2004 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 设全集是实数集 $\mathbf{R}$, $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$, $N=\{x|x<1\}$, 那么 $\overline{M}\cap N$ 等于 ( )

(A) $\{x|x<-2\}$ (B) $\{x|-2<x<1\}$

(C) $\{x|x<1\}$ (D) $\{x|-2\leqslant x<1\}$

2. 满足条件 $|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 ( )

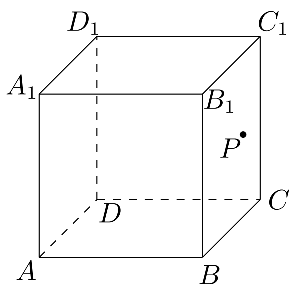
(A) 一条直线 (B) 两条直线 (C) 圆 (D) 椭圆

3. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\perp n$;
② 若 $\alpha\parallel\beta$, $\beta\parallel\gamma$, $m\perp\alpha$, 则 $m\perp\gamma$;
③ 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
④ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\parallel\beta$.
其中正确命题的序号是 ( )

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ①和④

4. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点, 若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等, 则动点 P 的轨迹所在的曲线是 ( )



(A) 直线 (B) 圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

5. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1,2]$ 上存在反函数的充分必要条件是( )

(A) $a\in(-\infty,1]$ (B) $a\in[2,+\infty)$

(C) $a\in[1,2]$ (D) $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

6. 已知 a、b、c 满足 $c<b<a$ 且 $ac<0$, 那么下列选项中一定成立的是( )

(A) $ab>ac$ (B) $c(b-a)<0$ (C) $cb^2<ab^2$ (D) $ac(a-c)>0$

7. 从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五条线段中, 任取三条的不同取法共有 n 种. 在这些取法中, 以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m, 则 $\dfrac{m}{n}$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}x,\ x\in P\\-x,\ x\in M\end{cases}$, 其中 P, M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$, $f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$, 给出下列四个判断:

① 若 $P\cap M\neq\varnothing$, 则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;
② 若 $P\cup M=\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;
③ 若 $P\cup M=\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;
④ 若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$, 则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.
其中正确判断有 ( )

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

二、填空题

9. 函数 $y=\cos 2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x$ 的最小正周期是______.

10. 方程 $\lg(4^x+2)=\lg 2^x+\lg 3$ 的解是______.

11. 某地球仪上北纬 30° 纬线的长度为 $12\pi\text{cm}$, 该地球仪的半径是______cm, 表面积是______cm^2.

12. 曲线 $C:\begin{cases}x=\cos\theta\\y=-1+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 的普通方程是______, 如果曲线 C 与直线 $x+y+a=0$ 有公共点, 那么实数 a 的取值范围是______.

13. 在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列且 $f(0)=-4$, 则 $f(x)$ 有最______值 (填"大"或"小"), 且该值为______.

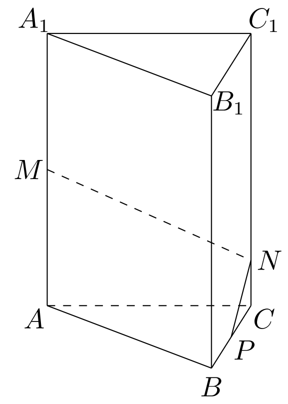
14. 定义"等和数列": 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列, 且 $a_1=2$, 公和为 5, 那么 a_{18} 的值为______, 且这个数列的前 21 项和 S_{21} 的计算公式为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $AC=2$, $AB=3$, 求 $\tan A$ 的值和 $\triangle ABC$ 的面积.

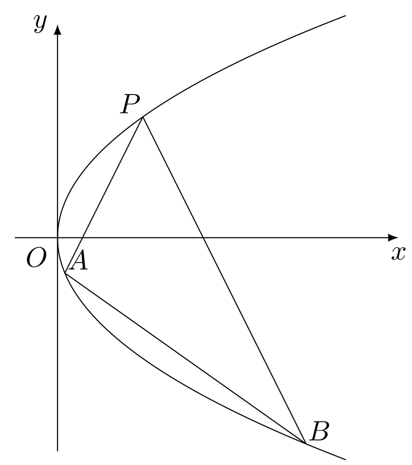
16. 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=3$, $AA_1=4$, M 为 AA_1 的中点, P 是 BC 上一点, 且由 P 沿棱柱侧面经过棱 CC_1 到 M 的最短路线长为 $\sqrt{29}$, 设这条最短路线与 CC_1 的交点为 N, 求:

(1) 该三棱柱的侧面展开图的对角线长;
(2) PC 和 NC 的长;
(3) 平面 NMP 与平面 ABC 所成二面角 (锐角) 的大小. (用反三角函数表示)



17. 如图, 过抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上一定点 $P(x_0,y_0)$ $(y_0>0)$, 作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

(1) 求该抛物线上纵坐标为 $\dfrac{p}{2}$ 的点到其焦点 F 的距离;
(2) 当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时, 求 $\dfrac{y_1+y_2}{y_0}$ 的值, 并证明直线 AB 的斜率是非零常数.



18. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的增函数, 满足 $f(x)=2f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ 且 $f(1)=1$, 在每个区间 $\left(\dfrac{1}{2^i},\dfrac{1}{2^{i-1}}\right]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 上, $y=f(x)$ 的图象都是斜率为同一常数 k 的直线的一部分.

(1) 求 $f(0)$ 及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ 的值, 并归纳出 $f\left(\dfrac{1}{2^i}\right)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 的表达式;

(2) 设直线 $x=\dfrac{1}{2^i}$, $x=\dfrac{1}{2^{i-1}}$, x 轴及 $y=f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$, 记 $S(k)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$, 求 $S(k)$ 的表达式, 并写出其定义域和最小值.

19. 某段城铁线路上依次有 A, B, C 三站, $AB=15$ km, $BC=3$ km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从 A 站发车, 8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达 C 站, 在实际运行中, 假设列车从 A 站正点发车, 在 B 站停留 1 分钟, 并在行驶时以同一速度 v km/h 匀速行驶, 列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差;

(2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求 v 的取值范围.

20. 给定有限个正数满足条件 T: 每个数都不大于 50 且总和 $L=1275$. 现将这些数按下列要求进行分组, 每组数之和不大于 150 且分组的步骤是:

首先, 从这些数中选择这样一些数构成第一组, 使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的, r_1 称为第一组余差;

然后, 在去掉已选入第一组的数后, 对余下的数按第一组的选择方式构成第二组, 这时的余差为 r_2; 如此继续构成第三组 (余差为 r_3)、第四组 (余差为 r_4)、$\cdots$, 直至第 N 组 (余差为 r_N) 把这些数全部分完为止.

(1) 判断 r_1, r_2, $\cdots$, r_N 的大小关系, 并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数;

(2) 当构成第 n $(n<N)$ 组后, 指出余下的每个数与 r_n 的大小关系, 并证明 $r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$;

(3) 对任何满足条件 T 的有限个正数, 证明: $N\leqslant 11$.