

2008 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

理科数学

一、填空题

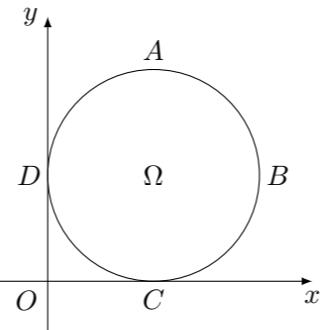
1. 不等式 $|x - 1| < 1$ 的解集是_____.
2. 若集合 $A = \{x|x \leq 2\}$, $B = \{x|x \geq a\}$ 满足 $A \cap B = \{2\}$, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若复数 z 满足 $z = i(2 - z)$ (i 是虚数单位), 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 若函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = x^2$ ($x > 0$), 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 且 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 的最大值是_____.
7. 在平面直角坐标系中, 从六个点: $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 2)$, $E(2, 2)$, $F(3, 3)$ 中任取三个, 这三点能构成三角形的概率是_____。(结果用分数表示)
8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数. 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \lg x$, 则满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是_____.
9. 已知总体的各个体的值由小到大依次为 $2, 3, 3, 7, a, b, 12, 13.7, 18.3, 20$, 且总体的中位数为 10.5. 若要使该总体的方差最小, 则 a, b 的取值分别是_____.
10. 某海域内有一孤岛, 岛四周的海平面(视为平面)上有一浅水区(含边界), 其边界是长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$ 的椭圆. 已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为 h_1, h_2 , 且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上, 现有船只经过该海域(船只的大小忽略不计), 在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为 θ_1, θ_2 , 那么船只已进入该浅水区的判别条件是_____.
11. 方程 $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 的解可视为函数 $y = x + \sqrt{2}$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象交点的横坐标. 若 $x^4 + ax - 4 = 0$ 的各个实根 x_1, x_2, \dots, x_k ($k \leq 4$) 所对应的点 $\left(x_i, \frac{4}{x_i}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 均在直线 $y = x$ 的同侧, 则实数 a 的取值范围是_____.

二、选择题

12. 组合数 C_n^r ($n > r \geq 1$, $n, r \in \mathbf{Z}$) 恒等于 ()
 (A) $\frac{r+1}{n+1} C_{n-1}^{r-1}$ (B) $(n+1)(r+1) C_{n-1}^{r-1}$
 (C) $nr C_{n-1}^{r-1}$ (D) $\frac{n}{r} C_{n-1}^{r-1}$
13. 给定空间中的直线 l 及平面 α , 条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的 ()
 (A) 充要条件 (B) 充分非必要条件
 (C) 必要非充分条件 (D) 既非充分又非必要条件

14. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $a - \frac{3}{2}$ 的无穷等比数列, 且 $\{a_n\}$ 各项的和为 a , 则 a 的值是 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$

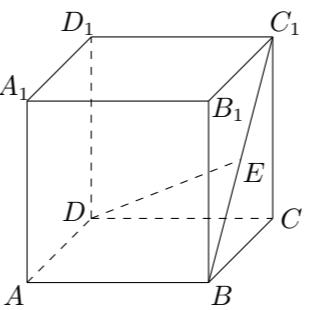
15. 如图, 在平面直角坐标系中, Ω 是一个与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴分别相切于点 C, D 的定圆所围成区域(含边界), A, B, C, D 是该圆的四等分点. 若点 $P(x, y)$ 、点 $P'(x', y')$ 满足 $x \leq x'$ 且 $y \geq y'$, 则称 P 优于 P' . 如果 Ω 中的点 Q 满足: 不存在 Ω 中的其它点优于 Q , 那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧 ()



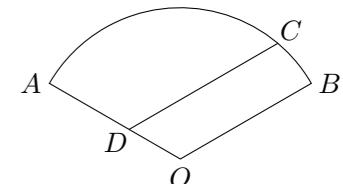
- (A) \widehat{AB} (B) \widehat{BC} (C) \widehat{CD} (D) \widehat{DA}

三、解答题

16. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC_1 的中点. 求直线 DE 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数表示)



17. 如图, 某住宅小区的平面图呈圆心角为 120° 的扇形 AOB . 小区的两个出入口设置在点 A 及点 C 处, 且小区里有一条平行于 BO 的小路 CD , 已知某人从 C 沿 CD 走到 D 用了 10 分钟, 从 D 沿 DA 走到 A 用了 6 分钟, 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径 OA 的长. (精确到 1 米)



18. 已知函数 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 直线 $x = t$ ($t \in \mathbf{R}$) 与函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的图象分别交于 M 、 N 两点.
 (1) 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 求 $|MN|$ 的值;
 (2) 求 $|MN|$ 在 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时的最大值.

19. 已知函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$.

(1) 若 $f(x) = 2$, 求 x 的值;

(2) 若 $2^t f(2t) + m f(t) \geq 0$ 对于 $t \in [1, 2]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

20. 设 $P(a, b)$ ($b \neq 0$) 是平面直角坐标系 xOy 中的点, l 是经过原点与点 $(1, b)$ 的直线, 记 Q 是直线 l 与抛物线 $x^2 = 2py$ ($p \neq 0$) 的异于原点的交点.

(1) 已知 $a = 1, b = 2, p = 2$, 求点 Q 的坐标;

(2) 已知点 $P(a, b)$ ($ab \neq 0$) 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上, $p = \frac{1}{2ab}$, 求证: 点 Q 落在双曲线 $4x^2 - 4y^2 = 1$ 上;

(3) 已知动点 $P(a, b)$ 满足 $ab \neq 0, p = \frac{1}{2ab}$, 若点 Q 始终落在一条关于 x 轴对称的抛物线上, 试问动点 P 的轨迹落在哪种二次曲线上, 并说明理由.

21. 已知以 a_1 为首相的数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + c, & a_n < 3 \\ \frac{a_n}{d}, & a_n \geq 3 \end{cases}$.

(1) 当 $a_1 = 1, c = 1, d = 3$ 时, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 $0 < a_1 < 1, c = 1, d = 3$ 时, 试用 a_1 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和 S_{100} ;

(3) 当 $0 < a_1 < \frac{1}{m}$ (m 是正整数), $c = \frac{1}{m}$, 正整数 $d \geq 3m$ 时, 求证: 数列 $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$ 成等比数列当且仅当 $d = 3m$.