

理科数学

一、选择题

- 函数 $f(x) = |\sin x + \cos x|$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π
- 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 、 Q 、 R 分别是 AB 、 AD 、 B_1C_1 的中点. 那么, 正方体的过 P 、 Q 、 R 的截面图形是 ()
(A) 三角形 (B) 四边形 (C) 五边形 (D) 六边形
- 函数 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} (x \leq 0)$ 的反函数是 ()
(A) $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$ (B) $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq -1)$
(C) $y = \sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$ (D) $y = -\sqrt{(x+1)^3} (x \geq 0)$
- 已知函数 $y = \tan \omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数, 则 ()
(A) $0 < \omega \leq 1$ (B) $-1 \leq \omega < 0$ (C) $\omega \geq 1$ (D) $\omega \leq -1$
- 设 a 、 b 、 c 、 $d \in \mathbf{R}$, 若 $\frac{a+bi}{c+di}$ 为实数, 则 ()
(A) $bc+ad \neq 0$ (B) $bc-ad \neq 0$
(C) $bc-ad=0$ (D) $bc+ad=0$
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 , 点 M 在双曲线上且 $MF_1 \perp x$ 轴, 则 F_1 到直线 F_2M 的距离为 ()
(A) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$ (B) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$
- 锐角三角形的内角 A 、 B 满足 $\tan A - \frac{1}{\sin 2A} = \tan B$, 则有 ()
(A) $\sin 2A - \cos B = 0$ (B) $\sin 2A + \cos B = 0$
(C) $\sin 2A - \sin B = 0$ (D) $\sin 2A + \sin B = 0$
- 已知点 $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{3}, 0)$. 设 $\angle BAC$ 的平分线 AE 与 BC 相交于 E , 那么有 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 λ 等于 ()
(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$
- 已知集合 $M = \{x|x^2 - 3x - 28 \leq 0\}$, $N = \{x|x^2 - x - 6 > 0\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()
(A) $\{x|-4 \leq x < -2 \text{ 或 } 3 < x \leq 7\}$
(B) $\{x|-4 < x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x < 7\}$
(C) $\{x|x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$
(D) $\{x|x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
- 点 P 在平面上作匀速直线运动, 速度向量 $\boldsymbol{v} = (4, -3)$ (即点 P 的运动方向与 \boldsymbol{v} 相同, 且每秒移动的距离为 $|\boldsymbol{v}|$ 个单位). 设开始时点 P 的坐标为 $(-10, 10)$, 则 5 秒后点 P 的坐标为 ()
(A) $(-2, 4)$ (B) $(-30, 25)$ (C) $(10, -5)$ (D) $(5, -10)$

- 如果 a_1, a_2, \dots, a_8 为各项都大于零的等差数列, 公差 $d \neq 0$, 则 ()
(A) $a_1a_8 > a_4a_5$ (B) $a_1a_8 < a_4a_5$
(C) $a_1 + a_8 > a_4 + a_5$ (D) $a_1a_8 = a_4a_5$

- 将半径都为 1 的 4 个铅球完全装人形状为正四面体的容器里, 这个正四面体的高最小值为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$ (B) $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (C) $4 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}$

二、填空题

- 圆心为 $(1, 2)$ 且与直线 $5x - 12y - 7 = 0$ 相切的圆的方程为_____.
- 设 α 为第四象限的角, 若 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{13}{5}$, 则 $\tan 2\alpha =$ _____.
- 在由数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 所组成的没有重复数字的四位数中, 不能被 5 整除的数共有_____个.
- 下面是关于三棱锥的四个命题:
① 底面是等边三角形, 侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥;
② 底面是等边三角形, 侧面都是等腰三角形的三棱锥是正三棱锥;
③ 底面是等边三角形, 侧面的面积都相等的三棱锥是正三棱锥;
④ 侧棱与底面所成的角都相等, 且侧面与底面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥.
其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

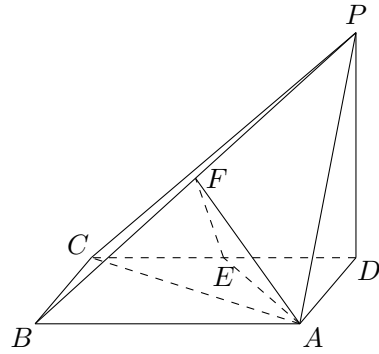
三、解答题

- 设函数 $f(x) = 2^{|x+1| - |x-1|}$, 求使 $f(x) \geq 2\sqrt{2}$ 的 x 的取值范围.

- 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, $\lg a_1$ 、 $\lg a_2$ 、 $\lg a_4$ 成等差数列. 又 $b_n = \frac{1}{a_{2^n}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
(1) 证明 $\{b_n\}$ 为等比数列;
(2) 如果无穷等比数列 $\{b_n\}$ 各项的和 $S = \frac{1}{3}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公差 d .
注: 无穷数列各项的和即当 $n \rightarrow \infty$ 时数列前 n 项和的极限.

- 甲、乙两队进行一场排球比赛. 根据以往经验, 单局比赛甲队胜乙队的概率为 0.6. 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设各局比赛相互间没有影响. 令 ξ 为本场比赛的局数, 求 ξ 的概率分布和数学期望. (精确到 0.0001)

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AD = PD$, E 、 F 分别为 CD 、 PB 的中点.
- (1) 求证: $EF \perp$ 平面 PAB ;
- (2) 设 $AB = \sqrt{2}BC$, 求 AC 与平面 AEF 所成的角的大小.



21. P 、 Q 、 M 、 N 四点都在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 上, F 为椭圆在 y 轴正半轴上的焦点. 已知 \overrightarrow{PF} 与 \overrightarrow{FQ} 共线, \overrightarrow{MF} 与 \overrightarrow{FN} 共线, 且 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. 求四边形 $PMQN$ 的面积的最小值和最大值.

22. 已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$.
- (1) 当 x 为何值时, $f(x)$ 取得最小值? 证明你的结论;
- (2) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是单调函数, 求 a 的取值范围.