# 2009 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

# 数学试卷

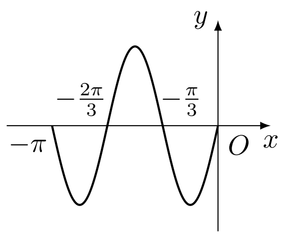
## 一、填空题

1. 若复数 $z_1 = 4 + 29\mathrm{i}$, $z_2 = 6 + 9\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则复数 $(z_1 - z_2)\mathrm{i}$ 的实部为______.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $30°$, $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$______.

3. 函数 $f(x) = x^3 - 15x^2 - 33x + 6$ 的单调减区间为______.

4. 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A$, $\omega$, $\varphi$ 为常数, $A > 0$, $\omega > 0$) 在闭区间 $[-\pi, 0]$ 上的图象如图所示, 则 $\omega =$______.



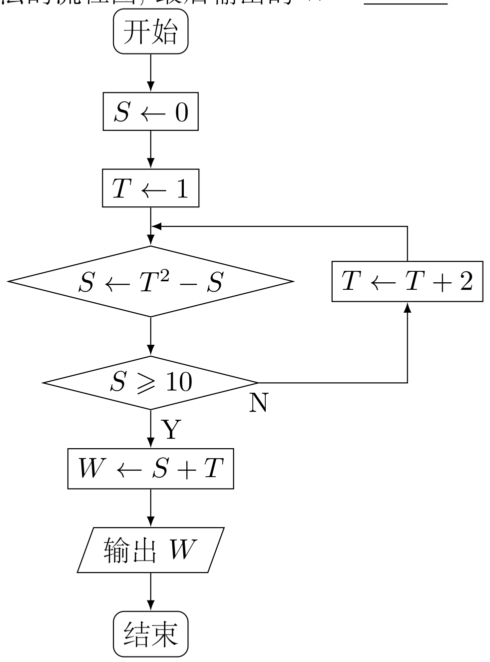

5. 现有 5 根竹竿, 它们的长度 (单位: m) 分别为 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 若从中一次随机抽取 2 根竹竿, 则它们的长度恰好相差 0.3 m 的概率为______.

6. 某校甲、乙两个班级各有 5 名编号为 1, 2, 3, 4, 5 的学生进行投篮练习, 每人投 10 次, 投中的次数如下表:

| 学生 | 1 号 | 2 号 | 3 号 | 4 号 | 5 号 |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲班 | 6 | 7 | 7 | 8 | 7 |
| 乙班 | 6 | 7 | 6 | 7 | 9 |

则以上两组数据的方差中较小的一个为 $s^2 =$______.

7. 如图是一个算法的流程图, 最后输出的 $W =$______.




8. 在平面上, 若两个正三角形的边长的比为 1 : 2, 则它们的面积比为 1 : 4, 类似地, 在空间内, 若两个正四面体的棱长的比为 1 : 2, 则它们的体积比为______.

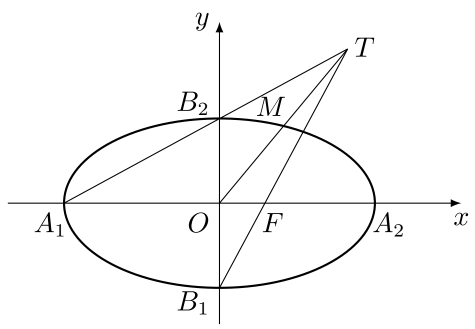
9. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 点 $P$ 在曲线 $C$: $y = x^3 - 10x + 3$ 上, 且在第二象限内, 已知曲线 $C$ 在点 $P$ 处的切线的斜率为 2, 则点 $P$ 的坐标为______.

10. 已知 $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, 函数 $f(x) = a^x$, 若实数 $m$、$n$ 满足 $f(m) > f(n)$, 则 $m$、$n$ 的大小关系为______.

11. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leqslant 2\}$, $B = (-\infty, a)$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 $a$ 的取值范围是 $(c, +\infty)$, 其中 $c =$______.

12. 设 $\alpha$ 和 $\beta$ 为不重合的两个平面, 给出下列命题:
(1) 若 $\alpha$ 内的两条相交直线分别平行于 $\beta$ 内的两条直线, 则 $\alpha$ 平行于 $\beta$;
(2) 若 $\alpha$ 外一条直线 $l$ 与 $\alpha$ 内的一条直线平行, 则 $l$ 和 $\alpha$ 平行;
(3) 设 $\alpha$ 和 $\beta$ 相交于直线 $l$, 若 $\alpha$ 内有一条直线垂直于 $l$, 则 $\alpha$ 和 $\beta$ 垂直;
(4) 直线 $l$ 与 $\alpha$ 垂直的充分必要条件是 $l$ 与 $\alpha$ 内的两条直线垂直.
上面命题中, 真命题的序号______. (写出所有真命题的序号)

13. 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的四个顶点, $F$ 为其右焦点, 直线 $A_1B_2$ 与直线 $B_1F$ 相交于点 $T$, 线段 $OT$ 与椭圆的交点 $M$ 恰为线段 $OT$ 的中点, 则该椭圆的离心率为______.

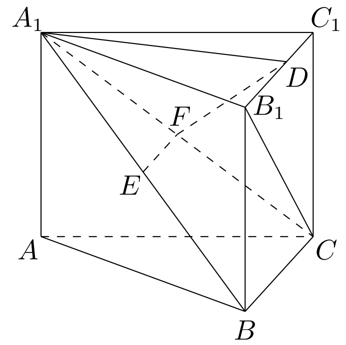



14. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 $q$ 的等比数列, $|q| > 1$, 令 $b_n = a_n + 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 若数列 $\{b_n\}$ 有连续四项在集合 $\{-53, -23, 19, 37, 82\}$ 中, 则 $6q =$______.

## 二、解答题

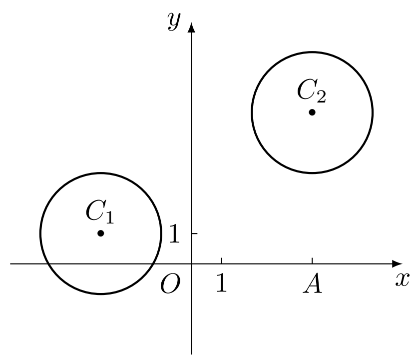
15. 设向量 $\boldsymbol{a} = (4\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\boldsymbol{b} = (\sin\beta, 4\cos\beta)$, $\boldsymbol{c} = (\cos\beta, -4\sin\beta)$.
(1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$ 垂直, 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值;
(2) 求 $|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|$ 的最大值;
(3) 若 $\tan\alpha\tan\beta = 16$, 求证: $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$.

16. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $E$、$F$ 分别是 $A_1B$、$A_1C$ 的中点, 点 $D$ 在 $B_1C_1$ 上, $A_1D \perp B_1C$. 求证:
(1) $EF \,/\!/$ 平面 $ABC$;
(2) 平面 $A_1FD \perp$ 平面 $BB_1C_1C$.




17. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $S_n$ 为其前 $n$ 项和, 满足 $a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2$, $S_7 = 7$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 $n$ 项和 $S_n$;
(2) 试求所有的正整数 $m$, 使得 $\dfrac{a_m a_{m+1}}{a_{m+2}}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项.

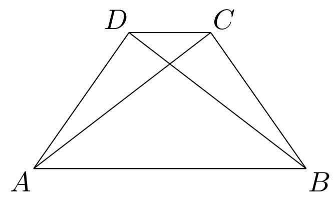
18. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知圆 $C_1$: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 和圆 $C_2$: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$.
(1) 若直线 $l$ 过点 $A(4, 0)$, 且被圆 $C_1$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 $l$ 的方程;
(2) 设 $P$ 为平面上的点, 满足: 存在过点 $P$ 的无穷多对互相垂直的直线 $l_1$ 和 $l_2$, 它们分别与圆 $C_1$ 和圆 $C_2$ 相交, 且直线 $l_1$ 被圆 $C_1$ 截得的弦长与直线 $l_2$ 被圆 $C_2$ 截得的弦长相等, 试求所有满足条件的点 $P$ 的坐标.



19. 按照某学者的理论, 假设一个人生产某产品单件成本为 $a$ 元, 如果他卖出该产品的单价为 $m$ 元, 则他的满意度为 $\dfrac{m}{m+a}$; 如果他买进该产品的单价为 $n$ 元, 则他的满意度为 $\dfrac{n}{n+a}$. 如果一个人对两种交易 (卖出或买进) 的满意度分别为 $h_1$ 和 $h_2$, 则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1h_2}$.
现假设甲生产 $A$、$B$ 两种产品的单件成本分别为 12 元和 5 元, 乙生产 $A$、$B$ 两种产品的单件成本分别为 3 元和 20 元, 设产品 $A$、$B$ 的单价分别为 $m_A$ 元和 $m_B$ 元, 甲买进 $A$ 与卖出 $B$ 的综合满意度为 $h_{甲}$, 乙卖出 $A$ 与买进 $B$ 的综合满意度为 $h_{乙}$.
(1) 求 $h$ 和 $h_{乙}$ 关于 $m_A$、$m_B$ 的表达式; 当 $m_A=\dfrac{3}{5}m_B$ 时, 求证: $h_{甲}=h_{乙}$;
(2) 设 $m_A=\dfrac{3}{5}m_B$, 当 $m_A$、$m_B$ 分别为多少时, 甲、乙两人的综合满意度均最大? 最大的综合满意度为多少?
(3) 记 (2) 中最大的综合满意度为 $h_0$, 试问能否适当选取 $m_A$、$m_B$ 的值, 使得 $h_{甲}\geqslant h_0$ 和 $h_{乙}\geqslant h_0$ 同时成立, 但等号不同时成立? 试说明理由.

20. 设 $a$ 为实数, 函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.
(1) 若 $f(0)\geqslant 1$, 求 $a$ 的取值范围;
(2) 求 $f(x)$ 的最小值;
(3) 设函数 $h(x)=f(x)$, $x\in(a,+\infty)$, 直接写出 (不需给出演算步骤) 不等式 $h(x)\geqslant 1$ 的解集.

21. 四选二.
【A】如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC\cong\triangle BAD$. 求证: $AB\parallel CD$.

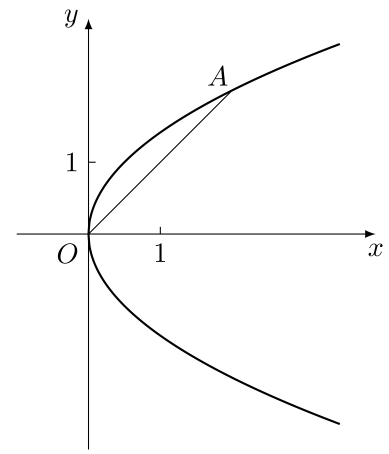



【B】求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

【C】已知曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\\ y=3(t+\dfrac{1}{t})\end{cases}$ ($t$ 为参数, $t>0$), 求曲线 $C$ 的普通方程.

【D】设 $a\geqslant b>0$, 求证: $3a^3+2b^3\geqslant 3a^2b+2ab^2$.

22. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 抛物线 $C$ 的顶点在原点, 经过点 $A(2,2)$, 其焦点 $F$ 在 $x$ 轴上.
(1) 求抛物线 $C$ 的标准方程;
(2) 求过点 $F$, 且与直线 $OA$ 垂直的直线的方程;
(3) 设过点 $M(m,0)$ $(m>0)$ 的直线交抛物线 $C$ 于 $D$、$E$ 两点, $ME=2DM$, 记 $D$ 和 $E$ 两点间的距离为 $f(m)$, 求 $f(m)$ 关于 $m$ 的表达式.




23. 对于正整数 $n\geqslant 2$, 用 $T_n$ 表示关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的有序数组 $(a,b)$ 的组数, 其中 $a$, $b\in\{1,2,\cdots,n\}$ ($a$ 和 $b$ 可以相等); 对于随机选取的 $a$, $b\in\{1,2,\cdots,n\}$ ($a$ 和 $b$ 可以相等), 记 $P_n$ 为关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根的概率.
(1) 求 $T_{n^2}$ 和 $P_{n^2}$;
(2) 求证: 对任意正整数 $n\geqslant 2$, 有 $P_n>1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.