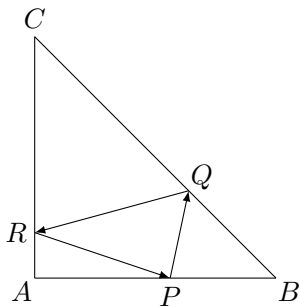


理科数学

一、选择题

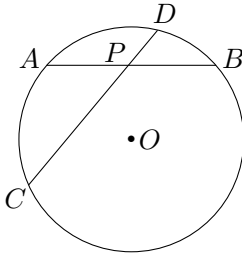
- 复数 $z = i \cdot (1 + i)$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 某学校有男、女学生各 500 名. 为了解男女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异, 拟从全体学生中抽取 100 名学生进行调查, 则宜采用的抽样方法是 ()
(A) 抽签法 (B) 随机数法 (C) 系统抽样法 (D) 分层抽样法
- 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ()
(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$
- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是 ()
(A) $-\frac{5}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$
- 函数 $f(x) = 2 \ln x$ 的图象与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 的图象的交点个数为 ()
(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0
- 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是单位向量, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 若向量 \mathbf{c} 满足 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的取值范围是 ()
(A) $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ (B) $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 2]$
(C) $[1, \sqrt{2} + 1]$ (D) $[1, \sqrt{2} + 2]$
- 已知棱长为 1 的正方体的俯视图是一个面积为 1 的正方形, 则该正方体的正视图的面积不可能等于 ()
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
- 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = AC = 4$, 点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点, 光线从点 P 出发, 经 BC, CA 反射后又回到点 P (如图). 若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心, 则 AP 等于 ()



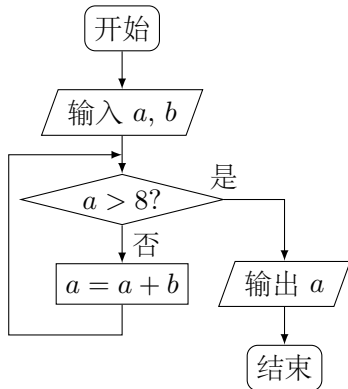
- (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

二、填空题

- 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l: \begin{cases} x = t \\ y = t - a \end{cases}$ (t 为参数) 过椭圆 $C: \begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 2 \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 的右顶点, 则常数 a 的值为_____.
- 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a + 2b + 3c = 6$, 则 $a^2 + 4b^2 + 9c^2$ 的最小值为_____.
- 如图, 在半径为 $\sqrt{7}$ 的 $\odot O$ 中, 弦 AB, CD 相交于点 P , $PA = PB = 2$, $PD = 1$, 则圆心 O 到弦 CD 的距离为_____.



- 若 $\int_0^T x^2 dx = 9$, 则常数 T 的值为_____.
- 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a = 1, b = 2$, 则输出的 a 的值为_____.



- 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点, P 是 C 上一点, 若 $|PF_1| + |PF_2| = 6a$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30° , 则 C 的离心率为_____.
- 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n = (-1)^n a_n - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbf{N}^*$, 则 (1) $a_3 =$ _____; (2) $S_1 + S_2 + \dots + S_{100} =$ _____.
- 设函数 $f(x) = a^x + b^x - c^x$, 其中 $c > a > 0, c > b > 0$.
(1) 记集合 $M = \{(a, b, c) | a, b, c \text{ 不能构成一个三角形的三条边长, 且 } a = b\}$, 则 $(a, b, c) \in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为_____;
(2) 若 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长, 则下列结论正确的是_____. (写出所有正确结论的序号)
① $\forall x \in (-\infty, 1), f(x) > 0$;
② $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 a^x, b^x, c^x 不能构成一个三角形的三条边长;
③ 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则 $\exists x \in (1, 2)$, 使 $f(x) = 0$.

三、解答题

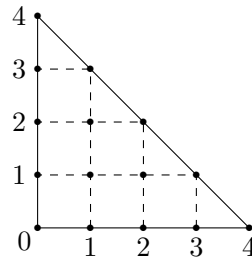
- 已知函数 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), g(x) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.
(1) 若 α 是第一象限角, 且 $f(\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{5}$, 求 $g(\alpha)$ 的值;
(2) 求使 $f(x) \geq g(x)$ 成立的 x 的取值集合.

- 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

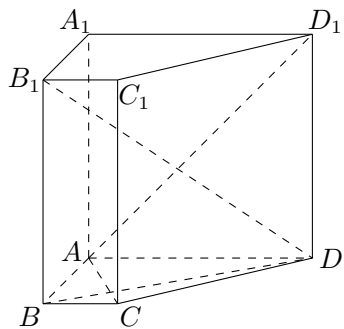
X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

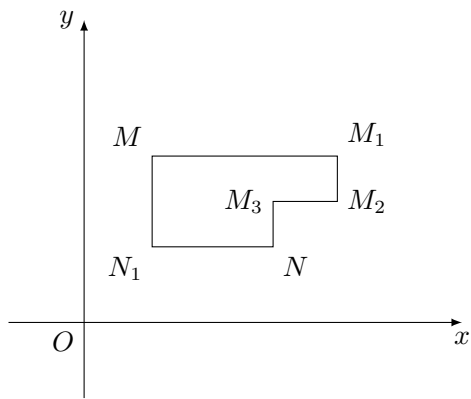
- 从三角形地块的内部和边界上分别随机选取一株作物, 求它们恰好“相近”的概率;
- 从所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量的分布列与数学期望.



19. 如图, 在直棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BD$, $BC = 1$, $AD = AA_1 = 3$.
- (1) 证明: $AC \perp B_1D$;
- (2) 求直线 B_1C_1 与平面 ACD_1 所成角的正弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将从点 M 出发沿纵、横方向到达点 N 的任一路径称为 M 到 N 的一条“ L 路径”. 如图所示的路径 $MM_1M_2M_3N$ 与路径 MN_1N 都是 M 到 N 的“ L 路径”. 某地有三个新建的居民区, 分别位于平面 xOy 内三点 $A(3, 20)$, $B(-10, 0)$, $C(14, 0)$ 处. 现计划在 x 轴上方区域 (包含 x 轴) 内的某一点 P 处修建一个文化中心.
- (1) 写出点 P 到居民区 A 的“ L 路径”长度最小值的表达式 (不要求证明);
- (2) 若以原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内部是保护区, “ L 路径”不能进入保护区, 请确定点 P 的位置, 使其到三个居民区的“ L 路径”长度之和最小.



21. 过抛物线 $E: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点 F 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条不同的直线 l_1, l_2 , 且 $k_1 + k_2 = 2$, l_1 与 E 相交于点 A, B , l_2 与 E 相交于点 C, D . 以 AB, CD 为直径的圆 M, N (M, N 为圆心) 的公共弦所在的直线记为 l .
- (1) 若 $k_1 > 0, k_2 > 0$, 证明: $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} < 2p^2$;
- (2) 若点 M 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$, 求抛物线 E 的方程.

22. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \left| \frac{x-a}{x+2a} \right|$.
- (1) 记 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 上的最大值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式;
- (2) 是否存在 a , 使函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, 4)$ 内的图象上存在两点, 在该两点处的切线相互垂直? 若存在, 求 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.