

2010 年普通高等学校招生考试 (天津卷)

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\frac{-1+3i}{1+2i} =$ ()

(A) $1+i$ (B) $5+5i$ (C) $-5-5i$ (D) $-1-i$

2. 函数 $f(x) = 2^x + 3x$ 的零点所在的一个区间是 ()

(A) $(-2, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(1, 2)$

3. 命题“若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x)$ 是奇函数”的否命题是 ()

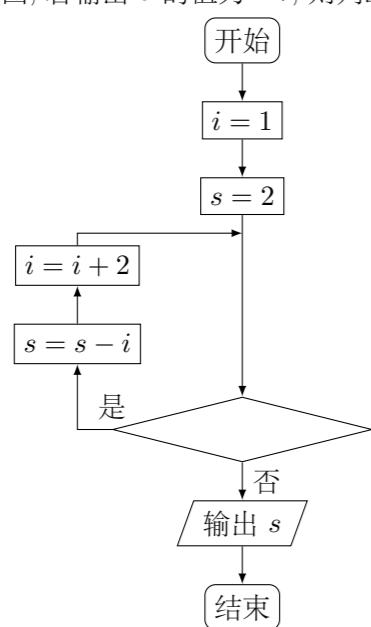
(A) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x)$ 是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 不是奇函数, 则 $f(-x)$ 不是奇函数

(C) 若 $f(-x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是奇函数

(D) 若 $f(-x)$ 不是奇函数, 则 $f(x)$ 不是奇函数

4. 阅读下面的程序框图, 若输出 s 的值为 -7 , 则判断框内可填写 ()



(A) $i < 3?$ (B) $i < 4?$ (C) $i < 5?$ (D) $i < 6?$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程是 $y = \sqrt{3}x$, 它的一个焦点在抛物线 $y^2 = 24x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ (C) $\frac{x^2}{108} - \frac{y^2}{36} = 1$ (D) $\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1$

6. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $9S_3 = S_6$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 5 项和为 ()

(A) $\frac{15}{8}$ 或 5 (B) $\frac{31}{16}$ 或 5 (C) $\frac{31}{16}$ (D) $\frac{15}{8}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a^2 - b^2 = \sqrt{3}bc$, $\sin C = 2\sqrt{3}\sin B$, 则 $A =$ ()

(A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°

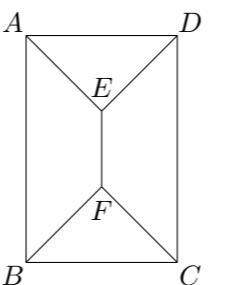
8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(a) > f(-a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 (C) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

9. 设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 1, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid |x - b| > 2, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \subseteq B$, 则实数 a, b 必满足 ()

- (A) $|a + b| \leq 3$ (B) $|a + b| \geq 3$ (C) $|a - b| \leq 3$ (D) $|a - b| \geq 3$

10. 如图, 用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且图中每条线段的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有 ()



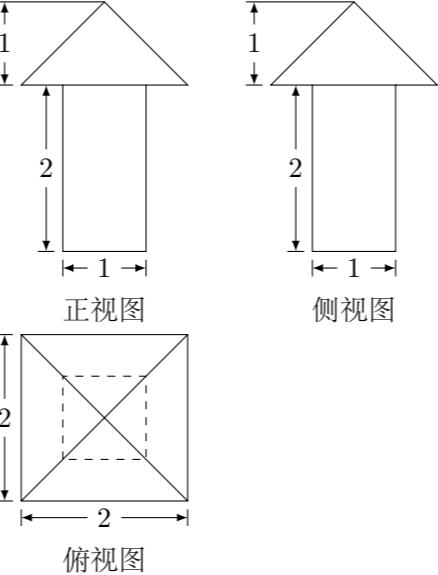
- (A) 288 种 (B) 264 种 (C) 240 种 (D) 168 种

二、填空题

11. 甲、乙两人在 10 天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图, 中间一列的数字表示零件个数的十位数, 两边的数字表示零件个数的个位数, 则这 10 天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为 () 和 () .

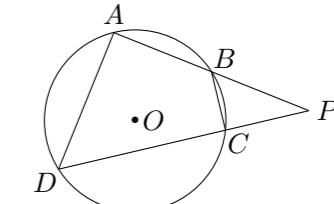
甲	乙
9 8	1 9 7 1
0 1 3 2 0	2 1 4 2 4
1 1 5	3 0 2 0

12. 一个几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的体积为 () .

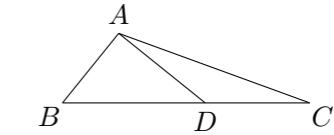


13. 已知圆 C 的圆心是直线 $\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \end{cases}$ (t 为参数) 与 x 轴的交点, 且圆 C 与直线 $x + y + 3 = 0$ 相切, 则圆 C 的方程为 () .

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形, 延长 AB 和 DC 相交于点 P , 若 $\frac{PB}{PA} = \frac{1}{2}, \frac{PC}{PD} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{BC}{AD}$ 的值为 () .



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB, \overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}, |\overrightarrow{AD}| = 1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ () .



16. 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 对任意 $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, $f\left(\frac{x}{m}\right) - 4f(m) \leq f(x-1) + 4f(m)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 () .

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$).

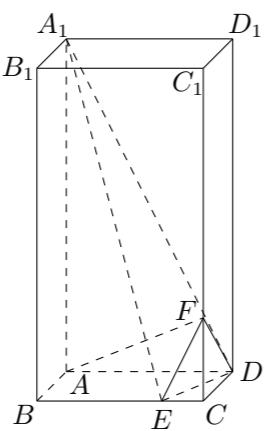
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值;

(2) 若 $f(x_0) = \frac{6}{5}$, $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

18. 某射手每次射击击中目标的概率是 $\frac{2}{3}$, 且各次射击的结果互不影响.
- 假设这名射手射击 5 次, 求恰有 2 次击中目标的概率;
 - 假设这名射手射击 5 次, 求有 3 次连续击中目标. 另外 2 次未击中目标的概率;
 - 假设这名射手射击 3 次, 每次射击, 击中目标得 1 分, 未击中目标得 0 分, 在 3 次射击中, 若有 2 次连续击中, 而另外 1 次未击中, 则额外加 1 分; 若 3 次全击中, 则额外加 3 分. 记 ξ 为射手射击 3 次后的总的分数, 求 ξ 的分布列.
20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.
- 求椭圆的方程;
 - 设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A, B . 已知点 A 的坐标为 $(-a, 0)$, 点 $Q(0, y_0)$ 在线段 AB 的垂直平分线上, 且 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 4$. 求 y_0 的值.
22. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 0$, 且对任意 $k \in \mathbf{N}^*$. $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ 成等差数列, 其公差为 d_k .
- 若 $d_k = 2k$, 证明 $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 成等比数列 ($k \in \mathbf{N}^*$);
 - 若对任意 $k \in \mathbf{N}^*$, $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 成等比数列, 其公比为 q_k .
 - 设 $q_1 \neq 1$. 证明 $\left\{ \frac{1}{q_k - 1} \right\}$ 是等差数列;
 - 若 $a_2 = 2$, 证明 $\frac{3}{2} < 2n - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{a_k} \leq 2$ ($n \geq 2$).

19. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 BC, CC_1 上的点, $CF = AB = 2CE$, $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 4$.

- 求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值;
- 证明 $AF \perp$ 平面 A_1ED ;
- 求二面角 $A_1 - ED - F$ 的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = xe^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$).

- 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- 已知函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) > g(x)$;
- 如果 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 证明: $x_1 + x_2 > 2$.