

2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. $(1-i)^2 \cdot i =$ ()
 (A) $2-2i$ (B) $2+2i$ (C) -2 (D) 2

2. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = b$, 则 $f(-a) =$ ()
 (A) b (B) $-b$ (C) $\frac{1}{b}$ (D) $-\frac{1}{b}$

3. 已知 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| =$ ()
 (A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) 4

4. 函数 $y = \sqrt{x-1} + 1$ ($x \geq 1$) 的反函数是 ()
 (A) $y = x^2 - 2x + 2$ ($x < 1$) (B) $y = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$)
 (C) $y = x^2 - 2x$ ($x < 1$) (D) $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$)

5. $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 ()
 (A) 14 (B) -14 (C) 42 (D) -42

6. 设 A 、 B 、 I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是 ()
 (A) $(\complement_I A) \cup B = I$ (B) $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
 (C) $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$ (D) $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

7. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点为 F_1 、 F_2 , 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交, 一个交点为 P , 则 $|\overrightarrow{PF_2}| =$ ()
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) 4

8. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q , 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是 ()
 (A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[-1, 1]$ (D) $[-4, 4]$

9. 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()
 (A) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
 (C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

10. 已知正四面体 $ABCD$ 的表面积为 S , 其四个面的中心分别为 E 、 F 、 G 、 H . 设四面体 $EFGH$ 的表面积为 T , 则 $\frac{T}{S}$ 等于 ()
 (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

11. 从数字 $1, 2, 3, 4, 5$, 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为 ()
 (A) $\frac{13}{125}$ (B) $\frac{16}{125}$ (C) $\frac{18}{125}$ (D) $\frac{19}{125}$

12. $a^2 + b^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 2$, $c^2 + a^2 = 2$, $ab + bc + ca$ 的最小值为 ()
 (A) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ (C) $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

二、填空题

13. 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 的解集是_____.

14. 由动点 P 向圆 $x^2 + y^2 = 1$ 引两条切线 PA 、 PB , 切点分别为 A 、 B , $\angle APB = 60^\circ$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1 = 1$, $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1}$ ($n \geq 2$),
 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \text{_____}, & n \geq 2 \end{cases}$.

16. 已知 a 、 b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a 、 b 在 α 上的射影有可能是:
 ① 两条平行直线;
 ② 两条互相垂直的直线;
 ③ 同一条直线;
 ④ 一条直线及其外一点.
 在上面结论中, 正确结论的编号是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

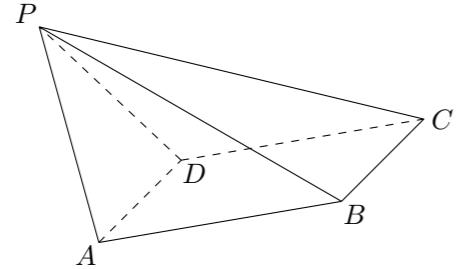
17. 求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

18. 一接待中心有 A 、 B 、 C 、 D 四部热线电话, 已知某一时刻电话 A 、 B 占线的概率均为 0.5, 电话 C 、 D 占线的概率均为 0.4, 各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有 ξ 部电话占线. 试求随机变量 ξ 的概率分布和它的期望.

19. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$ 的单调区间.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120° .

- (1) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;
(2) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



21. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 与直线 $l: x + y = 1$ 相交于两个不同的点 A, B .

- (1) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;
(2) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P , 且 $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 且 $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$, $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$, 其中 $k = 1, 2, 3, \dots$.

- (1) 求 a_3, a_5 ;
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.