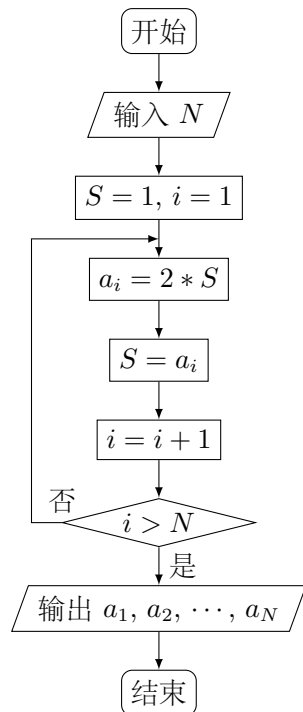


文科数学

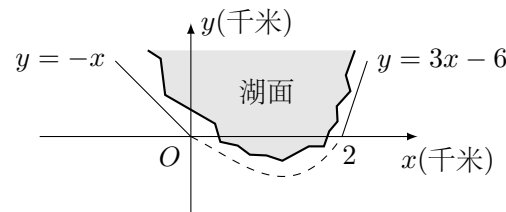
一、选择题

- 已知集合 $M = \{x | x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | x^2 < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $[0, 1]$ (B) $(0, 1)$ (C) $(0, 1]$ (D) $[0, 1)$
- 函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
- 已知复数 $z = 2 - i$, 则 $z \cdot \bar{z}$ 的值为 ()
(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) $\sqrt{3}$
- 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数 N , 输出的数列的通项公式是 ()



- (A) $a_n = 2n$ (B) $a_n = 2(n - 1)$ (C) $a_n = 2^n$ (D) $a_n = 2^{n-1}$
- 将边长为 1 的正方形以其一边所在直线为旋转轴旋转一周, 所得几何体的侧面积为 ()
(A) 4π (B) 3π (C) 2π (D) π
- 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 ()
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
- 下列函数中, 满足“ $f(x + y) = f(x)f(y)$ ”的单调递增函数是 ()
(A) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $f(x) = x^3$ (C) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (D) $f(x) = 3^x$

- 原命题为“若 $\frac{a_n + a_{n+1}}{2} < a_n, n \in \mathbf{N}_+$, 则 $\{a_n\}$ 为递减数列”, 关于逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 ()
(A) 真, 真, 真 (B) 假, 假, 真 (C) 真, 真, 假 (D) 假, 假, 假
- 某公司 10 位员工的月工资 (单位: 元) 为 x_1, x_2, \dots, x_{10} , 其均值和方差分别为 \bar{x} 和 s^2 , 若从下月起每位员工的月工资增加 100 元, 则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为 ()
(A) $\bar{x}, s^2 + 100^2$ (B) $\bar{x} + 100, s^2 + 100^2$
(C) \bar{x}, s^2 (D) $\bar{x} + 100, s^2$
- 如图, 修建一条公路需要一段环湖弯曲路段与两条直道平滑连接 (相切), 已知环湖弯曲路段为某三次函数图象的一部分, 则该函数的解析式为 ()



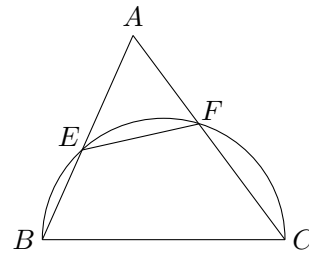
- (A) $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ (B) $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$
(C) $y = \frac{1}{4}x^3 - x$ (D) $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

二、填空题

- 抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为_____.
- 已知 $4^a = 2$, $\lg x = a$, 则 $x =$ _____.
- 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 向量 $\mathbf{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta)$, $\mathbf{b} = (1, -\cos \theta)$, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则 $\tan \theta =$ _____.
- 已知 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \geq 0$, 若 $f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbf{N}_+$, 则 $f_{2014}(x)$ 的表达式为_____.
- 三选一.

【A】设 $a, b, m, n \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + b^2 = 5, ma + nb = 5$, 则 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为_____.

【B】如图, $\triangle ABC$ 中, $BC = 6$, 以 BC 为直径的半圆分别交 AB, AC 于点 E, F , 若 $AC = 2AE$, 则 $EF =$ _____.



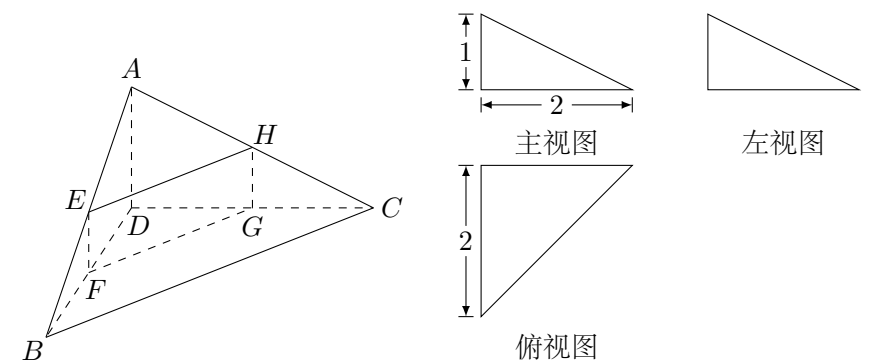
【C】在极坐标系中, 点 $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 的距离是_____.

三、解答题

- $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .
(1) 若 a, b, c 成等差数列, 证明: $\sin A + \sin C = 2 \sin(A + C)$;
(2) 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c = 2a$, 求 $\cos B$ 的值.

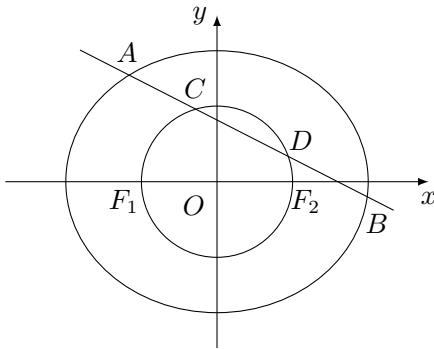
- 四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示, 过棱 AB 的中点 E 作平行于 AD, BC 的平面分别交四面体的棱 BD, DC, CA 于点 F, G, H .

- (1) 求四面体 $ABCD$ 的体积;
- (2) 证明: 四边形 $EFGH$ 是矩形.



18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$, 点 $P(x,y)$ 在 $\triangle ABC$ 三边围成的区域 (含边界) 上, 且 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbf{R}$).
- (1) 若 $m = n = \frac{2}{3}$, 求 $|\overrightarrow{OP}|$;
- (2) 用 x, y 表示 $m - n$, 并求 $m - n$ 的最大值.

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $(0, \sqrt{3})$, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 左右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 若直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点, 与以 F_1F_2 为直径的圆交于 C, D 两点, 且满足 $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$, 求直线 l 的方程.



21. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{m}{x}$, $m \in \mathbf{R}$.
- (1) 当 $m = e$ (e 为自然对数的底数) 时, 求 $f(x)$ 的极小值;
- (2) 讨论函数 $g(x) = f'(x) - \frac{x}{3}$ 零点的个数;
- (3) 若对任意 $b > a > 0$, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

19. 某保险公司利用简单随机抽样方法, 对投保车辆进行抽样, 样本车辆中每辆车的赔付结果统计如下:

| | | | | | |
|----------|-----|------|------|------|------|
| 赔付金额 (元) | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 |
| 车辆数 (辆) | 500 | 130 | 100 | 150 | 120 |

- (1) 若每辆车的投保金额均为 2800 元, 估计赔付金额大于投保金额的概率;
- (2) 在样本车辆中, 车主是新司机的占 10%, 在赔付金额为 4000 元的样本车辆中, 车主是新司机的占 20%, 估计在已投保车辆中, 新司机获赔金额为 4000 元的概率.