2018 年普通高等学校招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为______.

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为______.

3. 在 $(1+x)^7$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为______. (结果用数值表示)

4. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2(x+a)$. 若 $f(x)$ 的反函数的图象经过点 $(3,1)$, 则 $a =$______.

5. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z = 1 - 7\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$______.

6. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若 $a_3 = 0$, $a_6 + a_7 = 14$, 则 $S_7 =$______.

7. 已知 $\alpha \in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 若幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 $\alpha =$______.

8. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, E, F 是 y 轴上的两个动点, 且 $\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的最小值为______.

9. 有编号互不相同的五个砝码, 其中 5 克、3 克、1 克砝码各一个, 2 克砝码两个. 从中随机选取三个, 则这三个砝码的总质量为 9 克的概率是______. (结果用最简分数表示)

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = q^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$, 前 n 项和为 S_n, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{2}$, 则 $q =$______.

11. 已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + ax}$ 的图象经过点 $P\left(p, \dfrac{6}{5}\right)$, $Q\left(q, -\dfrac{1}{5}\right)$. 若 $2^{p+q} = 36pq$, 则 $a =$______.

12. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1$, $x_2^2 + y_2^2 = 1$, $x_1x_2 + y_1y_2 = \dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \dfrac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值为______.

二、选择题

13. 设 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 上的动点, 则 P 到该椭圆的两个焦点的距离之和为 (　)

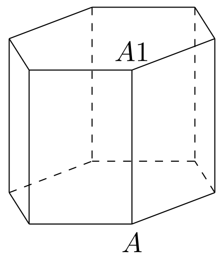
(A) $2\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $2\sqrt{5}$　(D) $4\sqrt{2}$

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“$a > 1$”是“$\dfrac{1}{a} < 1$”的 (　)

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　(D) 既非充分又非必要条件

15. 《九章算术》中, 称底面为矩形而有一侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六棱柱的一条侧棱, 如图. 若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一边, 则这样的阳马的个数是 (　)



(A) 4　(B) 8　(C) 12　(D) 16

16. 设 D 是含数 1 的有限实数集, $f(x)$ 是定义在 D 上的函数. 若 $f(x)$ 的图象绕原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后与原图象重合, 则在以下各项中, $f(1)$ 的可能取值只能是 (　)

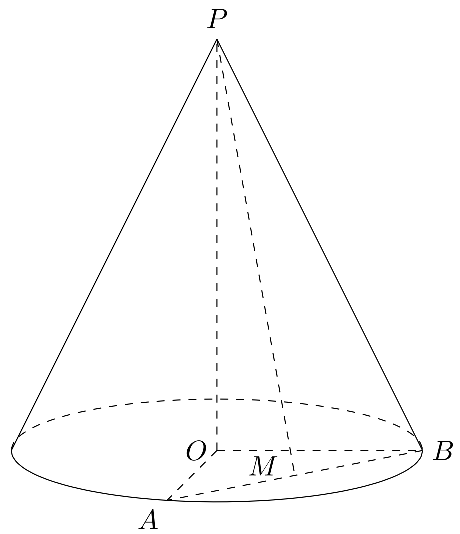
(A) $\sqrt{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) 0

三、解答题

17. 已知圆锥的顶点为 P, 底面圆心为 O, 半径为 2.

(1) 设圆锥的母线长为 4, 求圆锥的体积;

(2) 设 $PO = 4$, OA, OB 是底面半径, 且 $\angle AOB = 90°$, M 为线段 AB 的中点, 如图, 求异面直线 PM 与 OB 所成的角的大小.



18. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = a\sin 2x + 2\cos^2 x$.

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(2) 若 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$, 求方程 $f(x) = 1 - \sqrt{2}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的解.

19. 某群体的人均通勤时间, 是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤. 分析显示: 当 S 中 $x\%$ $(0<x<100)$ 的成员自驾时, 自驾群体的人均通勤时间为 $f(x)=\begin{cases}30,\ 0<x\leqslant 30\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90,\ 30<x<100\end{cases}$ (单位: 分钟), 而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟. 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式; 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

20. 设常数 $t>2$. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(2,0)$, 直线 $l: x=t$, 曲线 $\Gamma: y^2=8x$ $(0\leqslant x\leqslant t,\ y\geqslant 0)$. l 与 x 轴交于点 A、与 Γ 交于点 B. P, Q 分别是曲线 Γ 与线段 AB 上的动点.

(1) 用 t 表示点 B 到点 F 的距离;

(2) 设 $t=3$, $|FQ|=2$, 线段 OQ 的中点在直线 FP 上, 求 $\triangle AQP$ 的面积;

(3) 设 $t=8$, 是否存在以 FP, FQ 为邻边的矩形 $FPEQ$, 使得点 E 在 Γ 上? 若存在, 求点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

21. 给定无穷数列 $\{a_n\}$, 若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|b_n-a_n|\leqslant 1$, 则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$"接近".

(1) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, $b_n=a_{n+1}+1$, $n\in\mathbf{N}^*$, 判断数列 $\{b_n\}$ 是否与 $\{a_n\}$ 接近, 并说明理由;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前四项为: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $a_4=8$, $\{b_n\}$ 是一个与 $\{a_n\}$ 接近的数列, 记集合 $M=\{x\mid x=b_i, i=1,2,3,4\}$, 求 M 中元素的个数 m;

(3) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列. 若存在数列 $\{b_n\}$ 满足: $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 接近, 且在 b_2-b_1, b_3-b_2, $\cdots$, $b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个为正数, 求 d 的取值范围.