

数学试卷

一、填空题

1. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 2}{4n + 3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 方程 $\log_3(2x - 1) = 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 函数 $f(x) = 3x + 5$, $x \in [0, 1]$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 不等式 $\frac{1 - 2x}{x + 1} > 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知圆 $C: (x + 5)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 和直线 $l: 3x + y + 5 = 0$. 若圆 C 与直线 l 没有公共点, 则 r 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = x - x^4$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.7. 电视台连续播放 6 个广告, 其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告, 要求首尾必须播放公益广告, 则共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种不同的播放方式. (结果用数值表示)8. 正四棱锥底面边长为 4, 侧棱长为 3, 则其体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = 8$, $AC = 5$, 三角形面积为 12, 则 $\cos 2C = \underline{\hspace{2cm}}$.10. 若向量 \vec{a} 、 \vec{b} 的夹角为 150° , $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, 则 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.11. 已知直线 l 过点 $P(2, 1)$, 且与 x 轴、 y 轴的正半轴分别交于 A 、 B 两点, O 为坐标原点, 则三角形 OAB 面积的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.12. 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列 a_1, a_2, \dots, a_n 满足 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结论用数学式子表示)

二、选择题

13. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$

- (A) (0, 1) (B) (1, 0) (C) (0, 2) (D) (2, 0)

14. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > b$, 则下列不等式成立的是 $\underline{\hspace{2cm}}$

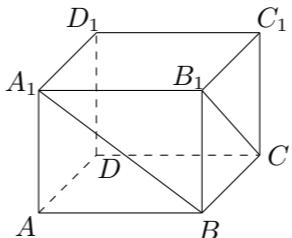
- (A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $a^2 > b^2$
 (C) $\frac{a}{c^2 + 1} > \frac{b}{c^2 + 1}$ (D) $a|c| > b|c|$

15. 若 $k \in \mathbf{R}$, 则“ $k > 3$ ”是“方程 $\frac{x^2}{k-3} - \frac{y^2}{k+3} = 1$ 表示双曲线”的 $\underline{\hspace{2cm}}$

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

16. 若集合 $A = \left\{ y \mid y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1 \right\}$, $B = \left\{ y \mid y = 2 - \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \right\}$, 则 $A \cap B$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$
- (A) $(-\infty, 1]$ (B) $[-1, 1]$ (C) \emptyset (D) $\{1\}$
19. 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- (1) 若 $\sin x = \frac{4}{5}$, 求函数 $f(x)$ 的值;
 (2) 求函数 $f(x)$ 的值域.

三、解答题

17. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DA = DC = 4$, $DD_1 = 3$, 求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)18. 已知复数 w 满足 $w - 4 = (3 - 2w)i$ (i 为虚数单位), $z = \frac{5}{w} + |w - 2|$, 求一个以 z 为根的实系数一元二次方程.

20. 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图: 航天器运行 (按顺时针方向) 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, 变轨 (即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线) 后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴、 $M\left(0, \frac{64}{7}\right)$ 为顶点的抛物线的实线部分, 降落点为 $D(8, 0)$. 观测点 $A(4, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 同时跟踪航天器.
- (1) 求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;
- (2) 试问: 当航天器在 x 轴上方时, 观测点 AB 测得离航天器的距离分别为多少时, 应向航天器发出变轨指令?
21. 设函数 $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$.
- (1) 在区间 $[-2, 6]$ 上画出函数 $f(x)$ 的图象;
 - (2) 设集合 $A = \{x | f(x) \geq 5\}$, $B = (-\infty, -2] \cup [0, 4] \cup [6, +\infty)$. 试判断集合 A 和 B 之间的关系, 并给出证明;
 - (3) 当 $k > 2$ 时, 求证: 在区间 $[-1, 5]$ 上, $y = kx + 3k$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.
22. 已知数列 a_1, a_2, \dots, a_{30} , 其中 a_1, a_2, \dots, a_{10} 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列; $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{20}$ 是公差为 d 的等差数列; $a_{20}, a_{21}, \dots, a_{30}$ 是公差为 d^2 的等差数列 ($d \neq 0$).
- (1) 若 $a_{20} = 40$, 求 d ;
 - (2) 试写出 a_{30} 关于 d 的关系式, 并求 a_{30} 的取值范围;
 - (3) 续写已知数列, 使得 $a_{30}, a_{31}, \dots, a_{40}$ 是公差为 d^3 的等差数列, ……, 依次类推, 把已知数列推广为无穷数列. 提出同 (2) 类似的问题 ((2) 应当作为特例), 并进行研究, 你能得到什么样的结论?

