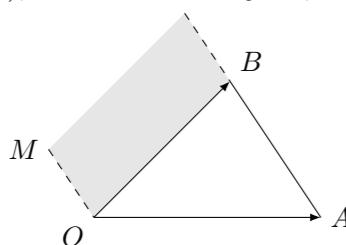


文科数学

一、选择题

1. 函数 $y = \sqrt{\log_2 x}$ 的定义域是 ()
 (A) $(0, 1]$ (B) $(0, +\infty)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$
2. 已知向量 $\vec{a} = (2, t)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 若 $t = t_1$ 时, $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $t = t_2$ 时, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 ()
 (A) $t_1 = -4, t_2 = -1$ (B) $t_1 = -4, t_2 = 1$
 (C) $t_1 = 4, t_2 = -1$ (D) $t_1 = 4, t_2 = 1$
3. 若 $(ax - 1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 80, 则实数 a 的值是 ()
 (A) -2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[3]{4}$ (D) 2
4. 过半径为 2 的球 O 表面上一点 A 作球 O 的截面, 若 OA 与该截面所成的角是 60° , 则该截面的面积是 ()
 (A) π (B) 2π (C) 3π (D) $2\sqrt{3}\pi$
5. “ $a = 1$ ”是“函数 $f(x) = |x - a|$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
6. 在数字 1, 2, 3 与符号 +, - 五个元素的所有全排列中, 任意两个数字都不相邻的全排列个数是 ()
 (A) 6 (B) 12 (C) 18 (D) 24
7. 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上的点到直线 $x + y - 14 = 0$ 的最大距离与最小距离的差是 ()
 (A) 36 (B) 18 (C) $6\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$
8. 设点 P 是函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象 C 的一个对称中心, 若点 P 到图象 C 的对称轴上的距离的最小值是 $\frac{\pi}{4}$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是 ()
 (A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$
9. 过双曲线 $M: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l , 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C , 且 $|AB| = |BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ()
 (A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$
10. 如图, $OM \parallel AB$, 点 P 由射线 OM 、线段 OB 及 AB 的延长线围成的阴影区域内 (不含边界), 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 则实数对 (x, y) 可以是 ()



- (A) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ (B) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ (D) $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

二、填空题

11. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 某高校有甲、乙两个数学建模兴趣班. 其中甲班 40 人, 乙班 50 人. 现分析两个班的一次考试成绩, 算得甲班的平均成绩是 90 分, 乙班的平均成绩是 81 分, 则该校数学建模兴趣班的平均成绩是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 分.

13. 已知 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \\ 2x - y - 2 \leqslant 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 过三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 ABB_1A_1 平行的直线共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 条.

15. 若 $f(x) = a \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 是偶函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

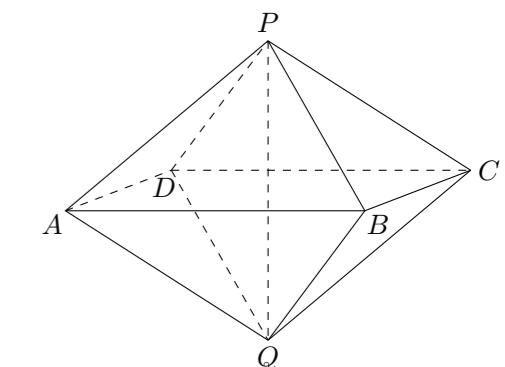
三、解答题

16. 已知 $\sqrt{3} \sin \theta - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{\cos(\pi + \theta)} \cdot \cos \theta = 1, \theta \in (0, \pi)$, 求 θ 的值.

17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

- (1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;
 (2) 某煤矿不被关闭的概率;
 (3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P - ABCD$ 与 $Q - ABCD$ 的高都是 2, $AB = 4$.
 (1) 证明: $PQ \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2) 求异面直线 AQ 与 PB 所成的角;
 (3) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1 - \frac{3}{a}$.
- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 若曲线 $y = f(x)$ 上两点 A 、 B 处的切线都与 y 轴垂直, 且线段 AB 与 x 轴有公共点, 求实数 a 的取值范围.
20. 在 m ($m \geq 2$) 个不同数的排列 $P_1P_2 \cdots P_m$ 中, 若 $1 \leq i \leq j \leq m$ 时 $P_i > P_j$ (即前面某数大于后面某数), 则称 P_i 与 P_j 构成一个逆序. 一个排列的全部逆序的总数称为该排列的逆序数. 记排列 $(n+1)n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数为 a_n , 如排列 21 的逆序数 $a_1 = 1$, 排列 321 的逆序数 $a_2 = 3$, 排列 4321 的逆序数 $a_3 = 6$.
- (1) 求 a_4 、 a_5 , 并写出 a_n 的表达式;
 - (2) 令 $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $2n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n < 2n + 3$, $n = 1, 2, \dots$
21. 已知椭圆 $C_1 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 抛物线 $C_2 : (y - m)^2 = 2px$ ($p > 0$), 且 C_1 、 C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.
- (1) 当 $AB \perp x$ 轴时, 求 m 、 p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;
 - (2) 若 $p = \frac{4}{3}$ 且抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上, 求 m 的值及直线 AB 的方程.