

理科数学

一、选择题

1. 不等式组 $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$ 的解集为 ()

- (A) $\{x | -1 < x < 1\}$ (B) $\{x | 0 < x < 3\}$
 (C) $\{x | 0 < x < 1\}$ (D) $\{x | -1 < x < 3\}$

2. 已知三条直线 m, n, l , 三个平面 α, β, γ , 下列四个命题中, 正确的是()

- | | |
|--|--|
| (A) $\begin{cases} \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ | (B) $\begin{cases} m \parallel \beta \\ l \perp m \end{cases} \Rightarrow l \perp \beta$ |
| (C) $\begin{cases} m \parallel \gamma \\ n \parallel \gamma \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$ | (D) $\begin{cases} m \perp \gamma \\ n \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$ |

3. 已知椭圆的焦点是 F_1, F_2 , P 是椭圆上的一个动点, 如果延长 F_1P 到 Q , 使得 $|PQ| = |PF_2|$, 那么动点 Q 的轨迹是. ()

- (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线的一支 (D) 抛物线

4. 如果 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 那么复数 $(1+i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 的辐角的主值是 ()

- (A) $\theta + \frac{9\pi}{4}$ (B) $\theta + \frac{\pi}{4}$ (C) $\theta - \frac{\pi}{4}$ (D) $\theta + \frac{7\pi}{4}$

5. 若角 α 满足条件 $\sin 2\alpha < 0, \cos \alpha - \sin \alpha < 0$, 则 α 在 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

6. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译, 导游, 导购, 保洁四项不同工作. 若其中甲、乙两名支援者都不能从事翻译工作, 则选派方案共有. ()

- (A) 280 种 (B) 240 种 (C) 180 种 (D) 96 种

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, BC = 1.5, \angle ABC = 120^\circ$, 若使三角形绕直线 BC 旋转一周, 则所形成的几何体的体积是 ()

- (A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\frac{5}{2}\pi$ (C) $\frac{7}{2}\pi$ (D) $\frac{9}{2}\pi$

8. 圆 $2x^2 + 2y^2 = 1$ 与直线 $x \sin \theta + y - 1 = 0$ ($\theta \in \mathbf{R}, \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$) 的位置关系是 ()

- (A) 相交 (B) 相切 (C) 相离或相切 (D) 不能确定

9. 在极坐标系中, 如果一个圆的方程 $\rho = 4 \cos \theta + 6 \sin \theta$, 那么过圆心且与极轴平行的直线方程是 ()

- (A) $\rho \sin \theta = 3$ (B) $\rho \sin \theta = -3$ (C) $\rho \cos \theta = 2$ (D) $\rho \cos \theta = -2$

10. 对于二项式 $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ 的展开式 ($n \in \mathbf{N}^*$), 四位同学作出了四种判断:

- ① 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有常数项;
- ② 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有常数项;
- ③ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中没有 x 的一次项;

④ 存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 展开式中有 x 的一次项.

上述判断中正确的是 ()

- (A) ①与③ (B) ②与③ (C) ①与④ (D) ②与④

11. 若一个等差数列前 3 项的和为 34, 最后 3 项的和为 146, 且所有项的和为 390, 则这个数列有 ()

- (A) 13 项 (B) 12 项 (C) 11 项 (D) 10 项

12. 用一张钢板制作一个容积为 $4m^3$ 的无盖长方体水箱. 可用的长方形钢板有四种不同的规格 (长 \times 宽的尺寸如各选项所示, 单位均为 m), 若既要够用, 又要所剩最少, 则应选钢板的规格是. ()

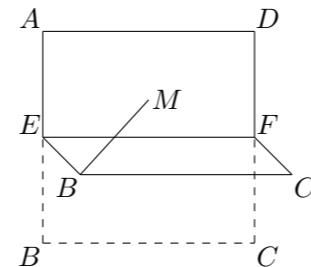
- (A) 2×5 (B) 2×5.5 (C) 2×6.1 (D) 3×5

二、填空题

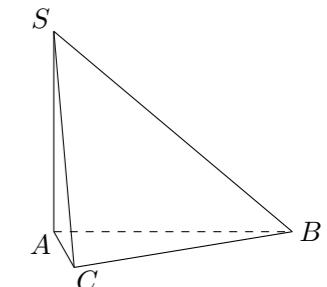
13. 若双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 则双曲线的焦点坐标是_____.

14. 如果 $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 那么 $\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ 的值等于_____.

15. 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E, F 分别是 AB 和 CD 的中点, 将正方形沿 EF 折成直二面角 (如图所示). M 为矩形 $AEFD$ 内一点, 如果 $\angle MBE = \angle MBC, MB$ 和平面 BCF 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 那么点 M 到直线 EF 的距离为_____.



18. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数还是减函数, 并证明你的判断.



16. 对于任意两个复数 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ (x_1, y_1, x_2, y_2 为实数), 定义运算 \odot 为: $z_1 \odot z_2 = x_1x_2 + y_1y_2$. 设非零复数 w_1, w_2 在复平面内对应的点分别为 P_1, P_2 , 点 O 为坐标原点. 如果 $w_1 \odot w_2 = 0$, 那么在 $\triangle P_1OP_2$ 中, $\angle P_1OP_2$ 的大小为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 A, B, C 成等差数列, 求 $\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$ 的值.

20. 假设 A 型进口车关税税率在 2001 年是 100%, 在 2006 年是 25%, 2001 年 A 型进口车每辆价格为 64 万元 (其中含 32 万元关税税款).
- (1) 已知与 A 型车性能相近的 B 型国产车, 2001 年每辆价格为 46 万元, 若 A 型车的价格只受关税降低的影响, 为了保证 2006 年 B 型车的价格不高于 A 型车价格的 90%, B 型车价格要逐年降低, 问平均每年至少下降多少万元?
 - (2) 某人在 2001 年将 33 万元存入银行, 假设银行扣利息税后的年利率为 1.8% (5 年内不变), 且每年按复利计算 (上一年的利息计入第二年的本金), 那么五年到期时这笔钱连本带息是否一定够买按 (1) 中所述降价后的 B 型车一辆?
21. 已知点的序列 $A_n(x_n, 0)$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 $x_1 = 0$, $x_2 = a$ ($a < 0$), A_3 是线段 A_1A_2 的中点, A_4 是线段 A_2A_3 的中点, \dots , A_n 是线段 $A_{n-2}A_{n-1}$ 的中点, \dots .
- (1) 写出 x_n 与 x_{n-1}, x_{n-2} 之间的关系式 ($n \geq 3$);
 - (2) 设 $a_n = x_{n+1} - x_n$, 计算 a_1, a_2, a_3 , 由此推测数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并加以证明;
 - (3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
22. 已知某椭圆的焦点是 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, 过点 F_2 , 并垂直于 x 轴的直线与椭圆的一个交点为 B , 且 $|F_1B| + |F_2B| = 10$. 椭圆上不同的两点 $A(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 满足条件: $|F_2A|, |F_2B|, |F_2C|$ 成等差数列.
- (1) 求该椭圆的方程;
 - (2) 求弦 AC 中点的横坐标;
 - (3) 设弦 AC 的垂直平分线的方程为 $y = kx + m$, 求 m 的取值范围.