

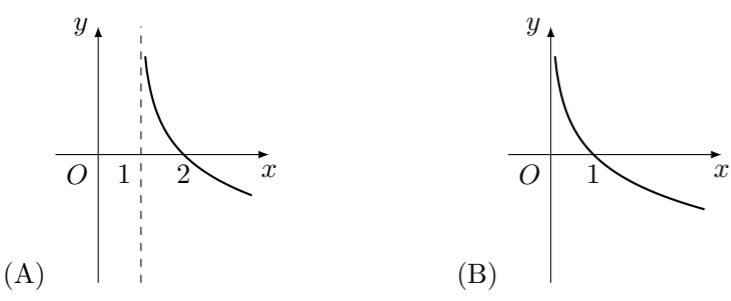
文科数学

一、选择题

1. 定义集合运算: $A \odot B = \{z | z = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$, 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $A \odot B$ 的所有元素之和为 ()
 (A) 0 (B) 6 (C) 12 (D) 18

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(x^2 - 1), & x \geq 2 \end{cases}$, 则 $f(f(2))$ 的值为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 函数 $y = 1 + a^x$ ($0 < a < 1$) 的反函数的图象大致是 ()



4. 设向量 $\mathbf{a} = (1, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, 4)$, 若表示向量 $4\mathbf{a}$, $3\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$, \mathbf{c} 的有向线段首尾相接能构成三角形, 则向量 \mathbf{c} 为 ()
 (A) $(1, -1)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(-4, 6)$ (D) $(4, -6)$

5. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(6)$ 的值为 ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, 则 $c =$ ()
 (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3} - 1$ (D) $\sqrt{3}$

7. 在给定双曲线中, 过焦点且垂直于实轴的弦长为 $\sqrt{2}$, 焦点到相应准线的距离为 $\frac{1}{2}$, 则该双曲线的离心率为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

8. 正方体的内切球与其外接球的体积之比为 ()
 (A) $1 : \sqrt{3}$ (B) $1 : 3$ (C) $1 : 3\sqrt{3}$ (D) $1 : 9$

9. 设 $p: x^2 - x - 2 < 0$, $q: \frac{1+x}{|x|-2} < 0$, 则 p 是 q 的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 已知 $\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\frac{3}{14}$, 则展开式中常数项是 ()
 (A) -1 (B) 1 (C) -45 (D) 45

11. 已知集合 $A = \{5\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3, 4\}$, 从这三个集合各取一个元素构成空间直角坐标系中点的坐标, 则确定的不同点的个数为 ()
 (A) 33 (B) 34 (C) 35 (D) 36

12. 已知 x 和 y 是正整数, 且满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leqslant 10 \\ x-y \leqslant 2 \\ 2x \geqslant 7 \end{cases}$, 则 $z = 2x+3y$ 的最小值是 ()
 (A) 24 (B) 14 (C) 13 (D) 11.5

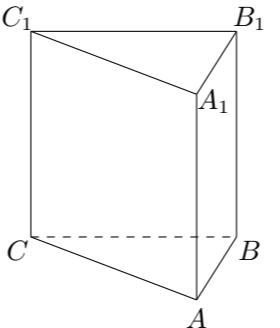
二、填空题

13. 某学校共有师生 2400 人, 现用分层抽样的方法, 从所有师生中抽取一个容量为 160 的样本. 已知从学生中抽取的人数为 150, 那么该学校的教师人数是_____.

14. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_4 = 14$, $S_{10} - S_7 = 30$, 则 $S_9 =$ _____.

15. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(4, 0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是_____.

16. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为_____.



三、解答题

17. 设函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a-1)x^2 + 1$, 其中 $a \geqslant 1$.
 (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 讨论 $f(x)$ 的极值.

18. 已知函数 $f(x) = A \sin^2(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 且 $y = f(x)$ 的最大值为 2, 其图象相邻两对称轴间的距离为 2, 并过点 $(1, 2)$.
 (1) 求 φ ;
 (2) 计算 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2008)$.

20. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel DC$, $AC \perp BD$, AC 与 BD 相交于点 O , 且顶点 P 在底面上的射影恰为 O 点. 又 $BO=2$, $PO=\sqrt{2}$, $PB \perp PD$.
- (1) 求异面直线 PD 与 BC 所成角的余弦值;
 - (2) 求二面角 $P-AB-C$ 的大小;
 - (3) 设点 M 在棱 PC 上, 且 $\frac{PM}{MC}=\lambda$, 问 λ 为何值时, $PC \perp$ 平面 BMD .
21. 已知椭圆的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 椭圆的短轴端点和焦点所组成的四边形为正方形, 两准线间的距离为 4.
- (1) 求椭圆的方程;
 - (2) 直线 l 过点 $P(0, 2)$ 且与椭圆相交于 A 、 B 两点, 当 $\triangle AOB$ 面积取得最大值时, 求直线 l 的方程.
22. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$. 点 $(n, 2a_{n+1} - a_n)$ 在直线 $y = x$ 上, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$.
- (1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n - 1$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
 - (3) 设 S_n 、 T_n 分别为数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ , 使得数列 $\left\{\frac{S_n + \lambda T_n}{n}\right\}$ 为等差数列? 若存在, 试求出 λ ; 若不存在, 则说明理由.

