2004 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Q=\{x\in\mathbf{R}|2\leqslant x\leqslant 6\}$, 那么下列结论正确的是 ( )

(A) $P\cap Q=P$　(B) $P\cap Q\supseteq Q$　(C) $P\cup Q=Q$　(D) $P\cap Q\supsetneqq P$

2. 不等式 $\dfrac{x-1}{x}\geqslant 2$ 的解集为 ( )

(A) $[-1,0)$　(B) $[-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-1]$　(D) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

3. 对任意实数 a, b, c 在下列命题中, 真命题是 ( )

(A) "$ac>bc$"是"$a>b$"的必要条件　(B) "$ac=bc$"是"$a=b$"的必要条件

(C) "$ac>bc$"是"$a>b$"的充分条件　(D) "$ac=bc$"是"$a=b$"的充分条件

4. 若平面向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a}=(1,-2)$ 的夹角是 $180°$, 且 $\left|\vec{b}\right|=3\sqrt{5}$, 则 $\vec{b}=$

(A) $(-3,6)$　(B) $(3,-6)$　(C) $(6,-3)$　(D) $(-6,3)$

5. 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x-2y=0$, F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点, 若 $|PF_1|=3$, 则 $|PF_2|=$ ( )

(A) 1 或 5　(B) 6　(C) 7　(D) 9

6. 若函数 $f(x)=\log_a x\ (0<a<1)$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值是最小值的 3 倍, 则 $a=$ ( )

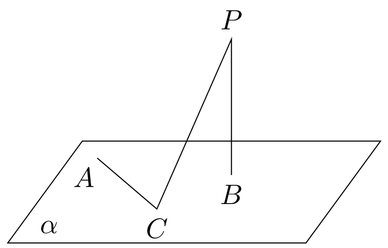
(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

7. 若过定点 $M(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线与圆 $x^2+4x+y^2-5=0$ 在第一象限内的部分有交点, 则 k 的取值范围是 ( )

(A) $0<k<\sqrt{5}$　(B) $-\sqrt{5}<k<0$

(C) $0<k<\sqrt{13}$　(D) $0<k<5$

8. 如图, 定点 A 和 B 都在平面 α 内, 定点 $P\notin\alpha$, $PB\perp\alpha$, C 是 α 内异于 A 和 B 的动点, 且 $PC\perp AC$. 那么, 动点 C 在平面 α 内的轨迹是 ( )



(A) 一条线段, 但要去掉两个点　(B) 一个圆, 但要去掉两个点

(C) 一个椭圆, 但要去掉两个点　(D) 半圆, 但要去掉两个点

9. 函数 $y=3^{x^2-1}\ (-1\leqslant x<0)$ 的反函数是 ( )

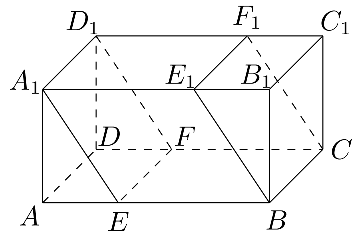
(A) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$　(B) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$

(C) $y=\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$　(D) $y=-\sqrt{1+\log_3 x}\ \left(\dfrac{1}{3}<x\leqslant 1\right)$

10. 函数 $y=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)\ (x\in[0,\pi])$ 为增函数的区间是 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$　(B) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$　(C) $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$　(D) $\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right]$

11. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=6$, $AD=4$, $AA_1=3$. 分别过 BC、A_1D_1 的两个平行截面将长方体分成三部分, 其体积分别记为 $V_1=V_{AEA_1-DFD_1}$, $V_2=V_{EBE_1A_1-FCF_1D_1}$, $V_3=V_{B_1E_1B-C_1F_1C}$. 若 $V_1:V_2:V_3=1:4:1$, 则截面 A_1EFD_1 的面积为 ( )



(A) $4\sqrt{10}$　(B) $8\sqrt{3}$　(C) $4\sqrt{13}$　(D) 16

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是偶函数又是周期函数, 若 $f(x)$ 的最小正周期是 π, 且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)=\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ 的值为 ( )

(A) $-\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 某工厂生产 A、B、C 三种不同型号的产品, 产品数量之比依次为 $2:3:5$, 现用分层抽样方法抽出一个容量为 n 的样本, 样本中 A 种型号产品有 16 件. 那么此样本的容量 $n=$______.

14. 已知向量 $\vec{a}=(1,1)$, $\vec{b}=(2,-3)$, 若 $k\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直, 则实数 k 等于______.

15. 如果过两点 $A(a,0)$ 和 $B(0,a)$ 的直线与抛物线 $y=x^2-2x-3$ 没有交点, 那么实数 a 的取值范围是______.

16. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中能被 5 整除的三位数共有______个. (用数字作答)

三、解答题

17. 已知 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan\alpha$ 的值;

(2) 求 $\dfrac{\sin 2a-\cos^2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ 的值.

18. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛.

(1) 求所选 3 人都是男生的概率;

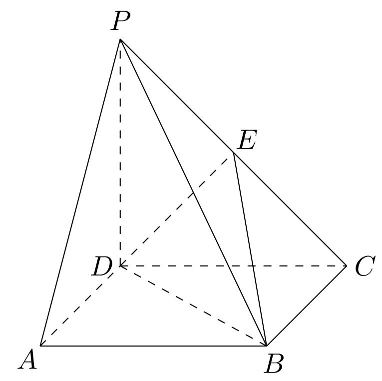
(2) 求所选 3 人中恰有 1 名女生的概率;

(3) 求所选 3 人中至少有 1 名女生的概率.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC$, E 是 PC 的中点.

(1) 证明: $PA\parallel$ 平面 EDB;

(2) 求 EB 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值.



20. 设 $\{a_n\}$ 是一个公差为 d $(d \neq 0)$ 的等差数列, 它的前 10 项和 $S_{10} = 110$ 且 a_1, a_2, a_4 成等比数列.
(1) 证明 $a_1 = d$;
(2) 求公差 d 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 已知函数 $f(x) = ax^3 + cx + d$ $(a \neq 0)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x = 1$ 时 $f(x)$ 取得极值 -2.
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极大值;
(2) 证明对任意 x_1, $x_2 \in (-1, 1)$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| < 4$ 恒成立.

22. 椭圆的中心是原点 O, 它的短轴长为 $2\sqrt{2}$, 相应于焦点 $F(c, 0)$ $(c > 0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A, $|OF| = 2|FA|$, 过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.
(1) 求椭圆的方程及离心率;
(2) 若 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求直线 PQ 的方程.