

2013 年普通高等学校招生考试 (全国卷 I)

# 文科数学

一、选择题

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x \mid x = n^2, n \in A\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{1, 4\}$     (B)  $\{2, 3\}$     (C)  $\{9, 16\}$     (D)  $\{1, 2\}$

2.  $\frac{1+2i}{(1-i)^2} =$  ( )  
 (A)  $-1 - \frac{1}{2}i$     (B)  $-1 + \frac{1}{2}i$     (C)  $1 + \frac{1}{2}i$     (D)  $1 - \frac{1}{2}i$

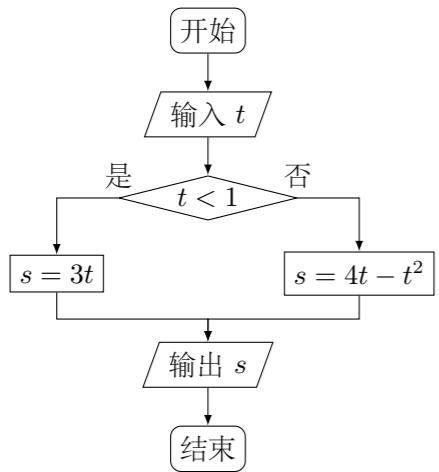
3. 从 1, 2, 3, 4 中任取 2 个不同的数, 则取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率是 ( )  
 (A)  $\frac{1}{2}$     (B)  $\frac{1}{3}$     (C)  $\frac{1}{4}$     (D)  $\frac{1}{6}$

4. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则  $C$  的渐近线方程为  
 (A)  $y = \pm \frac{1}{4}x$     (B)  $y = \pm \frac{1}{3}x$     (C)  $y = \pm \frac{1}{2}x$     (D)  $y = \pm x$

5. 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, 2^x < 3^x$ ; 命题  $q: \exists x \in \mathbf{R}, x^3 = 1 - x^2$ , 则下列命题中为真命题的是 ( )  
 (A)  $p \wedge q$     (B)  $\neg p \wedge q$     (C)  $p \wedge \neg q$     (D)  $\neg p \wedge \neg q$

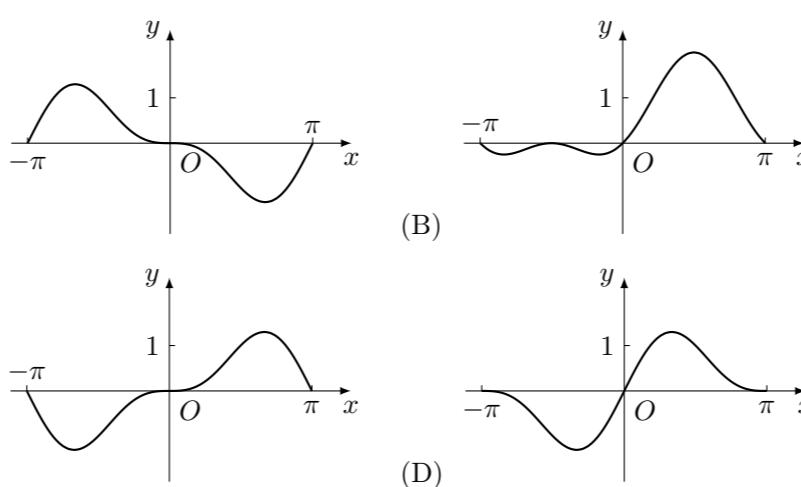
6. 设首项为 1, 公比为  $\frac{2}{3}$  的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则 ( )  
 (A)  $S_n = 2a_n - 1$     (B)  $S_n = 3a_n - 2$     (C)  $S_n = 4 - 3a_n$     (D)  $S_n = 3 - 2a_n$

7. 执行下面的程序框图, 若输入的  $t \in [-1, 3]$ , 则输出的  $s$  属于 ( )



- (A)  $[-3, 4]$     (B)  $[-5, 2]$     (C)  $[-4, 3]$     (D)  $[-2, 5]$   
 8.  $O$  为坐标原点,  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 4\sqrt{2}x$  的焦点,  $P$  为  $C$  上一点, 若  $|PF| = 4\sqrt{2}$ , 则  $\triangle POF$  的面积为 ( )  
 (A) 2    (B)  $2\sqrt{2}$     (C)  $2\sqrt{3}$     (D) 4

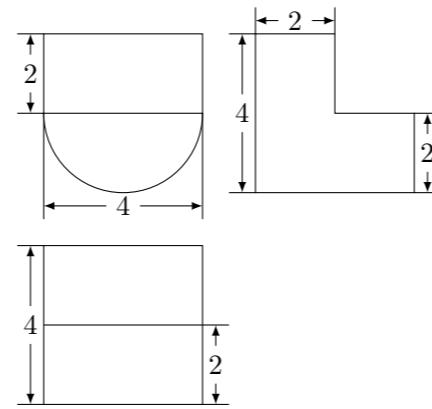
9. 函数  $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$  在  $[-\pi, \pi]$  的图象大致为 ( )



10. 已知锐角  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $23\cos^2 A + \cos 2A = 0$ ,  $a = 7, c = 6$ , 则  $b =$  ( )

- (A) 10    (B) 9    (C) 8    (D) 5

11. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $16 + 8\pi$     (B)  $8 + 8\pi$     (C)  $16 + 16\pi$     (D)  $8 + 16\pi$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ , 若  $|f(x)| \geq ax$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $(-\infty, 0]$     (B)  $(-\infty, 1]$     (C)  $[-2, 1]$     (D)  $[-2, 0]$

二、填空题

13. 已知两个单位向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ ,  $\mathbf{c} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$ , 若  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ , 则  $t =$  \_\_\_\_\_.

14. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x - y$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

15. 已知  $H$  是球  $O$  的直径  $AB$  上一点,  $AH : HB = 1 : 2$ ,  $AB \perp$  平面  $\alpha$ ,  $H$  为垂足, 平面  $\alpha$  截球  $O$  所得截面的面积为  $\pi$ , 则球  $O$  的表面积为 \_\_\_\_\_.

16. 设当  $x = \theta$  时, 函数  $f(x) = \sin x - 2\cos x$  取得最大值, 则  $\cos \theta =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题

17. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_3 = 0, S_5 = -5$ .

- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 求数列  $\left\{ \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和.

18. 为了比较两种治疗失眠症的药 (分别称为  $A$  药,  $B$  药) 的疗效, 随机地选取 20 位患者服用  $A$  药, 20 位患者服用  $B$  药, 这 40 位患者在服用一段时间后, 记录他们日平均增加的睡眠时间 (单位: h). 试验的观测结果如下:

服用  $A$  药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

0.6 1.2 2.7 1.5 2.8 1.8 2.2 2.3 3.2 3.5  
2.5 2.6 1.2 2.7 1.5 2.9 3.0 3.1 2.3 2.4

服用  $B$  药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间:

3.2 1.7 1.9 0.8 0.9 2.4 1.2 2.6 1.3 1.4  
1.6 0.5 1.8 0.6 2.1 1.1 2.5 1.2 2.7 0.5

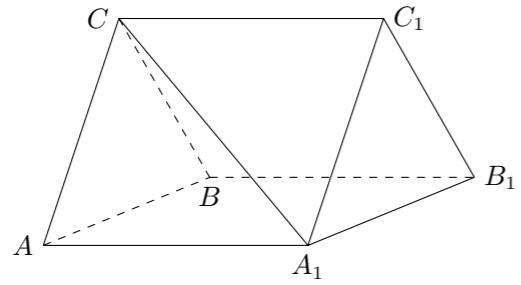
- (1) 分别计算两组数据的平均数, 从计算结果看, 哪种药的疗效更好?  
 (2) 根据两组数据完成下面茎叶图, 从茎叶图看, 哪种药的疗效更好?

$A$ 药	$B$ 药
0.	
1.	
2.	
3.	

19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $CA = CB$ ,  $AB = AA_1$ ,  $\angle BAA_1 = 60^\circ$ .

(1) 证明:  $AB \perp A_1C$ ;

(2) 若  $AB = CB = 2$ ,  $A_1C = \sqrt{6}$ , 求三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积.



21. 已知圆  $M: (x+1)^2 + y^2 = 1$ , 圆  $N: (x-1)^2 + y^2 = 9$ , 动圆  $P$  与圆  $M$  外切并与圆  $N$  内切, 圆心  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求  $C$  的方程;

(2)  $l$  是与圆  $P$ , 圆  $M$  都相切的一条直线,  $l$  与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 当圆  $P$  的半径最长时, 求  $|AB|$ .

20. 已知函数  $f(x) = e^x(ax+b) - x^2 - 4x$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = 4x + 4$ .

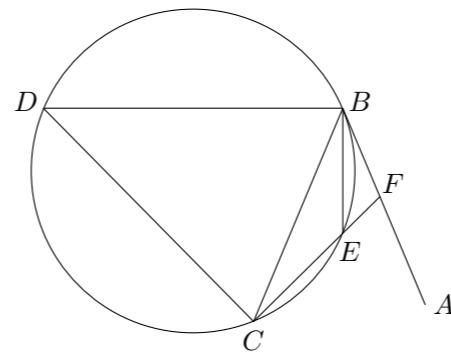
(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 讨论  $f(x)$  的单调性, 并求  $f(x)$  的极大值.

22. 如图, 直线  $AB$  为圆的切线, 切点为  $B$ , 点  $C$  在圆上,  $\angle ABC$  的角平分线  $BE$  交圆于点  $E$ ,  $DB$  垂直  $BE$  交圆于  $D$ .

(1) 证明:  $DB = DC$ ;

(2) 设圆的半径为 1,  $BC = \sqrt{3}$ , 延长  $CE$  交  $AB$  于点  $F$ , 求  $\triangle BCF$  外接圆的半径.



23. 已知曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 4 + 5 \cos t \\ y = 5 + 5 \sin t \end{cases}$  ( $t$  为参数), 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \sin \theta$ .

(1) 把  $C_1$  的参数方程化为极坐标方程;

(2) 求  $C_1$  与  $C_2$  交点的极坐标 ( $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ).

24. 已知函数  $f(x) = |2x-1| + |2x+a|$ ,  $g(x) = x+3$ .

(1) 当  $a = -2$  时, 求不等式  $f(x) < g(x)$  的解集;

(2) 设  $a > -1$ , 且当  $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right]$  时,  $f(x) \leq g(x)$ , 求  $a$  的取值范围.