2003 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$, 则 $f^{-1}(3)=$______.

2. 直线 $y=1$ 与直线 $y=\sqrt{3}x+3$ 的夹角为______.

3. 已知点 $P(\tan\alpha,\cos\alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第______象限.

4. 直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得线段的中点坐标是______.

5. 已知集合 $A=\{x||x|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|x\geqslant a\}$, 且 $A\subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是______.

6. 已知 z 为复数, 则 $z+\overline{z}>2$ 的一个充要条件是 z 满足______.

7. 若过两点 $A(-1,0)$、$B(0,2)$ 的直线 l 与圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 相切, 则 $a=$______.

8. 不等式 $(\lg 20)^{2\cos x}>1$ $(x\in(0,\pi))$ 的解为______.

9. 8 名世界网球顶级选手在上海大师赛上分成两组, 每组各 4 人, 分别进行单循环赛, 每组决出前两名, 再由每组的第一名与另一组的第二名进行淘汰赛, 获胜者角逐冠、亚军, 败者角逐第三、四名, 则该大师赛共有______场比赛.

10. 若正三棱锥底面边长为 4, 体积为 1, 则侧面和底面所成二面角的大小等于______. (结果用反三角函数值表示)

11. 若函数 $y=x^2+(a+2)x+3$, $x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $b=$______.

12. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法, 可求得 $f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$ 的值为______.

二、选择题

13. 关于直线 a、b、l 以及平面 M、N, 下列命题中正确的是 ( )

(A) 若 $a\parallel M$, $b\parallel M$, 则 $a\parallel b$

(B) 若 $a\parallel M$, $b\perp a$, 则 $b\perp M$

(C) 若 $a\subset M$, $b\subset M$, 且 $l\perp a$, $l\perp b$, 则 $l\perp M$

(D) 若 $a\perp M$, $a\parallel N$, 则 $M\perp N$

14. 复数 $z=\dfrac{m-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$ ($m\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位) 在复平面上对应的点不可能位于 ( )

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

15. 把曲线 $y\cos x+2y-1=0$ 先沿 x 轴向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位, 再沿 y 轴向下平移一个单位, 得到的曲线方程是 ( )

(A) $(1-y)\sin x+2y-3=0$　(B) $(y-1)\sin x+2y-3=0$

(C) $(y+1)\sin x+2y+1=0$　(D) $-(y+1)\sin x+2y+1=0$

16. 关于函数 $f(x)=(\sin x)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{|x|}+\dfrac{1}{2}$, 有下面四个结论:

① $f(x)$ 是奇函数;

② 当 $x>2003$ 时, $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 恒成立;

③ $f(x)$ 的最大值是 $\dfrac{3}{2}$;

④ $f(x)$ 的最小值是 $-\dfrac{1}{2}$.

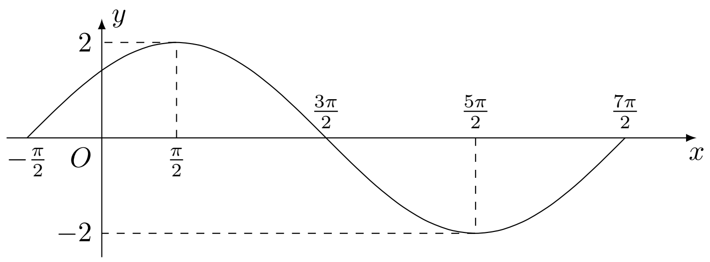
其中正确结论的个数为 ( )

(A) 1 个　(B) 2 个　(C) 3 个　(D) 4 个

三、解答题

17. 解不等式组: $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ \dfrac{x+3}{x-1}>2 \end{cases}$.

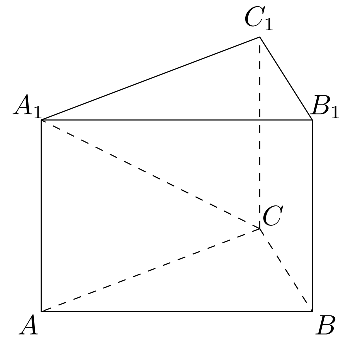
18. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, $(A>0,\ \omega>0,\ x\in\mathbf{R})$ 在一个周期内的图象如图所示, 求直线 $y=\sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象的所有交点的坐标.



19. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 在某个空间直角坐标系中, $\overrightarrow{AB}=\left\{\dfrac{m}{2},-\dfrac{\sqrt{3}m}{2},0\right\}$, $\overrightarrow{AC}=\{m,0,0\}$, $\overrightarrow{AA_1}=\{0,0,n\}$, 其中 m、$n>0$.

(1) 证明: 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱;

(2) 若 $m=\sqrt{2}n$, 求直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的大小.



20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.
(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数, 并求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 分别计算 $f(4)-5f(2)g(2)$ 和 $f(9)-5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

21. 设 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左、右两个焦点.
(1) 若椭圆 C 上的点 $A\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 到 F_1、F_2 两点的距离之和等于 4, 写出椭圆 C 的方程;
(2) 设 K 是 (1) 中所得椭圆上的动点, 求线段 F_1K 的中点的轨迹方程;
(3) 已知椭圆具有性质: 若 M、N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM、PN 的斜率都存在, 并记为 k_{PM}、k_{PN} 时, 那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值. 试对双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 写出具有类似特性的性质, 并加以证明.

22. 在一次人才招聘会上, 有 A、B 两家公司分别开出了它们的工资标准: A 公司允诺第一个月工资为 1500 元, 以后每年月工资比上一年月工资增加 230 元; B 公司允诺第一年月工资数为 2000 元, 以后每年月工资在上一年的月工资基础上递增 5%, 设某人年初被 A、B 两家公司同时录取. 试问:
(1) 若该人分别在 A 公司或 B 公司连续工作 n 年, 则他在第 n 年的月工资收入分别是多少?
(2) 该人打算连续在一家公司工作 10 年, 仅从工资收入总量较多作为应聘的标准 (不记其它因素), 该人应该选择哪家公司, 为什么?
(3) 在 A 公司工作比在 B 公司工作的月工资收入最多可以多多少元? (精确到 1 元), 并说明理由.