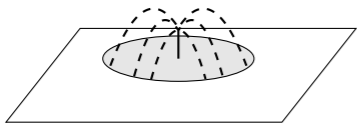


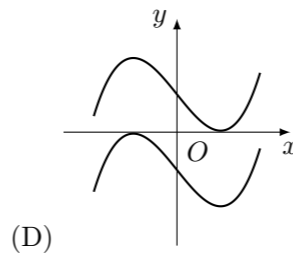
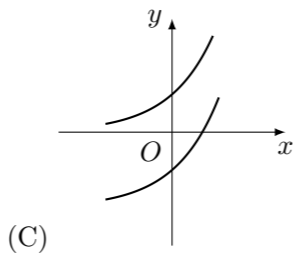
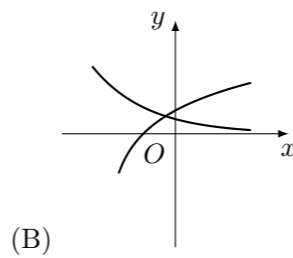
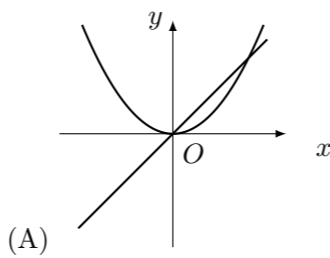
# 理科数学

## 一、选择题

- “ $x > 1$ ”是“ $x^2 > x$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 若函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  (其中  $\omega > 0$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期是  $\pi$ , 且  $f(0) = \sqrt{3}$ , 则 ( )  
 (A)  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$  (B)  $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{3}$   
 (C)  $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$  (D)  $\omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$
- 直线  $x - 2y + 1 = 0$  关于直线  $x = 1$  对称的直线方程是 ( )  
 (A)  $x + 2y - 1 = 0$  (B)  $2x + y - 1 = 0$   
 (C)  $2x + y - 3 = 0$  (D)  $x + 2y - 3 = 0$
- 要在边长为 16 米的正方形草坪上安装喷水龙头, 使整个草坪都能喷洒到水. 假设每个喷水龙头的喷洒范围都是半径为 6 米的圆面, 则需安装这种喷水龙头的个数最少是 ( )



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
- 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(2, \sigma^2)$ ,  $P(\xi \leq 4) = 0.84$ , 则  $P(\xi \leq 0) =$  ( )  
 (A) 0.16 (B) 0.32 (C) 0.68 (D) 0.84
  - 若  $P$  是两条异面直线  $l, m$  外的任意一点, 则 ( )  
 (A) 过点  $P$  有且仅有一条直线与  $l, m$  都平行  
 (B) 过点  $P$  有且仅有一条直线与  $l, m$  都垂直  
 (C) 过点  $P$  有且仅有一条直线与  $l, m$  都相交  
 (D) 过点  $P$  有且仅有一条直线与  $l, m$  都异面
  - 若非零向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$ , 则 ( )  
 (A)  $|2\mathbf{a}| > |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  (B)  $|2\mathbf{a}| < |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$   
 (C)  $|2\mathbf{b}| > |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$  (D)  $|2\mathbf{b}| < |\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$
  - 设  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数, 将  $y = f(x)$  和  $y = f'(x)$  的图象画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是 ( )



- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $P$  是准线上一点, 且  $PF_1 \perp PF_2$ ,  $|PF_1| \cdot |PF_2| = 4ab$ , 则双曲线的离心率是 ( )  
 (A)  $\sqrt{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C) 2 (D) 3
- 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \geq 1 \\ x, & |x| < 1 \end{cases}$ , 若  $f(g(x))$  的值域是  $[0, +\infty)$ , 则函数  $g(x)$  的值域是 ( )  
 (A)  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  (B)  $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$   
 (C)  $[0, +\infty)$  (D)  $[1, +\infty)$

## 二、填空题

- 已知复数  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_1 \cdot z_2 = 1 + i$ , 则复数  $z_2 =$ \_\_\_\_\_.
- 已知  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ , 且  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ , 则  $\cos 2\theta$  的值是\_\_\_\_\_.
- 不等式  $|2x - 1| - x < 1$  的解集是\_\_\_\_\_.
- 某书店有 11 种杂志, 2 元 1 本的 8 种, 1 元 1 本的 3 种. 小张用 10 元钱买杂志 (每种至多买一本, 10 元钱刚好用完), 则不同买法的种数是\_\_\_\_\_ (用数字作答)
- 随机变量  $\xi$  的分布列如下:

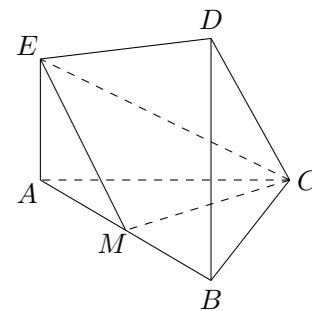
|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $\xi$ | -1  | 0   | 1   |
| $P$   | $a$ | $b$ | $c$ |

其中  $a, b, c$  成等差数列. 若  $E\xi = \frac{1}{3}$ . 则  $D\xi$  的值是\_\_\_\_\_.
- 已知点  $O$  在二面角  $\alpha - AB - \beta$  的棱上, 点  $P$  在  $\alpha$  内, 且  $\angle POB = 45^\circ$ . 若对于  $\beta$  内异于  $O$  的任意一点  $Q$ , 都有  $\angle POQ \geq 45^\circ$ , 则二面角  $\alpha - AB - \beta$  的大小是\_\_\_\_\_.
- 设  $m$  为实数, 若  $\left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x - 2y + 5 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ mx + y \geq 0 \end{cases} \right\} \subseteq \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ , 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

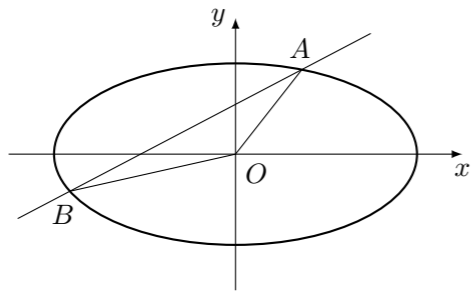
## 三、解答题

- 已知  $\triangle ABC$  的周长为  $\sqrt{2} + 1$ , 且  $\sin A + \sin B = \sqrt{2} \sin C$ .  
 (1) 求边  $AB$  的长;  
 (2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{1}{6} \sin C$ , 求角  $C$  的度数.

- 在如图所示的几何体中,  $EA \perp$  平面  $ABC$ ,  $DB \perp$  平面  $ABC$ ,  $AC \perp BC$ , 且  $AC = BC = BD = 2AE$ ,  $M$  是  $AB$  的中点.  
 (1) 求证:  $CM \perp EM$ ;  
 (2) 求  $CM$  与平面  $CDE$  所成的角.



20. 如图, 直线  $y = kx + b$  与椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  交于  $A, B$  两点, 记  $\triangle AOB$  的面积为  $S$ .
- (1) 求在  $k = 0, 0 < b < 1$  的条件下,  $S$  的最大值;
- (2) 当  $|AB| = 2, S = 1$  时, 求直线  $AB$  的方程.



21. 已知数列  $\{a_n\}$  中的相邻两项  $a_{2k-1}, a_{2k}$  是关于  $x$  的方程  $x^2 - (3k + 2^k)x + 3k \cdot 2^k = 0$  的两个根, 且  $a_{2k-1} \leq a_{2k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).
- (1) 求  $a_1, a_3, a_5, a_7$ ;
- (2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ ;
- (3) 记  $f(n) = \frac{1}{2} \left( \frac{|\sin n|}{\sin n} + 3 \right)$ ,  $T_n = \frac{(-1)^{f(2)}}{a_1 a_2} + \frac{(-1)^{f(3)}}{a_3 a_4} + \frac{(-1)^{f(4)}}{a_5 a_6} + \dots + \frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1} a_{2n}}$ , 求证:  $\frac{1}{6} \leq T_n \leq \frac{5}{24}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

22. 设  $f(x) = \frac{x^3}{3}$ , 对任意实数  $t$ , 记  $g_t(x) = t^{\frac{2}{3}}x - \frac{2}{3}t$ .
- (1) 求函数  $y = f(x) - g_t(x)$  的单调区间;
- (2) 求证:
- ① 当  $x > 0$  时,  $f(x) \geq g_t(x)$  对任意实数  $t$  成立;
- ② 有且仅有一个正实数  $x_0$ , 使得  $g_t(x_0) \geq g_t(x)$  对任意实数  $t$  成立.