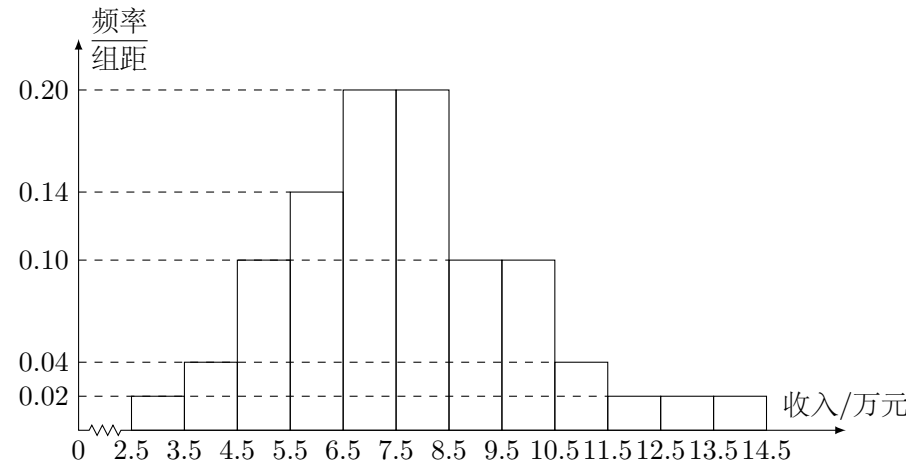


理科数学

一、选择题

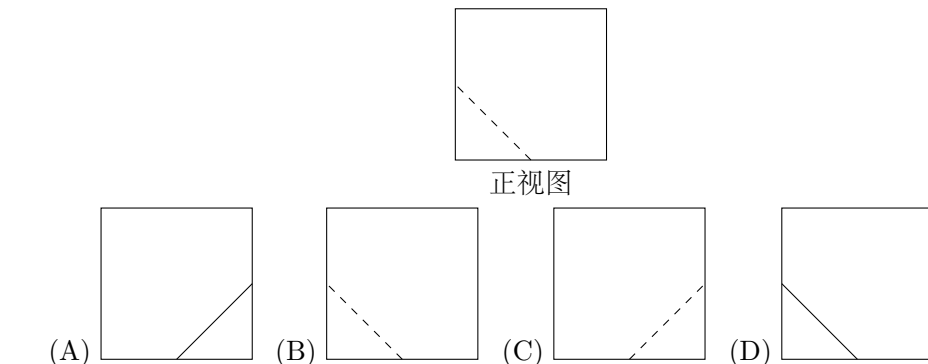
- 设集合 $M = \{x|0 < x < 4\}$, $N = \left\{x|\frac{1}{3} \leq x \leq 5\right\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 (A) $\left\{x|0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$ (B) $\left\{x|\frac{1}{3} \leq x < 4\right\}$
 (C) $\{x|4 \leq x < 5\}$ (D) $\{x|0 < x \leq 5\}$

- 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



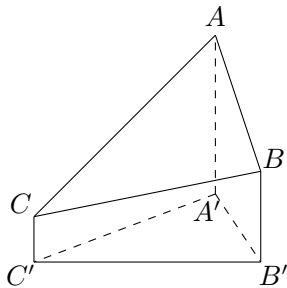
根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是 ()

- 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
 - 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
 - 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
 - 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间
- 已知 $(1-i)^2 z = 3+2i$, 则 $z =$ ()
 (A) $-1 - \frac{3}{2}i$ (B) $-1 + \frac{3}{2}i$ (C) $-\frac{3}{2} + i$ (D) $-\frac{3}{2} - i$
 - 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$. 已知某同学视力的五分记录分的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$) ()
 (A) 1.5 (B) 1.2 (C) 0.8 (D) 0.6
 - 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, $|P F_1| = 3|P F_2|$, 则 C 的离心率为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{13}$
 - 在一个正方体中, 过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后, 所得多面体的三视图中, 正视图如图所示, 则相应的侧视图是 ()



- 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n . 设甲: $q > 0$, 乙: $\{S_n\}$ 是递增数列, 则
 (A) 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 (B) 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 (C) 甲是乙的充要条件
 (D) 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

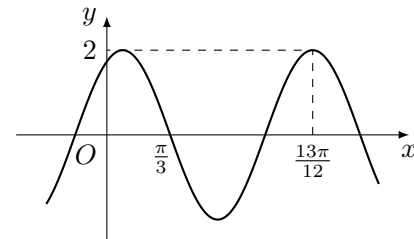
- 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 如图是三角高程测量法的一个示意图, 现有 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ$, $\angle A'B'C' = 60^\circ$. 由 C 点测得 B 点的仰角为 15° , BB' 与 CC' 的差为 100; 由 B 点测得 A 点的仰角为 45° , 则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA' - CC'$ 约为 ($\sqrt{3} \approx 1.732$) ()



- 346 (B) 373 (C) 446 (D) 473
- 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()
 (A) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{15}}{5}$
 - 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ()
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$
 - 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且 $AC \perp BC$, $AC = BC = 1$, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$
 - 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$. 若 $f(0) + f(3) = 6$, 则 $f\left(\frac{9}{2}\right) =$ ()
 (A) $-\frac{9}{4}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{5}{2}$

二、填空题

- 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为_____.
- 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + k\mathbf{b}$. 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $k =$ _____.
- 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1 F_2|$, 则四边形 $P F_1 Q F_2$ 的面积为_____.
- 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $\left(f(x) - f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x) - f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) > 0$ 的最小正整数 x 为_____.



三、解答题

- 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

- 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?
- 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

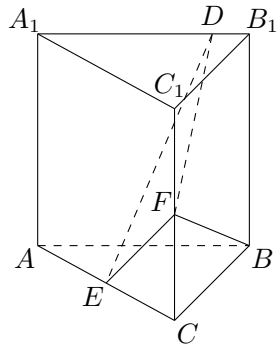
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.
 ①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$.

20. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x = 1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.
 (1) 求 $C, \odot M$ 的方程;
 (2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切. 判断 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$.
 (1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;
 (2) 设点 A 的直角坐标为 $(1, 0)$, M 为 C 上的动点, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$, 写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程, 并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

19. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, D 为棱 A_1B_1 上的点, $BF \perp A_1B_1$.
 (1) 证明: $BF \perp DE$;
 (2) 当 B_1D 为何值时, 面 BB_1C_1C 与面 DEF 所成的二面角正弦值最小?



21. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$.
 (1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 1$ 有且仅有两个交点, 求 a 的取值范围.

23. 已知函数 $f(x) = |x - 2|$, $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.
 (1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像;
 (2) 若 $f(x + a) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.

