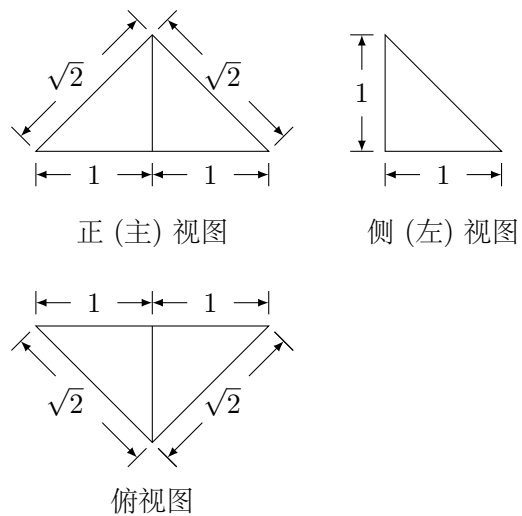


理科数学

一、选择题

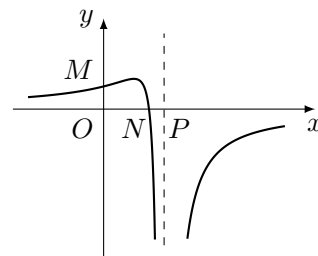
1. 设 i 是虚数单位, 则复数 $\frac{2i}{1-i}$ 在复平面内所对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. 下列函数中, 既是偶函数又存在零点的是 ()
(A) $y = \cos x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \ln x$ (D) $y = x^2 + 1$
3. 设 $p: 1 < x < 2, q: 2^x > 1$, 则 p 是 q 成立的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
4. 下列双曲线中, 焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y = \pm 2x$ 的是 ()
(A) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
(C) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ (D) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
5. 已知 m, n 是两条不同直线, α, β 是两个不同平面, 则下列命题正确的是 ()
(A) 若 α, β 垂直于同一平面, 则 α 与 β 平行
(B) 若 m, n 平行于同一平面, 则 m 与 n 平行
(C) 若 α, β 不平行, 则在 α 内不存在与 β 平行的直线
(D) 若 m, n 不平行, 则 m 与 n 不可能垂直于同一平面
6. 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的标准差为 8, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的标准差为 ()
(A) 8 (B) 15 (C) 16 (D) 32
7. 一个四面体的三视图如图所示, 则该四面体的表面积是 ()



- (A) $1 + \sqrt{3}$ (B) $2 + \sqrt{3}$ (C) $1 + 2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

8. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足, $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 则下列结论正确的是 ()
(A) $|\mathbf{b}| = 1$ (B) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
(C) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$ (D) $(4\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \overrightarrow{BC}$

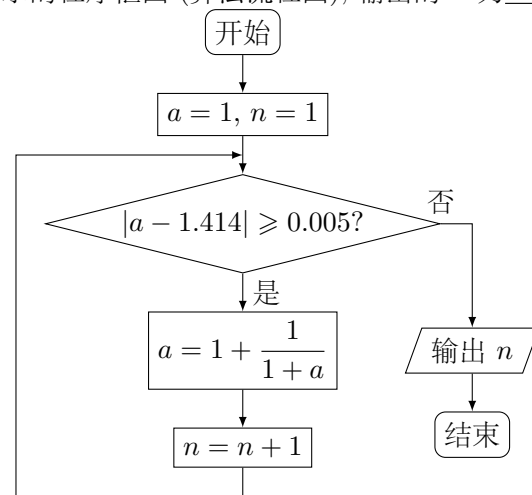
9. 函数 $f(x) = \frac{ax+b}{(x+c)^2}$ 的图象如图所示, 则下列结论成立的是 ()



- (A) $a > 0, b > 0, c < 0$ (B) $a < 0, b > 0, c > 0$
(C) $a < 0, b > 0, c < 0$ (D) $a < 0, b < 0, c < 0$
10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (A, ω, φ 均为正的常数) 的最小正周期为 π , 当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 则下列结论正确的是 ()
(A) $f(2) < f(-2) < f(0)$ (B) $f(0) < f(2) < f(-2)$
(C) $f(-2) < f(0) < f(2)$ (D) $f(2) < f(0) < f(-2)$

二、填空题

11. $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中 x^5 的系数是_____. (用数字填写答案)
12. 在极坐标系中, 圆 $\rho = 8 \sin \theta$ 上的点到直线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$) 距离的最大值是_____.
13. 执行如图所示的程序框图 (算法流程图), 输出的 n 为_____.



14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 + a_4 = 9, a_2 a_3 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和等于_____.
15. 设 $x^3 + ax + b = 0$, 其中 a, b 均为实数, 下列条件中, 使得该三次方程仅有一个实根的是_____. (写出所有正确条件的编号)
① $a = -3, b = -3$; ② $a = -3, b = 2$; ③ $a = -3, b > 2$;
④ $a = 0, b = 2$; ⑤ $a = 1, b = 2$.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{3\pi}{4}, AB = 6, AC = 3\sqrt{2}$, 点 D 在 BC 边上, $AD = BD$, 求 AD 的长.

17. 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起, 现需要通过检测将其区分, 每次随机检测一件产品, 检测后不放回, 直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.
(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率;
(2) 已知每检测一件产品需要费用 100 元, 设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位: 元), 求 X 的分布列和均值 (数学期望).

18. 设 $n \in \mathbf{N}^*$, x_n 是曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标.
- (1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$, 证明: $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

20. 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.
- (1) 求 E 的离心率 e ;
- (2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求 E 的方程.

21. 设函数 $f(x) = x^2 - ax + b$.
- (1) 讨论函数 $f(\sin x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性并判断有无极值, 有极值时求出极值;
- (2) 记 $f_0(x) = x^2 - a_0x + b_0$, 求函数 $|f(\sin x) - f_0(\sin x)|$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值 D ;
- (3) 在 (2) 中, 取 $a_0 = b_0 = 0$, 求 $z = b - \frac{a^2}{4}$ 满足 $D \leq 1$ 时的最大值.

19. 如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$, 四边形 AA_1B_1B , ADD_1A_1 , $ABCD$ 均为正方形, E 为 B_1D_1 的中点, 过 A_1, D, E 的平面交 CD_1 于 F .
- (1) 证明: $EF \parallel B_1C$;
- (2) 求二面角 $E - A_1D - B_1$ 的余弦值.

