2003 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $y=\sin x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期 $T=$______.

2. 若 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x+\alpha)=1$ 的解, 其中 $\alpha\in(0,2\pi)$, 则 $\alpha=$______.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=3$, $a_6=-2$, 则 $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=$______.

4. 在极坐标系中, 定点 $A\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 点 B 在直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=0$ 上运动, 当线段 AB 最短时, 点 B 的极坐标是______.

5. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 若侧面与底面所成二面角的大小为 $60°$, 则异面直线 PA 与 BC 所成角的大小等于______. (结果用反三角函数值表示)

6. 设集合 $A=\{x||x|<4\}$, $B=\{x|x^2-4x+3>0\}$, 则集合 $\{x|x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$______.

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$, 则 $\angle ABC=$______. (结果用反三角函数值表示)

8. 若首项为 a_1, 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和总小于这个数列的各项和, 则首项 a_1, 公比 q 的一组取值可以是 $(a_1,q)=$______.

9. 某国际科研合作项目成员由 11 个美国人、4 个法国人和 5 个中国人组成. 现从中随机选出两位作为成果发布人, 则此两人不属于同一个国家的概率为______. (结果用分数表示)

10. 方程 $x^3+\lg x=18$ 的根 $x\approx$______. (结果精确到 0.1)

11. 已知点 $A\left(0,\dfrac{2}{n}\right)$, $B\left(0,-\dfrac{2}{n}\right)$, $C\left(4+\dfrac{2}{n},0\right)$, 其中 n 为正整数. 设 S_n 表示 $\triangle ABC$ 外接圆的面积, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

12. 给出问题: F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$ 的焦点, 点 P 在双曲线上. 若点 P 到焦点 F_1 的距离等于 9, 求点 P 到焦点 F_2 的距离. 某学生的解答如下: 双曲线的实轴长为 8, 由 $||PF_1|-|PF_2||=8$, 即 $|9-|PF_2||=8$, 得 $|PF_2|=1$ 或 17. 该学生的解答是否正确? 若正确, 请将他的解题依据填在下面空格内, 若不正确, 将正确的结果填在下面空格内______.

二、选择题

13. 下列函数中, 既为偶函数又在 $(0,\pi)$ 上单调递增的是 ( )

(A) $y=\tan|x|$　　(B) $y=\cos(-x)$

(C) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(D) $y=\left|\cot\dfrac{x}{2}\right|$

14. 在下列条件中, 可判断平面 α 与 β 平行的是 ( )

(A) α、β 都垂直于平面 γ

(B) α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等

(C) l, m 是 α 内两条直线, 且 $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

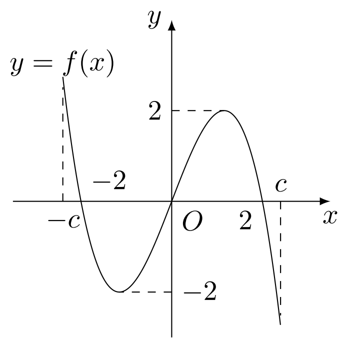
(D) l, m 是两条异面直线, 且 $l\parallel\alpha$, $m\parallel\alpha$, $l\parallel\beta$, $m\parallel\beta$

15. a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N, 那么“$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的 ( )

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

16. $f(x)$ 是定义在区间 $[-c,c]$ 上的奇函数, 其图象如图所示: 令 $g(x)=af(x)+b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是 ( )



(A) 若 $a<0$, 则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称

(B) 若 $a=-1$, $-2<b<0$, 则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根

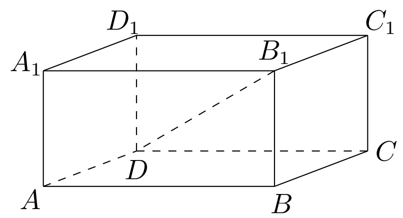
(C) 若 $a\neq0$, $b=2$, 则方程 $g(x)=0$ 有两个实根

(D) 若 $a\geqslant1$, $b<2$, 则方程 $g(x)=0$ 有三个实根

三、解答题

17. 已知复数 $z_1=\cos\theta-\mathrm{i}$, $z_2=\sin\theta+\mathrm{i}$, 求 $|z_1\cdot z_2|$ 的最大值和最小值.

18. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=4$, $AD=2$. 若 $B_1D\perp BC$, 直线 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 $30°$, 求平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ (n 为正整数) 是首项是 a_1, 公比为 q 的等比数列.

(1) 求和: $a_1\mathrm{C}_2^0-a_2\mathrm{C}_2^1+a_3\mathrm{C}_2^2$, $a_1\mathrm{C}_3^0-a_2\mathrm{C}_3^1+a_3\mathrm{C}_3^2-a_4\mathrm{C}_3^3$;

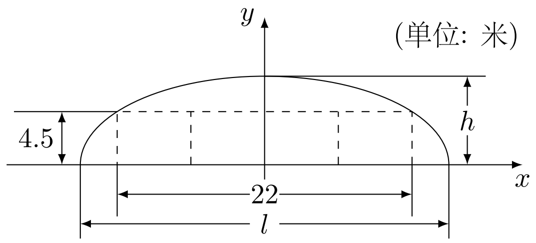
(2) 由 (1) 的结果归纳概括出关于正整数 n 的一个结论, 并加以证明.

20. 如图, 某隧道设计为双向四车道, 车道总宽 22 米, 要求通行车辆限高 4.5 米, 隧道全长 2.5 千米, 隧道的拱线近似地看成半个椭圆形状.

(1) 若最大拱高 h 为 6 米, 则隧道设计的拱宽 l 是多少?

(2) 若最大拱高 h 不小于 6 米, 则应如何设计拱高 h 和拱宽 l, 才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最最小?

注: 半个椭圆的面积公式为 $S=\dfrac{\pi}{4}lh$, 柱体体积为: 底面积乘以高. 本题结果精确到 0.1 米



21. 在以 O 为原点的直角坐标系中, 点 $A(4,-3)$ 为 $\triangle OAB$ 的直角顶点. 已知 $|AB|=2|OA|$, 且点 B 的纵坐标大于零.

(1) 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标;

(2) 求圆 $x^2-6x+y^2+2y=0$ 关于直线 OB 对称的圆的方程;

(3) 是否存在实数 a, 使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点? 若不存在, 说明理由: 若存在, 求 a 的取值范围.

22. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T, 对任意 $x\in\mathbf{R}$, 有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立.

(1) 函数 $f(x)=x$ 是否属于集合 M? 说明理由;

(2) 设函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图象与 $y=x$ 的图象有公共点, 证明: $f(x)=a^x\in M$;

(3) 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$, 求实数 k 的取值范围.