

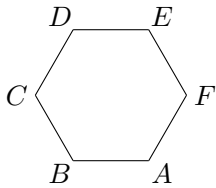
理科数学

一、选择题

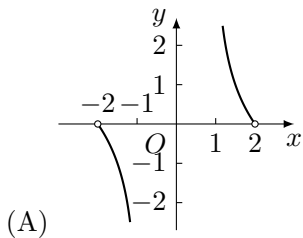
- 有一容量为 66 的样本, 数据的分组及各组的频数如下:

[11.5, 15.5)	2	[15.5, 19.5)	4	[19.5, 23.5)	9	[23.5, 27.5)	18
[27.5, 31.5)	11	[31.5, 35.5)	12	[35.5, 39.5)	7	[39.5, 43.5)	3

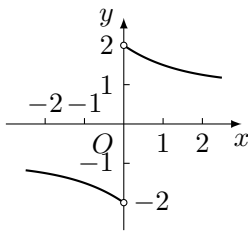
 根据样本的频率分布, 估计数据落在 [31.5, 43.5) 的概率约是 ()
 (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$
- 复数 $-i + \frac{1}{i} =$ ()
 (A) $-2i$ (B) $\frac{1}{2}i$ (C) 0 (D) $2i$
- l_1, l_2, l_3 是空间三条不同的直线, 则下列命题正确的是 ()
 (A) $l_1 \perp l_2, l_2 \perp l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$ (B) $l_1 \perp l_2, l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \perp l_3$
 (C) $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面 (D) l_1, l_2, l_3 共点 $\Rightarrow l_1, l_2, l_3$ 共面
- 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} =$ ()



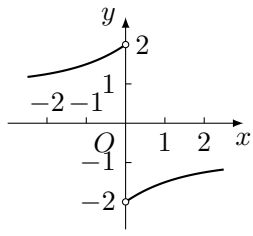
- (A) $\mathbf{0}$ (B) \overrightarrow{BE} (C) \overrightarrow{AD} (D) \overrightarrow{CF}
- “函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义”是“ $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续”的 ()
 (A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A \leq \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C$, 则 A 的取值范围是 ()
 (A) $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
- 已知 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$, 则 $f(x)$ 的反函数的图象大致是 ()



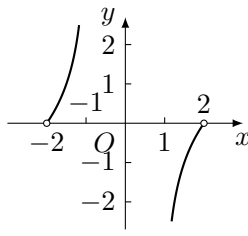
(A)



(B)



(C)



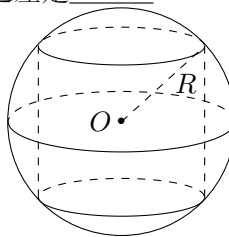
(D)

- 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 3, $\{b_n\}$ 为等差数列且 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 若 $b_3 = -2, b_{10} = 12$, 则 $a_8 =$ ()
 (A) 0 (B) 3 (C) 8 (D) 11
- 某运输公司有 12 名驾驶员和 19 名工人, 有 8 辆载重量为 10 吨的甲型卡车和 7 辆载重量为 6 吨的乙型卡车. 某天需运往 A 地至少 72 吨的货物, 派用的每辆车需载满且只运送一次, 派用的每辆甲型卡车需配 2 名工人, 运送一次可得利润 450 元; 派用的每辆乙型卡车需配 1 名工人, 运送一次可得利润 350 元, 该公司合理计划当天派用甲、乙卡车的车辆数, 可得最大利润 $z =$ ()
 (A) 4650 元 (B) 4700 元 (C) 4900 元 (D) 5000 元

- 在抛物线 $y = x^2 + ax - 5$ ($a \neq 0$) 上取横坐标为 $x_1 = -4, x_2 = 2$ 的两点, 经过两点引一条割线, 有平行于该割线的一条直线同时与抛物线和圆 $5x^2 + 5y^2 = 36$ 相切, 则抛物线顶点的坐标为 ()
 (A) $(-2, -9)$ (B) $(0, -5)$ (C) $(2, -9)$ (D) $(1, -6)$
- 已知定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 3f(x+2)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$. 设 $f(x)$ 在 $[2n-2, 2n)$ 上的最大值为 a_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ ()
 (A) 3 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{3}{2}$
- 在集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中任取一个偶数 a 和一个奇数 b 构成以原点为起点的向量 $\alpha = (a, b)$. 从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形. 记所有作成的平行四边形的个数为 n , 其中面积不超过 4 的平行四边形的个数为 m , 则 $\frac{m}{n} =$ ()
 (A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

二、填空题

- 计算 $\left(\lg \frac{1}{4} - \lg 25\right) \div 100^{-\frac{1}{2}} =$ _____.
- 双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 4, 那么点 P 到左准线的距离是_____.
- 如图, 半径为 R 的球 O 中有一内接圆柱. 当圆柱的侧面积最大时, 球的表面积与该圆柱的侧面积之差是_____.



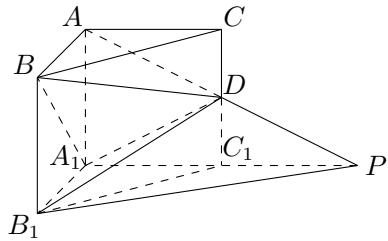
- 函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 若 $x_1, x_2 \in A$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时总有 $x_1 = x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x) = 2x + 1$ ($x \in \mathbf{R}$) 是单函数. 下列命题:
 ① 函数 $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbf{R}$) 是单函数;
 ② 若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$;

- ③ 若 $f: A \rightarrow B$ 为单函数, 则对于任意 $b \in B$, 它至多有一个原象;
 - ④ 函数 $f(x)$ 在某区间上具有单调性, 则 $f(x)$ 一定是单函数.
- 其中的真命题是_____. (写出所有真命题的编号)

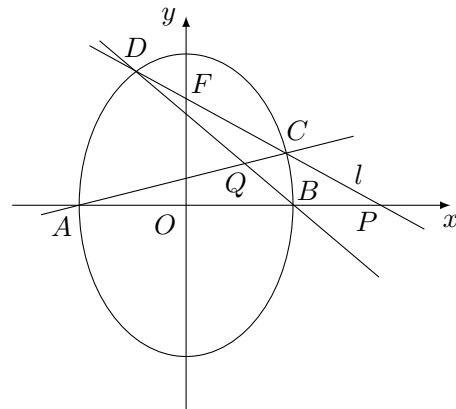
三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.
 (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和最小值;
 (2) 已知 $\cos(\beta - \alpha) = \frac{4}{5}$, $\cos(\beta + \alpha) = -\frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, 求证: $[f(\beta)]^2 - 2 = 0$.
- 本着健康、低碳的生活理念, 租自行车骑游的人越来越多. 某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费, 超过两小时的部分每小时收费 2 元 (不足 1 小时的部分按 1 小时计算). 有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游 (各租一车一次). 设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$; 两小时以上且不超过三小时还车的概率分别是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$; 两人租车时间都不会超过四小时.
 (1) 求甲、乙两人所付的租车费用相同的概率;
 (2) 设甲、乙两人所付的租车费用之和为随机变量 ξ , 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 1$. D 是棱 CC_1 上的一点, P 是 AD 的延长线与 A_1C_1 的延长线的交点, 且 $PB_1 \parallel$ 平面 BDA_1 .
- (1) 求证: $CD = C_1D$;
 - (2) 求二面角 $A - A_1D - B$ 的平面角的余弦值;
 - (3) 求点 C 到平面 B_1DP 的距离.



21. 椭圆有两顶点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, 过其焦点 $F(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆交于 C, D 两点, 并与 x 轴交于点 P . 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q .
- (1) 当 $|CD| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ 时, 求直线 l 的方程;
 - (2) 当点 P 异于 A, B 两点时, 求证: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 为定值.



22. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$, $h(x) = \sqrt{x}$.
- (1) 设函数 $F(x) = f(x) - h(x)$, 求 $F(x)$ 的单调区间与极值;
 - (2) 设 $a \in \mathbf{R}$, 解关于 x 的方程 $\log_4 \left[\frac{3}{2}f(x-1) - \frac{3}{4} \right] = \log_2 h(a-x) - \log_2 h(4-x)$;
 - (3) 试比较 $f(100)h(100) - \sum_{k=1}^{100} h(k)$ 与 $\frac{1}{6}$ 的大小.

20. 设 d 为非零实数, $a_n = \frac{1}{n} [C_n^1 d + 2C_n^2 d^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} d^{n-1} + nC_n^n d^n]$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 写出 a_1, a_2, a_3 并判断 $\{a_n\}$ 是否为等比数列. 若是, 给出证明; 若不是, 说明理由;
 - (2) 设 $b_n = nda_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .