

2009 年普通高等学校招生考试 (天津卷)

文科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{5i}{2-i} =$ ()

- (A) $1+2i$ (B) $-1-2i$ (C) $1-2i$ (D) $-1+2i$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x-y \geq -1 \\ 2x-y \leq 3 \end{cases}$, 则目标函数 $z=2x+3y$ 的最小值为 ()

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 23

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x=1$ ”是“ $x^3=x$ ”的 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

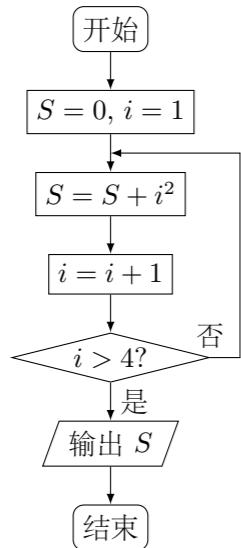
4. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的虚轴长为 2, 焦距为 $2\sqrt{3}$, 则双曲线的渐近线方程为 ()

- (A) $y = \pm\sqrt{2}x$ (B) $y = \pm 2x$ (C) $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y = \pm\frac{1}{2}x$

5. 设 $a = \log_{\frac{1}{3}} 2, b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$, 则 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $b < c < a$ (D) $b < a < c$

6. 阅读如图的程序框图, 则输出的 $S =$ ()



- (A) 14 (B) 20 (C) 30 (D) 55

7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0$) 的最小正周期为 π . 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $|\varphi|$ 个单位长度, 所得图象关于 y 轴对称, 则 φ 的一个值是 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \geq 0 \\ x + 6, & x < 0 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > f(1)$ 的解集是 ()

- (A) $(-3, 1) \cup (3, +\infty)$ (B) $(-3, 1) \cup (2, +\infty)$
 (C) $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ (D) $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$

9. 设 $x, y \in \mathbf{R}, a > 1, b > 1$. 若 $a^x = b^y = 3, a+b = 2\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值为 ()

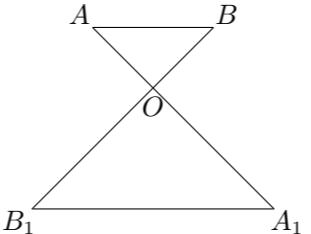
- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$

10. 设函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$. 下面的不等式在 \mathbf{R} 内恒成立的是 ()

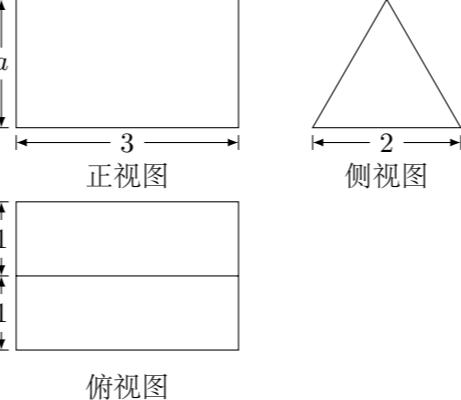
- (A) $f(x) > 0$ (B) $f(x) < 0$ (C) $f(x) > x$ (D) $f(x) < x$

二、填空题

11. 如图, AA_1 与 BB_1 相交于点 O , $AB \parallel A_1B_1$ 且 $AB = \frac{1}{2}A_1B_1$, 若 $\triangle AOB$ 得外接圆直径为 1, 则 $\triangle A_1OB_1$ 的外接圆直径为_____.



12. 如图是一个几何体的三视图, 若它的体积是 $3\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.



13. 设全集 $U = A \cup B = \{x \in \mathbf{N}^* \mid \lg x < 1\}$, 若 $A \cap (\complement_U B) = \{m \mid m = 2n+1, n=0, 1, 2, 3, 4\}$, 则集合 $B =$ _____.

14. 若圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2ay - 6 = 0$ ($a > 0$) 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____.

15. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, 平面上一点 M 满足 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} =$ _____.

16. 若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2 < ax^2$ 的解集中的整数恰好有 3 个, 则实数 a 的取值范围是 _____.

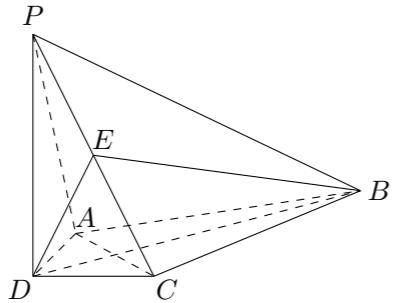
三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{5}, AC = 3, \sin C = 2 \sin A$.

- (1) 求 AB 的值;
 (2) 求 $\sin(2A - \frac{\pi}{4})$ 的值.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, 且 DB 平分 $\angle ADC$, E 为 PC 的中点, $AD = CD = 1$, $DB = 2\sqrt{2}$.

- (1) 证明 $PA \parallel$ 平面 BDE ;
- (2) 证明 $AC \perp$ 平面 PBD ;
- (3) 求直线 BC 与平面 PBD 所成的角的正切值.



21. 设函数 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m^2 - 1)x$ ($x \in \mathbf{R}$), 其中 $m > 0$.

- (1) 当 $m = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率;
- (2) 求函数的单调区间与极值;
- (3) 已知函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点 $0, x_1, x_2$, 且 $x_1 < x_2$. 若对任意的 $x \in [x_1, x_2]$, $f(x) > f(1)$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

22. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$ ($c > 0$), 过点 $E\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ 的直线与椭圆相交于 A, B 两点, 且 $F_1A \parallel F_2B$, $|F_1A| = 2|F_2B|$.

- (1) 求椭圆的离心率;
- (2) 求直线 AB 的斜率;
- (3) 设点 C 与点 A 关于坐标原点对称, 直线 F_2B 上有一点 $H(m, n)$ ($m \neq 0$) 在 $\triangle AF_1C$ 的外接圆上, 求 $\frac{n}{m}$ 的值.

20. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 不为 0, 设 $S_n = a_1 + a_2q + \cdots + a_nq^{n-1}$, $T_n = a_1 - a_2q + \cdots + (-1)^{n-1}a_nq^{n-1}$, $q \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$.

- (1) 若 $q = 1$, $a_1 = 1$, $S_3 = 15$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $a_1 = d$, S_1, S_2, S_3 成等比数列, 求 q 的值.
- (3) 若 $q \neq \pm 1$, 证明 $(1-q)S_{2n} - (1+q)T_{2n} = \frac{2dq(1-q^{2n})}{1-q^2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.