# 2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）

# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos x = \frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x =$ （ ）

   (A) $\frac{7}{24}$ (B) $-\frac{7}{24}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $-\frac{24}{7}$

2. 圆锥曲线 $\rho = \frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta}$ 的准线方程是 （ ）

   (A) $\rho\cos\theta = -2$ (B) $\rho\cos\theta = 2$ (C) $\rho\sin\theta = 2$ (D) $\rho\sin\theta = -2$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leqslant 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x_0) > 1$, 则 $x_0$ 的取值范围是（ ）

   (A) $(-1, 1)$ (B) $(-1, +\infty)$

   (C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

4. 函数 $y = 2\sin x(\sin x + \cos x)$ 的最大值为 （ ）

   (A) $1 + \sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

5. 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-2)^2 = 4\ (a > 0)$ 及直线 $l: x - y + 3 = 0$, 当直线 $l$ 被 $C$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ 时, $a$ 的值等于 （ ）

   (A) $\sqrt{2}$ (B) $2 - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2} - 1$ (D) $\sqrt{2} + 1$

6. 已知圆锥的底面半径为 $R$, 高为 $3R$, 在它的所有内接圆柱中, 全面积的最大值是 （ ）

   (A) $2\pi R^2$ (B) $\frac{9}{4}\pi R^2$ (C) $\frac{8}{3}\pi R^2$ (D) $\frac{3}{2}\pi R^2$

7. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的的等差数列, 则 $|m - n| =$ （ ）

   (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$

8. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$, 直线 $y = x - 1$ 与其相交于 $M$、$N$ 两点, $MN$ 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$, 则此双曲线的方程是 （ ）

   (A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

9. 函数 $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ （ ）

   (A) $-\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (B) $-\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

   (C) $\pi + \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$ (D) $\pi - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$

10. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 $AB$ 的中点 $P_0$ 沿与 $AB$ 的夹角 $\theta$ 的方向射到 $BC$ 上的点 $P_1$ 后, 依次反射到 $CD$、$DA$ 和 $AB$ 上的点 $P_2$、$P_3$ 和 $P_4$ (入射角等于反射角), 设 $P_4$ 的坐标为 $(x_4, 0)$, 若 $1 < x_4 < 2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 （ ）

    (A) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_n^2}{n(C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + \cdots + C_n^1)} =$ （ ）

    (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) 6

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 （ ）

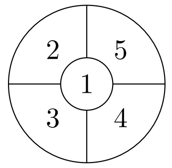
    (A) $3\pi$ (B) $4\pi$ (C) $3\sqrt{3}\pi$ (D) $6\pi$

## 二、填空题

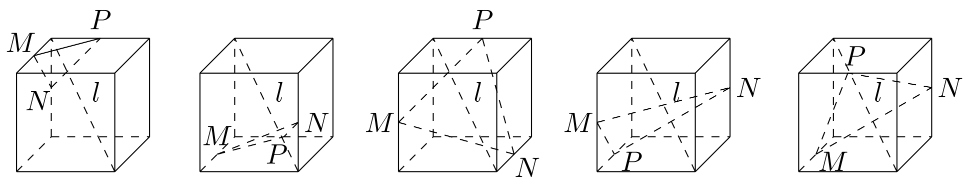
13. $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 $x^9$ 系数是______.

14. 使 $\log_2(-x) < x + 1$ 成立的 $x$ 的取值范围是______.

15. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种______. (以数字作答)




16. 下列 5 个正方体图形中, $l$ 是正方体的一条对角线, 点 $M$、$N$、$P$ 分别为其所在棱的中点, 能得出 $l \perp$ 面 $MNP$ 的图形的序号是______. (写出所有符合要求的图形序号)




① ② ③ ④ ⑤

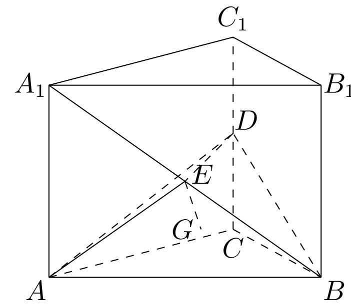
## 三、解答题

17. 已知复数 $z$ 的辐角为 $60°$, 且 $|z - 1|$ 是 $|z|$ 和 $|z - 2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90°$, 侧棱 $AA_1 = 2$, $D$、$E$ 分别是 $CC_1$ 与 $A_1B$ 的中点, 点 $E$ 在平面 $ABD$ 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 $G$.

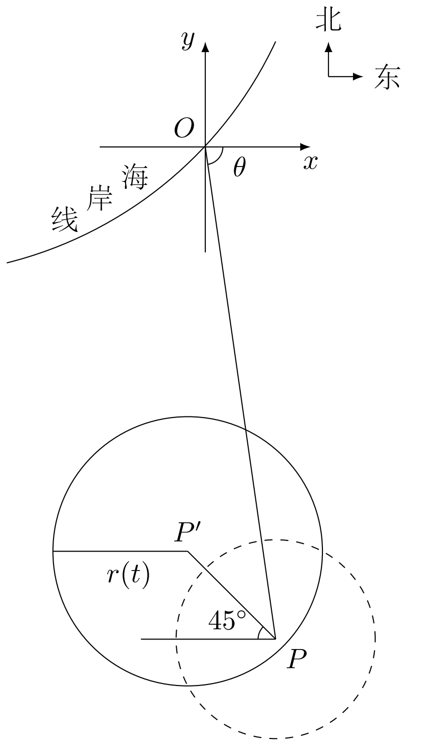
    (1) 求 $A_1B$ 与平面 $ABD$ 所成角的大小; (结果用反三角函数值表示)

    (2) 求点 $A_1$ 到平面 $AED$ 的距离.

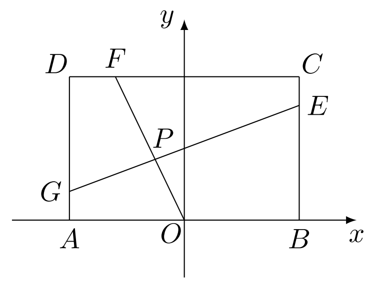



19. 已知 $c > 0$, 设 $P$: 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; $Q$: 不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 $P$ 和 $Q$ 有且仅有一个正确, 求 $c$ 的取值范围.

20. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 $O$ (如图) 的东偏南 $\theta$ $\left(\theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 $P$ 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?




21. 已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, $O$ 为 $AB$ 的中点, 点 $E$、$F$、$G$ 分别在 $BC$、$CD$、$DA$ 上移动, 且 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{DA}$, $P$ 为 $GE$ 与 $OF$ 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 $P$ 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.




22.【甲】设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s+2^t \mid 0\leqslant s<t$ 且 $s, t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=10$, $a_6=12$, $\cdots$. 将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 3 & \\
 & 5 & & 6 \\
9 & & 10 & & 12 \\
- & - & - & - \\
 & \cdots\cdots & &
\end{array}
$$

(1) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;

(2) 求 $a_{100}$.

【乙】设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r+2^s+2^t \mid 0\leqslant r<s<t$ 且 $r, s, t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k=1160$, 求 $k$.