

文科数学

一、选择题

1. 不等式 $x^2 > x$ 的解集是 ()

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, 1)$
 (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. 若 O, E, F 是不共线的任意三点, 则以下各式中成立的是 ()

- (A) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$ (B) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$
 (C) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$ (D) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$

3. 设 $p: b^2 - 4ac > 0 (a \neq 0)$, $q: \text{关于 } x \text{ 的方程 } ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0) \text{ 有实根}$, 则 p 是 q 的 ()

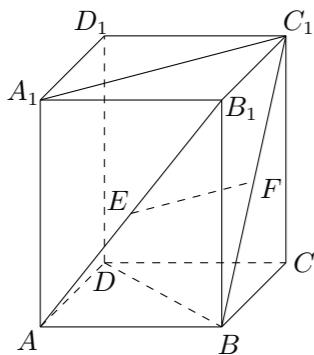
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 在等比数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 中, 若 $a_1 = 1, a_4 = \frac{1}{8}$, 则该数列的前 10 项和为 ()

- (A) $2 - \frac{1}{2^8}$ (B) $2 - \frac{1}{2^9}$ (C) $2 - \frac{1}{2^{10}}$ (D) $2 - \frac{1}{2^{11}}$

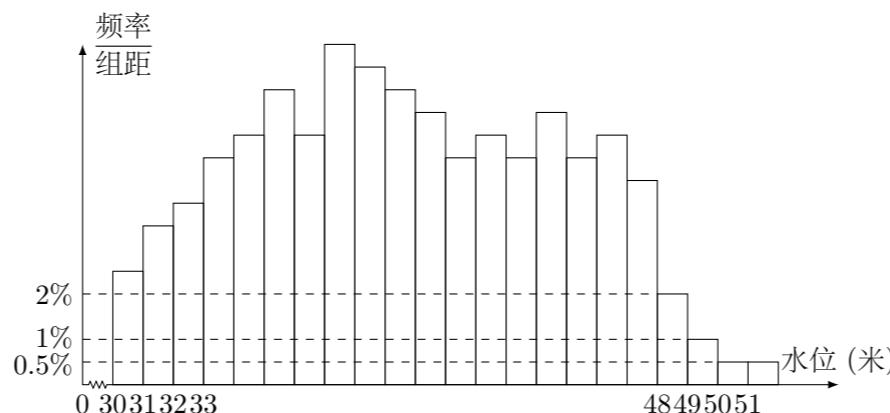
5. 在 $(1+x)^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的二项展开式中, 若只有 x^5 的系数最大, 则 $n =$ ()

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 AB_1, BC_1 的中点, 则以下结论中不成立的是 ()

- (A) EF 与 BB_1 垂直 (B) EF 与 BD 垂直
 (C) EF 与 CD 异面 (D) EF 与 A_1C_1 异面

7. 根据某水文观测点的历史统计数据, 得到某条河流水位的频率分布直方图 (如图), 从图中可以看出, 该水文观测点平均至少一百年才遇到一次的洪水的最低水位是 ()



- (A) 48 米 (B) 49 米 (C) 50 米 (D) 51 米

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - 4, & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

9. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 1)$ 的左、右焦点, P 是其右准线上纵坐标为 $\sqrt{3}c$ (c 为半焦距) 的点, 且 $|F_1F_2| = |F_2P|$, 则椭圆的离心率是 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, S_1, S_2, \dots, S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i = \{a_i, b_i\}, S_j = \{a_j, b_j\} (i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, k\})$, 都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right\} \neq \min\left\{\frac{a_j}{b_j}, \frac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x, y\}$ 表示两个数 x, y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ()

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1, 1)$ 且与直线 $x + y = 4$ 相切的圆的方程是_____.12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 1, c = \sqrt{3}, C = \frac{\pi}{3}$, 则 $A =$ _____.13. 若 $a > 0, a^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$, 则 $\log_{\frac{2}{3}} a =$ _____.14. 设集合 $A = \{(x, y) | y \geq |x - 2|, x \geq 0\}, B = \{(x, y) | y \leq -x + b\}$, $A \cap B \neq \emptyset$.

- (1) b 的取值范围是_____;
 (2) 若 $(x, y) \in A \cap B$, 且 $x + 2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是_____.

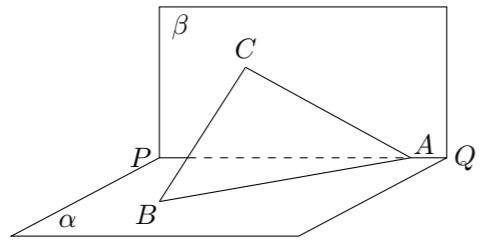
15. 棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的表面积是_____; 设 E, F 分别是该正方体的棱 AA_1, DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为_____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$. 求:

- (1) 函数 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 函数 $f(x)$ 的单调增区间.

18. 如图, 已知直二面角 $\alpha - PQ - \beta$, $A \in PQ$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $CA = CB$, $\angle BAP = 45^\circ$, 直线 CA 和平面 α 所成的角为 30° .
- (1) 证明: $BC \perp PQ$;
 - (2) 求二面角 $B - AC - P$ 的大小.



19. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的右焦点为 F , 过点 F 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点, 点 C 的坐标是 $(1, 0)$.
- (1) 证明: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 为常数;
 - (2) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CO}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程.

20. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 的前 n 项和, $a_1 = a$, 且 $S_n^2 = 3n^2a_n + S_{n-1}^2$, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$.
- (1) 证明: 数列 $\{a_{n+2} - a_n\}$ ($n \geq 2$) 是常数数列;
 - (2) 试找出一个奇数 a , 使以 18 为首项, 7 为公比的等比数列 $\{b_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 中的所有项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 并指出 b_n 是数列 $\{a_n\}$ 中的第几项.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$ 在区间 $[-1, 1], (1, 3]$ 内各有一个极值点.
- (1) 求 $a^2 - 4b$ 的最大值;
 - (2) 当 $a^2 - 4b = 8$ 时, 设函数 $y = f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线为 l , 若 l 在点 A 处穿过 $y = f(x)$ 的图象 (即动点在点 A 附近沿曲线 $y = f(x)$ 运动, 经过点 A 时, 从 l 的一侧进入另一侧), 求函数 $f(x)$ 的表达式.