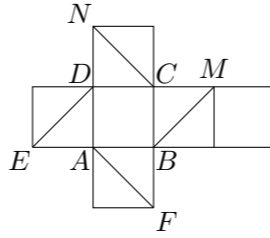


# 理科数学

## 一、选择题

- 集合  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  的子集个数是 ( )  
(A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15
- 函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 对于任意的实数  $x, y$  都有 ( )  
(A)  $f(xy) = f(x)f(y)$  (B)  $f(xy) = f(x) + f(y)$   
(C)  $f(x+y) = f(x)f(y)$  (D)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_{2n}^n}{C_{2n+2}^{n+1}} =$  ( )  
(A) 0 (B) 2 (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{1}{4}$
- 函数  $y = -\sqrt{1-x}$  ( $x \leq 1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = x^2 - 1$  ( $-1 \leq x \leq 0$ ) (B)  $y = x^2 - 1$  ( $0 \leq x \leq 1$ )  
(C)  $y = 1 - x^2$  ( $x \leq 0$ ) (D)  $y = 1 - x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ )
- 极坐标系中, 圆  $\rho = 4 \cos \theta + 3 \sin \theta$  的圆心的坐标是 ( )  
(A)  $\left(\frac{5}{2}, \arcsin \frac{3}{5}\right)$  (B)  $\left(5, \arcsin \frac{4}{5}\right)$  (C)  $\left(5, \arcsin \frac{3}{5}\right)$  (D)  $\left(\frac{5}{2}, \arcsin \frac{4}{5}\right)$
- 设动点  $P$  在直线  $x = 1$  上,  $O$  为坐标原点. 以  $OP$  为直角边、点  $O$  为直角顶点作等腰  $\text{Rt}\triangle OPQ$ , 则动点  $Q$  的轨迹是 ( )  
(A) 圆 (B) 两条平行直线  
(C) 抛物线 (D) 双曲线
- 已知  $f(x^6) = \log_2 x$ , 那么  $f(8)$  等于 ( )  
(A)  $\frac{4}{3}$  (B) 8 (C) 18 (D)  $\frac{1}{2}$
- 若  $A, B$  是锐角  $\triangle ABC$  的两个内角, 则点  $P(\cos B - \sin A, \sin B - \cos A)$  在 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 ( )  
(A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$  (C)  $60^\circ$  (D)  $90^\circ$
- 若实数  $a, b$  满足  $a + b = 2$ , 则  $3^a + 3^b$  的最小值是 ( )  
(A) 18 (B) 6 (C)  $2\sqrt{3}$  (D)  $2\sqrt[3]{3}$
- 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ①  $BM$  与  $ED$  平行; ②  $CN$  与  $BE$  是异面直线; ③  $CN$  与  $BM$  成  $60^\circ$  角; ④  $DM$  与  $BN$  垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 ( )



- (A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④

- 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的  $n$  个月内累积的需求量  $S_n$  (万件) 近似地满足  $S_n = \frac{n}{90}(21n - n^2 - 5)$  ( $n = 1, 2, \dots, 12$ ). 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 ( )  
(A) 5 月、6 月 (B) 6 月、7 月 (C) 7 月、8 月 (D) 8 月、9 月

## 二、填空题

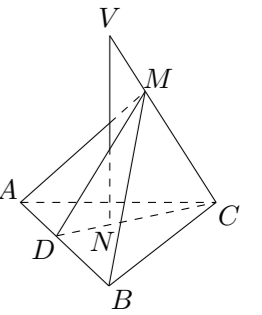
- 已知球内接正方体的表面积为  $S$ , 那么球体积等于\_\_\_\_\_.
- 椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  长轴上一个顶点为  $A$ , 以  $A$  为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是\_\_\_\_\_.
- 已知  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  均为锐角), 那么  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  的最大值等于\_\_\_\_\_.
- 已知  $m, n$  是直线,  $\alpha, \beta, \gamma$  是平面, 给出下列命题:  
① 若  $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$ , 则  $n \perp \alpha$  或  $n \perp \beta$ ;  
② 若  $\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$ , 则  $m \parallel n$ ;  
③ 若  $m$  不垂直于  $\alpha$ , 则  $m$  不可能垂直于  $\alpha$  内的无数条直线;  
④ 若  $\alpha \cap \beta = m, n \parallel m$ , 且  $n \not\subset \alpha, n \not\subset \beta$ , 则  $n \parallel \alpha$  且  $n \parallel \beta$ .  
其中正确的命题的序号是\_\_\_\_\_. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

## 三、解答题

- 设函数  $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$  ( $a > b > 0$ ), 求  $f(x)$  的单调区间, 并证明  $f(x)$  在其单调区间上的单调性.

- 已知  $z^7 = 1$  ( $z \in \mathbf{C}$  且  $z \neq 1$ ).  
(1) 证明  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$ ;  
(2) 设  $z$  的辐角为  $\alpha$ , 求  $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$  的值.

- 已知  $VC$  是  $\triangle ABC$  所在平面的一条斜线, 点  $N$  是  $V$  在平面  $ABC$  上的射影, 且在  $\triangle ABC$  的高  $CD$  上.  $AB = a$ ,  $VC$  与  $AB$  之间的距离为  $h$ , 点  $M \in VC$ .  
(1) 证明  $\angle MDC$  是二面角  $M - AB - C$  的平面角;  
(2) 当  $\angle MDC = \angle CVN$  时, 证明  $VC \perp$  平面  $AMB$ ;  
(3) 若  $\angle MDC = \angle CVN = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ), 求四面体  $MABC$  的体积.



20. 在 1 与 2 之间插入  $n$  个正数  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , 使这  $n+2$  个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入  $n$  个正数  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ , 使这  $n+2$  个数成等差数列. 记  $A_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ ,  $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ .
- (1) 求数列  $\{A_n\}$  和  $\{B_n\}$  的通项;
- (2) 当  $n \geq 7$  时, 比较  $A_n$  与  $B_n$  的大小, 并证明你的结论.
21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为  $x$  ( $0 < x < 1$ ), 则出厂价相应提高的比例为  $0.75x$ , 同时预计年销售量增加的比例为  $0.6x$ . 已知年利润 = (出厂价 - 投入成本)  $\times$  年销售量.
- (1) 写出本年度预计的年利润  $y$  与投入成本增加的比例  $x$  的关系式;
- (2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例  $x$  应在什么范围内?
22. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). 过动点  $M(a, 0)$  且斜率为 1 的直线  $l$  与该抛物线交于不同的两点  $A$ 、 $B$ ,  $|AB| \leq 2p$ .
- (1) 求  $a$  的取值范围;
- (2) 若线段  $AB$  的垂直平分线交  $x$  轴于点  $N$ , 求  $\text{Rt}\triangle NAB$  面积的最大值.