

## 理科数学

## 一、选择题

1. 集合  $M = \{x \mid \lg x > 0\}$ ,  $N = \{x \mid x^2 \leq 4\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- (A)
- $(1, 2)$
- (B)
- $[1, 2)$
- (C)
- $(1, 2]$
- (D)
- $[1, 2]$

2. 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 ( )

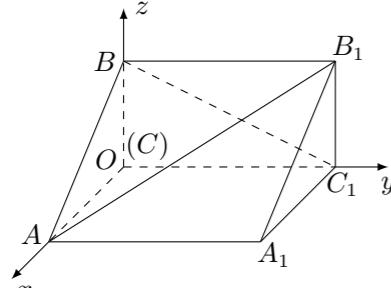
- (A)
- $y = x + 1$
- (B)
- $y = -x^3$
- (C)
- $y = \frac{1}{x}$
- (D)
- $y = x|x|$

3. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 则“ $ab = 0$ ”是“复数  $a + \frac{b}{i}$  为纯虚数”的 ( )

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
- 
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ ,  $l$  是过点  $P(3, 0)$  的直线, 则 ( )

- (A)
- $l$
- 与
- $C$
- 相交 (B)
- $l$
- 与
- $C$
- 相切
- 
- (C)
- $l$
- 与
- $C$
- 相离 (D) 以上三个选项均有可能

5. 如图, 在空间直角坐标系中有直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$ ,  $CA=CC_1=2CB$ , 则直线  $BC_1$  与直线  $AB_1$  夹角的余弦值为 ( )

- (A)
- $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- (C)
- $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- (D)
- $\frac{3}{5}$

6. 从甲、乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示 (如图所示). 设甲、乙两组数据的平均数分别为  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ , 中位数分别为  $m_{\text{甲}}$ ,  $m_{\text{乙}}$ , 则 ( )

甲	乙
8 6 5	0
8 8 4 0 0	1 0 2 8
7 5 2	2 0 2 3 3 7
8 0 0	3 1 2 4 4 8
3 1	4 2 3 8

- (A)
- $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$
- ,
- $m_{\text{甲}} > m_{\text{乙}}$
- 
- (B)
- $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$
- ,
- $m_{\text{甲}} < m_{\text{乙}}$
- 
- (C)
- $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$
- ,
- $m_{\text{甲}} > m_{\text{乙}}$
- 
- (D)
- $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$
- ,
- $m_{\text{甲}} < m_{\text{乙}}$

7. 设函数  $f(x) = xe^x$ , 则 ( )

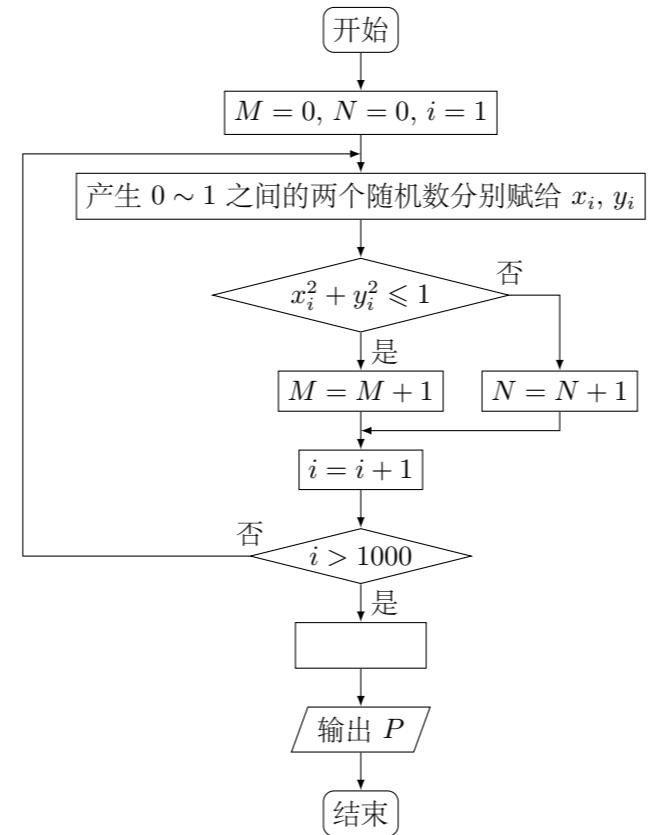
- (A)
- $x=1$
- 为
- $f(x)$
- 的极大值点 (B)
- $x=1$
- 为
- $f(x)$
- 的极小值点
- 
- (C)
- $x=-1$
- 为
- $f(x)$
- 的极大值点 (D)
- $x=-1$
- 为
- $f(x)$
- 的极小值点

8. 两人进行乒乓球比赛, 先赢 3 局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形 (各人输赢局次的不同视为不同情形) 共有 ( )

- (A) 10 种 (B) 15 种 (C) 20 种 (D) 30 种

9. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对边的长分别为  $a, b, c$ , 若  $a^2 + b^2 = 2c^2$ , 则  $\cos C$  的最小值为 ( )

- (A)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (C)
- $\frac{1}{2}$
- (D)
- $-\frac{1}{2}$

10. 如图所示是用模拟方法估计圆周率  $\pi$  值的程序框图,  $P$  表示估计结果, 则图中空白框内应填入 ( )

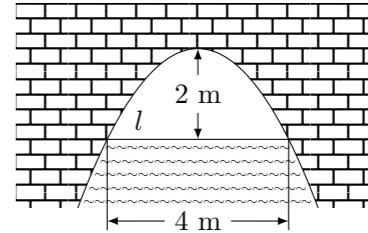
- (A)
- $P = \frac{N}{1000}$
- (B)
- $P = \frac{4N}{1000}$
- (C)
- $P = \frac{M}{1000}$
- (D)
- $P = \frac{4M}{1000}$

## 二、填空题

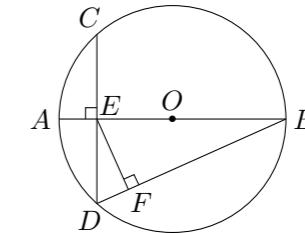
11. 观察下列不等式:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} &< \frac{3}{2}, \\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} &< \frac{5}{3}, \\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} &< \frac{7}{4}, \\ \dots \end{aligned}$$

照此规律, 第五个不等式为\_\_\_\_\_.

12.  $(a+x)^5$  展开式中  $x^2$  的系数为 10, 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.13. 如图是抛物线形拱桥, 当水面在  $l$  时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后, 水面宽\_\_\_\_\_米.14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $D$  是由  $x$  轴和曲线  $y = f(x)$  及该曲线在点  $(1, 0)$  处的切线所围成的封闭区域, 则  $z = x - 2y$  在  $D$  上的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 三选一.

【A】若存在实数  $x$  使  $|x-a| + |x-1| \leq 3$  成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.【B】如图, 在圆  $O$  中, 直径  $AB$  与弦  $CD$  垂直, 垂足为  $E$ ,  $EF \perp DB$ , 垂足为  $F$ , 若  $AB = 6$ ,  $AE = 1$ , 则  $DF \cdot DB =$ \_\_\_\_\_.【C】直线  $2\rho \cos \theta = 1$  与圆  $\rho = 2 \cos \theta$  相交的弦长为\_\_\_\_\_.

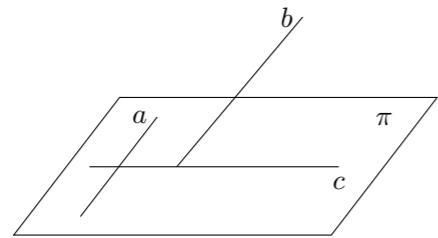
## 三、解答题

16. 函数  $f(x) = A \sin \left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$  ( $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ) 的最大值为 3, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$ .

- (1) 求函数
- $f(x)$
- 的解析式;
- 
- (2) 设
- $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$
- ,
- $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2$
- , 求
- $\alpha$
- 的值.

17. 设  $\{a_n\}$  是公比不为 1 的等比数列, 其前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_5, a_3, a_4$  成等差数列.  
 (1) 求数列  $\{a_n\}$  的公比;  
 (2) 证明: 对任意  $k \in \mathbf{N}_+$ ,  $S_{k+2}, S_k, S_{k+1}$  成等差数列.
19. 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 椭圆  $C_2$  以  $C_1$  的长轴为短轴, 且与  $C_1$  有相同的离心率.  
 (1) 求椭圆  $C_2$  的方程;  
 (2) 设  $O$  为坐标原点, 点  $A, B$  分别在椭圆  $C_1$  和  $C_2$  上,  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$ , 求直线  $AB$  的方程.
21. 设函数  $f_n(x) = x^n + bx + c$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ,  $b, c \in \mathbf{R}$ ).  
 (1) 设  $n \geq 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ , 证明:  $f_n(x)$  在区间  $(\frac{1}{2}, 1)$  内存在唯一零点;  
 (2) 设  $n = 2$ , 若对任意  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , 有  $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leq 4$ , 求  $b$  的取值范围;  
 (3) 在 (1) 的条件下, 设  $x_n$  是  $f_n(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1)$  内的零点, 判断数列  $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  的增减性.

18. (1) 如图, 证明命题“ $a$  是平面  $\pi$  内的一条直线,  $b$  是  $\pi$  外的一条直线 ( $b$  不垂直于  $\pi$ ),  $c$  是直线  $b$  在  $\pi$  上的投影, 若  $a \perp b$ , 则  $a \perp c$ ”为真;  
 (2) 写出上述命题的逆命题, 并判断其真假 (不需证明).



20. 某银行柜台设有一个服务窗口, 假设顾客办理业务所需的时间互相独立, 且都是整数分钟, 对以往顾客办理业务所需的时间统计结果如下:

办理业务所需的时间 (分)	1	2	3	4	5
频率	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1

从第一个顾客开始办理业务时计时.

- (1) 估计第三个顾客恰好等待 4 分钟开始办理业务的概率;  
 (2)  $X$  表示至第 2 分钟末已办理完业务的顾客人数, 求  $X$  的分布列及数学期望.