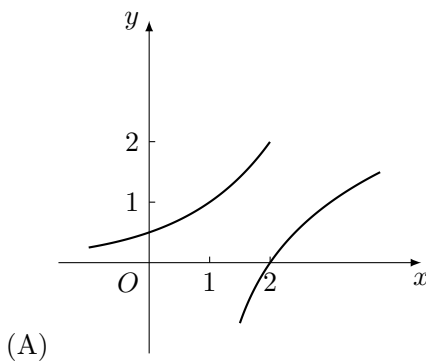


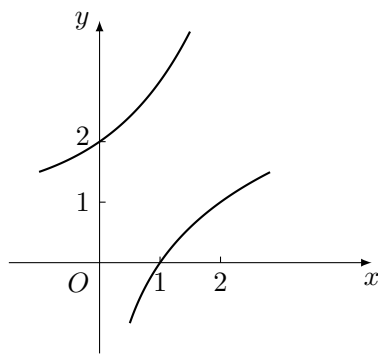
理科数学

一、选择题

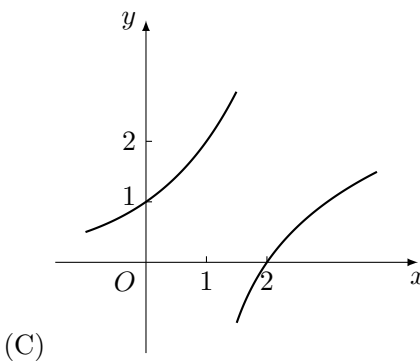
- 在复平面内, 复数 $z = \frac{1}{2+i}$ 对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} | |x-3| < 2\}$, 则集合 $\complement_U A$ 等于 ()
(A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{2, 3, 4\}$ (C) $\{1, 5\}$ (D) $\{5\}$
- 抛物线 $y = x^2$ 的准线方程是 ()
(A) $4y + 1 = 0$ (B) $4x + 1 = 0$ (C) $2y + 1 = 0$ (D) $2x + 1 = 0$
- 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ 的值为 ()
(A) $-\frac{1}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$
- 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_n = 2$, $S_{3n} = 14$, 则 S_{4n} 等于 ()
(A) 80 (B) 30 (C) 26 (D) 16
- 一个正三棱锥的四个顶点都在半径为 1 的球面上, 其中底面的三个顶点在该球的一个大圆上, 则该正三棱锥的体积是 ()
(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 以 C 的右焦点为圆心且与 C 的渐近线相切的圆的半径是 ()
(A) \sqrt{ab} (B) $\sqrt{a^2 + b^2}$ (C) a (D) b
- 若函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$, 则函数 $f(x-1)$ 与 $f^{-1}(x-1)$ 的图象可能是 ()



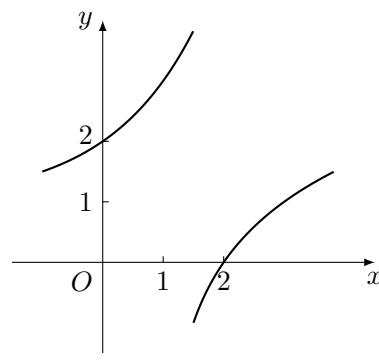
(A)



(B)



(C)

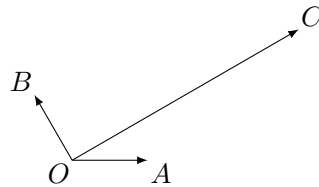


(D)

- 给出如下三个命题:
① 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad = bc$;
② 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab \neq 0$, 若 $\frac{a}{b} < 1$, 则 $\frac{b}{a} > 1$;
③ 若 $f(x) = \log_2 x$, 则 $f(|x|)$ 是偶函数.
其中不正确的序号是 ()
(A) ①②③ (B) ①② (C) ②③ (D) ①③
- 已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 直线 $m \subset \alpha$, 直线 $n \subset \beta$, 点 $A \in m$, 点 $B \in n$, 记点 A, B 之间的距离为 a , 点 A 到直线 n 的距离为 b , 直线 m 和 n 的距离为 c , 则 ()
(A) $b \leq c \leq a$ (B) $a \leq c \leq b$ (C) $c \leq a \leq b$ (D) $c \leq b \leq a$
- $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x) + f(x) \leq 0$. 对任意正数 a, b , 若 $a < b$, 则必有 ()
(A) $af(b) \leq bf(a)$ (B) $bf(a) \leq af(b)$ (C) $af(a) \leq f(b)$ (D) $bf(b) \leq f(a)$
- 设集合 $S = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, 在 S 上定义运算 \oplus 为: $A_i \oplus A_j = A_k$, 其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数, $i, j = 0, 1, 2, 3$. 则满足关系式 $(x \oplus x) \oplus A_2 = A_0$ 的 x ($x \in S$) 的个数为 ()
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

二、填空题

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x+1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x-1} \right) =$ _____.
- 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x-2y+4 \geq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \\ 3x-y-3 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x+2y$ 的最大值为_____.
- 如图, 平面内三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, 其中 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角为 120° , \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OC} 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为_____.



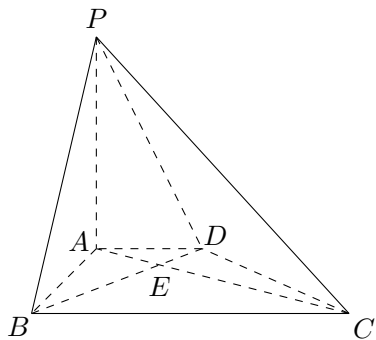
- 安排 3 名支教教师去 6 所学校任教, 每校至多 2 人, 则不同的分配方案共有_____种. (用数字作答)

三、解答题

- 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 其中向量 $\mathbf{a} = (m, \cos 2x)$, $\mathbf{b} = (1 + \sin 2x, 1)$, $x \in \mathbf{R}$, 且函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.
(1) 求实数 m 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 值的集合.

- 某项选拔共有三轮考核, 每轮设有一个问题, 能正确回答问题者进入下一轮考核, 否则即被淘汰. 已知某选手能正确回答第一、二、三轮的问题的概率分别为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$, 且各轮问题能否正确回答互不影响.
(1) 求该选手被淘汰的概率;
(2) 该选手在选拔中回答问题的个数记为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列与数学期望.

19. 如图, 在底面为直角梯形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 4$, $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 6$.
- (1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (2) 求二面角 $A-PC-D$ 的大小.



21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

22. 已知各项全不为零的数列 $\{a_k\}$ 的前 k 项和为 S_k , 且 $S_k = \frac{1}{2}a_k a_{k+1}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 其中 $a_1 = 1$.
- (1) 求数列 $\{a_k\}$ 的通项公式;
- (2) 对任意给定的正整数 n ($n \geq 2$), 数列 $\{b_k\}$ 满足 $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k-n}{a_{k+1}}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), $b_1 = 1$. 求 $b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

20. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + ax + a}$, 其中 a 为实数.
- (1) 若 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求 a 的取值范围;
- (2) 当 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} 时, 求 $f(x)$ 的单调减区间.