

2011 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的反函数为 $f^{-1}(x) =$ _____.
2. 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x \geqslant 1\} \cup \{x \mid x \leqslant 0\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
3. 设 m 为常数, 若点 $F(0, 5)$ 是双曲线 $\frac{y^2}{m} - \frac{x^2}{9} = 1$ 的一个焦点, 则 $m =$ _____.
4. 不等式 $\frac{x+1}{x} \leqslant 3$ 的解集为_____.
5. 在极坐标系中, 直线 $\rho(2\cos\theta + \sin\theta) = 2$ 与直线 $\rho\cos\theta = 1$ 的夹角大小为_____. (结果用反三角函数值表示)
6. 在相距 2 千米的 A, B 两点处测量目标 C , 若 $\angle CAB = 75^\circ, \angle CBA = 60^\circ$, 则 A, C 两点之间的距离为_____千米.
7. 若圆锥的侧面积为 2π , 底面面积为 π , 则该圆锥的体积为_____.
8. 函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ 的最大值为_____.
9. 马老师从课本上抄录一个随机变量 ξ 的概率分布列如下表:

X	1	2	3
$P(\xi = x)$?	!	?

- 请小牛同学计算 ξ 的数学期望, 尽管“!”处无法完全看清, 且两个“?”处字迹模糊, 但能肯定这两个“?”处的数值相同. 据此, 小牛给出了正确答案 $E\xi =$ _____.
10. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} (a, b, c, d \in \{-1, 1, 2\})$ 所有可能的值中, 最大的是_____.
11. 在正三角形 ABC 中, D 是 BC 上的点. 若 $AB = 3, BD = 1$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____.
12. 随机抽取的 9 位同学中, 至少有 2 位同学在同一月份出生的概率为_____. (默认每个月的天数相同, 结果精确到 0.001)
13. 设 $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上, 以 1 为周期的函数, 若函数 $f(x) = x + g(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的值域为 $[-2, 5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-10, 10]$ 上的值域为_____.
14. 已知点 $O(0, 0), Q_0(0, 1)$ 和点 $R_0(3, 1)$, 记 Q_0R_0 的中点为 P_1 , 取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条, 记其端点为 Q_1, R_1 , 使之满足 $(|OQ_1| - 2)(|OR_1| - 2) < 0$, 记 Q_1R_1 的中点为 P_2 , 取 Q_1P_2 和 P_2R_1 中的一条, 记其端点为 Q_2, R_2 , 使之满足 $(|OQ_2| - 2)(|OR_2| - 2) < 0$. 依次下去, 得到 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_0P_n| =$ _____.

二、选择题

15. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ()
- (A) $a^2 + b^2 > 2ab$
- (B) $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$
- (C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$
- (D) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2$

16. 下列函数中, 既是偶函数, 又是在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数是 ()
- (A) $y = \ln \frac{1}{|x|}$
- (B) $y = x^3$
- (C) $y = 2^{|x|}$
- (D) $y = \cos x$
20. 已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x + b \cdot 3^x$, 其中常数 a, b 满足 $a \cdot b \neq 0$.
- (1) 若 $a \cdot b > 0$, 判断函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $a \cdot b < 0$, 求 $f(x+1) > f(x)$ 时的 x 的取值范围.

17. 设 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 是平面上给定的 5 个不同点, 则使 $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} + \overrightarrow{MA_5} = \vec{0}$ 成立的点 M 的个数为 ()
- (A) 0
- (B) 1
- (C) 5
- (D) 10

18. 设 $\{a_n\}$ 是各项为正数的无穷数列, A_i 是边长为 a_i, a_{i+1} 的矩形面积 ($i = 1, 2, \cdots$), 则 $\{A_n\}$ 为等比数列的充要条件为 ()
- (A) $\{a_n\}$ 是等比数列
- (B) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 或 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 是等比数列
- (C) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列
- (D) $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}, \cdots$ 和 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$ 均是等比数列, 且公比相同

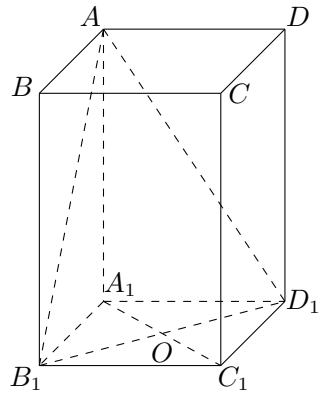
三、解答题

19. 已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2 .

21. 已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是底面边长为 1 的正四棱柱, O_1 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点.

(1) 设 AB_1 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的大小为 α , 二面角 $A - B_1D_1 - A_1$ 的大小为 β . 求证: $\tan \beta = \sqrt{2} \tan \alpha$;

(2) 若点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $\frac{4}{3}$, 求正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n + 6$, $b_n = 2n + 7$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 将集合 $\{x \mid x = a_n, n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{x \mid x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$.

(1) 求 c_1, c_2, c_3, c_4 ;

(2) 求证: 在数列 $\{a_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$;

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

23. 已知平面上的线段 l 及点 P , 在 l 上任取一点 Q , 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P, l)$.

(1) 求点 $P(1, 1)$ 到线段 $l: x - y - 3 = 0$ ($3 \leq x \leq 5$) 的距离 $d(P, l)$;

(2) 设 l 是长为 2 的线段, 求点的集合 $D = \{P \mid d(P, l) \leq 1\}$ 所表示的图形面积;

(3) 写出到两条线段 l_1, l_2 距离相等的点的集合 $\Omega = \{P \mid d(P, l_1) = d(P, l_2)\}$, 其中 $l_1 = AB, l_2 = CD$, A, B, C, D 是下列三组点中的一组. 对于下列三组点只需选做一种, 满分分别是① 2 分, ② 6 分, ③ 8 分; 若选择了多于一种情形, 则按照序号较小的解答计分.

① $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, 0)$.

② $A(1, 3), B(1, 0), C(-1, 3), D(-1, -2)$.

③ $A(0, 1), B(0, 0), C(0, 0), D(2, 0)$.