2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $0<a<2$, 复数 z 的实部为 a, 虚部为 1, 则 $|z|$ 的取值范围是（　）

(A) $(1,5)$　　(B) $(1,3)$　　(C) $(1,\sqrt{5})$　　(D) $(1,\sqrt{3})$

2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=\dfrac{1}{2}$, $S_4=20$, 则 $S_6=$（　）

(A) 16　　(B) 24　　(C) 36　　(D) 48

3. 某校共有学生 2000 名, 各年级男、女生人数如下表. 已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到二年级女生的概率是 0.19. 现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生, 则应在三年级抽取的学生人数为（　）

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

(A) 24　　(B) 18　　(C) 16　　(D) 12

4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 40\\ x+2y\leqslant 50\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是（　）

(A) 90　　(B) 80　　(C) 70　　(D) 40

5. 将正三棱柱截去三个角 (如图 1 所示 A, B, C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点) 得到几何体如图 2, 则该几何体按图 2 所示方向的侧视图 (或称左视图) 为（　）

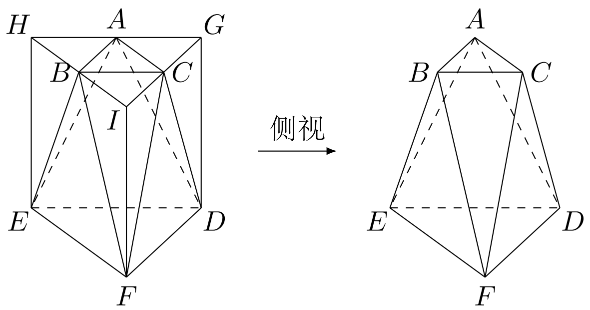
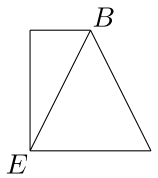
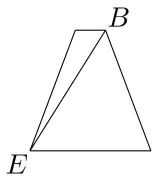
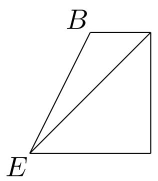
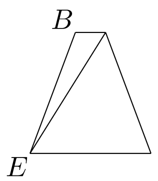


图 1　　图 2

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6. 已知命题 p: 所有有理数都是实数, 命题 q: 正数的对数都是负数, 则下列命题中为真命题的是（　）

(A) $(\neg p)\vee q$　　(B) $p\wedge q$　　(C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　(D) $(\neg p)\vee(\neg q)$

7. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若函数 $y=\mathrm{e}^{ax}+3x$, $x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则（　）

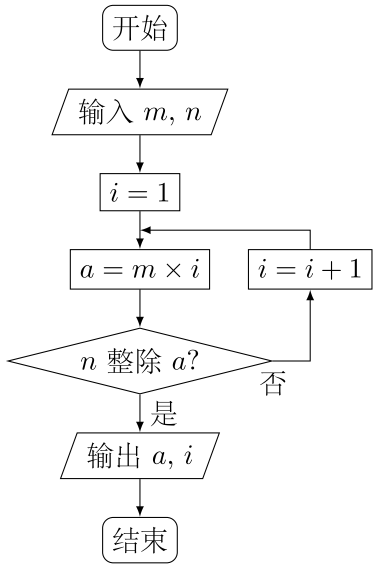
(A) $a>-3$　　(B) $a<-3$　　(C) $a>-\dfrac{1}{3}$　　(D) $a<-\dfrac{1}{3}$

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O, E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 交于点 F. 若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, 则 $\overrightarrow{AF}=$（　）

(A) $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　(B) $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　(C) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　(D) $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}$

二、填空题

9. 阅读如图的程序框图. 若输入 $m=4$, $n=6$, 则输出 $a=$______, $i=$______. (注: 框图中的赋值符号“=”也可以写成“←”或“:=”)



10. 已知 $(1+kx^2)^6$ (k 是正整数) 的展开式中, x^8 的系数小于 120, 则 $k=$______.

11. 经过圆 $x^2+2x+y^2=0$ 的圆心 C, 且与直线 $x+y=0$ 垂直的直线方程是______.

12. 已知函数 $f(x)=(\sin x-\cos x)\sin x$, $x\in\mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是______.

13. 已知曲线 C_1, C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$, $\rho=4\cos\theta$ $\left(\rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为______.

14. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的方程 $x^2+x+\left|a-\dfrac{1}{4}\right|+|a|=0$ 有实根, 则 a 的取值范围是______.

15. 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A, $PA=2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B, $PB=1$, 则圆 O 的半径 $R=$______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ $(A>0, 0<\varphi<\pi)$, $x\in\mathbf{R}$ 的最大值是 1, 其图象经过点 $M\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(\alpha)=\dfrac{3}{5}$, $f(\beta)=\dfrac{12}{13}$, 求 $f(\alpha-\beta)$ 的值.

17. 随机抽取某厂的某种产品 200 件, 经质检, 其中有一等品 126 件、二等品 50 件、三等品 20 件、次品 4 件. 已知生产 1 件一、二、三等品获利分别为 6 万元、2 万元、1 万元, 而 1 件次品亏损 2 万元, 设 1 件产品的利润 (单位: 万元) 为 ξ.

(1) 求 ξ 的分布列;

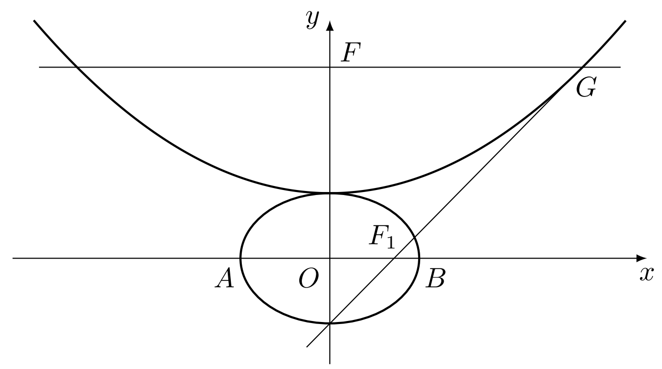
(2) 求 1 件产品的平均利润 (即 ξ 的数学期望);

(3) 经技术革新后, 仍有四个等级的产品, 但次品率降为 1%, 一等品率提高为 70%. 如果此时要求 1 件产品的平均利润不小于 4.73 万元, 则三等品率最多是多少?

18. 设 $b>0$, 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图所示, 过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线, 与抛物线在第一象限的交点为 G. 已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点, 试探究在抛物线上是否存在点 P, 使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形? 若存在, 请指出共有几个这样的点? 并说明理由 (不必具体求出这些点的坐标) .



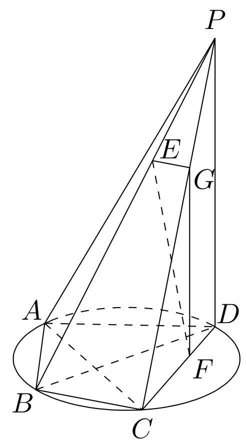
19. 设 $k\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$, $F(x)=f(x)-kx$, $x\in\mathbf{R}$. 试讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

20. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形, 其中 BD 是圆的直径, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle BDC=45^\circ$. PD 垂直底面 $ABCD$, $PD=2\sqrt{2}R$. E, F 分别是 PB, CD 上的点, 且 $\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{DF}{FC}$, 过点 E 作 BC 的平行线交 PC 于 G.

(1) 求 BD 与平面 ABP 所成角 θ 的正切值;

(2) 证明: $\triangle EFG$ 是直角三角形;

(3) 当 $\dfrac{PE}{EB}=\dfrac{1}{2}$ 时, 求 $\triangle EFG$ 的面积.



21. 已知 p, q 是实数, α, β 为方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=p$, $x_2=p^2-q$, $x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$ $(n=3,4,\cdots)$.

(1) 证明: $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$;

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $p=1$, $q=\dfrac{1}{4}$, 求 $\{x_n\}$ 的前 n 项和 S_n.