2005 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 设合集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|x>1\}$, $P=\{x|x^2>1\}$, 则下列关系中正确的是 ( )

(A) $M=P$　(B) $P\subsetneqq M$

(C) $M\subsetneqq P$　(D) $\complement_U M\cap P=\varnothing$

2. "$m=\dfrac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )

(A) 充分必要条件　(B) 充分而不必要条件

(C) 必要而不充分条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 若 $|\vec{a}|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, 且 $\vec{c}\perp\vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 ( )

(A) 30°　(B) 60°　(C) 120°　(D) 150°

4. 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线, 则该圆夹在两条切线间的劣弧长为 ( )

(A) π　(B) 2π　(C) 4π　(D) 6π

5. 对任意的锐角 α, β, 下列不等关系中正确的是 ( )

(A) $\sin(\alpha+\beta)>\sin\alpha+\sin\beta$　(B) $\sin(\alpha+\beta)>\cos\alpha+\cos\beta$

(C) $\cos(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$　(D) $\cos(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$

6. 在正四面体 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 的中点, 下面四个结论中不成立的是 ( )

(A) $BC\parallel$ 平面 PDF　(B) $DF\perp$ 平面 PAE

(C) 平面 $PDF\perp$ 平面 ABC　(D) 平面 $PAE\perp$ 平面 ABC

7. 北京《财富》全球论坛期间, 某高校有 14 名志愿者参加接待工作, 若每天早、中、晚三班, 每班 4 人, 每人每天最多值一班, 则开幕式当天不同的排班种数为 ( )

(A) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}$　(B) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{A}_{12}^{4}\mathrm{A}_{8}^{4}$

(C) $\dfrac{\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}}{\mathrm{A}_{3}^{3}}$　(D) $\mathrm{C}_{14}^{12}\mathrm{C}_{12}^{4}\mathrm{C}_{8}^{4}\mathrm{A}_{3}^{3}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}$ ( )

(A) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

(B) 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递增, 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

(C) 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上递减

(D) 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},\pi\right]$ 上递增, 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right]$ 上递减

二、填空题

9. 若 $z_1=a+2\mathrm{i}$, $z_2=3-4\mathrm{i}$, 且 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为______.

10. 已知 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=2$, 则 $\tan\alpha$ 的值为______, $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为______.

11. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是______. (用数字作答)

12. 过原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线, 则切点的坐标为______, 切线的斜率为______.

13. 对于函数 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 有如下结论:

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$;

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$;

④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

当 $f(x)=\lg x$ 时, 上述结论中正确结论的序号是______.

14. 已知 n 次式项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算 (6 次乘法, 3 次加法), 那么计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)=a_0$, $P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$. 利用该算法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算, 计算 $P_{10}(x_0)$ 的值共需要______次运算.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调减区间;

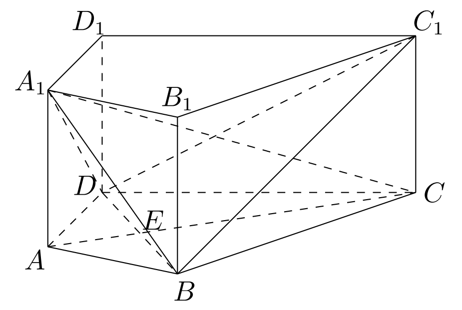
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 20, 求它在该区间上的最小值.

16. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$, $AD\perp DC$, $AC\perp BD$, 垂足为 E.

(1) 求证: $BD\perp A_1C$;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小;

(3) 求异面直线 AD 与 BC_1 所成角的大小.



17. 甲、乙两人各进行 3 次射击, 甲每次击中目标的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 乙每次击中目标的概率为 $\dfrac{2}{3}$.

(1) 记甲击中目标的次数为 ξ, 求 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$;

(2) 求乙至多击中目标 2 次的概率;

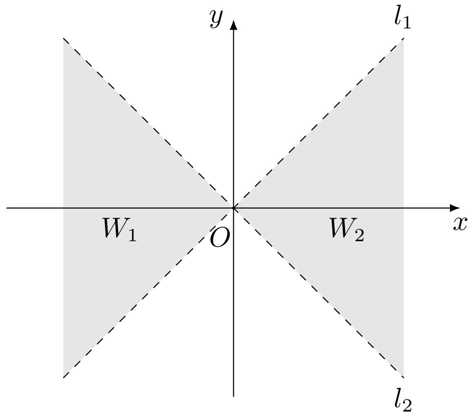
(3) 求甲恰好比乙多击中目标 2 次的概率.

18. 如图, 直线 $l_1: y=kx\ (k>0)$ 与直线 $l_2: y=-kx$ 之间的阴影区域 (不含边界) 记为 W, 其左半部分记为 W_1, 右半部分记为 W_2.

(1) 分别用不等式组表示 W_1 和 W_2;

(2) 若区域 W 中的动点 $P(x,y)$ 到 l_1, l_2 的距离之积等于 d^2, 求点 P 的轨迹 C 的方程;

(3) 设不过原点 O 的直线 l 与 (2) 中的曲线 C 相交于 M_1, M_2 两点, 且与 l_1, l_2 分别交于 M_3, M_4 两点. 求证: $\triangle OM_1M_2$ 的重心与 $\triangle OM_3M_4$ 的重心重合.



19. 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a\neq\frac{1}{4}$, 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n,\ n\text{ 为偶数}\\ a_n+\frac{1}{4},\ n\text{ 为奇数}\end{cases}$. 记 $b_n=a_{2n-1}-\frac{1}{4}$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

20. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数, 若存在 $x^*\in(0,1)$, 使得 $f(x)$ 在 $[0,x^*]$ 上单调递增, 在 $[x^*,1]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单峰函数, x^* 为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间. 对任意的 $[0,1]$ 上的单峰函数 $f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(1) 证明: 对任意的 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 则 $(0,x_2)$ 为含峰区间; 若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, 则 $(x_1,1)$ 为含峰区间;

(2) 对给定的 $r\ (0<r<0.5)$, 证明: 存在 x_1, $x_2\in(0,1)$, 满足 $x_2-x_1\geqslant 2r$, 使得由 (1) 所确定的含峰区间的长度不大于 $0.5+r$;

(3) 选取 x_1, $x_2\in(0,1)$, $x_1<x_2$, 由 (1) 可确定含峰区间为 $(0,x_2)$ 或 $(x_1,1)$, 在所得的含峰区间内选取 x_3, 由 x_3 与 x_1 或 x_3 与 x_2 类似地可确定一个新的含峰区间, 在第一次确定的含峰区间为 $(0,x_2)$ 的情况下, 试确定 x_1, x_2, x_3 的值, 满足两两之差的绝地值不小于 0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短到 0.34.

注: 区间长度等于区间的右端点与左端点之差.