2007 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$ ( )

(A) $\{1\}$ (B) $\{5\}$ (C) $\{2,4\}$ (D) $\{1,2,4,5\}$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数图象过点 $(1,5)$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象必过点 ( )

(A) $(1,1)$ (B) $(1,5)$ (C) $(5,1)$ (D) $(5,5)$

3. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$, 且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right)\boldsymbol{b}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

4. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3=9$, $S_6=36$, 则 $a_7+a_8+a_9=$ ( )

(A) 63 (B) 45 (C) 36 (D) 27

5. 若 $\theta\in\left(\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi\right)$, 则复数 $(\cos\theta+\sin\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{i}$ 在复平面内所对应的点在 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

6. 若函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移后, 得到函数 $y=f(x+1)-2$ 的图象, 则向量 $\boldsymbol{a}=$ ( )

(A) $(-1,-2)$ (B) $(1,-2)$ (C) $(-1,2)$ (D) $(1,2)$

7. 若 m、n 是两条不同的直线, α、β、γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 ( )

(A) 若 $m\subset\beta$, $\alpha\perp\beta$, 则 $m\perp\alpha$

(B) 若 $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$

(C) 若 $m\perp\beta$, $m\parallel\alpha$, 则 $\alpha\perp\beta$

(D) 若 $\alpha\perp\gamma$, $\alpha\perp\beta$, 则 $\beta\perp\gamma$

8. 已知变量 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0\\ x\geqslant 1\\ x+y-7\leqslant 0\end{cases}$, 则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是( )

(A) $\left[\dfrac{9}{5},6\right]$ (B) $\left(-\infty,\dfrac{9}{5}\right]\cup[6,+\infty)$

(C) $(-\infty,3]\cup[6,+\infty)$ (D) $[3,6]$

9. 一个坛子里有编号为 1, 2, $\cdots$, 12 的 12 个大小相同的球, 其中 1 到 6 号球是红球, 其余的是黑球. 若从中任取两个球, 则取到的都是红球, 且至少有 1 个球的号码是偶数的概率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{22}$ (B) $\dfrac{1}{11}$ (C) $\dfrac{3}{22}$ (D) $\dfrac{2}{11}$

10. 设 p、q 是两个命题, p: $\log_{\frac{1}{2}}(|x|-3)>0$, q: $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}>0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11. 设 P 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{12}=1$ 上的一点, F_1、F_2 是该双曲线的两个焦点. 若 $|P_1F|:|PF_2|=3:2$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 ( )

(A) $6\sqrt{3}$ (B) 12 (C) $12\sqrt{3}$ (D) 24

12. 已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 仅当 $x=0$ 时的函数值为 0, 且 $f(x)\geqslant g(x)$, 那么下列情形不可能出现的是 ( )

(A) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 也是 $g(x)$ 的极大值

(B) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 也是 $g(x)$ 的极小值

(C) 0 是 $f(x)$ 的极大值, 但不是 $g(x)$ 的极值

(D) 0 是 $f(x)$ 的极小值, 但不是 $g(x)$ 的极值

二、填空题

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x,\ x\geqslant 0\\ x^2-1,\ x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$______.

14. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点 P 到左准线的距离为 10, F 是该椭圆的左焦点. 若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{OM}\right|=$______.

15. 若一个底面边长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上, 则此球的体积为______.

16. 将数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 排成一列, 记第 i 个数为 a_i ($i=1$, 2, $\cdots$, 6). 若 $a_1\neq 1$, $a_3\neq 3$, $a_5\neq 5$, $a_1<a_3<a_5$, 则不同的排列方法共有______种. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{\omega x}{2}$, $x\in\mathbf{R}$ (其中 $\omega>0$).

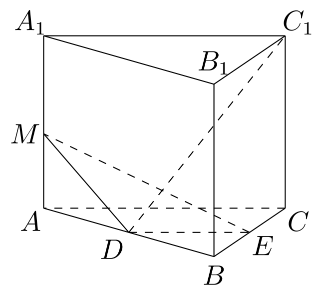
(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $y=f(x)$, $x\in(a,a+\pi]$ 的图象与直线 $y=-1$ 有且仅有两个不同的交点, 试确定 ω 的值 (不必证明), 并求函数 $y=f(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 的单调增区间.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AC=BC=a$, D、E 分别为棱 AB、BC 的中点, M 为棱 AA_1 上的点, 二面角 $M-DE-A$ 为 $30°$.

(1) 证明: $A_1B_1\perp C_1D$;

(2) 求 MA 的长, 并求点 C 到平面 MDE 的距离.



19. 某企业准备投产一批特殊型号的产品, 已知该种产品的成本 C 与产量 q 的函数关系式为 $C=\dfrac{q^3}{3}-3q^2+20q+10$ $(q>0)$. 该种产品的市场前景无法确定, 有三种可能出现的情形, 各种情形发生的概率及产品价格 p 与产量 q 的函数关系如下表所示:

市场情形	概率	价格 p 与产量 q 的函数关系式
好	0.4	$p=164-3q$
中	0.4	$p=101-3q$
差	0.2	$p=70-3q$

设 L_1、L_2、L_3 分别表示市场情形好、中、差时的利润, 随机变量 ξ_q 表示当产量为 q 而市场前景无法确定时的利润.

(1) 分别求利润 L_1、L_2、L_3 与产量 q 的函数关系式;

(2) 当产量 q 确定时, 求期望 $E\xi_q$;

(3) 试问产量 q 取何值时, $E\xi_q$ 取得最大值.

20. 已知正三角形 OAB 的三个顶点都在抛物线 $y^2=2x$ 上, 其中 O 为坐标原点, 设圆 C 是 $\triangle OAB$ 的外接圆 (点 C 为圆心).
(1) 求圆 C 的方程;
(2) 设圆 M 的方程为 $(x-4-7\cos\theta)^2+(y-7\sin\theta)^2=1$, 过圆 M 上任意一点 P 分别作圆 C 的两条切线 PE、PF, 切点为 E、F, 求 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}$ 的最大值和最小值.

21. 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 与函数 $f(x)$、$g(x)$, $x\in\mathbf{R}$ 满足条件: $b_1=b$, $a_n=f(b_n)=g(b_{n+1})$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.
(1) 若 $f(x)=tx+1$ $(t\neq 0,\ t\neq 2)$, $g(x)=2x$, $f(b)\neq g(b)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 求 t 的取值范围, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (用 t 表示);
(2) 若函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $g(x)=f^{-1}(x)$, $b=1$, $f(1)<1$, 证明对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}<a_n$.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-2t(\mathrm{e}^x+x)+x^2+2t^2+1$, $g(x)=\dfrac{1}{2}f'(x)$.
(1) 证明: 当 $t<2\sqrt{2}$ 时, $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;
(2) 对于给定的闭区间 $[a,b]$, 试说明存在实数 k, 当 $t>k$ 时, $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数;
(3) 证明: $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$.