2016 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$, $B=\{4,8\}$, 则 $\complement_A B=$ ( )

(A) $\{4,8\}$ (B) $\{0,2,6\}$ (C) $\{0,2,6,10\}$ (D) $\{0,2,4,6,8,10\}$

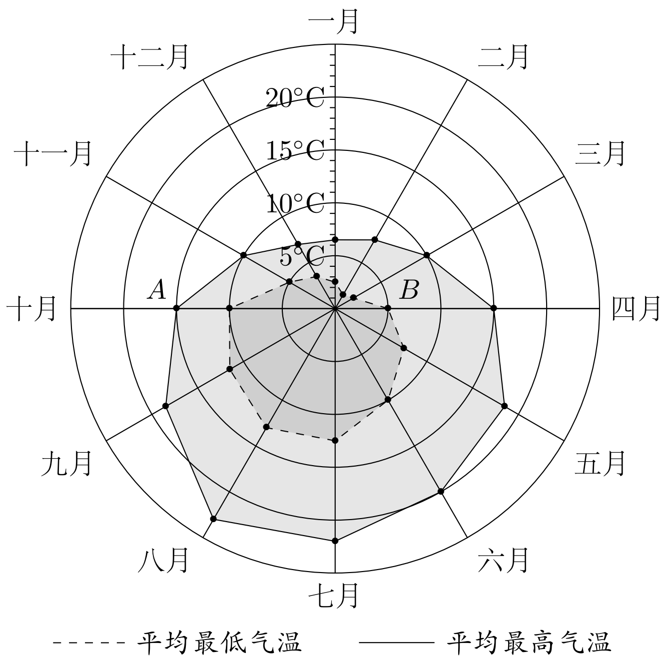
2. 若 $z=4+3\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$ ( )

(A) 1 (B) -1 (C) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (D) $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ ( )

(A) $30°$ (B) $45°$ (C) $60°$ (D) $120°$

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C, B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是 ( )



(A) 各月的平均最低气温都在 0°C 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 20°C 的月份有 5 个

5. 小敏打开计算机时, 忘记了开机密码的前两位, 只记得第一位是 M, I, N 中的一个字母, 第二位是 1, 2, 3, 4, 5 中的一个数字, 则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是 ( )

(A) $\dfrac{8}{15}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

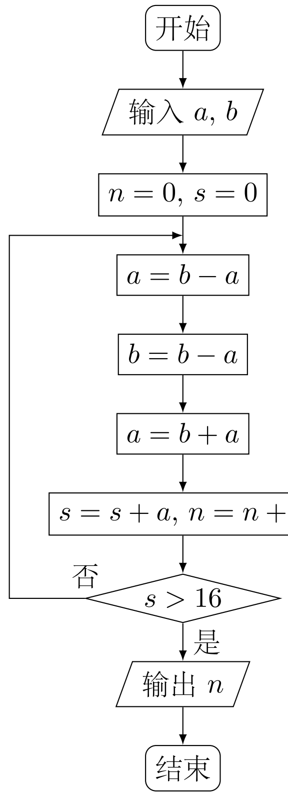
6. 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$ ( )

(A) $-\dfrac{4}{5}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$

7. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

(A) $b<a<c$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

8. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ ( )

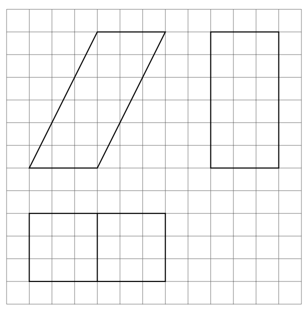


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\sin A=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

10. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 ( )



(A) $18+36\sqrt{5}$ (B) $54+18\sqrt{5}$ (C) 90 (D) 81

11. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 ( )

(A) 4π (B) $\dfrac{9\pi}{2}$ (C) 6π (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

12. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{4}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0\\ x-2y-1\leqslant 0\\ x\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=2\sin x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知直线 $l:x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 则 $|CD|=$______.

16. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x\leqslant 0$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^{-x-1}-x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是______.

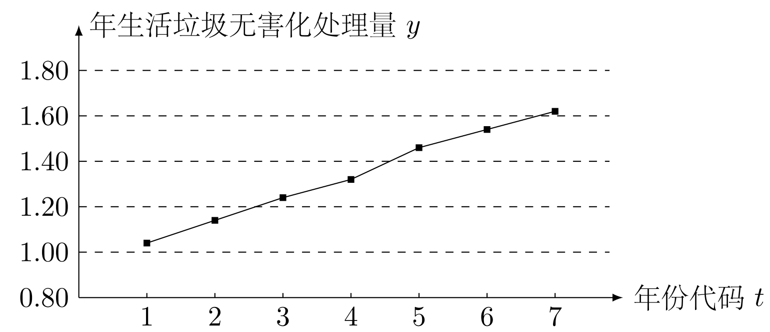
三、解答题

17. 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 − 7 分别对应年份 2008 − 2014

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

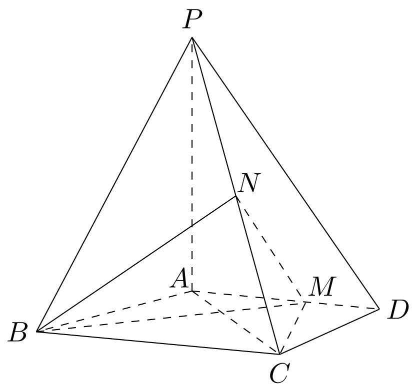
参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB;

(2) 求四面体 $N-BCM$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

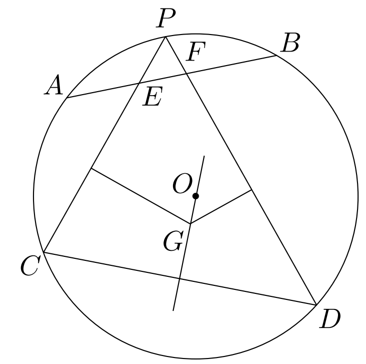
(2) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

(3) 设 $c > 1$, 证明当 $x \in (0,1)$ 时, $1 + (c-1)x > c^x$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG \perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 a 的取值范围.