2015 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

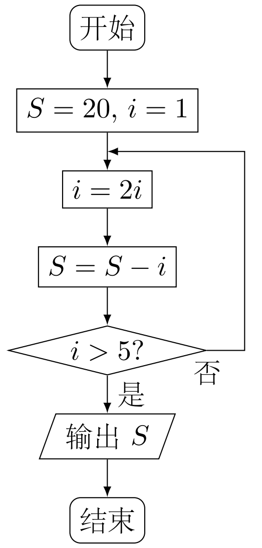
1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 集合 $A=\{2,3,5,6\}$, 集合 $B=\{1,3,4,6,7\}$, 则集合 $A\cap \complement_U B=$ （ ）

(A) $\{2,5\}$ (B) $\{3,6\}$ (C) $\{2,5,6\}$ (D) $\{2,3,5,6,8\}$

2. 设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ x-y+3\geqslant 0 \\ 2x+y-3\leqslant 0 \end{cases}$，则目标函数 $z=x+6y$ 的最大值为 （ ）

(A) 3 (B) 4 (C) 18 (D) 40

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 （ ）



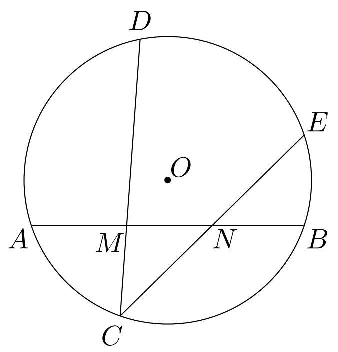
(A) -10 (B) 6 (C) 14 (D) 18

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 如图, 在圆 O 中, M, N 是弦 AB 的三等分点, 弦 CD, CE 分别经过点 M, N, 若 $CM=2$, $MD=4$, $CN=3$, 则线段 NE 的长为 （ ）



(A) $\frac{8}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线过点 $(2,\sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2=4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为（ ）

(A) $\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{28}=1$ (B) $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{21}=1$

(C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ (D) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a=f(\log_{0.5}3)$, $b=f(\log_2 5)$, $c=f(2m)$, 则 a,b,c 的大小关系为 （ ）

(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $c<a<b$ (D) $c<b<a$

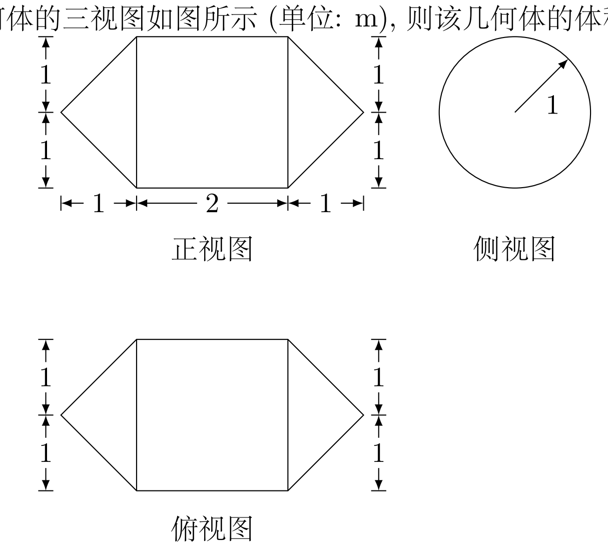
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2-|x|,\ x\leqslant 2 \\ (x-2)^2,\ x>2 \end{cases}$，函数 $g(x)=b-f(2-x)$, 其中 $b\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是（ ）

(A) $\left(\frac{7}{4},+\infty\right)$ (B) $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)$ (C) $\left(0,\frac{7}{4}\right)$ (D) $\left(\frac{7}{4},2\right)$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为______.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为______m^3.



11. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的封闭图形的面积为______.

12. 在 $\left(x-\frac{1}{4x}\right)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b-c=2$, $\cos A=-\frac{1}{4}$, 则 a 的值为______.

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB\parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最小值为______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2 x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展, 某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加. 现有来自甲协会的运动员 3 名, 其中种子选手 2 名; 乙协会的运动员 5 名, 其中种子选手 3 名. 从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

(1) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手, 且这 2 名种子选手来自同一个协会”, 求事件 A 发生的概率;

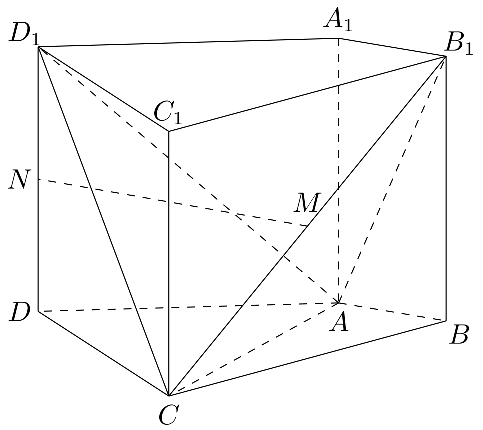
(2) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AC$, $AB=1$, $AC=AA_1=2$, $AD=CD=\sqrt{5}$, 且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.

(1) 求证: $MN\parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 求二面角 D_1-AC-B_1 的正弦值;

(3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点, 若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$, 求线段 A_1E 的长.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=qa_n$ (q 为实数, 且 $q\neq 1$), $n\in\mathbf{N}^*$, $a_1=1$, $a_2=2$, 且 a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5 成等差数列.

(1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2+y^2=\dfrac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c, $|FM|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求直线 FM 的斜率;

(2) 求椭圆的方程;

(3) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=nx-x^n$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $n\geqslant 2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P, 曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$, 求证: 对于任意的正实数 x, 都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x)=a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2, 求证: $|x_2-x_1|<\dfrac{a}{1-n}+2$.