

理科数学

一、选择题

1. $\sin 210^\circ =$ ()

- (A)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (B)
- $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C)
- $\frac{1}{2}$
- (D)
- $-\frac{1}{2}$

2. 函数 $f(x) = |\sin x|$ 的一个单调递增区间是 ()

- (A)
- $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
- (B)
- $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
- (C)
- $(\pi, \frac{3\pi}{2})$
- (D)
- $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

3. 设复数 z 满足 $\frac{1+2i}{z} = i$, 则 $z =$ ()

- (A)
- $-2+i$
- (B)
- $-2-i$
- (C)
- $2-i$
- (D)
- $2+i$

4. 以下四个数中的最大者是 ()

- (A)
- $(\ln 2)^2$
- (B)
- $\ln(\ln 2)$
- (C)
- $\ln \sqrt{2}$
- (D)
- $\ln 2$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$ ()

- (A)
- $\frac{2}{3}$
- (B)
- $\frac{1}{3}$
- (C)
- $-\frac{1}{3}$
- (D)
- $-\frac{2}{3}$

6. 不等式 $\frac{x-1}{x^2-4} > 0$ 的解集为 ()

- (A)
- $(-2, 1)$
- (B)
- $(2, +\infty)$
-
- (C)
- $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$
- (D)
- $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

7. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱长与底面边长相等, 则 AB_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦等于 ()

- (A)
- $\frac{\sqrt{6}}{4}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{10}}{4}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (D)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知曲线 $y = \frac{x^2}{4} - 3 \ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$, 则切点的横坐标为 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D)
- $\frac{1}{2}$

9. 把函数 $y = e^x$ 的图象按向量 $\mathbf{a} = (2, 3)$ 平移, 得到 $y = f(x)$ 的图象, 则 $f(x) =$ ()

- (A)
- $e^{x-3} + 2$
- (B)
- $e^{x+3} - 2$
- (C)
- $e^{x-2} + 3$
- (D)
- $e^{x+2} - 3$

10. 从 5 位同学中选派 4 位同学在星期五、星期六、星期日参加公益活动, 每人一天, 要求星期五有 2 人参加, 星期六、星期日各有 1 人参加, 则不同的选派方法共有 ()

- (A) 40 种 (B) 60 种 (C) 100 种 (D) 120 种

11. 设 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点. 若双曲线上存在点 A , 使 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$, 且 $|AF_1| = 3|AF_2|$, 则双曲线离心率为 ()

- (A)
- $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{15}}{2}$
- (D)
- $\sqrt{5}$

12. 设 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, A, B, C 为该抛物线上三点. 若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$, 则 $|FA| + |FB| + |FC| =$ ()

- (A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 3

二、填空题

13. $(1+2x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为_____. (用数字作答)14. 在某项测量中, 测量结果 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$). 若 ξ 在 $(0, 1)$ 内取值的概率为 0.4, 则 ξ 在 $(0, 2)$ 内取值的概率为_____.
15. 一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2 cm 的球面上. 如果正四棱柱的底面边长为 1 cm, 那么该棱柱的表面积为_____ cm^2 .16. 已知数列的通项 $a_n = -5n + 2$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ _____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知内角 $A = \frac{\pi}{3}$, 边 $BC = 2\sqrt{3}$, 设内角 $B = x$, 周长为 y .

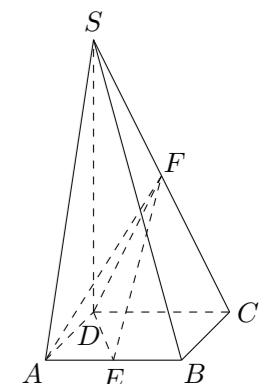
- (1) 求函数
- $y = f(x)$
- 的解析式和定义域;
-
- (2) 求
- y
- 的最大值.

18. 从某批产品中, 有放回地抽取产品二次, 每次随机抽取 1 件, 假设事件 A : “取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A) = 0.96$.

- (1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率
- p
- ;
-
- (2) 若该批产品共有 100 件, 从中任意抽取 2 件,
- ξ
- 表示取出的 2 件产品中二等品的件数, 求
- ξ
- 的分布列.

19. 如图, 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱 $SD \perp$ 底面 $ABCD$, E, F 分别是 AB, SC 的中点.

- (1) 求证:
- $EF \parallel$
- 平面
- SAD
- ;
-
- (2) 设
- $SD = 2CD$
- , 求二面角
- $A - EF - D$
- 的大小.



20. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为圆心的圆与直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切.

(1) 求圆 O 的方程;

(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A 、 B 两点, 圆内的动点 P 使 $|PA|$ 、 $|PO|$ 、 $|PB|$ 成等比数列, 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

21. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \in (0, 1)$, $a_n = \frac{3 - a_{n-1}}{2}$, $n = 2, 3, 4, \dots$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n \sqrt{3 - 2a_n}$, 证明 $b_n < b_{n+1}$, 其中 n 为正整数.

22. 已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a > 0$, 如果过点 (a, b) 可作曲线 $y = f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$.