2005 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 若集合 $M=\{x||x|\leqslant 2\}$, $N=\{x|x^2-3x=0\}$, 则 $M\cap N=$ （ ）

(A) $\{3\}$ (B) $\{0\}$ (C) $\{0,2\}$ (D) $\{0,3\}$

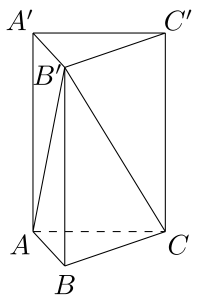
2. 若 $(a-2\mathrm{i})\mathrm{i}=b-\mathrm{i}$, 其中 a、$b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 $a^2+b^2=$ （ ）

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 5

3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=$ （ ）

(A) $-\dfrac{1}{6}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

4. 已知高为 3 的直棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面是边长为 1 的正三角形 (如图所示), 则三棱锥 $B'-ABC$ 的体积为 （ ）



(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

5. 若焦点在 x 轴上的椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 $m=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{8}{3}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

6. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为 （ ）

(A) $(2,+\infty)$ (B) $(-\infty,2)$ (C) $(-\infty,0)$ (D) $(0,2)$

7. 给出下列关于互不相同的直线 m、l、n 和平面 α、β 的四个命题:

① 若 $m\subset\alpha$, $l\cap\alpha=A$, $A\notin m$, 则 l 与 m 不共面;

② 若 m、l 是异面直线, $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, 且 $n\perp l$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$;

③ 若 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\beta$, $\alpha\parallel\beta$, 则 $l\parallel m$;

④ 若 $l\subset\alpha$, $m\subset\alpha$, $l\cap m=A$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

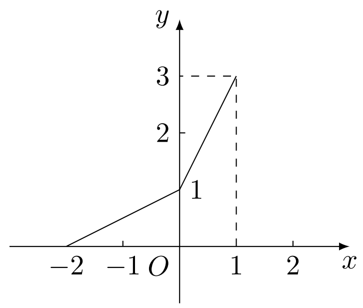
其中为假命题的是 （ ）

(A) ① (B) ② (C) ③ (D) ④

8. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子 (它们的六个面分别标有点数 1、2、3、4、5、6), 骰子朝上的面的点数分别为 X、Y, 则 $\log_{2X}Y=1$ 的概率为（ ）

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{5}{36}$ (C) $\dfrac{1}{12}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

9. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 现将 $y=g(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再沿 y 轴向上平移 1 个单位, 所得的图象是由两条线段组成的折线 (如图所示), 则函数 $f(x)$ 的表达式为 （ ）



(A) $f(x)=\begin{cases}2x+2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}+2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$ (B) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}-2, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}2x-2, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}+1, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}2x-6, & 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}-3, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$

10. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2=\dfrac{x_1}{2}$, $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$, $n=3, 4, \cdots$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, 则 $x_1=$ （ ）

(A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 3 (C) 4 (D) 5

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ 的定义域是______.

12. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,3)$, $\overrightarrow{b}=(x,6)$, 且 $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$, 则 $x=$______.

13. 已知 $(x\cos\theta+1)^5$ 的展开式中 x^2 的系数与 $\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^4$ 的展开式中 x^3 的系数相等, 则 $\cos\theta=$______.

14. 设平面内有 n 条直线 $(n\geqslant 3)$, 其中有且仅有两条直线互相平行, 任意三条直线不过同一点. 若用 $f(n)$ 表示这 n 条直线交点的个数, 则 $f(4)=$______; 当 $n>4$ 时, $f(n)=$______. (用 n 表示)

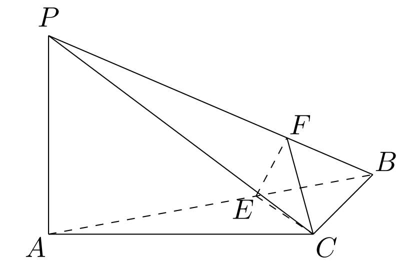
三、解答题

15. 化简 $f(x)=\cos\left(\dfrac{6k+1}{3}\pi+2x\right)+\cos\left(\dfrac{6k-1}{3}\pi-2x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)$ $(x\in\mathbf{R}, k\in\mathbf{Z})$, 并求函数 $f(x)$ 的值域和最小正周期.

16. 如图所示, 在四面体 $P-ABC$ 中, 已知 $PA=BC=6$, $PC=AB=10$, $AC=8$, $PB=2\sqrt{34}$. F 是线段 PB 上一点, $CF=\dfrac{15}{17}\sqrt{34}$, 点 E 在线段 AB 上, 且 $EF\perp PB$.

(1) 证明: $PB\perp$ 平面 CEF;

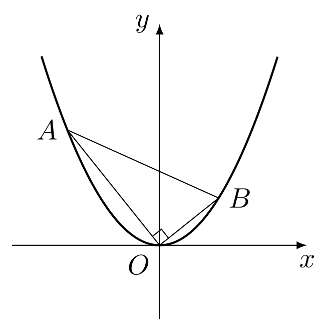
(2) 求二面角 $B-CE-F$ 的大小.



17. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y=x^2$ 上异于坐标原点 O 的两不同动点 A、B 满足 $AO\perp BO$ (如图所示).

(1) 求 $\triangle AOB$ 的重心 G (即三角形三条中线的交点) 的轨迹方程;

(2) $\triangle AOB$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.



18. 箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球, 黄、白乒乓球的数量比为 $s:t$. 现从箱中每次任意取出一个球, 若取出的是黄球则结束, 若取出的是白球, 则将其放回箱中, 并继续从箱中任意取出一个球, 但取球的次数最多不超过 n 次, 以 ξ 表示取球结束时已取到白球的次数.
(1) 求 ξ 的分布列;
(2) 求 ξ 的数学期望.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$, $f(7-x)=f(7+x)$, 且在闭区间 $[0,7]$ 上, 只有 $f(1)=f(3)=0$.
(1) 试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;
(2) 试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上的根的个数, 并证明你的结论.

20. 在平面直角坐标系中, 已知矩形 $ABCD$ 的长为 2, 宽为 1, AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上, A 点与坐标原点重合 (如图所示). 将矩形折叠, 使 A 点落在线段 DC 上.
(1) 若折痕所在直线的斜率为 k, 试写出折痕所在直线的方程;
(2) 求折痕的长的最大值.