

# 理科数学

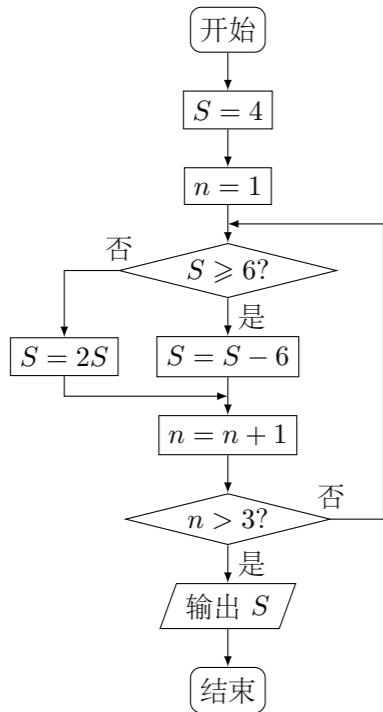
## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{y | y = 3x - 2, x \in A\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{1\}$  (B)  $\{4\}$  (C)  $\{1, 3\}$  (D)  $\{1, 4\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 2x + 3y - 6 \geq 0 \\ 3x + 2y - 9 \leq 0 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = 2x + 5y$  的最小值为 ( )  
 (A)  $-4$  (B)  $6$  (C)  $10$  (D)  $17$

3. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $AB = \sqrt{13}$ ,  $BC = 3$ ,  $\angle C = 120^\circ$ , 则  $AC =$  ( )  
 (A)  $1$  (B)  $2$  (C)  $3$  (D)  $4$

4. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出  $S$  的值为 ( )



- (A)  $2$  (B)  $4$  (C)  $6$  (D)  $8$
5. 设  $\{a_n\}$  是首项为正数的等比数列, 公比为  $q$ , 则“ $q < 0$ ”是“对任意的正整数  $n$ ,  $a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ”的 ( )  
 (A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件  
 (C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ), 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于  $A, B, C, D$  四点, 四边形  $ABCD$  的面积为  $2b$ , 则双曲线的方程为 ( )  
 (A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{3} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

7. 已知  $\triangle ABC$  是边长为  $1$  的等边三角形, 点  $D, E$  分别是边  $AB, BC$  的中点, 连接  $DE$  并延长到点  $F$ , 使得  $DE = 2EF$ , 则  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$  的值为 ( )  
 (A)  $-\frac{8}{5}$  (B)  $\frac{1}{8}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{11}{8}$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0 \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 且关于  $x$  的方程  $|f(x)| = 2 - x$  恰好有两个不相等的实数解, 则  $a$  的取值范围是 ( )

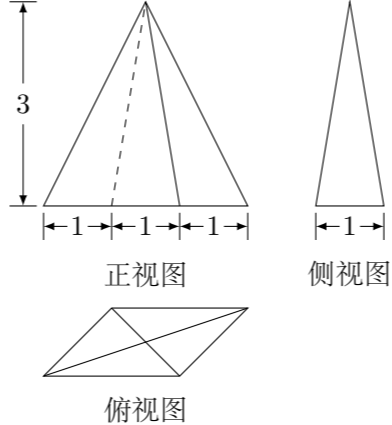
- (A)  $\left(0, \frac{2}{3}\right]$  (B)  $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$   
 (C)  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$  (D)  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\frac{3}{4}\right\}$

## 二、填空题

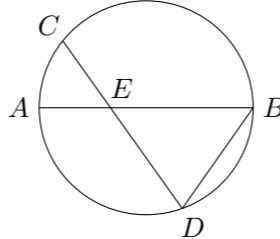
9. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 若  $(1 + i)(1 - bi) = a$ , 则  $\frac{a}{b}$  的值为\_\_\_\_\_.

10.  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$  的展开式中  $x^7$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

11. 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示 (单位: m), 则该四棱锥的体积为\_\_\_\_\_  $\text{m}^3$ .



12. 如图,  $AB$  是圆的直径, 弦  $CD$  与  $AB$  相交于点  $E$ ,  $BE = 2AE = 2$ ,  $BD = ED$ , 则线段  $CE$  的长为\_\_\_\_\_.



13. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 若实数  $a$  满足  $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 设抛物线  $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 准线为  $l$ . 过抛物线

上一点  $A$  作  $l$  的垂线, 垂足为  $B$ . 设  $C\left(\frac{7}{2}p, 0\right)$ ,  $AF$  与  $BC$  相交于点  $E$ . 若  $|CF| = 2|AF|$ , 且  $\triangle ACE$  的面积为  $3\sqrt{2}$ , 则  $p$  的值为\_\_\_\_\_.

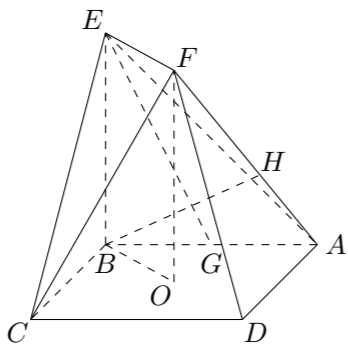
## 三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = 4 \tan x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$ .  
 (1) 求  $f(x)$  的定义域与最小正周期;  
 (2) 讨论  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的单调性.

16. 某小组共  $10$  人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为  $1, 2, 3$  的人数分别为  $3, 3, 4$ . 现从这  $10$  人中随机选出  $2$  人作为该组代表参加座谈会.

- (1) 设  $A$  为事件“选出的  $2$  人参加义工活动次数之和为  $4$ ”, 求事件  $A$  发生的概率;  
 (2) 设  $X$  为选出的  $2$  人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

17. 如图, 正方形  $ABCD$  的中心为  $O$ , 四边形  $OBEF$  为矩形, 平面  $OBEF \perp$  平面  $ABCD$ , 点  $G$  为  $AB$  的中点,  $AB = BE = 2$ .
- (1) 求证:  $EG \parallel$  平面  $ADF$ ;
  - (2) 求二面角  $O - EF - C$  的正弦值;
  - (3) 设  $H$  为线段  $AF$  上的点, 且  $AH = \frac{2}{3}HF$ , 求直线  $BH$  和平面  $CEF$  所成角的正弦值.



19. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$  ( $a > \sqrt{3}$ ) 的右焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ . 已知  $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ , 其中  $O$  为原点,  $e$  为椭圆的离心率.
- (1) 求椭圆的方程;
  - (2) 设过点  $A$  的直线  $l$  与椭圆交于点  $B$  ( $B$  不在  $x$  轴上), 垂直于  $l$  的直线与  $l$  交于点  $M$ , 与  $y$  轴交于点  $H$ . 若  $BF \perp HF$ , 且  $\angle MOA \leq \angle MAO$ , 求直线  $l$  的斜率的取值范围.

20. 设函数  $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- (1) 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 若  $f(x)$  存在极值点  $x_0$ , 且  $f(x_1) = f(x_0)$ , 其中  $x_1 \neq x_0$ , 求证:  $x_1 + 2x_0 = 3$ ;
  - (3) 设  $a > 0$ , 函数  $g(x) = |f(x)|$ , 求证:  $g(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值不小于  $\frac{1}{4}$ .

18. 已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等差数列, 公差为  $d$ , 对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $b_n$  是  $a_n$  和  $a_{n+1}$  的等比中项.
- (1) 设  $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求证: 数列  $\{c_n\}$  是等差数列;
  - (2) 设  $a_1 = d$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 求证:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$ .