

2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）

# 文科数学

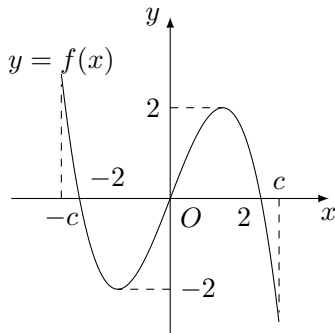
## 一、填空题

- 函数  $y = \sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  的最小正周期  $T =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $x = \frac{\pi}{3}$  是方程  $2 \cos(x + \alpha) = 1$  的解, 其中  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , 则  $\alpha =$ \_\_\_\_\_.
- 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_5 = 3$ ,  $a_6 = -2$ , 则  $a_4 + a_5 + \cdots + a_{10} =$ \_\_\_\_\_.
- 已知定点  $A(0, 1)$ , 点  $B$  在直线  $x + y = 0$  上运动, 当线段  $AB$  最短时, 点  $B$  的坐标是\_\_\_\_\_.
- 在正四棱锥  $P - ABCD$  中, 若侧面与底面所成二面角的大小为  $60^\circ$ , 则异面直线  $PA$  与  $BC$  所成角的大小等于\_\_\_\_\_. (结果用反三角函数值表示)
- 设集合  $A = \{x | |x| < 4\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$ , 则集合  $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ \_\_\_\_\_.
- 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ , 则  $\angle ABC =$ \_\_\_\_\_. (结果用反三角函数值表示)
- 若首项为  $a_1$ , 公比为  $q$  的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和总小于这个数列的各项和, 则首项  $a_1$ , 公比  $q$  的一组取值可以是  $(a_1, q) =$ \_\_\_\_\_.
- 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为\_\_\_\_\_. (结果用分数表示)
- 方程  $x^3 + \lg x = 18$  的根  $x \approx$ \_\_\_\_\_. (结果精确到 0.1)
- 已知点  $A\left(0, \frac{2}{n}\right)$ ,  $B\left(0, -\frac{2}{n}\right)$ ,  $C\left(4 + \frac{2}{n}, 0\right)$ , 其中  $n$  为正整数. 设  $S_n$  表示  $\triangle ABC$  外接圆的面积, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.
- 给出问题:  $F_1$ 、 $F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$  的焦点, 点  $P$  在双曲线上. 若点  $P$  到焦点  $F_1$  的距离等于 9, 求点  $P$  到焦点  $F_2$  的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由  $||PF_1| - |PF_2|| = 8$ , 即  $|9 - |PF_2|| = 8$ , 得  $|PF_2| = 1$  或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

- 下列函数中, 既为偶函数又在  $(0, \pi)$  上单调递增的是 ( )  
 (A)  $y = \tan |x|$  (B)  $y = \cos(-x)$   
 (C)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  (D)  $y = \left|\cot \frac{x}{2}\right|$
- 在下列条件中, 可判断平面  $\alpha$  与  $\beta$  平行的是 ( )  
 (A)  $\alpha$ 、 $\beta$  都垂直于平面  $\gamma$   
 (B)  $\alpha$  内存在不共线的三点到  $\beta$  的距离相等  
 (C)  $l, m$  是  $\alpha$  内两条直线, 且  $l \parallel \beta, m \parallel \beta$   
 (D)  $l, m$  是两条异面直线, 且  $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$

- 在  $P(1, 1)$ 、 $Q(1, 2)$ 、 $M(2, 3)$  和  $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  四点中, 函数  $y = a^x$  的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 ( )  
 (A)  $P$  (B)  $Q$  (C)  $M$  (D)  $N$
- $f(x)$  是定义在区间  $[-c, c]$  上的奇函数, 其图象如图所示: 令  $g(x) = af(x) + b$ , 则下列关于函数  $g(x)$  的叙述正确的是 ( )

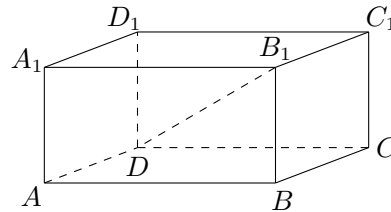


- 若  $a < 0$ , 则函数  $g(x)$  的图象关于原点对称
- 若  $a = -1$ ,  $-2 < b < 0$ , 则方程  $g(x) = 0$  有大于 2 的实根
- 若  $a \neq 0$ ,  $b = 2$ , 则方程  $g(x) = 0$  有两个实根
- 若  $a \geq 1$ ,  $b < 2$ , 则方程  $g(x) = 0$  有三个实根

## 三、解答题

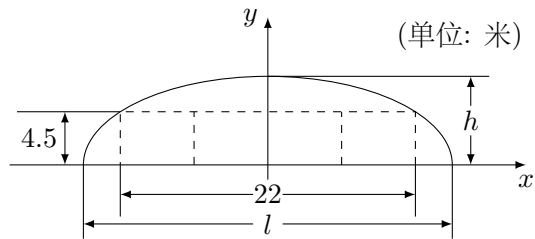
- 已知复数  $z_1 = \cos \theta - i$ ,  $z_2 = \sin \theta + i$ , 求  $|z_1 \cdot z_2|$  的最大值和最小值.

- 已知平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $A_1A \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AB = 4$ ,  $AD = 2$ . 若  $B_1D \perp BC$ , 直线  $B_1D$  与平面  $ABCD$  所成的角等于  $30^\circ$ , 求平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积.



- 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ , 求函数  $f(x)$  的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.
- (1) 若最大拱高  $h$  为 6 米, 则隧道设计的拱宽  $l$  是多少?
- (2) 若最大拱高  $h$  不小于 6 米, 则应如何设计拱高  $h$  和拱宽  $l$ , 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?
- 注: 半个椭圆的面积公式为  $S = \frac{\pi}{4}lh$ , 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以  $O$  为原点的直角坐标系中, 点  $A(4, -3)$  为  $\triangle OAB$  的直角顶点. 已知  $|AB| = 2|OA|$ , 且点  $B$  的纵坐标大于零.
- (1) 求向量  $\overrightarrow{AB}$  的坐标;
- (2) 求圆  $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$  关于直线  $OB$  对称的圆的方程;
- (3) 是否存在实数  $a$ , 使抛物线  $y = ax^2 - 1$  上总有关于直线  $OB$  对称的两个点? 若不存在, 说明理由; 若存在, 求  $a$  的取值范围.

22. 已知数列  $\{a_n\}$  ( $n$  为正整数) 是首项是  $a_1$ , 公比为  $q$  的等比数列.
- (1) 求和:  $a_1C_2^0 - a_2C_2^1 + a_3C_2^2, a_1C_3^0 - a_2C_3^1 + a_3C_3^2 - a_4C_3^3$ ;
- (2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数  $n$  的一个结论, 并加以证明;
- (3) 设  $q \neq 1, S_n$  是等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 求:  $S_1C_n^0 - S_2C_n^1 + S_3C_n^2 - S_4C_n^3 + \cdots + (-1)^n S_{n+1}C_n^n$ .