

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x \leq 8\}$, $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $T = \{3, 5, 7\}$, 则 $S \cap (\complement_U T) =$ ()
(A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ (C) $\{1, 2\}$ (D) $\{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 5x + y$ 的最大值为 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
3. 函数 $y = 1 + \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) 的反函数是 ()
(A) $y = (x - 1)^2$ ($1 \leq x \leq 3$) (B) $y = (x - 1)^2$ ($0 \leq x \leq 4$)
(C) $y = x^2 - 1$ ($1 \leq x \leq 3$) (D) $y = x^2 - 1$ ($0 \leq x \leq 4$)
4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5 = 25$, 且 $a_2 = 3$, 则 $a_7 =$ ()
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15
5. 设 a, b 是两条直线, α, β 是两个平面, 则 $a \perp b$ 的一个充分条件是 ()
(A) $a \perp \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ (B) $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$
(C) $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ (D) $a \subset \alpha, b \parallel \beta, \alpha \perp \beta$
6. 把函数 $y = \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的图象所表示的函数是 ()
(A) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ (B) $y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right), x \in \mathbf{R}$
(C) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ (D) $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$
7. 设椭圆 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$) 的右焦点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点相同, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 则此椭圆的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ (B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (C) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{64} = 1$ (D) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) \geq x^2$ 的解集为 ()
(A) $[-1, 1]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[-2, 1]$ (D) $[-1, 2]$
9. 设 $a = \sin \frac{5\pi}{7}, b = \cos \frac{2\pi}{7}, c = \tan \frac{2\pi}{7}$, 则 ()
(A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < c < a$ (D) $b < a < c$

10. 设 $a > 1$, 若对于任意的 $x \in [a, 2a]$, 都有 $y \in [a, a^2]$ 满足方程 $\log_a x + \log_a y = 3$, 这时 a 的取值的集合为 ()
(A) $\{a | 1 < a \leq 2\}$ (B) $\{a | a \geq 2\}$ (C) $\{a | 2 \leq a \leq 3\}$ (D) $\{2, 3\}$

二、填空题

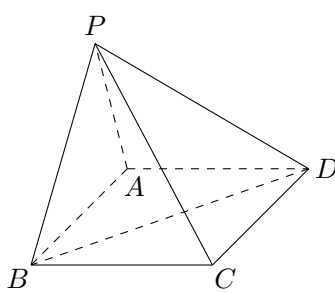
11. 一个单位共有职工 200 人, 其中不超过 45 岁的有 120 人, 超过 45 岁的有 80 人. 为了调查职工的健康状况, 用分层抽样的方法从全体职工中抽取一个容量为 25 的样本, 应抽取超过 45 岁的职工_____人.
12. $\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)
13. 若一个球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$, 则它的表面积为_____.
14. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (2, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$, 若 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{c}| =$ _____.
15. 已知圆 C 的圆心与点 $P(-2, 1)$ 关于直线 $y = x + 1$ 对称. 直线 $3x + 4y - 11 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 6$, 则圆 C 的方程为_____.
16. 有 4 张分别标有数字 1, 2, 3, 4 的红色卡片和 4 张分别标有数字 1, 2, 3, 4 的蓝色卡片, 从这 8 张卡片中取出 4 张卡片排成一行. 如果取出的 4 张卡片所标的数字之和等于 10, 则不同的排法共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + 2\sin \omega x \cos \omega x + 1$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0$) 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$.
(1) 求 ω 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值, 并且求使 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为 $\frac{1}{2}$ 与 p , 且乙投球 2 次均未命中的概率为 $\frac{1}{16}$.
(1) 求乙投球的命中率 p ;
(2) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;
(3) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形. 已知 $AB = 3$, $AD = 2$, $PA = 2$, $PD = 2\sqrt{2}$, $\angle PAB = 60^\circ$.
(1) 证明 $AD \perp$ 平面 PAB ;
(2) 求异面直线 PC 与 AD 所成的角的大小;
(3) 求二面角 $P - BD - A$ 的大小.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_{n+1} = (1+q)a_n - qa_{n-1}$ ($n \geq 2$, $q \neq 0$).
- (1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (3) 若 a_3 是 a_6 与 a_9 的等差中项, 求 q 的值, 并证明: 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, a_n 是 a_{n+3} 与 a_{n+6} 的等差中项.
21. 设函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + b$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
- (1) 当 $a = -\frac{10}{3}$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 若函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 处有极值, 求 a 的取值范围;
 - (3) 若对于任意的 $a \in [-2, 2]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $[-1, 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.
22. 已知中心在原点的双曲线 C 的一个焦点是 $F_1(-3, 0)$, 一条渐近线的方程是 $\sqrt{5}x - 2y = 0$.
- (1) 求双曲线 C 的方程;
 - (2) 若以 k ($k \neq 0$) 为斜率的直线 l 与双曲线 C 相交于两个不同的点 M, N , 线段 MN 的垂直平分线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{81}{2}$, 求 k 的取值范围.