

文科数学

一、选择题

1. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是向量, 命题“若 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ ”的逆命题是 ()

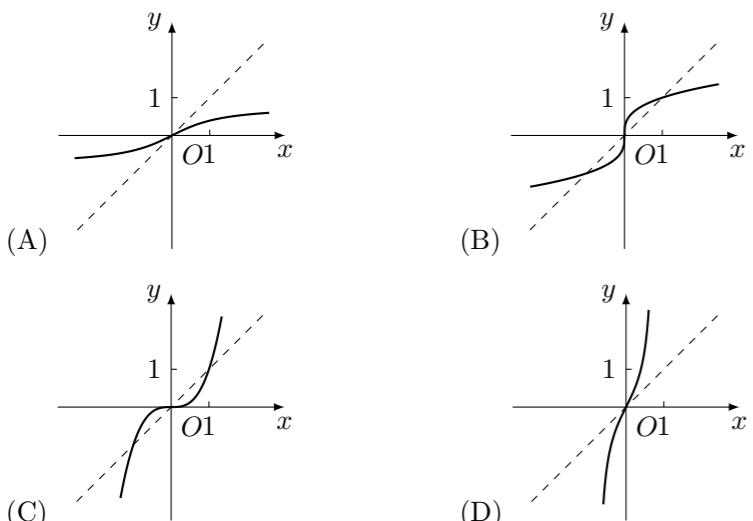
- (A) 若 $\mathbf{a} \neq -\mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$
 (B) 若 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$
 (C) 若 $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} \neq -\mathbf{b}$
 (D) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$

2. 设抛物线的顶点在原点, 准线方程为 $x = -2$, 则抛物线的方程是 ()

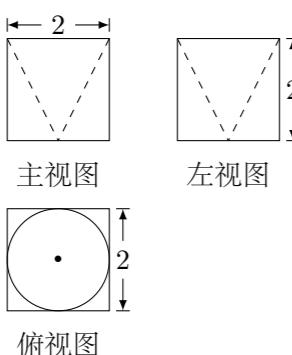
- (A) $y^2 = -8x$
 (B) $y^2 = -4x$
 (C) $y^2 = 8x$
 (D) $y^2 = 4x$

3. 设 $0 < a < b$, 则下列不等式中正确的是 ()

- (A) $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$
 (B) $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$
 (C) $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$
 (D) $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

4. 函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象是 ()

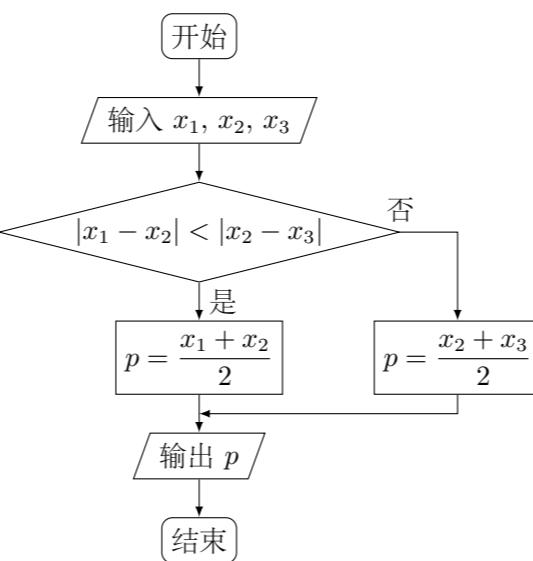
5. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积是 ()



- (A) $8 - \frac{2\pi}{3}$
 (B) $8 - \frac{\pi}{3}$
 (C) $8 - 2\pi$
 (D) $\frac{2\pi}{3}$

6. 方程 $|x| = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

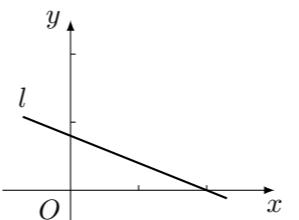
- (A) 没有根
 (B) 有且仅有一个根
 (C) 有且仅有两个根
 (D) 有无穷多个根

7. 下面的框图中, 当 $x_1 = 6, x_2 = 9, p = 8.5$ 时, x_3 等于 ()

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11

8. 设集合 $M = \{y|y = |\cos^2 x - \sin^2 x|, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \left\{x \mid \left|\frac{x}{i}\right| < 1, i \text{ 为虚数单位}, x \in \mathbb{R}\right\}$, 则 $M \cap N$ 为 ()

- (A) $(0, 1)$ (B) $(0, 1]$ (C) $[0, 1)$ (D) $[0, 1]$

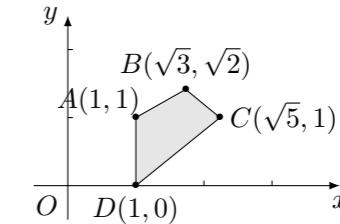
9. 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 是变量 x 和 y 的 n 个样本点, 直线 l 是由这些样本点通过最小二乘法得到的线性回归直线 (如图), 以下结论中正确的是 ()

- (A) 直线 l 过点 (\bar{x}, \bar{y})
 (B) x 和 y 的相关系数为直线 l 的斜率
 (C) x 和 y 的相关系数在 0 到 1 之间
 (D) 当 n 为偶数时, 分布在 l 两侧的样本点的个数一定相同

10. 植树节某班 20 名同学在一段直线公路一侧植树, 每人植一棵, 相邻两棵树相距 10 米, 开始时需将树苗集中放置在某一树坑旁边, 现将树坑从 1 到 20 依次编号, 为使各位同学从各自树坑前来领取树苗所走的路程总和最小, 树苗可以放置的两个最佳坑位的编号为 ()

- (A) 1 和 20 (B) 9 和 10 (C) 9 和 11 (D) 10 和 11

二、填空题

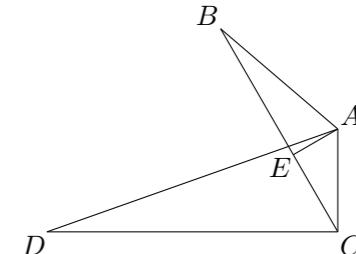
11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x, & x > 0 \\ 10^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$.12. 如图, 点 (x, y) 在四边形 $ABCD$ 内部和边界上运动, 那么 $2x - y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 观察下列等式

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 9 \\ 3+4+5+6+7 &= 25 \\ 4+5+6+7+8+9+10 &= 49 \\ \dots & \end{aligned}$$

照此规律, 第五个等式应为 $\underline{\hspace{2cm}}$.14. 设 $n \in \mathbb{N}_+$, 一元二次方程 $x^2 - 4x + n = 0$ 有整数根的充要条件是 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

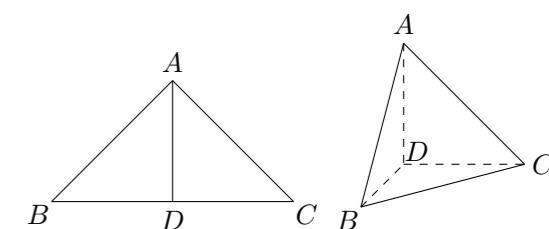
15. 三选一.

【A】若不等式 $|x+1| + |x-2| \geq a$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.【B】如图, $\angle B = \angle D, AE \perp BC, \angle ACD = 90^\circ$, 且 $AB = 6, AC = 4, AD = 12$, 则 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.【C】直角坐标系 xOy 中, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设点 A, B 分别在曲线 $C_1: \begin{cases} x = 3 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 和曲线 $C_2: \rho = 1$ 上, 则 $|AB|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ, \angle BAC = 90^\circ, AD$ 是 BC 上的高, 沿 AD 把 $\triangle ABD$ 折起, 使 $\angle BDC = 90^\circ$.

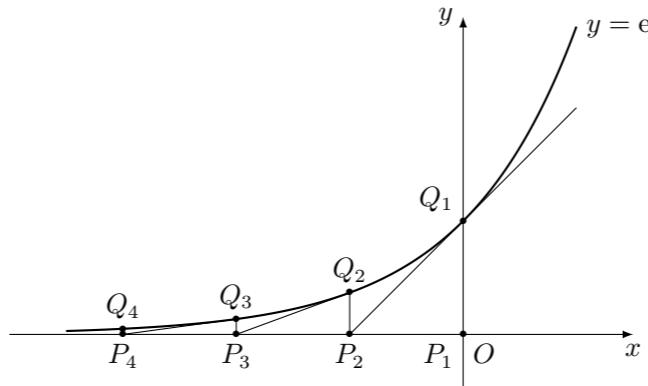
- (1) 证明: 平面 $ADB \perp$ 平面 BDC ;
 (2) 若 $BD = 1$, 求三棱锥 $D-ABC$ 的表面积.



17. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $(0, 4)$, 离心率为 $\frac{3}{5}$.
 (1) 求 C 的方程;
 (2) 求过点 $(3, 0)$ 且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的中点坐标.

19. 如图, 从点 $P_1(0, 0)$ 作 x 轴的垂线交曲线 $y = e^x$ 于点 $Q_1(0, 1)$, 曲线在 Q_1 点处的切线与 x 轴交于点 P_2 , 再从 P_2 作 x 轴的垂线交曲线于点 Q_2 , 依次重复上述过程得到一系列点: $P_1, Q_1; P_2, Q_2; \dots; P_n, Q_n$, 记 P_k 点的坐标为 $(x_k, 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).
 (1) 试求 x_k 与 x_{k-1} 的关系 ($2 \leq k \leq n$);
 (2) 求 $|P_1Q_1| + |P_2Q_2| + |P_3Q_3| + \dots + |P_nQ_n|$.

21. 设 $f(x) = \ln x$, $g(x) = f(x) + f'(x)$.
 (1) 求 $g(x)$ 的单调区间和最小值;
 (2) 讨论 $g(x)$ 与 $g\left(\frac{1}{x}\right)$ 的大小关系;
 (3) 求 a 的取值范围, 使得 $g(a) - g(x) < \frac{1}{a}$ 对任意 $x > 0$ 成立.



18. 叙述并证明余弦定理.

20. 如图, A 地到火车站共有两条路径 L_1 和 L_2 , 现随机抽取 100 位从 A 地到达火车站的人进行调查, 调查结果如下:

所用时间 (分钟)	10 ~ 20	20 ~ 30	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60
选择 L_1 的人数	6	12	18	12	12
选择 L_2 的人数	0	4	16	16	4

- (1) 试估计 40 分钟内不能赶到火车站的概率;
 (2) 分别求通过路径 L_1 和 L_2 所用时间落在上表中各时间段内的频率;
 (3) 现甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟时间用于赶往火车站, 为了尽最大可能在允许的时间内赶到火车站, 试通过计算说明, 他们应如何选择各自的路径.

