2002 年普通高等学校招生考试（北京卷）

文科数学

一、选择题

1. 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是 （ ）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

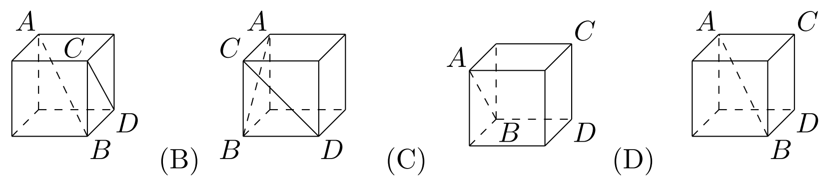
2. 在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(\cos 80°, \sin 80°)$, $B(\cos 20°, \sin 20°)$, 则 $|AB|$ 的值是 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1

3. 下列四个函数中, 以 π 为最小正周期, 且在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上为减函数的是 （ ）

(A) $y = \cos x$　(B) $y = 2|\sin x|$　(C) $y = \cos\dfrac{x}{2}$　(D) $y = -\cot x$

4. 在下列四个正方体中, 能得出 $AB \perp CD$ 的是 （ ）



(A)　(B)　(C)　(D)

5. 64 个直径都为 $\dfrac{a}{4}$ 的球, 记它们的体积之和为 $V_{甲}$, 表面积之和为 $S_{甲}$; 一个直径为 a 的球, 记其体积为 $V_{乙}$, 表面积为 $S_{乙}$, 则 （ ）

(A) $V_{甲} > V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$　(B) $V_{甲} < V_{乙}$, $S_{甲} < S_{乙}$

(C) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} > S_{乙}$　(D) $V_{甲} = V_{乙}$, $S_{甲} = S_{乙}$

6. 若直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的交点位于第一象限, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 （ ）

(A) $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$　(D) $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

7. $(1+\mathrm{i})^8$ 等于 （ ）

(A) 16i　(B) −16i　(C) −16　(D) 16

8. 若 $\dfrac{\cot\theta - 1}{2\cot\theta + 1} = 1$, 则 $\cos 2\theta$ 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{3}{5}$　(B) $-\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(D) $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

9. 5 本不同的书, 全部分给四个学生, 每个学生至少 1 本, 则不同的分法的种数为 （ ）

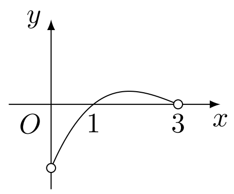
(A) 480　(B) 240　(C) 120　(D) 96

10. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{3m^2} + \dfrac{y^2}{5n^2} = 1$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{2m^2} - \dfrac{y^2}{3n^2} = 1$ 有公共的焦点, 那么双曲线的渐近线方程是 （ ）

(A) $x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}y$　(B) $y = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}x$

(C) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}y$　(D) $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}x$

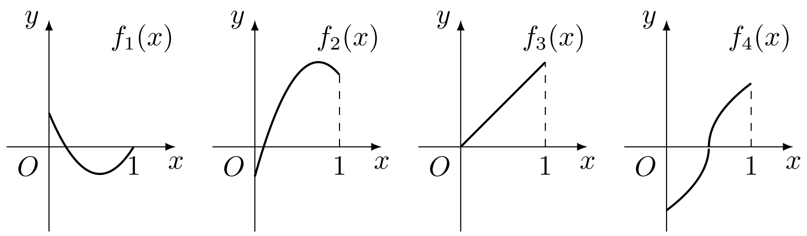
11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,3)$ 上的函数, $f(x)$ 的图象如图所示, 那么不等式 $f(x)\cos x < 0$ 的解集是 （ ）



(A) $(0,1) \cup (2,3)$　(B) $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$

(C) $(0,1) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$　(D) $(0,1) \cup (1,3)$

12. 如图所示, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: "对 $[0,1]$ 中任意的 x_1 和 x_2, $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$ 恒成立"的只有 （ ）



(A) $f_1(x)$, $f_3(x)$　(B) $f_2(x)$　(C) $f_2(x)$, $f_3(x)$　(D) $f_4(x)$

二、填空题

13. $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{6\pi}{5}$, $\tan\dfrac{7\pi}{5}$ 从小到大的顺序是______.

14. 等差数列 $\{a_n\}$, 中, $a_1 = 2$, 公差不为零, 且 a_1, a_3, a_{11} 恰好是某等比数列的前三项, 那么该等比数列公比的值等于______.

15. 关于直角 AOB 在平面 α 内的射影有如下判断: ① 可能是 0° 的角; ② 可能是锐角; ③ 可能是直角; ④ 可能是直角; ⑤ 可能是 180° 的角. 其中正确的序号是______. (注: 把你认为正确判断的序号都填上)

16. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 上的动点 Q 到直线 $3x + 4y + 8 = 0$ 距离的最小值为______.

三、解答题

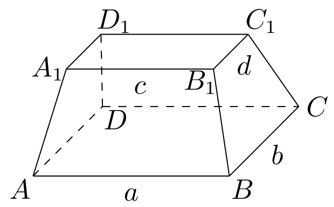
17. 解不等式 $\sqrt{2x-1} + 2 > x$.

18. 如图, 在多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 上、下底面平行且均为矩形, 相对的侧面与同一底面所成的二面角大小相等, 侧棱延长后相交与 E, F 两点, 上、下底面矩形的长、宽分别为 c, d 与 a, b, 且 $a > c$, $b > d$, 两底面间的距离为 h.

(1) 求侧面 ABB_1A_1 与底面 $ABCD$ 所成二面角的正切值;

(2) 在估侧该多面体的体积时, 经常运用近似公式 $V_{估} = S_{中截面} \cdot h$ 来计算, 已知它的体积公式是 $V = \dfrac{h}{6}(S_{上底面} + 4S_{中截面} + S_{下底面})$, 试判断 $V_{估}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

注: 与两个底面平行, 且到两个底面距离相等的截面称为该多面体的中截面.



19. 数列 $\{a_n\}$ 由下列条件确定: $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$.

(1) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant \sqrt{a}$;

(2) 证明: 对 $n \geqslant 2$, 总有 $x_n \geqslant x_{n+1}$.

20. 在研究并行计算的基本算法时, 有以下简单模型问题: 用计算机求 n 个不同的数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的和 $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, 计算开始前, n 个数存贮在 n 台由网络连接的计算机中, 每台机器存一个数. 计算开始后, 在一个单位时间内, 每台机器至多到一台其他机器中读数据, 并与自己原有数据相加得到新的数据, 各台机器可同时完成上述工作. 为了用尽可能少的单位时间, 即可完成计算, 方法可用下表表示:

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1	2	v_1+v_2				
2	v_2	1	v_2+v_1				

(1) 当 $n=4$ 时, 至少需要多少个单位时间可完成计算? 把你设计的方法填入下表:
机器号初始时第一单位时间第二单位时间第三单位时间被读机号结果被读机号结果被读机号结果

机器号	初始时	第一单位时间		第二单位时间		第三单位时间	
		被读机号	结果	被读机号	结果	被读机号	结果
1	v_1						
2	v_2						
3	v_3						
4	v_4						

(2) 当 $n=128$ 时, 要使所有机器都得到 $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, 至少需要多少个单位时间可完成计算? (结论不要求证明)

21. 已知 $O(0,0)$, $B(1,0)$, $C(b,c)$ 是 $\triangle OBC$ 的三个顶点.
(1) 写出 $\triangle OBC$ 的重心 G, 外心 F, 垂心 H 的坐标, 并证明 G, F, H 三点共线;
(2) 当直线 FH 与 OB 平行时, 求顶点 C 的轨迹.

22. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$ 都满足: $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$.
(1) 求 $f(0)$, $f(1)$ 的值;
(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
(3) 若 $f(2)=2$, $u_n = f(2^n)$ $(n \in \mathbf{N})$, 求证 $u_{n+1} > u_n$ $(n \in \mathbf{N})$.