1000\\ \dfrac{n^2}{n^2-2n}, & n\geqslant 1001\end{cases}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的极限值 ( )

(A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 0 或 1 (D) 不存在

15. 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: “当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立”. 那么, 下列命题总成立的是 ( )

(A) 若 $f(1)<1$ 成立, 则 $f(10)<100$ 成立

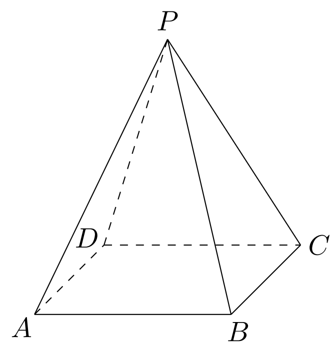
(B) 若 $f(2)<4$ 成立, 则 $f(1)\geqslant 1$ 成立

(C) 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立, 则当 $k\geqslant 1$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

(D) 若 $f(4)\geqslant 25$ 成立, 则当 $k\geqslant 4$ 时, 均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三、解答题

16. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=2$, 直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$, 求正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a=2$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

18. 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 %(如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).

(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);

(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ ($x\neq 0$, 常数 $a\in\mathbf{R}$).

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

20. 如果有穷数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_m (m 为正整数) 满足条件 $a_1=a_m$, $a_2=a_{m-1}$, $\cdots$, $a_m=a_1$, 即 $a_i=a_{m-i+1}$ ($i=1, 2, \cdots, m$), 我们称其为"对称数列". 例如, 数列 1, 2, 5, 2, 1 与数列 8, 4, 2, 2, 4, 8 都是"对称数列".

(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的"对称数列", 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1=2$, $b_4=11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是 49 项的"对称数列", 其中 $c_{25}, c_{26}, \cdots, c_{49}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 求 $\{c_n\}$ 各项的和 S;

(3) 设 $\{d_n\}$ 是 100 项的"对称数列", 其中 d_{51}, d_{52}, $\cdots$, d_{100} 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列. 求 $\{d_n\}$ 前 n 项的和 S_n ($n=1, 2, \cdots, 100$).

21. 我们把由半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($x\geqslant 0$) 与半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 合成的曲线称作"果圆", 其中 $a^2=b^2+c^2$, $a>0$, $b>c>0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是"果圆"与 x, y 轴的交点, M 是线段 A_1A_2 的中点.

(1) 若 $\triangle F_0F_1F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求该"果圆"的方程;

(2) 设 P 是"果圆"的半椭圆 $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ ($x\leqslant 0$) 上任意一点. 求证: 当 $|PM|$ 取得最小值时, P 在点 B_1, B_2 或 A_1 处;

(3) 若 P 是"果圆"上任意一点, 求 $|PM|$ 取得最小值时点 P 的横坐标.