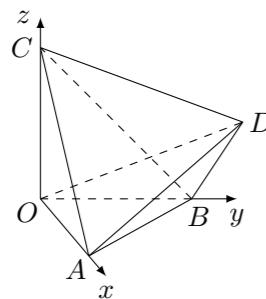


2009 年普通高等学校招生考试 (江西卷)

理科数学

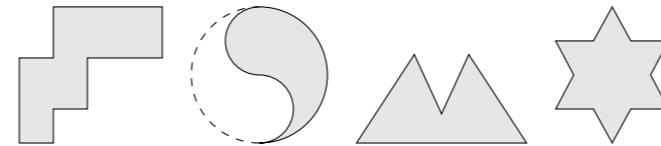
一、选择题

1. 若复数 $z = (x^2 - 1) + (x - 1)i$ 为纯虚数, 则实数 x 的值为 ()
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) -1 或 1
2. 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为 ()
 (A) $(-4, -1)$ (B) $(-4, 1)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(-1, 1]$
3. 已知全集 $U = A \cup B$ 中有 m 个元素, $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 中有 n 个元素. 若 $A \cap B$ 非空, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 ()
 (A) mn (B) $m+n$ (C) $n-m$ (D) $m-n$
4. 若函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos x$, $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的最大值为 ()
 (A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{3} + 1$ (D) $\sqrt{3} + 2$
5. 设函数 $f(x) = g(x) + x^2$, 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, g(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x + 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的斜率为 ()
 (A) 4 (B) $-\frac{1}{4}$ (C) 2 (D) $-\frac{1}{2}$
6. 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆于点 P, F_2 为右焦点, 若 $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$, 则椭圆的离心率为 ()
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$
7. $(1 + ax + by)^n$ 展开式中不含 x 的项的系数绝对值的和为 243, 不含 y 的项的系数绝对值的和为 32, 则 a, b, n 的值可能为 ()
 (A) $a = 2, b = -1, n = 5$ (B) $a = -2, b = -1, n = 6$
 (C) $a = -1, b = 2, n = 6$ (D) $a = 1, b = 2, n = 5$
8. 数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = n^2 \left(\cos^2 \frac{n\pi}{3} - \sin^2 \frac{n\pi}{3} \right)$, 其前 n 项和为 S_n , 则 S_{30} 为 ()
 (A) 470 (B) 490 (C) 495 (D) 510
9. 如图, 正四面体 $ABCD$ 的顶点 A, B, C 分别在两两垂直的三条射线 Ox, Oy, Oz 上, 则在下列命题中, 错误的为 ()



- (A) $O-ABC$ 是正三棱锥
- (B) 直线 $OB \parallel$ 平面 ACD
- (C) 直线 AD 与 OB 所成的角是 45°
- (D) 二面角 $D-OB-A$ 为 45°

10. 为了庆祝六一儿童节, 某食品厂制作了 3 种不同的精美卡片, 每袋食品随机装入一张卡片, 集齐 3 种卡片可获奖, 现购买该种食品 5 袋, 能获奖的概率为
 (A) $\frac{31}{81}$ (B) $\frac{33}{81}$ (C) $\frac{48}{81}$ (D) $\frac{50}{81}$
11. 一个平面封闭区域内任意两点距离的最大值称为该区域的“直径”, 封闭区域边界曲线的长度与区域直径之比称为区域的“周率”, 下面四个平面区域 (阴影部分) 的周率从左到右依次记为 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, 则下列关系中正确的为 ()



- (A) $\tau_1 > \tau_4 > \tau_3$ (B) $\tau_3 > \tau_1 > \tau_2$ (C) $\tau_4 > \tau_2 > \tau_3$ (D) $\tau_3 > \tau_4 > \tau_2$

12. 设函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a < 0$) 的定义域为 D , 若所有点 $(s, f(t))$ ($s, t \in D$) 构成一个正方形区域, 则 a 的值为 ()
 (A) -2 (B) -4 (C) -8 (D) 不能确定

二、填空题

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3)$, $\mathbf{c} = (k, 7)$. 若 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \parallel \mathbf{b}$, 则 $k =$ _____.
14. 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球, 若 A, B 两点的球面距离为 π , 则正三棱柱的体积为 _____.
15. 若不等式 $\sqrt{9-x^2} \leq k(x+2) - \sqrt{2}$ 的解集为区间 $[a, b]$, 且 $b-a=2$, 则 $k =$ _____.

16. 设直线系 $M: x \cos \theta + (y-2) \sin \theta = 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), 对于下列四个命题:
 A. M 中所有直线均经过一个定点;
 B. 存在定点 P 不在 M 中的任一条直线上;
 C. 对于任意整数 n ($n \geq 3$), 存在正 n 边形, 其所有边均在 M 中的直线上;
 D. M 中的直线所能围成的正三角形面积都相等.
 其中真命题的代号是 _____.(写出所有真命题的代号)

三、解答题

17. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
 (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若 $k > 0$, 求不等式 $f'(x) + k(1-x)f(x) > 0$ 的解集.

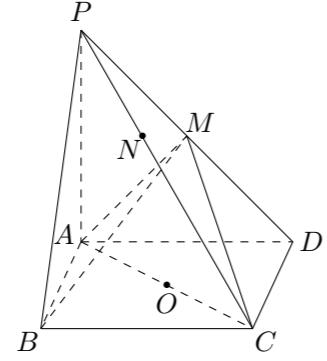
18. 某公司拟资助三位大学生自主创业, 现聘请两位专家, 独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\frac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”, 则给予 10 万元的创业资助; 若只获得一个“支持”, 则给予 5 万元的资助; 若未获得“支持”, 则不予资助, 令 ξ 表示该公司的资助总额.

- (1) 写出 ξ 的分布列;
 (2) 求数学期望 $E\xi$.

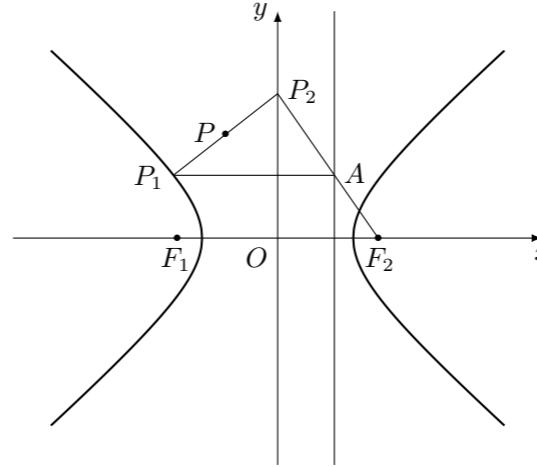
19. $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\tan C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$, $\sin(B-A) = \cos C$.

- (1) 求 A, C ;
 (2) 若 $S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3}$, 求 a, c .

20. 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = 4$, $AB = 2$. 以 AC 的中点 O 为球心、 AC 为直径的球面交 PD 于点 M , 交 PC 于点 N .
- (1) 求证: 平面 $ABM \perp$ 平面 PCD ;
 - (2) 求直线 CD 与平面 ACM 所成的角的大小;
 - (3) 求点 N 到平面 ACM 的距离.



21. 已知点 $P_1(x_0, y_0)$ 为双曲线 $\frac{x^2}{8b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b 为正常数) 上任一点, F_2 为双曲线的右焦点, 过 P_1 作右准线的垂线, 垂足为 A , 连接 F_2A 并延长交 y 轴于 P_2 .
- (1) 求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹 E 的方程;
 - (2) 设轨迹 E 与 x 轴交于 B, D 两点, 在 E 上任取一点 $Q(x_1, y_1)$ ($y_1 \neq 0$), 直线 QB, QD 分别交 y 轴于 M, N 两点. 求证: 以 MN 为直径的圆过两定点.



22. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, 且对满足 $m + n = p + q$ 的正整数 m, n, p, q 都有 $\frac{a_m + a_n}{(1 + a_m)(1 + a_n)} = \frac{a_p + a_q}{(1 + a_p)(1 + a_q)}$.
- (1) 当 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{4}{5}$ 时, 求通项 a_n ;
 - (2) 证明: 对任意 a , 存在与 a 有关的常数 λ , 使得对于每个正整数 n , 都有 $\frac{1}{\lambda} \leq a_n \leq \lambda$.