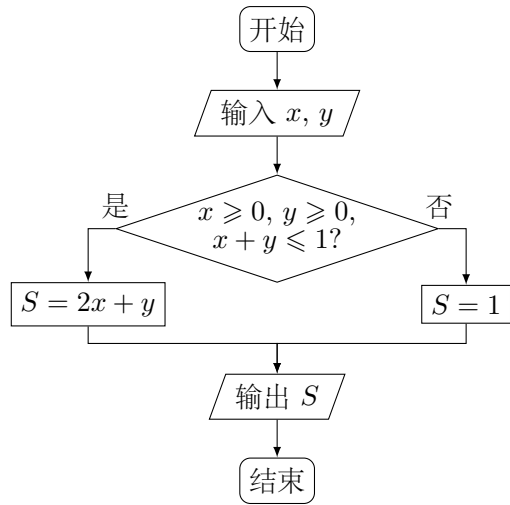


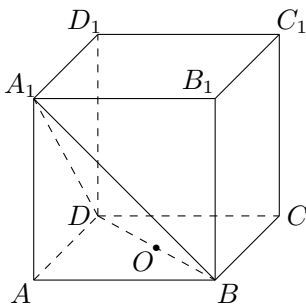
理科数学

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, 集合 B 为整数集, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{-1, 0, 1, 2\}$ (B) $\{-2, -1, 0, 1\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{-1, 0\}$
- 在 $x(1+x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为 ()
(A) 30 (B) 20 (C) 15 (D) 10
- 为了得到函数 $y = \sin(2x+1)$ 的图象, 只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有的点 ()
(A) 向左平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度 (B) 向右平行移动 $\frac{1}{2}$ 个单位长度
(C) 向左平行移动 1 个单位长度 (D) 向右平行移动 1 个单位长度
- 若 $a > b > 0, c < d < 0$, 则一定有 ()
(A) $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ (B) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ (C) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ (D) $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
- 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $x, y \in \mathbf{R}$, 则输出的 S 的最大值为 ()



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 六个人从左至右排成一行, 最左端只能排甲或乙, 最右端不能排甲, 则不同的排法共有 ()
(A) 192 种 (B) 216 种 (C) 240 种 (D) 288 种
- 平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (4, 2), \mathbf{c} = m\mathbf{a} + \mathbf{b} (m \in \mathbf{R})$, 且 \mathbf{c} 与 \mathbf{a} 的夹角等于 \mathbf{c} 与 \mathbf{b} 的夹角, 则 $m =$ ()
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2
- 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 为线段 BD 的中点. 设点 P 在线段 CC_1 上, 直线 OP 与平面 A_1BD 所成的角为 α , 则 $\sin \alpha$ 的取值范围是 ()

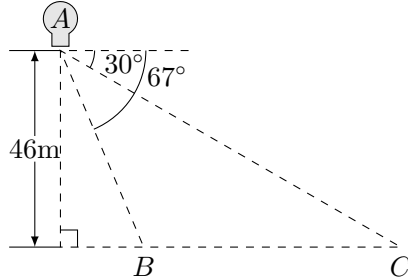


- (A) $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$ (B) $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right]$ (C) $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ (D) $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right]$

- 已知 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x), x \in (-1, 1)$. 现有下列命题:
① $f(-x) = -f(x)$; ② $f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = 2f(x)$; ③ $|f(x)| \geq 2|x|$.
其中所有正确命题的序号是 ()
(A) ①②③ (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②
- 已知 F 是抛物线 $y^2 = x$ 的焦点, 点 A, B 在该抛物线上且位于 x 轴的两侧, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2$ (其中 O 为坐标原点), 则 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值是 ()
(A) 2 (B) 3 (C) $\frac{17\sqrt{2}}{8}$ (D) $\sqrt{10}$

二、填空题

- 复数 $\frac{2-2i}{1+i} =$ _____.
- 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期为 2 的函数, 当 $x \in [-1, 1)$ 时, $f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.
- 如图, 从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B, C 的俯角分别为 $67^\circ, 30^\circ$, 此时气球的高是 46m, 则河流的宽度 BC 约等于_____m.
(用四舍五入法将结果精确到个位. 参考数据: $\sin 67^\circ \approx 0.92, \cos 67^\circ \approx 0.39, \sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \sqrt{3} \approx 1.73$)



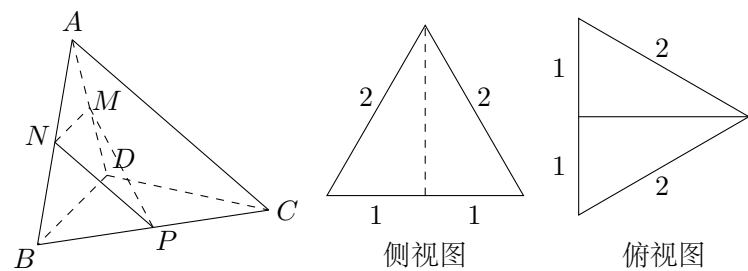
- 设 $m \in \mathbf{R}$, 过定点 A 的动直线 $x + my = 0$ 和过定点 B 的动直线 $mx - y - m + 3 = 0$ 交于点 $P(x, y)$, 则 $|PA| \cdot |PB|$ 的最大值是_____.
- 以 A 表示值为 \mathbf{R} 的函数组成的集合, B 表示具有如下性质的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: 对于函数 $\varphi(x)$, 存在一个正数 M , 使得函数 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 $[-M, M]$. 例如, 当 $\varphi_1(x) = x^3, \varphi_2(x) = \sin x$ 时, $\varphi_1(x) \in A, \varphi_2(x) \in B$. 现有如下命题:
① 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 则“ $f(x) \in A$ ”的充要条件是“ $\forall b \in \mathbf{R}, \exists a \in D, f(a) = b$ ”;

- ② 函数 $f(x) \in B$ 的充要条件是 $f(x)$ 有最大值和最小值;
 - ③ 若函数 $f(x), g(x)$ 的定义域相同, 且 $f(x) \in A, g(x) \in B$, 则 $f(x) + g(x) \notin B$;
 - ④ 若函数 $f(x) = a \ln(x+2) + \frac{x}{x^2+1} (x > -2, a \in \mathbf{R})$ 有最大值, 则 $f(x) \in B$.
- 其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;
(2) 若 α 是第二象限角, $f\left(\frac{\alpha}{3}\right) = \frac{4}{5} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos 2\alpha$, 求 $\cos \alpha - \sin \alpha$ 的值.
- 一款击鼓小游戏的规则如下: 每盘游戏都需要击鼓三次, 每次击鼓要么出现一次音乐, 要么不出现音乐; 每盘游戏击鼓三次后, 出现一次音乐获得 10 分, 出现两次音乐获得 20 分, 出现三次音乐获得 100 分, 没有出现音乐则扣除 200 分 (即获得 -200 分). 设每次击鼓出现音乐的概率为 $\frac{1}{2}$, 且各次击鼓出现音乐相互独立.
(1) 设每盘游戏获得的分数为 X , 求 X 的分布列;
(2) 玩三盘游戏, 至少有一盘出现音乐的概率是多少?
(3) 玩过这款游戏的许多人都发现, 若干盘游戏后, 与最初的分数相比, 分数没有增加反而减少了. 请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.

18. 三棱锥 $A-BCD$ 及其侧视图、俯视图如图所示. 设 M, N 分别为线段 AD, AB 的中点, P 为线段 BC 上的点, 且 $MN \perp NP$.
- (1) 证明: P 为线段 BC 的中点;
- (2) 求二面角 $A-NP-M$ 的余弦值.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q .
- ① 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);
- ② 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

21. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.
- (1) 设 $g(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值;
- (2) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 点 (a_n, b_n) 在函数 $f(x) = 2^x$ 的图象上 ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 若 $a_1 = -2$, 点 $(a_8, 4b_7)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
- (2) 若 $a_1 = 1$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 (a_2, b_2) 处的切线在 x 轴上的截距为 $2 - \frac{1}{\ln 2}$, 求数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .