

理科数学

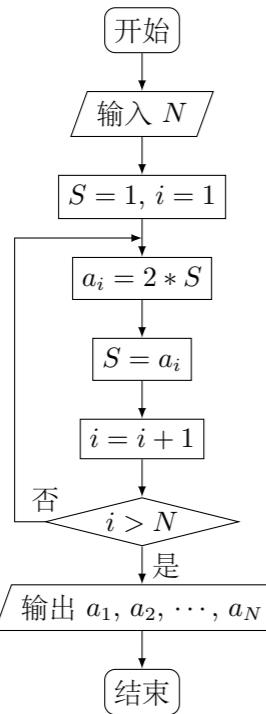
一、选择题

1. 已知集合 $M = \{x | x \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | x^2 < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 (A) $[0, 1]$ (B) $[0, 1)$ (C) $(0, 1]$ (D) $(0, 1)$

2. 函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是 ()
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

3. 定积分 $\int_0^1 (2x + e^x)dx$ 的值为 ()
 (A) $e + 2$ (B) $e + 1$ (C) e (D) $e - 1$

4. 根据如图所示的框图, 对大于 2 的整数 N , 输出的数列的通项公式是()



- (A) $a_n = 2n$ (B) $a_n = 2(n-1)$ (C) $a_n = 2^n$ (D) $a_n = 2^{n-1}$

5. 已知底面边长为 1, 侧棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱柱的各顶点均在同一个球面上, 则该球的体积为 ()

- (A) $\frac{32\pi}{3}$ (B) 4π (C) 2π (D) $\frac{4\pi}{3}$

6. 从正方形四个顶点及其中心这 5 个点中, 任取 2 个点, 则这 2 个点的距离不小于该正方形边长的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

7. 下列函数中, 满足“ $f(x+y) = f(x)f(y)$ ”的单调递增函数是 ()

- (A) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $f(x) = x^3$ (C) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (D) $f(x) = 3^x$

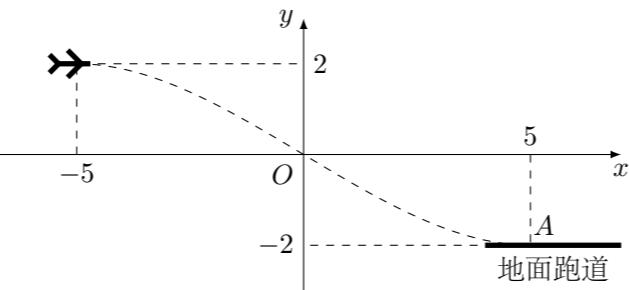
8. 原命题为“若 z_1, z_2 互为共轭复数, 则 $|z_1| = |z_2|$ ”, 关于其逆命题, 否命题, 逆否命题真假性的判断依次如下, 正确的是 ()

- (A) 真, 假, 真 (B) 假, 假, 真 (C) 真, 真, 假 (D) 假, 假, 假

9. 设样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的均值和方差分别为 1 和 4, 若 $y_i = x_i + a$ (a 为非零常数, $i = 1, 2, \dots, 10$), 则 y_1, y_2, \dots, y_{10} 的均值和方差分别为 ()

- (A) $1+a, 4$ (B) $1+a, 4+a$ (C) $1, 4$ (D) $1, 4+a$

10. 如图, 某飞行器在 4 千米高空水平飞行, 从距着陆点 A 的水平距离 10 千米处下降, 已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分, 则函数的解析式为 ()



- (A) $y = \frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{5}x$
 (B) $y = \frac{2}{125}x^3 - \frac{4}{5}x$
 (C) $y = \frac{3}{125}x^3 - x$
 (D) $y = -\frac{3}{125}x^3 + \frac{1}{5}x$

二、填空题

11. 已知 $4^a = 2, \lg x = a$, 则 $x =$ _____.

12. 若圆 C 的半径为 1, 其圆心与点 $(1, 0)$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则圆 C 的标准方程为 _____.

13. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 向量 $\mathbf{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta)$, $\mathbf{b} = (\cos \theta, 1)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\tan \theta =$ _____.

14. 观察分析下表中的数据:

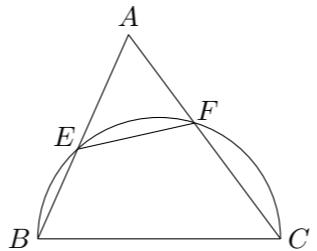
多面体	面数 (F)	顶点数 (V)	棱数 (E)
三棱锥	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12

猜想一般凸多面体中, F, V, E 所满足的等式是 _____.

15. 三选一.

- 【A】设 $a, b, m, n \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + b^2 = 5, ma + nb = 5$, 则 $\sqrt{m^2 + n^2}$ 的最小值为 _____.

- 【B】如图, $\triangle ABC$ 中, $BC = 6$, 以 BC 为直径的半圆分别交 AB, AC 于点 E, F , 若 $AC = 2AE$, 则 $EF =$ _____.



- 【C】在极坐标系中, 点 $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ 的距离是 _____.

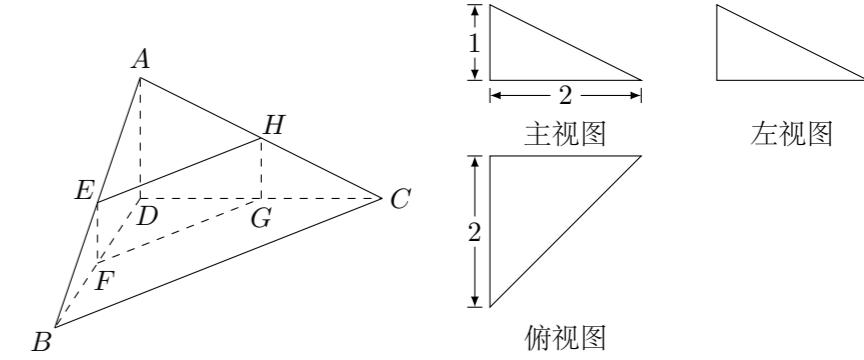
三、解答题

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

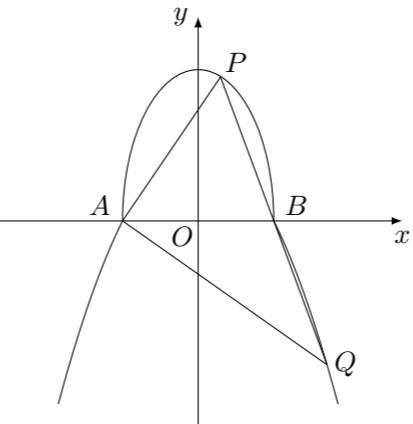
- (1) 若 a, b, c 成等差数列, 证明: $\sin A + \sin C = 2 \sin(A+C)$;
 (2) 若 a, b, c 成等比数列, 求 $\cos B$ 的最小值.

17. 四面体 $ABCD$ 及其三视图如图所示, 过棱 AB 的中点 E 作平行于 AD, BC 的平面分别交四面体的棱 BD, DC, CA 于点 F, G, H .

- (1) 证明: 四边形 $EFGH$ 是矩形;
 (2) 求直线 AB 与平面 $EFGH$ 夹角 θ 的正弦值.



18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$, 点 $P(x, y)$ 在 $\triangle ABC$ 三边围成的区域(含边界)上.
- 若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 求 $|\overrightarrow{OP}|$;
 - 设 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbf{R}$), 用 x, y 表示 $m - n$, 并求 $m - n$ 的最大值.
20. 如图, 曲线 C 由上半椭圆 $C_1 : \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$, $y \geq 0$) 和部分抛物线 $C_2 : y = -x^2 + 1$ ($y \leq 0$) 连接而成, C_1, C_2 的公共点为 A, B , 其中 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 求 a, b 的值;
 - 过点 B 的直线 l 与 C_1, C_2 分别交于点 P, Q (均异于点 A, B), 若 $AP \perp AQ$, 求直线 l 的方程.
21. 设函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = xf'(x)$, $x \geq 0$, 其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.
- 令 $g_1(x) = g(x)$, $g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$, $n \in \mathbf{N}_+$, 求 $g_n(x)$ 的表达式;
 - 若 $f(x) \geq ag(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;
 - 设 $n \in \mathbf{N}_+$, 比较 $g(1) + g(2) + \dots + g(n)$ 与 $n - f(n)$ 的大小, 并加以证明.



19. 在一块耕地上种植一种作物, 每季种植成本为 1000 元, 此作物的市场价格和这块地上的产量均具有随机性, 且互不影响, 其具体情况如下表:

作物产量 (kg)	300	500	作物市场价格 (元/kg)	6	10
概率	0.5	0.5	概率	0.4	0.6

- 设 X 表示在这块地上种植 1 季此作物的利润, 求 X 的分布列;
- 若在这块地上连续 3 季种植此作物, 求这 3 季中至少有 2 季的利润不少于 2000 元的概率.