

# 理科数学

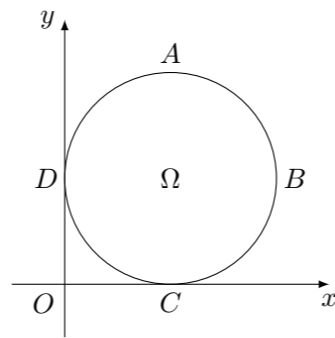
## 一、填空题

- 不等式  $|x - 1| < 1$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 若集合  $A = \{x|x \leq 2\}$ 、 $B = \{x|x \geq a\}$  满足  $A \cap B = \{2\}$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 若复数  $z$  满足  $z = i(2 - z)$  ( $i$  是虚数单位), 则  $z =$ \_\_\_\_\_.
- 若函数  $f(x)$  的反函数为  $f^{-1}(x) = x^2$  ( $x > 0$ ), 则  $f(4) =$ \_\_\_\_\_.
- 若向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$ , 且  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| =$ \_\_\_\_\_.
- 函数  $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  的最大值是\_\_\_\_\_.
- 在平面直角坐标系中, 从六个点:  $A(0, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(1, 1)$ 、 $D(0, 2)$ 、 $E(2, 2)$ 、 $F(3, 3)$  中任取三个, 这三点能构成三角形的概率是\_\_\_\_\_ (结果用分数表示)
- 设函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数. 若当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) = \lg x$ , 则满足  $f(x) > 0$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 已知总体的各个体的值由小到大依次为 2, 3, 3, 7,  $a$ ,  $b$ , 12, 13.7, 18.3, 20, 且总体的中位数为 10.5. 若要使该总体的方差最小, 则  $a$ 、 $b$  的取值分别是\_\_\_\_\_.
- 某海域内有一孤岛, 岛四周的海平面 (视为平面) 上有一浅水区 (含边界), 其边界是长轴长为  $2a$ , 短轴长为  $2b$  的椭圆. 已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为  $h_1$ 、 $h_2$ , 且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上, 现有船只经过该海域 (船只的大小忽略不计), 在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ , 那么船只已进入该浅水区的判别条件是\_\_\_\_\_.
- 方程  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$  的解可视为函数  $y = x + \sqrt{2}$  的图象与函数  $y = \frac{1}{x}$  的图象交点的横坐标. 若  $x^4 + ax - 4 = 0$  的各个实根  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $k \leq 4$ ) 所对应的点  $\left(x_i, \frac{4}{x_i}\right)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) 均在直线  $y = x$  的同侧, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

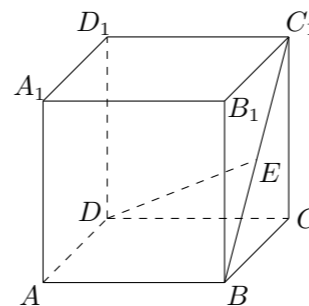
- 组合数  $C_n^r$  ( $n > r \geq 1, n, r \in \mathbf{Z}$ ) 恒等于 ( )
  - $\frac{r+1}{n+1}C_{n-1}^{r-1}$
  - $(n+1)(r+1)C_{n-1}^{r-1}$
  - $nrC_{n-1}^{r-1}$
  - $\frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$
- 给定空间中的直线  $l$  及平面  $\alpha$ , 条件“直线  $l$  与平面  $\alpha$  内无数条直线都垂直”是“直线  $l$  与平面  $\alpha$  垂直”的 ( )
  - 充要条件
  - 充分非必要条件
  - 必要非充分条件
  - 既非充分又非必要条件

- 若数列  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $a - \frac{3}{2}$  的无穷等比数列, 且  $\{a_n\}$  各项的和为  $a$ , 则  $a$  的值是 ( )
  - 1
  - 2
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{5}{4}$
- 如图, 在平面直角坐标系中,  $\Omega$  是一个与  $x$  轴的正半轴、 $y$  轴的正半轴分别相切于点  $C$ 、 $D$  的定圆所围成区域 (含边界),  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  是该圆的四等分点. 若点  $P(x, y)$ 、点  $P'(x', y')$  满足  $x \leq x'$  且  $y \geq y'$ , 则称  $P$  优于  $P'$ . 如果  $\Omega$  中的点  $Q$  满足: 不存在  $\Omega$  中的其它点优于  $Q$ , 那么所有这样的点  $Q$  组成的集合是劣弧 ( )
  - $\widehat{AB}$
  - $\widehat{BC}$
  - $\widehat{CD}$
  - $\widehat{DA}$

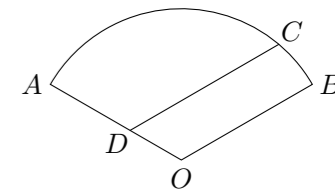


## 三、解答题

- 如图, 在棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E$  是  $BC_1$  的中点. 求直线  $DE$  与平面  $ABCD$  所成角的大小. (结果用反三角函数表示)



- 如图, 某住宅小区的平面图呈圆心角为  $120^\circ$  的扇形  $AOB$ . 小区的两个出入口设置在点  $A$  及点  $C$  处, 且小区里有一条平行于  $BO$  的小路  $CD$ , 已知某人从  $C$  沿  $CD$  走到  $D$  用了 10 分钟, 从  $D$  沿  $DA$  走到  $A$  用了 6 分钟, 若此人步行的速度为每分钟 50 米, 求该扇形的半径  $OA$  的长. (精确到 1 米)



- 已知函数  $f(x) = \sin 2x$ ,  $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , 直线  $x = t$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 与函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的图象分别交于  $M$ 、 $N$  两点.
  - 当  $t = \frac{\pi}{4}$  时, 求  $|MN|$  的值;
  - 求  $|MN|$  在  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时的最大值.

19. 已知函数  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ .
- (1) 若  $f(x) = 2$ , 求  $x$  的值;
  - (2) 若  $2^t f(2t) + m f(t) \geq 0$  对于  $t \in [1, 2]$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.
20. 设  $P(a, b)$  ( $b \neq 0$ ) 是平面直角坐标系  $xOy$  中的点,  $l$  是经过原点与点  $(1, b)$  的直线, 记  $Q$  是直线  $l$  与抛物线  $x^2 = 2py$  ( $p \neq 0$ ) 的异于原点的交点.
- (1) 已知  $a = 1, b = 2, p = 2$ , 求点  $Q$  的坐标;
  - (2) 已知点  $P(a, b)$  ( $ab \neq 0$ ) 在椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  上,  $p = \frac{1}{2ab}$ , 求证: 点  $Q$  落在双曲线  $4x^2 - 4y^2 = 1$  上;
  - (3) 已知动点  $P(a, b)$  满足  $ab \neq 0, p = \frac{1}{2ab}$ , 若点  $Q$  始终落在一条关于  $x$  轴对称的抛物线上, 试问动点  $P$  的轨迹落在哪种二次曲线上, 并说明理由.
21. 已知以  $a_1$  为首项的数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + c, & a_n < 3 \\ \frac{a_n}{d}, & a_n \geq 3 \end{cases}$ .
- (1) 当  $a_1 = 1, c = 1, d = 3$  时, 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
  - (2) 当  $0 < a_1 < 1, c = 1, d = 3$  时, 试用  $a_1$  表示数列  $\{a_n\}$  的前 100 项的和  $S_{100}$ ;
  - (3) 当  $0 < a_1 < \frac{1}{m}$  ( $m$  是正整数),  $c = \frac{1}{m}$ , 正整数  $d \geq 3m$  时, 求证: 数列  $a_2 - \frac{1}{m}, a_{3m+2} - \frac{1}{m}, a_{6m+2} - \frac{1}{m}, a_{9m+2} - \frac{1}{m}$  成等比数列当且仅当  $d = 3m$ .