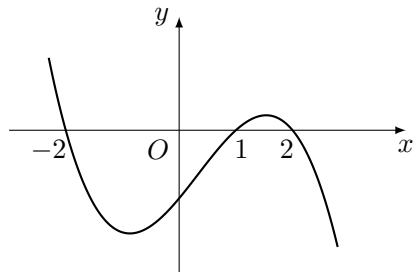


理科数学

一、选择题

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$, $a_4 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5 =$ ()
(A) 7 (B) 15 (C) 20 (D) 25
- 不等式 $\frac{x-1}{2x+1} \leq 0$ 的解集为 ()
(A) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
(C) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$ (D) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$
- 对任意的实数 k , 直线 $y = kx + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的位置关系一定是 ()
(A) 相离 (B) 相切
(C) 相交但直线不过圆心 (D) 相交且直线过圆心
- $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中常数项为 ()
(A) $\frac{35}{16}$ (B) $\frac{35}{8}$ (C) $\frac{35}{4}$ (D) 105
- 设 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 则 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值为 ()
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3
- 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (1, y)$, $\mathbf{c} = (2, -4)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| =$ ()
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) 10
- 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且以 2 为周期, 则“ $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的增函数”是“ $f(x)$ 为 $[3, 4]$ 上的减函数”的 ()
(A) 既不充分也不必要的条件 (B) 充分而不必要的条件
(C) 必要而不充分的条件 (D) 充要条件
- 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, 其导函数为 $f'(x)$, 且函数 $y = (1-x)f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论中一定成立的是 ()



- 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$
- 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
- 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$
- 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

- 设四面体的六条棱的长分别为 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$ 和 a , 且长为 a 的棱与长为 $\sqrt{2}$ 的棱异面, 则 a 的取值范围是 ()
(A) $(0, \sqrt{2})$ (B) $(0, \sqrt{3})$ (C) $(1, \sqrt{2})$ (D) $(1, \sqrt{3})$
- 设平面点集 $A = \left\{(x, y) \mid (y-x)\left(y - \frac{1}{x}\right) \geq 0\right\}$, $B = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 所表示的平面图形的面积为 ()
(A) $\frac{3}{4}\pi$ (B) $\frac{3}{5}\pi$ (C) $\frac{4}{7}\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}$

二、填空题

- 若 $(1+i)(2+i) = a + bi$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 则 $a + b =$ _____.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5n} - n} =$ _____.
- 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$, $b = 3$, 则 $c =$ _____.
- 过抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 若 $|AB| = \frac{25}{12}$, $|AF| < |BF|$, 则 $|AF| =$ _____.
- 某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节, 则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为_____. (用数字作答)

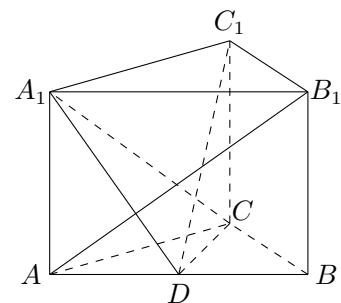
三、解答题

- 设 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2x} + \frac{3}{2}x + 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴.
(1) 求 a 的值;
(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

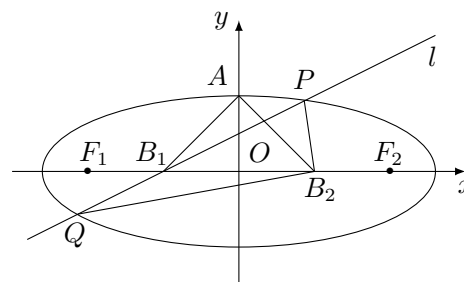
- 甲、乙两人轮流投篮, 每人每次投一球. 约定甲先投且先投中者获胜, 一直到有人获胜或每人都已投球 3 次时投篮结束. 设甲每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{3}$, 乙每次投篮投中的概率为 $\frac{1}{2}$, 且各次投篮互不影响.
(1) 求甲获胜的概率;
(2) 求投篮结束时甲的投篮次数 ξ 的分布列与期望.

- 设 $f(x) = 4 \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) \sin \omega x - \cos(2\omega x + \pi)$, 其中 $\omega > 0$.
(1) 求函数 $y = f(x)$ 的值域;
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数, 求 ω 的最大值.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 4$, $AC = BC = 3$, D 为 AB 的中点.
- (1) 求点 C 到平面 A_1ABB_1 的距离;
- (2) 若 $AB_1 \perp A_1C$, 求二面角 $A_1 - CD - C_1$ 的平面角的余弦值.



20. 如图, 设椭圆的中心为原点 O , 长轴在 x 轴上, 上顶点为 A , 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 线段 OF_1, OF_2 的中点分别为 B_1, B_2 , 且 $\triangle AB_1B_2$ 是面积为 4 的直角三角形.
- (1) 求该椭圆的离心率和标准方程;
- (2) 过 B_1 作直线 l 交椭圆于 P, Q 两点, 使 $PB_2 \perp QB_2$, 求直线 l 的方程.



21. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} = a_2 S_n + a_1$, 其中 $a_2 \neq 0$.
- (1) 求证: $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列;
- (2) 若 $a_2 > -1$, 求证: $S_n \leq \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, 并给出等号成立的充要条件.