

文科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, $i^{607} =$ ()

- (A)
- i
- (B)
- $-i$
- (C) 1 (D)
- -1

2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ()

- (A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石

3. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $\ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是 ()

- (A)
- $\exists x_0 \in (0, +\infty)$
- ,
- $\ln x_0 \neq x_0 - 1$
- (B)
- $\exists x_0 \notin (0, +\infty)$
- ,
- $\ln x_0 = x_0 - 1$
-
- (C)
- $\forall x \in (0, +\infty)$
- ,
- $\ln x \neq x - 1$
- (D)
- $\forall x \notin (0, +\infty)$
- ,
- $\ln x = x - 1$

4. 已知变量 x 和 y 满足关系 $y = -0.1x + 1$, 变量 y 与 z 正相关. 下列结论中正确的是 ()

- (A)
- x
- 与
- y
- 正相关,
- x
- 与
- z
- 负相关 (B)
- x
- 与
- y
- 正相关,
- x
- 与
- z
- 正相关
-
- (C)
- x
- 与
- y
- 负相关,
- x
- 与
- z
- 负相关 (D)
- x
- 与
- y
- 负相关,
- x
- 与
- z
- 正相关

5. l_1 , l_2 表示空间中的两条直线, 若 p : l_1 , l_2 是异面直线; q : l_1 , l_2 不相交, 则 ()

- (A)
- p
- 是
- q
- 的充分条件, 但不是
- q
- 的必要条件
-
- (B)
- p
- 是
- q
- 的必要条件, 但不是
- q
- 的充分条件
-
- (C)
- p
- 是
- q
- 的充分必要条件
-
- (D)
- p
- 既不是
- q
- 的充分条件, 也不是
- q
- 的必要条件

6. 函数 $f(x) = \sqrt{4 - |x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ 的定义域为 ()

- (A)
- $(2, 3)$
- (B)
- $(2, 4]$
-
- (C)
- $(2, 3) \cup (3, 4]$
- (D)
- $(-1, 3) \cup (3, 6]$

7. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 则 ()

- (A)
- $|x| = x|\operatorname{sgn} x|$
- (B)
- $|x| = x\operatorname{sgn}|x|$
-
- (C)
- $|x| = |x|\operatorname{sgn} x$
- (D)
- $|x| = x\operatorname{sgn} x$

8. 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x + y \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, 则

- (A)
- $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$
- (B)
- $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$
- (C)
- $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$
- (D)
- $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$

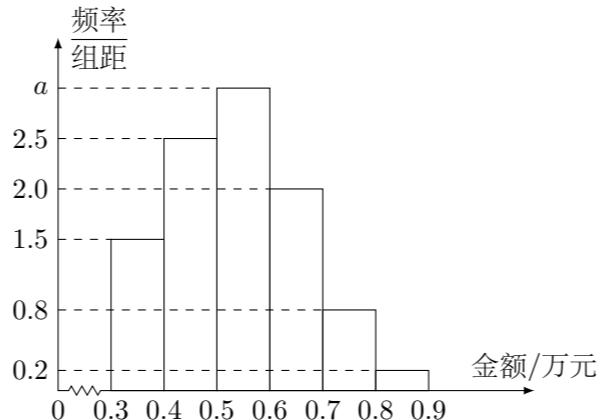
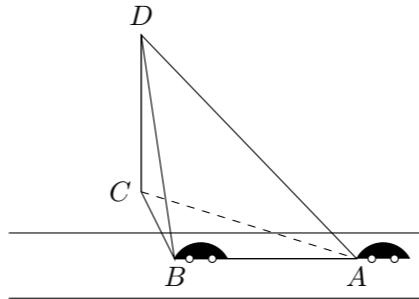
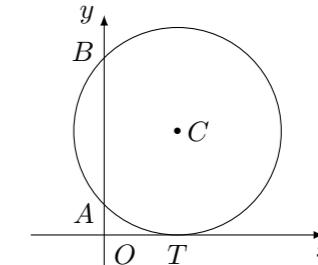
9. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()

- (A) 对任意的
- a, b
- ,
- $e_1 > e_2$
-
- (B) 当
- $a > b$
- 时,
- $e_1 > e_2$
- ; 当
- $a < b$
- 时,
- $e_1 < e_2$
-
- (C) 对任意的
- a, b
- ,
- $e_1 < e_2$
-
- (D) 当
- $a > b$
- 时,
- $e_1 < e_2$
- ; 当
- $a < b$
- 时,
- $e_1 > e_2$

10. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()

- (A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30

二、填空题

11. 已知向量 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}| = 3$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ____.12. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 2 \\ 3x - y \geq 0 \end{cases}$, 则 $3x + y$ 的最大值是 ____.13. 函数 $f(x) = 2 \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x^2$ 的零点个数为 ____.14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额(单位: 万元)都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示.(1) 直方图中的 $a =$ ____.(2) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为 ____.15. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ ____ m .16. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.

- (1) 圆
- C
- 的标准方程为 ____;
-
- (2) 圆
- C
- 在点
- B
- 处的切线在
- x
- 轴上的截距为 ____.

17. a 为实数, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a =$ ____ 时, $g(a)$ 的值最小.

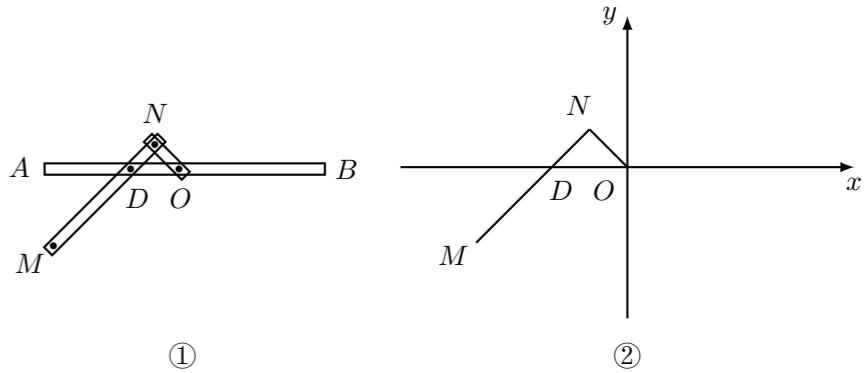
三、解答题

18. 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$		
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5	-5	0	

(1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;(2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1$, $b_2 = 2$, $q = d$, $S_{10} = 100$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .
21. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x) + g(x) = e^x$, 其中 e 为自然对数的底数.
- (1) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式, 并证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, $g(x) > 1$;
 - (2) 设 $a \leq 0$, $b \geq 1$, 证明: 当 $x > 0$ 时, $ag(x) + (1-a) < \frac{f(x)}{x} < bg(x) + (1-b)$.
22. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1$, $MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.
- (1) 求曲线 C 的方程;
 - (2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1 : x - 2y = 0$ 和 $l_2 : x + 2y = 0$ 分别交于 P , Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



20. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 点 E 是 PC 的中点, 连接 DE , BD , BE .

- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 PBC . 试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;
- (2) 记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1 , 四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.

