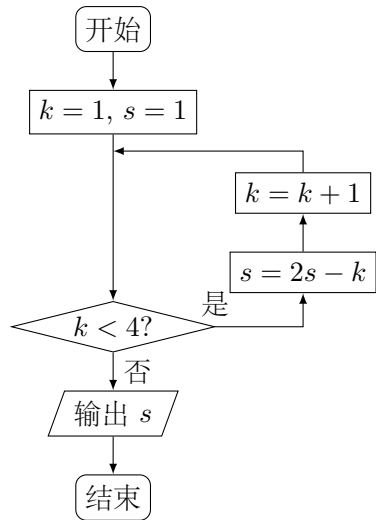


文科数学

一、选择题

- 复数 $(2 + i)^2$ 等于 ()
(A) $3 + 4i$ (B) $5 + 4i$ (C) $3 + 2i$ (D) $5 + 2i$
- 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $N = \{-2, 2\}$, 下列结论成立的是 ()
(A) $N \subseteq M$ (B) $M \cup N = M$
(C) $M \cap N = N$ (D) $M \cap N = \{2\}$
- 已知向量 $\mathbf{a} = (x - 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件是 ()
(A) $x = -\frac{1}{2}$ (B) $x = -1$ (C) $x = 5$ (D) $x = 0$
- 一个几何体的三视图形状都相同, 大小均相等, 那么这个几何体不可以是 ()
(A) 球 (B) 三棱锥 (C) 正方体 (D) 圆柱
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点为 $(3, 0)$, 则该双曲线的离心率等于 ()
(A) $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ (B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 s 值等于 ()



- (A) -3 (B) -10 (C) 0 (D) -2
- 直线 $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长度等于 ()
(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 1
- 函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的一条对称轴是 ()
(A) $x = \frac{\pi}{4}$ (B) $x = \frac{\pi}{2}$ (C) $x = -\frac{\pi}{4}$ (D) $x = -\frac{\pi}{2}$

- 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $f(g(\pi))$ 的值为 ()
(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) π

- 若直线 $y = 2x$ 上存在点 (x, y) 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0 \\ x - 2y - 3 \leq 0 \\ x \geq m \end{cases}$, 则实数 m 的最大值为 ()
(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

- 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_{2012} 等于 ()
(A) 1006 (B) 2012 (C) 503 (D) 0
- 已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - abc$, $a < b < c$, 且 $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. 现给出如下结论: ① $f(0)f(1) > 0$; ② $f(0)f(1) < 0$; ③ $f(0)f(3) > 0$; ④ $f(0)f(3) < 0$. 其中正确结论的序号是 ()
(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

二、填空题

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, 则 $AC =$ _____.
- 一支田径队有男女运动员 98 人, 其中男运动员有 56 人. 按男女比例用分层抽样的方法, 从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本, 那么应抽取女运动员人数是_____.
- 已知关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 某地区规划道路建设, 考虑道路铺设方案. 方案设计图中, 点表示城市, 两点之间连线表示两城市间可铺设道路, 连线上数据表示两城市间铺设道路的费用, 要求从任一城市都能到达其余各城市, 并且铺设道路的总费用最小. 例如: 在三个城市道路设计中, 若城市间可铺设道路的线路图如图 1, 则最优设计方案如图 2, 此时铺设道路的最小总费用为 10. 现给出该地区可铺设道路的线路图如图 3, 则铺设道路的最小总费用为_____.

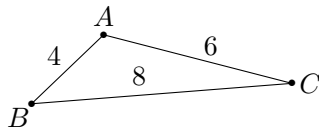


图 1

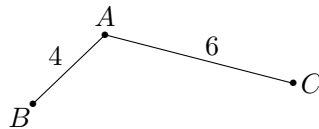


图 2

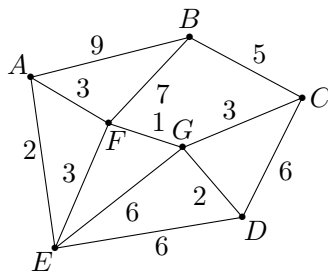


图 3

三、解答题

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 中, $a_1 = b_1 = 1$, $b_4 = 8$, $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10} = 55$.
(1) 求 a_n 和 b_n ;
(2) 现分别从 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 3 项中各随机抽取一项, 写出相应的基本事件, 并求这两项的值相等的概率.

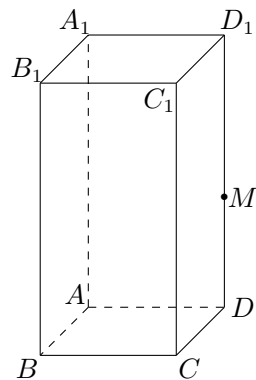
- 某工厂为了对新研发的一种产品进行合理定价, 将该产品按事先拟定的价格进行试销, 得到如下数据:

单价 x (元)	8	8.2	8.4	8.6	8.8	9
销量 y (件)	90	84	83	80	75	68

- 求回归直线方程 $\hat{y} = bx + a$, 其中 $b = -20$, $a = \bar{y} - b\bar{x}$;
- 预计在今后的销售中, 销量与单价仍然服从 (1) 中的关系, 且该产品的成本是 4 元/件, 为使工厂获得最大利润, 该产品的单价应定为多少元? (利润 = 销售收入 - 成本)

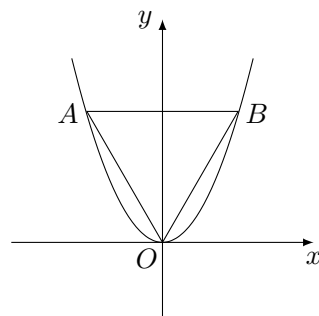
19. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$, M 为棱 DD_1 上的一点.

- (1) 求三棱锥 $A - MCC_1$ 的体积;
- (2) 当 $A_1M + MC$ 取得最小值时, 求证: $B_1M \perp$ 平面 MAC .



21. 如图, 等边三角形 OAB 的边长为 $8\sqrt{3}$, 且其三个顶点均在抛物线 $E: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上.

- (1) 求抛物线 E 的方程;
- (2) 设动直线 l 与抛物线 E 相切于点 P , 与直线 $y = -1$ 相交于点 Q . 证明: 以 PQ 为直径的圆恒过 y 轴上某定点.



22. 已知函数 $f(x) = ax \sin x - \frac{3}{2}$ ($a \in \mathbf{R}$), 且在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $\frac{\pi-3}{2}$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 - (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内的零点个数, 并加以证明.

20. 某同学在一次研究性学习中发现, 以下五个式子的值都等于同一个常数:

- ① $\sin^2 13^\circ + \cos^2 17^\circ - \sin 13^\circ \cos 17^\circ$;
- ② $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin 15^\circ \cos 15^\circ$;
- ③ $\sin^2 18^\circ + \cos^2 12^\circ - \sin 18^\circ \cos 12^\circ$;
- ④ $\sin^2 (-18^\circ) + \cos^2 48^\circ - \sin (-18^\circ) \cos 48^\circ$;
- ⑤ $\sin^2 (-25^\circ) + \cos^2 55^\circ - \sin (-25^\circ) \cos 55^\circ$.

- (1) 试从上述五个式子中选择一个, 求出这个常数;
- (2) 根据 (1) 的计算结果, 将该同学的发现推广为三角恒等式, 并证明你的结论.