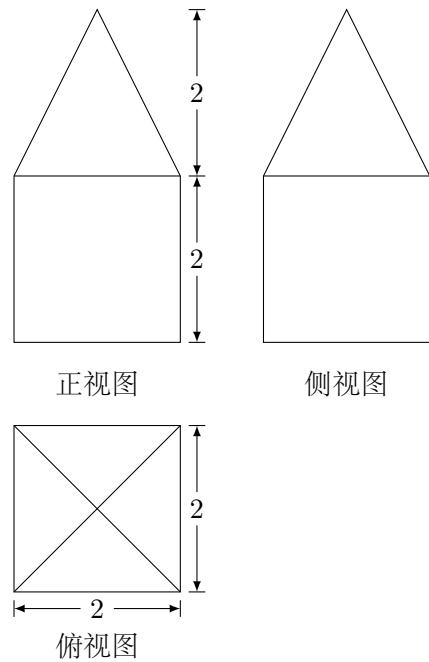


理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P = \{x \mid x^2 - 2x \geq 0\}$, $Q = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}P) \cap Q =$ ()
 (A) $[0, 1)$ (B) $(0, 2]$ (C) $(1, 2)$ (D) $[1, 2]$

2. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 ()



- (A) 8 cm^3 (B) 12 cm^3 (C) $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$ (D) $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

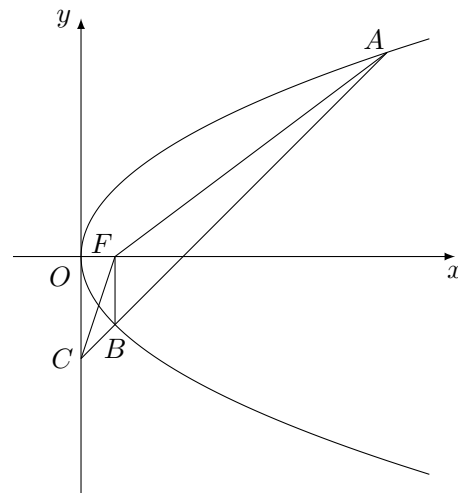
3. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 公差 d 不为零, 前 n 项和是 S_n , 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则 ()

- (A) $a_1d > 0, dS_4 > 0$ (B) $a_1d < 0, dS_4 < 0$
 (C) $a_1d > 0, dS_4 < 0$ (D) $a_1d < 0, dS_4 > 0$

4. 命题“ $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \in \mathbf{N}^*$ 且 $f(n) \leq n$ ”的否定形式是 ()

- (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \notin \mathbf{N}^*$ 且 $f(n) > n$
 (B) $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \notin \mathbf{N}^*$ 或 $f(n) > n$
 (C) $\exists n_0 \in \mathbf{N}^*, f(n_0) \notin \mathbf{N}^*$ 且 $f(n_0) > n_0$
 (D) $\exists n_0 \in \mathbf{N}^*, f(n_0) \notin \mathbf{N}^*$ 或 $f(n_0) > n_0$

5. 如图, 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 不经过焦点的直线上有三个不同的点 A, B, C , 其中点 A, B 在抛物线上, 点 C 在 y 轴上, 则 $\triangle BCF$ 与 $\triangle ACF$ 的面积之比是 ()



- (A) $\frac{|BF| - 1}{|AF| - 1}$ (B) $\frac{|BF|^2 - 1}{|AF|^2 - 1}$ (C) $\frac{|BF| + 1}{|AF| + 1}$ (D) $\frac{|BF|^2 + 1}{|AF|^2 + 1}$

6. 设 A, B 是有限集, 定义: $d(A, B) = \text{card}(A \cup B) - \text{card}(A \cap B)$, 其中 $\text{card}(A)$ 表示有限集 A 中元素的个数.

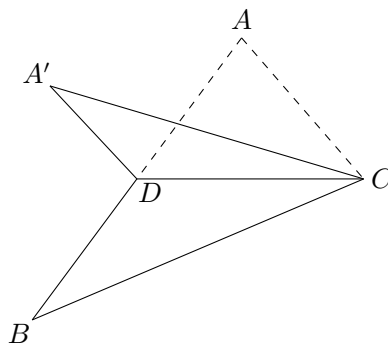
命题①: 对任意有限集 A, B , “ $A \neq B$ ”是“ $d(A, B) > 0$ ”的充分必要条件;
 命题②: 对任意有限集 A, B, C , $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. ()

- (A) 命题①和命题②都成立 (B) 命题①和命题②都不成立
 (C) 命题①成立, 命题②不成立 (D) 命题①不成立, 命题②成立

7. 存在函数 $f(x)$ 满足: 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 ()

- (A) $f(\sin 2x) = \sin x$ (B) $f(\sin 2x) = x^2 + x$
 (C) $f(x^2 + 1) = |x + 1|$ (D) $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

8. 如图, 已知 $\triangle ABC$, D 是 AB 的中点, 沿直线 CD 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle A'CD$, 所成二面角 $A' - CD - B$ 的平面角为 α , 则 ()



- (A) $\angle A'DB \leq \alpha$ (B) $\angle A'DB \geq \alpha$ (C) $\angle A'CB \leq \alpha$ (D) $\angle A'CB \geq \alpha$

二、填空题

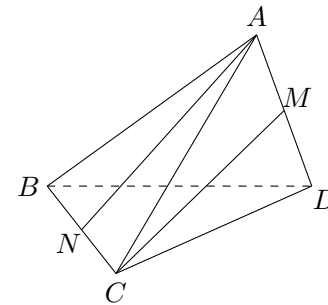
9. 双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的焦距是_____, 渐近线方程是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3, & x \geq 1 \\ \lg(x^2 + 1), & x < 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-3)) =$ _____, $f(x)$ 的最小值是_____.

11. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$ 的最小正周期是_____, 单调递减区间是_____.

12. 若 $a = \log_4 3$, 则 $2^a + 2^{-a} =$ _____.

13. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = AC = BD = CD = 3$, $AD = BC = 2$, 点 M, N 分别为 AD, BC 的中点, 则异面直线 AN, CM 所成的角的余弦值是_____.



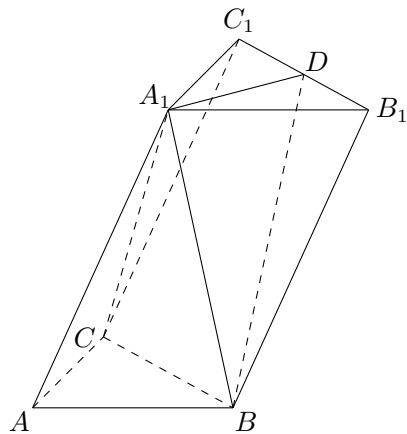
14. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|2x + y - 2| + |6 - x - 3y|$ 的最小值是_____.

15. 已知 e_1, e_2 是空间单位向量, $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$, 若空间向量 b 满足 $b \cdot e_1 = 2, b \cdot e_2 = \frac{5}{2}$, 且对于任意 $x, y \in \mathbf{R}$, $|\vec{b} - (xe_1 + ye_2)| \geq |b - (x_0e_1 + y_0e_2)| = 1$ ($x_0, y_0 \in \mathbf{R}$), 则 $x_0 =$ _____, $y_0 =$ _____, $|b| =$ _____.

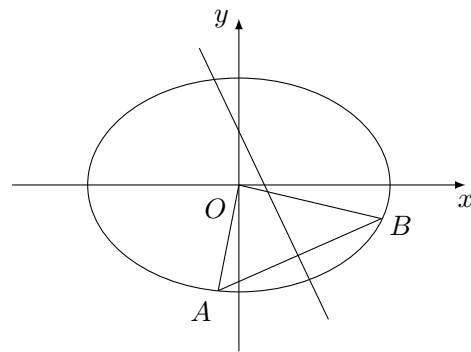
三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $A = \frac{\pi}{4}$, $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$.
 (1) 求 $\tan C$ 的值;
 (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 求 b 的值.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, $A_1A = 4$, A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 是 B_1C_1 的中点.
- (1) 证明: $A_1D \perp$ 平面 A_1BC ;
- (2) 求二面角 $A_1 - BD - B_1$ 的平面角的余弦值.



19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上两个不同的点 A, B 关于直线 $y = mx + \frac{1}{2}$ 对称.
- (1) 求实数 m 的取值范围;
- (2) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值 (O 为坐标原点).



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$ 且 $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
- (1) 证明: $1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 2$ ($n \in \mathbf{N}^*$);
- (2) 设数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $\frac{1}{2(n+2)} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2(n+1)}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 记 $M(a, b)$ 是 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.
- (1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$;
- (2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.