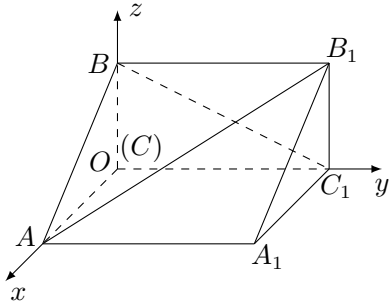


理科数学

一、选择题

- 集合 $M = \{x | \lg x > 0\}$, $N = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $(1, 2)$ (B) $[1, 2)$ (C) $(1, 2]$ (D) $[1, 2]$
- 下列函数中, 既是奇函数又是增函数的为 ()
(A) $y = x + 1$ (B) $y = -x^3$ (C) $y = \frac{1}{x}$ (D) $y = x|x|$
- 设 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则“ $ab = 0$ ”是“复数 $a + \frac{b}{i}$ 为纯虚数”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$, l 是过点 $P(3, 0)$ 的直线, 则 ()
(A) l 与 C 相交 (B) l 与 C 相切
(C) l 与 C 相离 (D) 以上三个选项均有可能
- 如图, 在空间直角坐标系中有直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $CA = CC_1 = 2CB$, 则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 ()

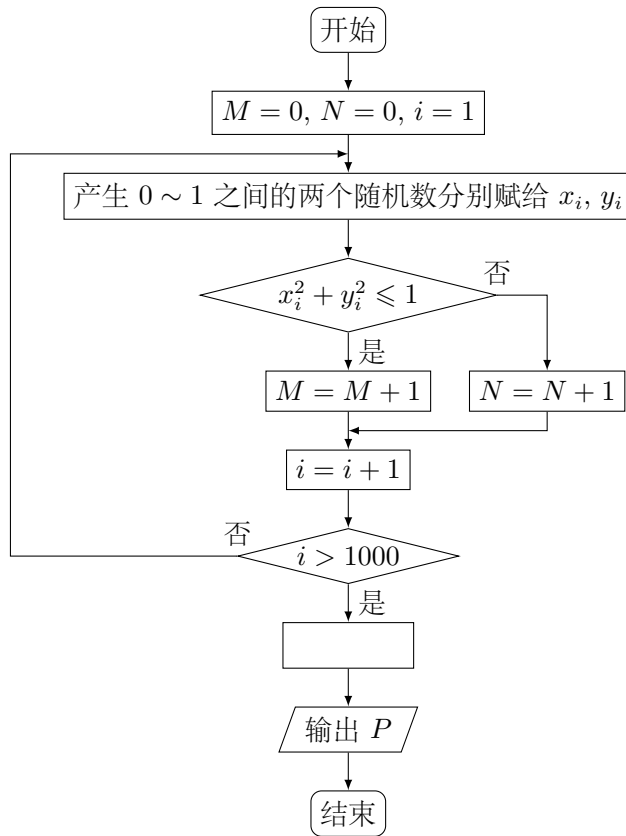


- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$
- 从甲、乙两个城市分别随机抽取 16 台自动售货机, 对其销售额进行统计, 统计数据用茎叶图表示 (如图所示). 设甲、乙两组数据的平均数分别为 \bar{x} , \bar{x} , 中位数分别为 $m_{\text{甲}}$, $m_{\text{乙}}$, 则 ()

甲		乙
8 6 5	0	
8 8 4 0 0	1	0 2 8
7 5 2	2	0 2 3 3 7
8 0 0	3	1 2 4 4 8
3 1	4	2 3 8

- (A) $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$, $m_{\text{甲}} > m_{\text{乙}}$ (B) $\bar{x}_{\text{甲}} < \bar{x}_{\text{乙}}$, $m_{\text{甲}} < m_{\text{乙}}$
(C) $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$, $m_{\text{甲}} > m_{\text{乙}}$ (D) $\bar{x}_{\text{甲}} > \bar{x}_{\text{乙}}$, $m_{\text{甲}} < m_{\text{乙}}$
- 设函数 $f(x) = xe^x$, 则 ()
(A) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 (B) $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点
(C) $x = -1$ 为 $f(x)$ 的极大值点 (D) $x = -1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

- 两人进行乒乓球比赛, 先赢 3 局者获胜, 决出胜负为止, 则所有可能出现的情形 (各人输赢局次的不同视为不同情形) 共有 ()
(A) 10 种 (B) 15 种 (C) 20 种 (D) 30 种
- 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 若 $a^2 + b^2 = 2c^2$, 则 $\cos C$ 的最小值为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$
- 如图所示是用模拟方法估计圆周率 π 值的程序框图, P 表示估计结果, 则图中空白框内应填入 ()



- (A) $P = \frac{N}{1000}$ (B) $P = \frac{4N}{1000}$ (C) $P = \frac{M}{1000}$ (D) $P = \frac{4M}{1000}$

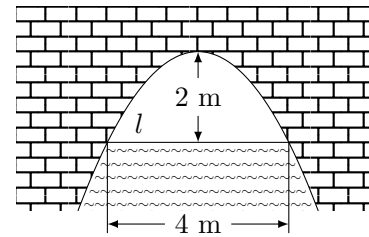
二、填空题

- 观察下列不等式:
 $1 + \frac{1}{2^2} < \frac{3}{2}$,
 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{5}{3}$,
 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} < \frac{7}{4}$,

 照此规律, 第五个不等式为_____.

- $(a + x)^5$ 展开式中 x^2 的系数为 10, 则实数 a 的值为_____.

- 如图是抛物线形拱桥, 当水面在 l 时, 拱顶离水面 2 米, 水面宽 4 米, 水位下降 1 米后, 水面宽_____米.

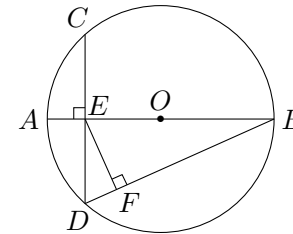


- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ -2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$, D 是由 x 轴和曲线 $y = f(x)$ 及该曲线在点 $(1, 0)$ 处的切线所围成的封闭区域, 则 $z = x - 2y$ 在 D 上的最大值为_____.

- 三选一.

【A】若存在实数 x 使 $|x - a| + |x - 1| \leq 3$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【B】如图, 在圆 O 中, 直径 AB 与弦 CD 垂直, 垂足为 E , $EF \perp DB$, 垂足为 F , 若 $AB = 6$, $AE = 1$, 则 $DF \cdot DB =$ _____.



【C】直线 $2\rho \cos \theta = 1$ 与圆 $\rho = 2 \cos \theta$ 相交的弦长为_____.

三、解答题

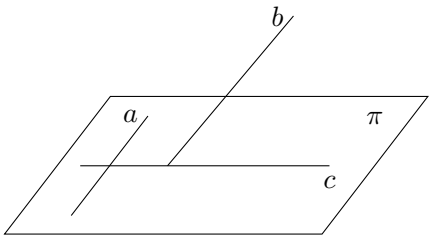
- 函数 $f(x) = A \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ ($A > 0$, $\omega > 0$) 的最大值为 3, 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 (2) 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2$, 求 α 的值.

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列, 其前 n 项和为 S_n , 且 a_5, a_3, a_4 成等差数列.
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的公比;
- (2) 证明: 对任意 $k \in \mathbf{N}_+$, S_{k+2}, S_k, S_{k+1} 成等差数列.

19. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴, 且与 C_1 有相同的离心率.
- (1) 求椭圆 C_2 的方程;
- (2) 设 O 为坐标原点, 点 A, B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上, $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$, 求直线 AB 的方程.

21. 设函数 $f_n(x) = x^n + bx + c$ ($n \in \mathbf{N}_+$, $b, c \in \mathbf{R}$).
- (1) 设 $n \geq 2, b = 1, c = -1$, 证明: $f_n(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内存在唯一零点;
- (2) 设 $n = 2$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 有 $|f_2(x_1) - f_2(x_2)| \leq 4$, 求 b 的取值范围;
- (3) 在 (1) 的条件下, 设 x_n 是 $f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内的零点, 判断数列 $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 的增减性.

18. (1) 如图, 证明命题“ a 是平面 π 内的一条直线, b 是 π 外的一条直线 (b 不垂直于 π), c 是直线 b 在 π 上的投影, 若 $a \perp b$, 则 $a \perp c$ ”为真;
- (2) 写出上述命题的逆命题, 并判断其真假 (不需证明).



20. 某银行柜台设有一个服务窗口, 假设顾客办理业务所需的时间互相独立, 且都是整数分钟, 对以往顾客办理业务所需的时间统计结果如下:

办理业务所需的时间 (分)	1	2	3	4	5
频率	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1

从第一个顾客开始办理业务时计时.

- (1) 估计第三个顾客恰好等待 4 分钟开始办理业务的概率;
- (2) X 表示至第 2 分钟末已办理完业务的顾客人数, 求 X 的分布列及数学期望.