

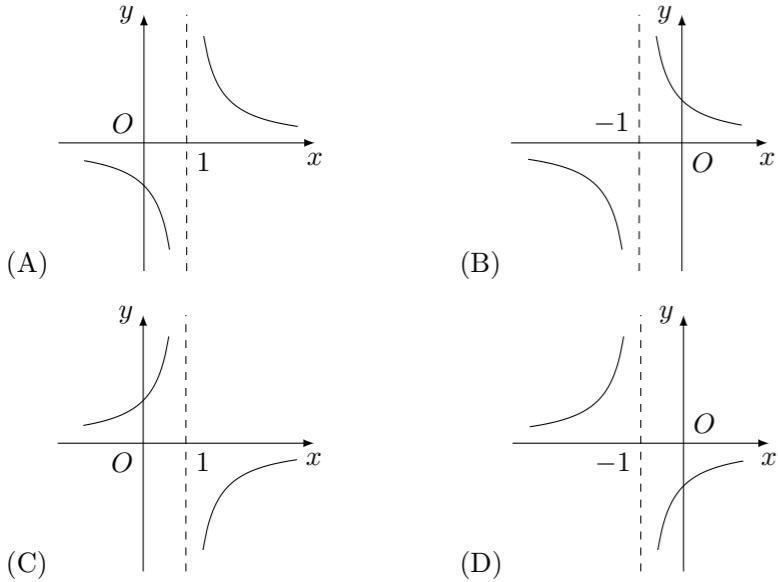
2005 年普通高等学校招生考试 (山东卷)

理科数学

一、选择题

1. $\frac{1-i}{(1+i)^2} + \frac{1+i}{(1-i)^2} =$ ()
 (A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1

2. 函数 $y = \frac{1-x}{x}$ ($x \neq 0$) 的反函数图象大致是 ()



3. 已知函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$, 则下列判断正确的是 ()

- (A) 此函数的最小周期为 2π , 其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{12}, 0)$
 (B) 此函数的最小周期为 π , 其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{12}, 0)$
 (C) 此函数的最小周期为 2π , 其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$
 (D) 此函数的最小周期为 π , 其图象的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{6}, 0)$

4. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减的是 ()

- (A) $f(x) = \sin x$ (B) $f(x) = -|x+1|$
 (C) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ (D) $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

5. 如果 $\left(3x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 ()

- (A) 7 (B) -7 (C) 21 (D) -21

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0 \\ e^{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(1) + f(a) = 2$, 则 a 的所有可能值为 ()
 (A) 1 (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $1, \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} , 且 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}, \overrightarrow{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 ()
 (A) A、B、D (B) A、B、C (C) B、C、D (D) A、C、D
8. 设地球的半径为 R , 若甲地位于北纬 45° 东经 120° , 乙地位于南纬 75° 东经 120° , 则甲、乙两地的球面距离为 ()
 (A) $\sqrt{3}R$ (B) $\frac{\pi}{6}R$ (C) $\frac{5\pi}{6}R$ (D) $\frac{2\pi}{3}R$
9. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ()
 (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{11}{12}$
10. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subsetneq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
11. $0 < a < 1$, 下列不等式一定成立的是 ()
 (A) $|\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)| > 2$
 (B) $|\log_{(1+a)}(1-a)| < |\log_{(1-a)}(1+a)|$
 (C) $|\log_{(1+a)}(1-a) + \log_{(1-a)}(1+a)| < |\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)|$
 (D) $|\log_{(1+a)}(1-a) - \log_{(1-a)}(1+a)| < |\log_{(1+a)}(1-a)| - |\log_{(1-a)}(1+a)|$
12. 设直线 $l: 2x+y+2=0$ 关于原点对称的直线为 l' , 若 l' 与椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的交点为 A, B , 点 P 为椭圆上的动点, 则使 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 的点 P 的个数为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2 + 2C_n^{n-2}}{(n+1)^2} =$ _____.

14. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 右准线 l 与两条渐近线交于 P, Q 两点, 如果 $\triangle PQF$ 是直角三角形, 则双曲线的离心率 $e =$ _____.

15. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leqslant 5 \\ 3x+2y \leqslant 12 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$, 则使得目标函数 $z = 6x+5y$ 的最大的点 (x, y) 是 _____.

16. 已知 m, n 是不同的直线, α, β 是不重合的平面, 给出下列命题:

- ① 若 $\alpha // \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m // n$;
 ② 若 $m, n \subset \alpha, m // \beta, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$;
 ③ 若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, m // n$, 则 $\alpha // \beta$;
 ④ m, n 是两条异面直线, 若 $m // \alpha, m // \beta, n // \alpha, n // \beta$, 则 $\alpha // \beta$.

上面的命题中, 真命题的序号是 _____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知向量 $\vec{m} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 和 $\vec{n} = (\sqrt{2} - \sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in (\pi, 2\pi)$, 且 $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$, 求 $\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ 的值.

19. 已知 $x = 1$ 是函数 $f(x) = mx^3 - 3(m+1)x^2 + nx + 1$ 的一个极值点, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, $m < 0$.
- (1) 求 m 与 n 的关系式;
 - (2) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$, 求 m 的取值范围.
21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 5$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} = S_n + n + 5$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列;
 - (2) 令 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 求函数 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的导数 $f'(1)$ 并比较 $2f'(1)$ 与 $23n^2 - 13n$ 的大小.
22. 已知动圆过定点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 且与直线 $x = -\frac{p}{2}$ 相切, 其中 $p > 0$.
- (1) 求动圆圆心 C 的轨迹的方程;
 - (2) 设 A, B 是轨迹 C 上异于原点 O 的两个不同点, 直线 OA 和 OB 的倾斜角分别为 α 和 β , 当 α, β 变化且 $\alpha + \beta$ 为定值 θ ($0 < \theta < \pi$) 时, 证明直线 AB 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

20. 如图, 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB = 2$, $AA_1 = 1$, 直线 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 30° , AE 垂直 BD 于 E , F 为 A_1B_1 的中点.
- (1) 求异面直线 AE 与 BF 所成的角;
 - (2) 求平面 BDF 与平面 AA_1B 所成的二面角 (锐角) 的大小;
 - (3) 求点 A 到平面 BDF 的距离.

