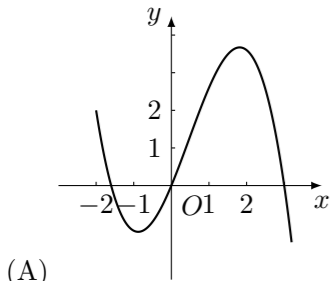
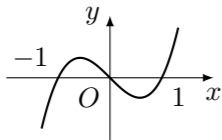


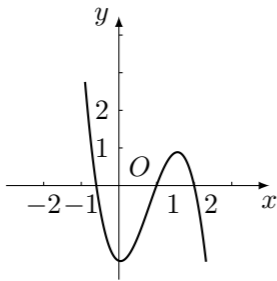
# 理科数学

## 一、选择题

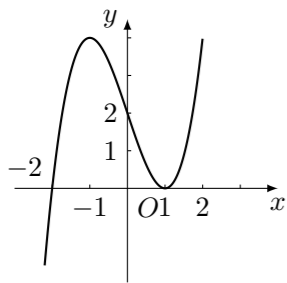
1. 设集合  $I = \{x||x| < 3, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 2\}$ , 则  $A \cup (\complement_I B) =$  ( )  
(A)  $\{1\}$  (B)  $\{1, 2\}$  (C)  $\{2\}$  (D)  $\{0, 1, 2\}$
2. 设复数:  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = x + 2i$  ( $x \in \mathbf{R}$ ), 若  $z_1 z_2$  为实数, 则  $x =$  ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $1$  (D)  $2$
3. “ $a = b$ ”是“直线  $y = x + 2$  与圆  $(x - a)^2 + (y + b)^2 = 2$  相切”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
4.  $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{12}$  的展开式中, 含  $x$  的正整数次幂的项共有 ( )  
(A) 4 项 (B) 3 项 (C) 2 项 (D) 1 项
5. 设函数  $f(x) = \sin 3x + |\sin 3x|$ , 则  $f(x)$  为 ( )  
(A) 周期函数, 最小正周期为  $\frac{\pi}{3}$  (B) 周期函数, 最小正周期为  $\frac{2\pi}{3}$   
(C) 周期函数, 数小正周期为  $2\pi$  (D) 非周期函数
6. 已知向量  $\vec{a} = (1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, -4)$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{5}$ , 若  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$ , 则  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  的夹角为 ( )  
(A)  $30^\circ$  (B)  $60^\circ$  (C)  $120^\circ$  (D)  $150^\circ$
7. 已知函数  $y = xf'(x)$  的图象如图所示 (其中  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数), 下面四个图象中,  $y = f(x)$  的图象大致是 ( )



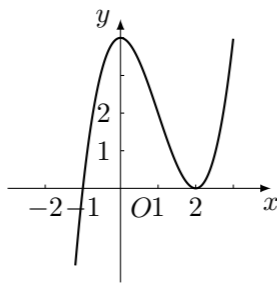
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 若  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(2-2x)} =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $1$  (C)  $-\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{2}$
9. 矩形  $ABCD$  中,  $AB = 4$ ,  $BC = 3$ , 沿  $AC$  将矩形  $ABCD$  折成一个直二面角  $B - AC - D$ , 则四面体  $ABCD$  的外接球的体积为 ( )  
(A)  $\frac{125}{12}\pi$  (B)  $\frac{125}{9}\pi$  (C)  $\frac{125}{6}\pi$  (D)  $\frac{125}{3}\pi$
10. 已知实数  $a, b$  满足等式  $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b$ , 下列五个关系式:  
①  $0 < b < a$ ; ②  $a < b < 0$ ; ③  $0 < a < b$ ; ④  $b < a < 0$ ; ⑤  $a = b$ .  
其中不可能成立的关系式有 ( )

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

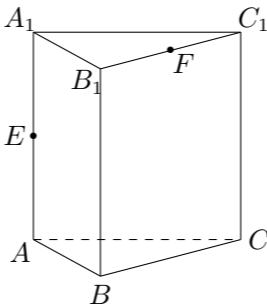
11. 在  $\triangle OAB$  中,  $O$  为坐标原点,  $A(1, \cos \theta)$ ,  $B(\sin \theta, 1)$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 则  $\triangle OAB$  的面积达到最大值时,  $\theta =$  ( )  
(A)  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
12. 将  $1, 2, \dots, 9$  这 9 个数平均分成三组, 则每组的三个数都成等差数列的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{56}$  (B)  $\frac{1}{70}$  (C)  $\frac{1}{336}$  (D)  $\frac{1}{420}$

## 二、填空题

13. 若函数  $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$  是奇函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

14. 设实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + 2y - 4 > 0 \\ 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $\frac{y}{x}$  的最大值是\_\_\_\_\_.

15. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = BC = \sqrt{2}$ ,  $BB_1 = 2$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $E, F$  分别为  $AA_1, C_1B_1$  的中点, 沿棱柱的表面从  $E$  到  $F$  两点的最短路径的长度为\_\_\_\_\_.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:

- ① 设  $A, B$  为两个定点,  $k$  为非零常数,  $|\vec{PA}| - |\vec{PB}| = k$ , 则动点  $P$  的轨迹为双曲线;
  - ② 设定圆  $C$  上一定点  $A$  作圆的动点弦  $AB$ ,  $O$  为坐标原点, 若  $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ , 则动点  $P$  的轨迹为椭圆;
  - ③ 方程  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;
  - ④ 双曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$  与椭圆  $\frac{x^2}{35} + y^2 = 1$  有相同的焦点.
- 其中真命题的序号为\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

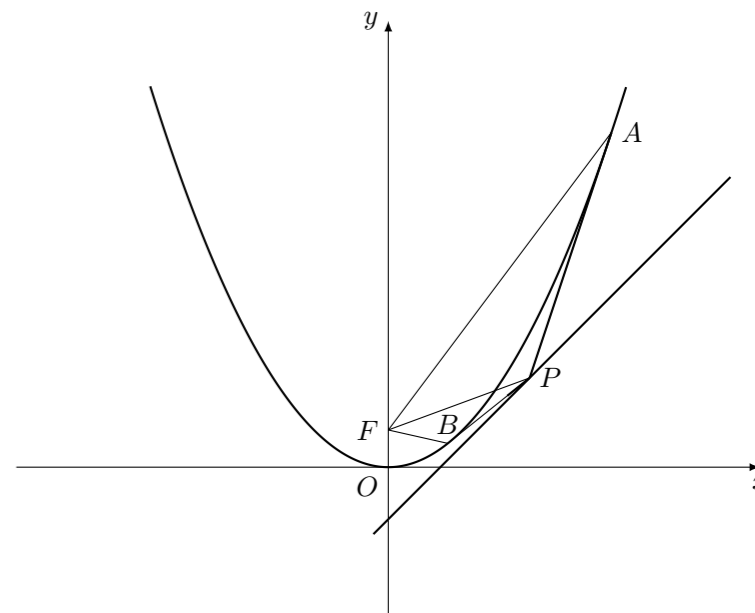
17. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2}{ax+b}$  ( $a, b$  为常数), 且方程  $f(x) - x + 12 = 0$  有两个实根为  $x_1 = 3, x_2 = 4$ .  
(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;  
(2) 设  $k > 1$ , 解关于  $x$  的不等式:  $f(x) < \frac{(k+1)x - k}{2 - x}$ .

18. 已知向量  $\vec{a} = \left(2 \cos \frac{x}{2}, \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ ,  $\vec{b} = \left(\sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ , 令  $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ . 是否存在实数  $x \in [0, \pi]$ , 使  $f(x) + f'(x) = 0$  (其中  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数)? 若存在, 则求出  $x$  的值; 若不存在, 则证明之.

19.  $A$ 、 $B$  两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时  $A$  赢得  $B$  一张卡片, 否则  $B$  赢得  $A$  一张卡片. 规定掷硬币的次数达 9 次时, 或在此前某人已赢得所有卡片时游戏终止. 设  $\xi$  表示游戏终止时掷硬币的次数.
- (1) 求  $\xi$  的取值范围;
  - (2) 求  $\xi$  的数学期望  $E\xi$ .

21. 已知数列  $\{a_n\}$  的各项都是正数, 且满足:  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(4 - a_n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .
- (1) 证明:  $a_n < a_{n+1} < 2$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ;
  - (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式  $a_n$ .

22. 如图, 设抛物线  $C: y = x^2$  的焦点为  $F$ , 动点  $P$  在直线  $l: x - y - 2 = 0$  上运动, 过  $P$  作抛物线  $C$  的两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 且与抛物线  $C$  分别相切于  $A$ 、 $B$  两点.
- (1) 求  $\triangle APB$  的重心  $G$  的轨迹方程;
  - (2) 证明  $\angle PFA = \angle PFB$ .



20. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AD = AA_1 = 1$ ,  $AB = 2$ , 点  $E$  在棱  $AD$  上移动.
- (1) 证明:  $D_1E \perp A_1D$ ;
  - (2) 当  $E$  为  $AB$  的中点时, 求点  $E$  到面  $ACD_1$  的距离;
  - (3)  $AE$  等于何值时, 二面角  $D_1 - EC - D$  的大小为  $\frac{\pi}{4}$ .

