2012 年普通高等学校招生考试（江西卷）

理科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{0,2\}$, 则集合 $\{z\mid z=x+y, x\in A, y\in B\}$ 中的元素的个数为 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

2. 下列函数中, 与函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 定义域相同的函数为 ( )

(A) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ (B) $y=\dfrac{\ln x}{x}$ (C) $y=x\mathrm{e}^x$ (D) $y=\dfrac{\sin x}{x}$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1\\ \lg x, & x>1\end{cases}$, 则 $f(f(10))=$ ( )

(A) $\lg 101$ (B) 2 (C) 1 (D) 0

4. 若 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$, 则 $\sin 2\theta=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

5. 下列命题中, 假命题为 ( )

(A) 存在四边相等的四边形不是正方形

(B) z_1, $z_2\in\mathbf{C}$, z_1+z_2 为实数的充分必要条件是 z_1, z_2 互为共轭复数

(C) 若 x, $y\in\mathbf{R}$, 且 $x+y>2$, 则 x, y 至少有一个大于 1

(D) 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$, $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n$ 都是偶数

6. 观察下列各式: $a+b=1$, $a^2+b^2=3$, $a^3+b^3=4$, $a^4+b^4=7$, $a^5+b^5=11$, $\cdots$, 则 $a^{10}+b^{10}=$ ( )

(A) 28 (B) 76 (C) 123 (D) 199

7. 在直角三角形 ABC 中, 点 D 是斜边 AB 的中点, 点 P 为线段 CD 的中点, 则 $\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{|PC|^2}=$ ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10

8. 某农户计划种植黄瓜和韭菜, 种植面积不超过 50 亩, 投入资金不超过 54 万元, 假设种植黄瓜和韭菜的产量、成本和售价如下表

	年产量/亩	年种植成本/亩	每吨售价
黄瓜	4 吨	1.2 万元	0.55 万元
韭菜	6 吨	0.9 万元	0.3 万元

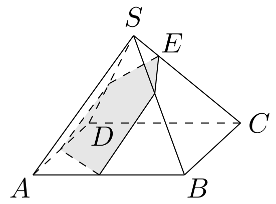
为使一年的种植总利润 (总利润 = 总销售收入 − 总种植成本) 最大, 那么黄瓜和韭菜的种植面积 (单位: 亩) 分别为 ( )

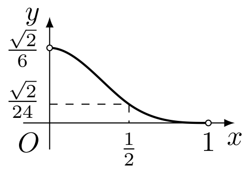
(A) 50, 0 (B) 30, 20 (C) 20, 30 (D) 0, 50

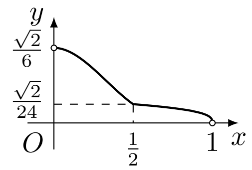
9. 样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的平均数为 $\overline{x}$, 样本 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 的平均数为 $\overline{y}$ $(\overline{x}\neq\overline{y})$. 若样本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$ 的平均数 $\overline{z}=\alpha\overline{x}+(1-\alpha)\overline{y}$, 其中 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$, 则 n, m 的大小关系为 ( )

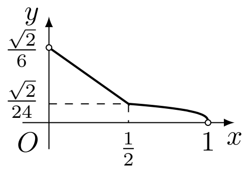
(A) $n<m$ (B) $n>m$ (C) $n=m$ (D) 不能确定

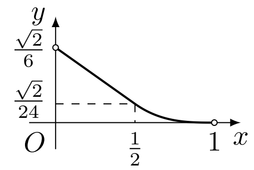
10. 如图, 已知正四棱锥 $S-ABCD$ 所有棱长都为 1, 点 E 是侧棱 SC 上一动点, 过点 E 垂直于 SC 的截面将正四棱锥分成上、下两部分. 记 $SE=x$ $(0<x<1)$, 截面下面部分的体积为 $V(x)$, 则函数 $y=V(x)$ 的图象大致为 ( )



(A)


(B)


(C)


(D)


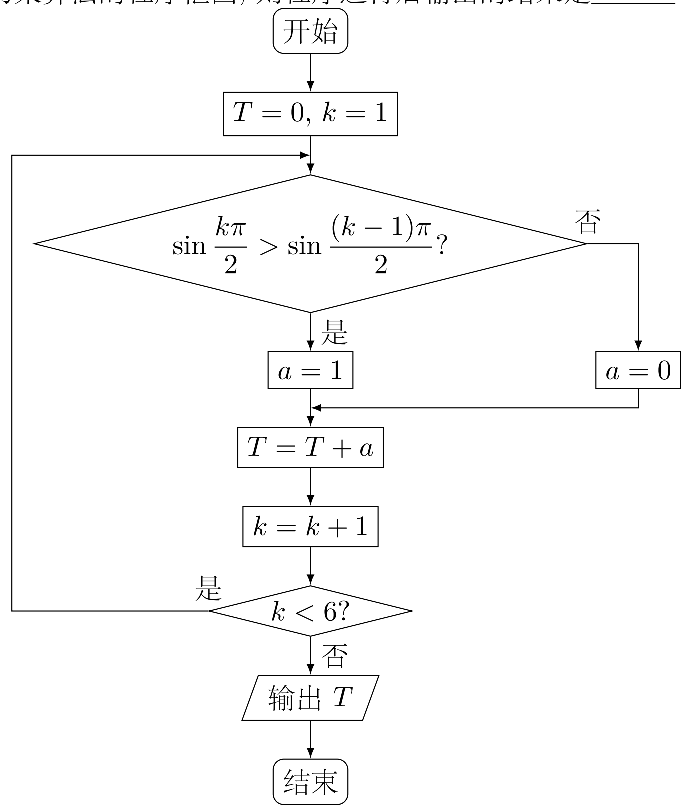
二、填空题

11. 计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)\,\mathrm{d}x=$______.

12. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都是等差数列, 若 $a_1+b_1=7$, $a_3+b_3=21$, 则 $a_5+b_5=$______.

13. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右顶点分别是 A, B, 左、右焦点分别是 F_1, F_2. 若 $|AF_1|$, $|F_1F_2|$, $|F_1B|$ 成等比数列, 则此椭圆的离心率为______.

14. 如图为某算法的程序框图, 则程序运行后输出的结果是______.



15. 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为______.

16. 在实数范围内, 不等式 $|2x-1|+|2x+1|\leqslant 6$ 的解集为______.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+kn$ (其中 $k\in\mathbf{N}_+$), 且 S_n 的最大值为 8.

(1) 确定常数 k, 并求 a_n;

(2) 求数列 $\left\{\dfrac{9-2a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 已知 $A=\dfrac{\pi}{4}$, $b\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+C\right)-c\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+B\right)=a$.

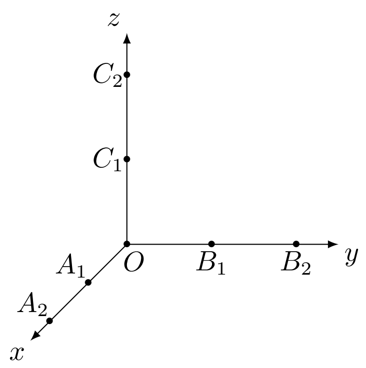
(1) 求证: $B-C=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 若 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图, 从 $A_1(1,0,0)$, $A_2(2,0,0)$, $B_1(0,1,0)$, $B_2(0,2,0)$, $C_1(0,0,1)$, $C_2(0,0,2)$ 这 6 个点中随机选取 3 个点, 将这 3 个点及原点 O 两两相连构成一个“立体”, 记该“立体”的体积为随机变量 V (如果选取的 3 个点与原点在同一个平面内, 此时“立体”的体积 $V=0$).

(1) 求 $V=0$ 的概率;

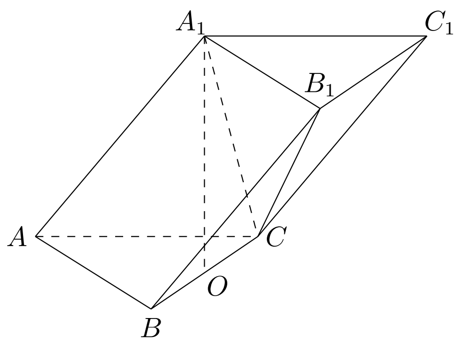
(2) 求 V 的分布列及数学期望 EV.



20. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB=AC=AA_1=\sqrt{5}$, $BC=4$, 点 A_1 在底面 ABC 的射影是线段 BC 的中点 O.

(1) 证明: 在侧棱 AA_1 上存在一点 E, 使得 $OE\perp$ 平面 BB_1C_1C, 并求出 AE 的长;

(2) 求平面 A_1B_1C 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值.



21. 已知三点 $O(0,0)$, $A(-2,1)$, $B(2,1)$, 曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$ 满足 $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+2$.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 动点 $Q(x_0,y_0)$ $(-2<x_0<2)$ 在曲线 C 上, 曲线 C 在点 Q 处的切线为 l. 问: 是否存在定点 $P(0,t)$ $(t<0)$, 使得 l 与 PA, PB 都相交, 交点分别为 D, E, 且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. 若函数 $h(x)$ 满足

① $h(0)=1$, $h(1)=0$;

② 对任意 $a\in[0,1]$, 有 $h(h(a))=a$;

③ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

则称 $h(x)$ 为补函数. 已知函数 $h(x)=\left(\dfrac{1-x^p}{1+\lambda x^p}\right)^{\frac{1}{p}}$ $(\lambda>-1,\ p>0)$.

(1) 判断函数 $h(x)$ 是否为补函数, 并证明你的结论;

(2) 若存在 $m\in[0,1]$, 使 $h(m)=m$, 称 m 是函数 $h(x)$ 的中介元. 记 $p=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 时 $h(x)$ 的中介元为 x_n, 且 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 若对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$, 都有 $S_n<\dfrac{1}{2}$, 求 λ 的取值范围;

(3) 当 $\lambda=0$, $x\in(0,1)$ 时, 函数 $y=h(x)$ 的图象总在直线 $y=1-x$ 的上方, 求 p 的取值范围.