

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $N = \{(x, y) | x^2 - y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 则集合 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
2. 函数 $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 的最小正周期是 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
3. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -6$, $a_8 = 6$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 ()
(A) $S_4 < S_5$ (B) $S_4 = S_5$ (C) $S_6 < S_5$ (D) $S_6 = S_5$
4. 圆 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 在点 $P(1, \sqrt{3})$ 处的切线方程为 ()
(A) $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$ (B) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$
(C) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$ (D) $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$
5. 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)}$ 的定义域为 ()
(A) $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$ (B) $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
(C) $[-2, -1) \cup (1, 2]$ (D) $(-2, -1) \cup (1, 2)$
6. 设复数 z 的辐角的主值为 $\frac{2\pi}{3}$, 虚部为 $\sqrt{3}$, 则 $z^2 =$ ()
(A) $-2 - 2\sqrt{3}i$ (B) $-2\sqrt{3} - 2i$ (C) $2 + 2\sqrt{3}i$ (D) $2\sqrt{3} + 2i$
7. 设双曲线的焦点在 x 轴上, 两条渐近线为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则该双曲线的离心率 $e =$ ()
(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$
8. 不等式 $1 < |x + 1| < 3$ 的解集为 ()
(A) (0, 2) (B) $(-2, 0) \cup (2, 4)$
(C) $(-4, 0)$ (D) $(-4, -2) \cup (0, 2)$
9. 正三棱锥的底面边长为 2, 侧面均为直角三角形, 则此三棱锥的体积为 ()
(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $AC = 4$, 则边 AC 上的高为 ()
(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $3\sqrt{3}$
11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1 \\ 4 - \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围为 ()
(A) $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$ (B) $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$
(C) $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$ (D) $[-2, 0] \cup [1, 10]$

12. 将 4 名教师分配到 3 所中学任教, 每所中学至少 1 名, 则不同的分配方案共有 ()
(A) 12 种 (B) 24 种 (C) 36 种 (D) 48 种

二、填空题

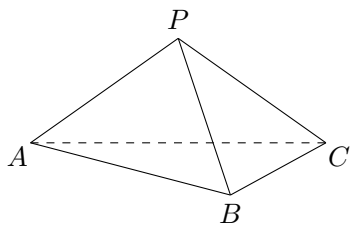
13. 用平面 α 截半径为 R 的球, 如果球心到平面 α 的距离为 $\frac{R}{2}$, 那么截得小圆的面积与球的表面积的比值为_____.
14. 函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为_____.
15. 已知函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 设 $f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, 则 $g(-8) =$ _____.
16. 设 P 是曲线 $y^2 = 4(x - 1)$ 上的一个动点, 则点 P 到点 (0, 1) 的距离与点 P 到 y 轴的距离之和的最小值为_____.

三、解答题

17. 已知 α 为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha}$ 的值.

18. 解方程: $4^x + |1 - 2^x| = 11$.

20. 三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $PA = PB = PC = 3$.
 (1) 求证: $AB \perp BC$;
 (2) 设 $AB = BC = 2\sqrt{3}$, 求 AC 与平面 PBC 所成角的大小.



21. 设椭圆 $\frac{x^2}{m+1} + y^2 = 1$ 的两个焦点是 $F_1(-c, 0)$ 与 $F_2(c, 0)$, ($c > 0$), 且椭圆上存在一点 P , 使得直线 PF_1 与 PF_2 垂直.
 (1) 求实数 m 的取值范围;
 (2) 设 L 是相应于焦点 F_2 的准线, 直线 PF_2 与 L 相交于点 Q , 若 $\left| \frac{QF_2}{PF_2} \right| = 2 - \sqrt{3}$, 求直线 PF_2 的方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n, n \geq 1$.
 (1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的前三项 a_1, a_2, a_3 ;
 (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (3) 证明: 对任意的整数 $m > 4$, 有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$.