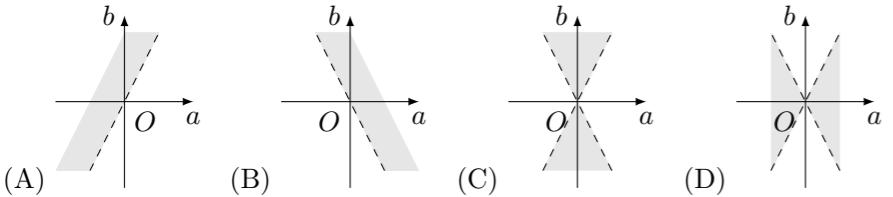


2003 年普通高等学校招生考试 (江苏卷)

数学试卷

一、选择题

1. 如果函数 $y = ax^2 + bx + a$ 的图象与 x 轴有两个交点, 则点 (a, b) 在 aOb 平面上的区域 (不包含边界) 为 ()



2. 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程是 $y = 2$, 则 a 的值为 ()
- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) 8 (D) -8

3. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ ()
- (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()
- (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

5. O 是平面上一定点, A, B, C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$, $\lambda \in [0, +\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()
- (A) 外心 (B) 内心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 函数 $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ 的反函数为 ()
- (A) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (0, +\infty)$ (B) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0, +\infty)$
 (C) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in (-\infty, 0)$ (D) $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (-\infty, 0)$

7. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ()
- (A) $\frac{a^3}{3}$ (B) $\frac{a^3}{4}$ (C) $\frac{a^3}{6}$ (D) $\frac{a^3}{12}$

8. 设 $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y = f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ()
- (A) $\left[0, \frac{1}{a}\right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$ (C) $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$ (D) $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

9. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| =$ ()
- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点, MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 ()
- (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0, 0), B(2, 0), C(2, 1)$ 和 $D(0, 1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD, DA 和 AB 上的点 P_2, P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan \theta$ 的取值范围是 ()
- (A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ()

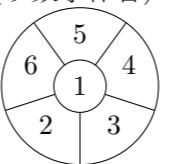
- (A) 3π (B) 4π (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) 6π

二、填空题

13. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是_____.

14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取_____, _____, _____ 辆.

15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有_____种. (以数字作答)



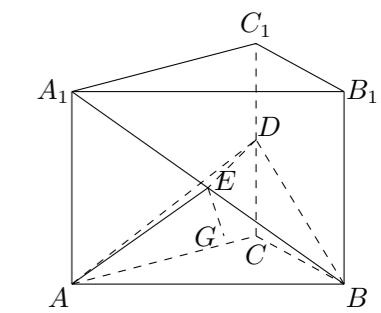
16. 对于四面体 $ABCD$, 给出下列四个命题: ① 若 $AB = AC, BD = CD$, 则 $BC \perp AD$; ② 若 $AB = CD, AC = BD$, 则 $BC \perp AD$; ③ 若 $AB \perp AC, BD \perp CD$, 则 $BC \perp AD$; ④ 若 $AB \perp CD, AC \perp BD$, 则 $BC \perp AD$. 其中真命题的序号是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.

- (1) 求恰有一件不合格的概率;
 (2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

18. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.



20. 已知常数 $a > 0$, 向量 $\vec{c} = (0, a)$, $\vec{i} = (1, 0)$. 经过原点 O 以 $\vec{c} + \lambda \vec{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0, a)$ 以 $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$ 为方向向量的直线相交于 P , 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E 、 F , 使得 $|PE| + |PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E 、 F 的坐标; 若不存在, 说明理由.
21. 已知 $a > 0$, n 为正整数.
- (1) 设 $y = (x - a)^n$, 证明: $y' = n(x - a)^{n-1}$;
 - (2) 设 $f_n(x) = x^n - (x - a)^n$, 对任意 $n \geq a$, 证明: $f'_{n+1}(n+1) > (n+1)f'_n(n)$.

22. 设 $a > 0$, 如图, 已知直线 $l: y = ax$ 及曲线 $C: y = x^2$, C 上的点 Q_1 的横坐标为 a_1 ($0 < a_1 < a$). 从 C 上的点 Q_n ($n \geq 1$) 作直线平行于 x 轴, 交直线 l 于点 P_{n+1} , 再从点 P_{n+1} 作直线平行于 y 轴, 交曲线 C 于点 Q_{n+1} . Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的横坐标构成数列 $\{a_n\}$.

- (1) 试求 a_{n+1} 与 a_n 的关系, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 当 $a = 1$, $a_1 \leq \frac{1}{2}$ 时, 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{32}$;
- (3) 当 $a = 1$ 时, 证明: $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1})a_{k+2} < \frac{1}{3}$.

