2014 年普通高等学校招生考试（大纲卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{10\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$, 则 z 的共轭复数为 (　)

(A) $-1+3\mathrm{i}$　(B) $-1-3\mathrm{i}$　(C) $1+3\mathrm{i}$　(D) $1-3\mathrm{i}$

2. 设集合 $M=\{x\mid x^2-3x-4<0\}$, $N=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$, 则 $M\cap N=$(　)

(A) $(0,4]$　(B) $[0,4)$　(C) $[-1,0)$　(D) $(-1,0]$

3. 设 $a=\sin 33^\circ$, $b=\cos 55^\circ$, $c=\tan 35^\circ$, 则 (　)

(A) $a>b>c$　(B) $b>c>a$　(C) $c>b>a$　(D) $c>a>b$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足: $|\boldsymbol{a}|=1$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$ (　)

(A) 2　(B) $\sqrt{2}$　(C) 1　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 (　)

(A) 60 种　(B) 70 种　(C) 75 种　(D) 150 种

6. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 (　)

(A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$　(C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　(D) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 曲线 $y=x\mathrm{e}^{x-1}$ 在点 $(1,1)$ 处切线的斜率等于 (　)

(A) $2\mathrm{e}$　(B) e　(C) 2　(D) 1

8. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 (　)

(A) $\dfrac{81\pi}{4}$　(B) 16π　(C) 9π　(D) $\dfrac{27\pi}{4}$

9. 已知双曲线 C 的离心率为 2, 焦点为 F_1、F_2, 点 A 在 C 上, 若 $|F_1A|=2|F_2A|$, 则 $\cos\angle AF_2F_1=$ (　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

10. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=2$, $a_5=5$, 则数列 $\{\lg a_n\}$ 的前 8 项和等于 (　)

(A) 6　(B) 5　(C) 4　(D) 3

11. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60°, $AB\subset\alpha$, $AB\perp l$, A 为垂足, $CD\subset\beta$, $C\in l$, $\angle ACD=135^\circ$, 则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 (　)

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

12. 函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称, 则 $y=f(x)$ 的反函数是 (　)

(A) $y=g(x)$　(B) $y=g(-x)$　(C) $y=-g(x)$　(D) $y=-g(-x)$

二、填空题

13. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为______. (用数字作答)

14. 设 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 3\\ x-2y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=x+4y$ 的最大值为______.

15. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1,3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于______.

16. 若函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 已知 $3a\cos C=2c\cos A$, $\tan A=\dfrac{1}{3}$, 求 B.

18. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=10$, a_2 为整数, 且 $S_n\leqslant S_4$.

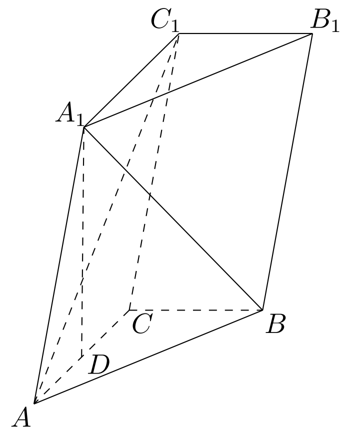
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=1$, $AC=CC_1=2$.

(1) 证明: $AC_1\perp A_1B$;

(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 A_1-AB-C 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.

(1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;

(2) X 表示同一工作日需使用设备的人数, 求 X 的数学期望.

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px\ (p > 0)$ 的焦点为 F, 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P, 与 C 的交点为 Q, 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M、N 两点, 且 A、M、B、N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.

22. 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{ax}{x+a}\ (a > 1)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$, 证明: $\dfrac{2}{n+2} < a_n \leqslant \dfrac{3}{n+2}$.