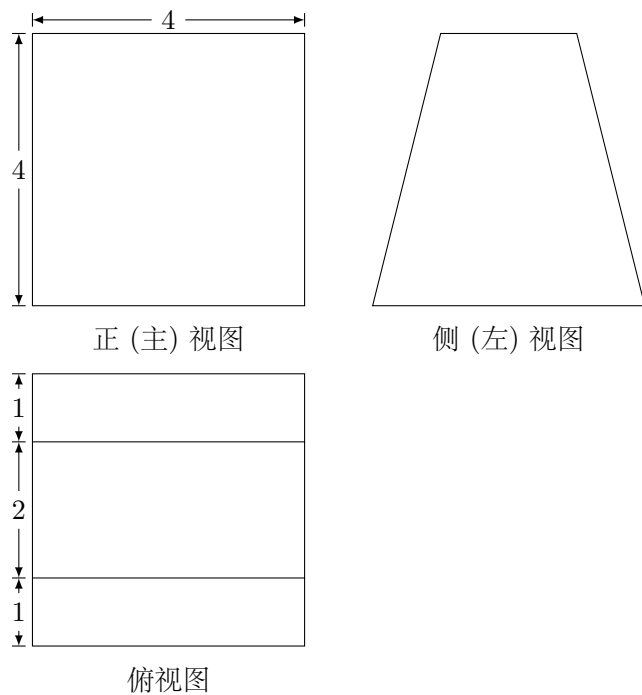


# 理科数学

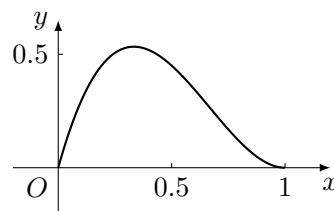
## 一、选择题

1. 设  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{1+ai}{2-i}$  为纯虚数, 则实数  $a$  为 ( )  
(A) 2 (B) -2 (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$
2. 双曲线  $2x^2 - y^2 = 8$  的实轴长是 ( )  
(A) 2 (B)  $2\sqrt{2}$  (C) 4 (D)  $4\sqrt{2}$
3. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 2x^2 - x$ , 则  $f(1) =$  ( )  
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3
4. 设变量  $x, y$  满足  $|x| + |y| \leq 1$ , 则  $x + 2y$  的最大值和最小值分别为 ( )  
(A) 1, -1 (B) 2, -2 (C) 1, -2 (D) 2, -1
5. 在极坐标系中, 点  $(2, \frac{\pi}{3})$  到圆  $\rho = 2\cos\theta$  的圆心的距离为 ( )  
(A) 2 (B)  $\sqrt{4 + \frac{\pi^2}{9}}$  (C)  $\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}}$  (D)  $\sqrt{3}$
6. 一个空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



- (A) 48 (B)  $32 + 8\sqrt{17}$  (C)  $48 + 8\sqrt{17}$  (D) 80
7. 命题“所有能被 2 整除的整数都是偶数”的否定是 ( )  
(A) 所有不能被 2 整除的整数都是偶数  
(B) 所有能被 2 整除的整数都不是偶数  
(C) 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数  
(D) 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

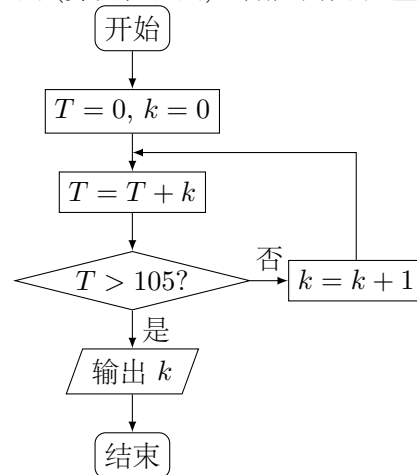
8. 设集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ , 则满足  $S \subseteq A$  且  $S \cap B \neq \emptyset$  的集合  $S$  的个数是 ( )  
(A) 57 (B) 56 (C) 49 (D) 8
9. 已知函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ , 其中  $\varphi$  为实数, 若  $f(x) \leq \left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 且  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(\pi)$ , 则  $f(x)$  的单调递增区间是 ( )  
(A)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$  (B)  $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$   
(C)  $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}\right] (k \in \mathbf{Z})$  (D)  $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$
10. 函数  $f(x) = ax^m(1-x)^n$  在区间  $[0, 1]$  上的图象如图所示, 则  $m, n$  的值可能是 ( )



- (A)  $m = 1, n = 1$  (B)  $m = 1, n = 2$  (C)  $m = 2, n = 1$  (D)  $m = 3, n = 1$

## 二、填空题

11. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出结果是\_\_\_\_\_.

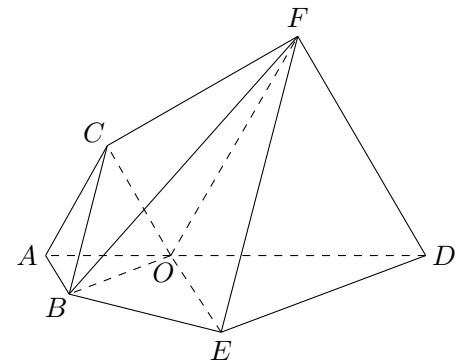


12. 设  $(x-1)^{21} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{21}x^{21}$ , 则  $a_{10} + a_{11} =$ \_\_\_\_\_.
13. 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -6$ , 且  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为\_\_\_\_\_.
14. 已知  $\triangle ABC$  的一个内角为  $120^\circ$ , 并且三边长构成公差为 4 的等差数列, 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.
15. 在平面直角坐标系中, 如果  $x$  与  $y$  都是整数, 就称点  $(x, y)$  为整点, 下列命题中正确的是\_\_\_\_\_. (写出所有正确命题的编号)  
① 存在这样的直线, 既不与坐标轴平行又不经过任何整点;  
② 如果  $k$  与  $b$  都是无理数, 则直线  $y = kx + b$  不经过任何整点;  
③ 直线  $l$  经过无穷多个整点, 当且仅当  $l$  经过两个不同的整点;  
④ 直线  $y = kx + b$  经过无穷多个整点的充分必要条件是:  $k$  与  $b$  都是有理数;  
⑤ 存在恰经过一个整点的直线.

## 三、解答题

16. 设  $f(x) = \frac{e^x}{1+ax^2}$ , 其中  $a$  为正实数.  
(1) 当  $a = \frac{4}{3}$  时, 求  $f(x)$  的极值点;  
(2) 若  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的单调函数, 求  $a$  的取值范围.

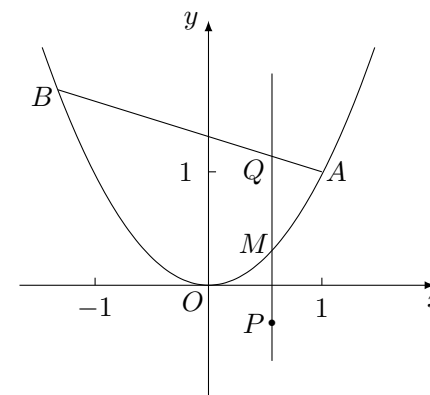
17. 如图,  $ABEDFC$  为多面体, 平面  $ABED$  与平面  $ACFD$  垂直, 点  $O$  在线段  $AD$  上,  $OA = 1, OD = 2$ ,  $\triangle OAB, \triangle OAC, \triangle ODE, \triangle ODF$  都是正三角形.  
(1) 证明直线  $BC \parallel EF$ ;  
(2) 求棱锥  $F - OBED$  的体积.



18. 在数 1 和 100 之间插入  $n$  个实数, 使得这  $n+2$  个数构成递增的等比数列, 将这  $n+2$  个数的乘积记作  $T_n$ , 再令  $a_n = \lg T_n$ ,  $n \geq 1$ .
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $b_n = \tan a_n \cdot \tan a_{n+1}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

20. 工作人员需进入核电站完成某项具有高辐射危险的任务, 每次只派一个人进去, 且每个人只派一次, 工作时间不超过 10 分钟, 如果前一个人 10 分钟内不能完成任务则撤出, 再派下一个人. 现在一共只有甲、乙、丙三个人可派, 他们各自能完成任务的概率分别  $p_1, p_2, p_3$ , 假设  $p_1, p_2, p_3$  互不相等, 且假定各人能否完成任务的事件相互独立.
- (1) 如果按甲最先, 乙次之, 丙最后的顺序派人, 求任务能被完成的概率. 若改变三个人被派出的先后顺序, 任务能被完成的概率是否发生变化?
- (2) 若按某指定顺序派人, 这三个人各自能完成任务的概率依次为  $q_1, q_2, q_3$ , 其中  $q_1, q_2, q_3$  是  $p_1, p_2, p_3$  的一个排列, 求所需派出人员数目  $X$  的分布列和均值 (数学期望)  $EX$ ;
- (3) 假定  $1 > p_1 > p_2 > p_3$ , 试分析以怎样的先后顺序派出人员, 可使所需派出的人员数目的均值 (数学期望) 达到最小.

21. 设  $\lambda > 0$ , 点  $A$  的坐标为  $(1, 1)$ , 点  $B$  在抛物线  $y = x^2$  上运动, 点  $Q$  满足  $\overrightarrow{BQ} = \lambda \overrightarrow{QA}$ , 经过点  $Q$  与  $x$  轴垂直的直线交抛物线于点  $M$ , 点  $P$  满足  $\overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{MP}$ , 求点  $P$  的轨迹方程.



19. (1) 设  $x \geq 1, y \geq 1$ , 证明  $x + y + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ ;
- (2)  $1 < a \leq b \leq c$ , 证明  $\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c$ .