2008 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $U=\{2,3,4,5,6,7\}$, $M=\{3,4,5,7\}$, $N=\{2,4,5,6\}$, 则 ( )

(A) $M\cap N=\{4,6\}$ (B) $M\cup N=U$

(C) $(\complement_U N)\cup M=U$ (D) $(\complement_U M)\cap N=N$

2. “$|x-1|<2$”是“$x<3$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 已知变量 x, y 满足 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ y\leqslant 2 \\ x-y\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $x+y$ 的最小值是 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

4. 函数 $f(x)=x^2$ $(x\leqslant 0)$ 的反函数是 ( )

(A) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ (B) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$

(C) $f^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$ $(x\leqslant 0)$ (D) $f^{-1}(x)=-x^2$ $(x\leqslant 0)$

5. 已知直线 m, n 和平面 α, β 满足 $m\perp n$, $m\perp\alpha$, $\alpha\perp\beta$, 则 ( )

(A) $n\perp\beta$ (B) $n\parallel\beta$, 或 $n\subset\beta$

(C) $n\perp\alpha$ (D) $n\parallel\alpha$, 或 $n\subset\alpha$

6. 下面不等式成立的是 ( )

(A) $\log_3 2<\log_2 3<\log_2 5$ (B) $\log_3 2<\log_2 5<\log_2 3$

(C) $\log_2 3<\log_3 2<\log_2 5$ (D) $\log_2 3<\log_2 5<\log_3 2$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $AC=2$, $BC=\sqrt{10}$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ( )

(A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) $-\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

8. 某市拟从 4 个重点项目和 6 个一般项目中各选 2 个项目作为本年度启动的项目, 则重点项目 A 和一般项目 B 至少有一个被选中的不同选法种数是 ( )

(A) 15 (B) 45 (C) 60 (D) 75

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一个球面上, 且 $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, $AA_1=1$, 则顶点 A、B 间的球面距离是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (C) $\sqrt{2}\pi$ (D) $2\sqrt{2}\pi$

10. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右支上存在一点, 它到右焦点及左准线的距离相等, 则双曲线离心率的取值范围是 ( )

(A) $(1,\sqrt{2}]$ (B) $[\sqrt{2},+\infty)$ (C) $(1,\sqrt{2}+1]$ (D) $[\sqrt{2}+1,+\infty)$

二、填空题

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$, $\boldsymbol{b}=(-2,0)$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$______.

12. 从某地区 15000 位老人中随机抽取 500 人, 其生活能否自理的情况如下表所示:

人数 性别 生活能否自理	男	女
能	178	278
不能	23	21

则该地区生活不能自理的老人中男性比女性约多______人.

13. 记 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第 m 项的系数为 b_m, 若 $b_3=2b_4$, 则 $n=$______.

14. 将圆 $x^2+y^2=1$ 沿 x 轴正向平移 1 个单位后所得到圆 C, 则圆 C 的方程是______; 若过点 $(3,0)$ 的直线 l 和圆 C 相切, 则直线 l 的斜率为______.

15. 设 $[x]$ 表示不超 x 的最大整数 (如 $[2]=2$, $\left[\dfrac{5}{4}\right]=1$). 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$, 定义 $C_n^x=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$, $x\in[1,+\infty)$, 则 $C_8^{\frac{3}{2}}=$______; 当 $x\in[2,3)$ 时, 函数 C_8^x 的值域是______.

三、解答题

16. 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试, 面试合格者可正式签约. 甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定: 两人面试都合格就一同签约, 否则两人都不签约. 设每人面试合格的概率都是 $\dfrac{1}{2}$, 且面试是否合格互不影响. 求:

(1) 至少有 1 人面试合格的概率;

(2) 没有人签约的概率.

17. 已知函数 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}+\sin x$.

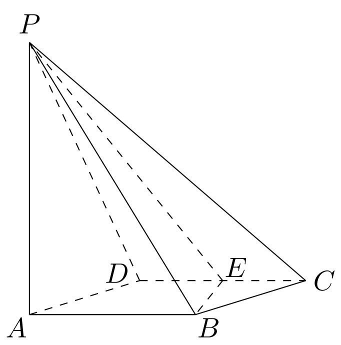
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 且 $f(x_0)=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$ 时, 求 $f\left(x_0+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD=60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $PA=\sqrt{3}$.

(1) 证明: 平面 $PBE\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $A-BE-P$ 的大小.



19. 已知椭圆的中心在原点，一个焦点是 $F(2,0)$，且两条准线间的距离为 λ $(\lambda>4)$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 若存在过点 $A(1,0)$ 的直线 l，使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上，求 λ 的取值范围.

20. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=\left(1+\cos^2\dfrac{n\pi}{2}\right)a_n+\sin^2\dfrac{n\pi}{2}$, $n=1$, 2, 3, $\cdots$.

(1) 求 a_3, a_4, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $S_k=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}$, $T_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$, $W_k=\dfrac{2S_k}{2+T_k}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$，求使 $W_k>1$ 的所有 k 的值，并说明理由.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^3-\dfrac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点.

(1) 证明: $-27<c<5$;

(2) 若存在实数 c，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减，求 a 的取值范围.