2007 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$, 则 S_5 等于 （ ）

(A) 1 (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $\dfrac{1}{30}$

3. 已知集合 $A=\{x|x<a\}$, $B=\{x|1<x<2\}$, 且 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 （ ）

(A) $a\leqslant 1$ (B) $a<1$ (C) $a\geqslant 2$ (D) $a>2$

4. 对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ, 下列命题中真命题的是 （ ）

(A) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (B) 若 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

(C) 若 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ (D) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$

5. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π, 则该函数的图象 （ ）

(A) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称 (B) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

(C) 关于点 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 对称 (D) 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

6. 以双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的右焦点为圆心, 且与其渐近线相切的圆的方程是 （ ）

(A) $x^2+y^2-10x+9=0$ (B) $x^2+y^2-10x+16=0$

(C) $x^2+y^2+10x+16=0$ (D) $x^2+y^2+10x+9=0$

7. 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数, 则满足 $f\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(0,1)$

(C) $(-1,0)\cup(0,1)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. 已知 m、n 为两条不同的直线, α、β 为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 （ ）

(A) $m\subset\alpha, n\subset\alpha, m/\!/\beta, n/\!/\beta\Rightarrow\alpha/\!/\beta$

(B) $\alpha/\!/\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta\Rightarrow m/\!/n$

(C) $m\perp\alpha, m\perp n\Rightarrow n/\!/\alpha$

(D) $n/\!/m, n\subset\alpha\Rightarrow m\perp\alpha$

9. 把 $1+(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ 展开成关于 x 的多项式, 其各项系数和为 a_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-1}{a_n+1}$ 等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

10. 顶点在同一球面上的正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=1$, $AA'=\sqrt{2}$, 则 A、C 两点间的球面距离为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

11. 已知对任意实数 x, 有 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$, 且 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $g'(x)>0$, 则 $x<0$ 时, （ ）

(A) $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ (B) $f'(x)>0$, $g'(x)<0$

(C) $f'(x)<0$, $g'(x)>0$ (D) $f'(x)<0$, $g'(x)<0$

12. 如图, 三行三列的方阵中有 9 个数 a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$, 从中任取三个数, 则至少有两个数位于同行或同列的概率是 （ ）

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(A) $\dfrac{3}{7}$ (B) $\dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{1}{14}$ (D) $\dfrac{13}{14}$

二、填空题

13. 已知实数 x、y 满足 $\begin{cases} x+y\geqslant 2 \\ x-y\leqslant 2 \\ 0\leqslant y\leqslant 3 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的取值范围是______.

14. 已知正方形 $ABCD$, 则以 A、B 为焦点, 且过 C、D 两点的椭圆的离心率为______.

15. 两封信随机投入 A、B、C 三个空邮箱, 则 A 邮箱的信件数 ξ 的数学期望 $E\xi=$______.

16. 中学数学中存在许多关系, 比如"相等关系"、"平行关系"等等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系"$\sim$"满足以下三个条件:

① 自反性: 对于任意 $a\in A$, 都有 $a\sim a$;

② 对称性: 对于 $a,b\in A$, 若 $a\sim b$, 则有 $b\sim a$;

③ 传递性: 对于 $a,b,c\in A$, 若 $a\sim b$, $b\sim c$, 则有 $a\sim c$.

则称"$\sim$"是集合 A 的一个等价关系. 例如: "数的相等"是等价关系, 而"直线的平行"不是等价关系 (自反性不成立). 请你再列出三个等价关系: ______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A=\dfrac{1}{4}$, $\tan B=\dfrac{3}{5}$.

(1) 求角 C 的大小;

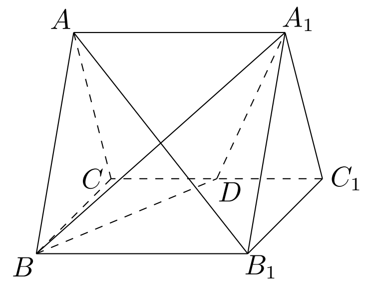
(2) 若 AB 边的长为 $\sqrt{17}$, 求 BC 边的长.

18. 如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2, D 为 CC_1 中点.

(1) 求证: $AB_1\perp$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 $A-AD_1-B$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 A_1BD 的距离.



19. 某分公司经销某种品牌产品, 每件产品的成本为 3 元, 并且每件产品需向总公司交 a 元 $(3\leqslant a\leqslant 5)$ 的管理费, 预计当每件产品的售价为 x 元 $(9\leqslant x\leqslant 11)$ 时, 一年的销售量为 $(12-x)^2$ 万件.

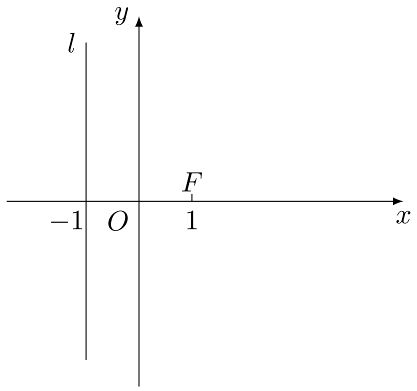
(1) 求分公司一年的利润 L (万元) 与每件产品的售价 x 的函数关系式;

(2) 当每件产品的售价为多少元时, 分公司一年的利润 L 最大? 并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

20. 如图, 已知点 $F(1,0)$, 直线 l: $x=-1$, P 为平面上的动点, 过 P 作直线 l 的垂线, 垂足为点 Q, 且 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QF}=\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线交轨迹 C 于 A、B 两点, 交直线 l 于点 M, 已知 $\overrightarrow{MA}=\lambda_1\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{MB}=\lambda_2\overrightarrow{BF}$, 求 $\lambda_1+\lambda_2$ 的值.



21. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_1=1+\sqrt{2}$, $S_3=9+3\sqrt{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 与前 n 项和为 S_n;

(2) 设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 中任意不同的三项都不可能成为等比数列.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-kx$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $k=\mathrm{e}$, 试确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $k>0$, 且对于任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(|x|)>0$ 恒成立, 试确定实数 k 的取值范围;

(3) 设函数 $F(x)=f(x)+f(-x)$, 求证: $F(1)F(2)\cdots F(n)>(\mathrm{e}^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.