2007 年普通高等学校招生考试（四川卷）

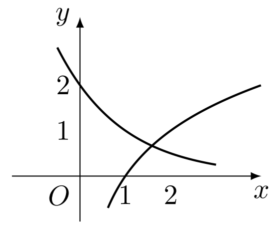
理科数学

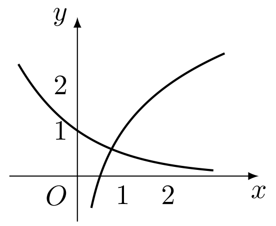
一、选择题

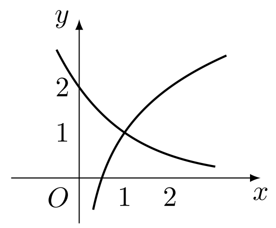
1. 复数 $\frac{1+i}{1-i}+i^3$ 的值是　（　）

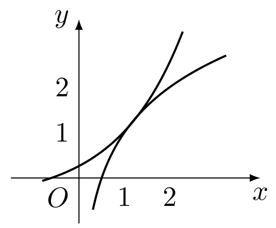
(A) 0　(B) 1　(C) -1　(D) 1

2. 函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是　（　）


(A)


(B)

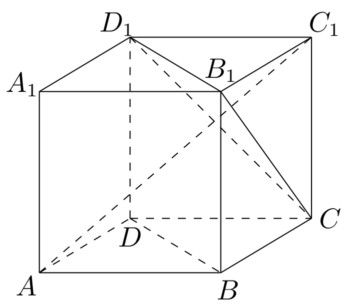

(C)


(D)

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$　（　）

(A) 0　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{2}{3}$

4. 如图, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 下面结论错误的是　（　）



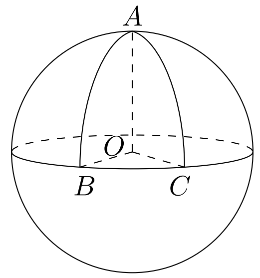
(A) $BD \parallel$ 平面 CB_1D_1　(B) $AC_1 \perp BD$

(C) $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1　(D) 异面直线 AD 与 CB_1 角为 $60°$

5. 如果双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2, 那么点 P 到 y 轴的距离是　（　）

(A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　(B) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　(C) $2\sqrt{6}$　(D) $2\sqrt{3}$

6. 设球 O 的半径是 1, A、B、C 是球面上三点, 已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\frac{\pi}{2}$, 且二面角 $B-OA-C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是　（　）



(A) $\frac{7\pi}{6}$　(B) $\frac{5\pi}{4}$　(C) $\frac{4\pi}{3}$　(D) $\frac{3\pi}{2}$

7. 设 $A(a,1)$, $B(2,b)$, $C(4,5)$ 为坐标平面上三点, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的投影相同, 则 a 与 b 满足的关系式为　（　）

(A) $4a-5b=3$　(B) $5a-4b=3$　(C) $4a+5b=14$　(D) $5a+4b=14$

8. 已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B, 则 $|AB|$ 等于　（　）

(A) 3　(B) 4　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{2}$

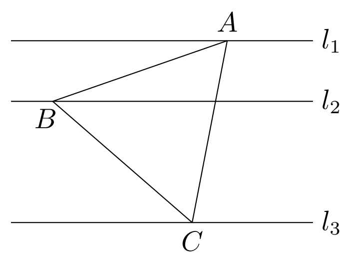
9. 某公司有 60 万元资金, 计划投资甲、乙两个项目, 按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍, 且对每个项目的投资不能低于 5 万元, 对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润, 对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润, 该公司正确规划投资后, 在这两个项目上共可获得的最大利润为　（　）

(A) 36 万元　(B) 31.2 万元　(C) 30.4 万元　(D) 24 万元

10. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成没有重复数字, 并且比 20000 大的五位偶数共有　（　）

(A) 288 个　(B) 240 个　(C) 144 个　(D) 126 个

11. 如图, l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线, l_1 与 l_2 间的距离是 1, l_2 与 l_3 间的距离是 2, 正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上, 则 $\triangle ABC$ 的边长是　（　）



(A) $2\sqrt{3}$　(B) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　(C) $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$　(D) $\frac{2-\sqrt{21}}{3}$

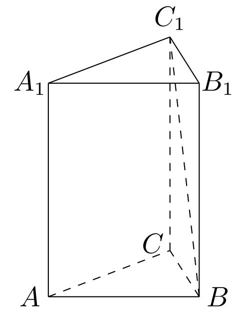
12. 已知一组抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+1$, 其中 a 为 2, 4, 6, 8 中任取的一个数, b 为 1, 3, 5, 7 中任取的一个数, 从这些抛物线中任意抽取两条, 它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是　（　）

(A) $\frac{1}{12}$　(B) $\frac{7}{60}$　(C) $\frac{6}{25}$　(D) $\frac{5}{25}$

二、填空题

13. 若函数 $f(x)=e^{-(x-u)^2}$ (e 是自然对数的底数) 的最大值是 m, 且 $f(x)$ 是偶函数, 则 $m+u=$______.

14. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是______.



15. 已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, $\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$, 由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等, 则动点 P 的轨迹方程是______.

16. 下面有五个命题:

① 函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π;

② 终边在 y 轴上的角的集合是 $\left\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;

③ 在同一坐标系中, 函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点;

④ 把函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象;

⑤ 函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上是减函数.

其中真命题的序号是______. (写出所有)

三、解答题

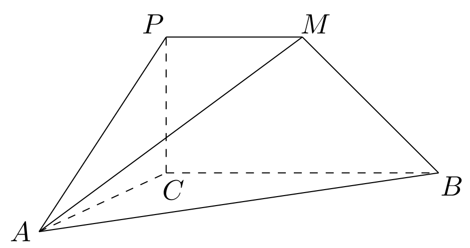
17. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(1) 求 $\tan 2\alpha$ 的值;

(2) 求 β.

18. 厂家在产品出厂前, 需对产品做检验, 厂家将一批产品发给商家时, 商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验, 以决定是否接收这批产品.
(1) 若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8, 从中任意取出 4 件进行检验. 求至少有 1 件是合格品的概率;
(2) 若厂家发给商家 20 件产品, 其中有 3 件不合格, 按合同规定该商家从中任取 2 件, 都进行检验, 只有 2 件都合格时才接收这批产品, 否则拒收. 求该商家可能检验出不合格产品数 ξ 的分布列及期望 $E\xi$, 并求该商家拒收这批产品的概率.

19. 如图, $PCBM$ 是直角梯形, $\angle PCB=90^\circ$, $PM \parallel BC$, $PM=1$, $BC=2$, 又 $AC=1$, $\angle ACB=120^\circ$, $AB\perp PC$, 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°.
(1) 求证: 平面 $PAC\perp$ 平面 ABC;
(2) 求二面角 $M-AC-B$ 的大小;
(3) 求三棱锥 $P-MAC$ 的体积.



20. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点.
(1) 若 P 是该椭圆上的一个动点, 求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最大值和最小值;
(2) 设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且 $\angle AOB$ 为锐角 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=x^2-4$, 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 其中 x_1 为正实数.
(1) 用 x_n 表示 x_{n+1};
(2) 求证: 对一切正整数 n, $x_{n+1}\leqslant x_n$ 的充要条件是 $x_1\geqslant 2$;
(3) 若 $x_1=4$, 记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列, 并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

22. 设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n>1$, $x\in\mathbf{N})$.
(1) 当 $x=6$ 时, 求 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的展开式中二项式系数最大的项;
(2) 对任意的实数 x, 证明 $\dfrac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数);
(3) 是否存在 $a\in\mathbf{N}$, 使得 $an<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)<(a+1)n$ 恒成立? 若存在, 试证明你的结论并求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.