

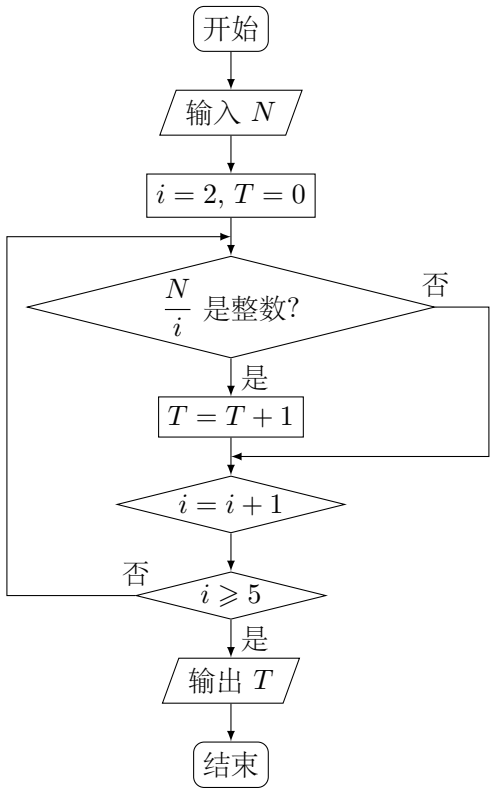
理科数学

一、选择题

1. 设全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x|0 < x < 2\}$ ,  $B = \{x|x \geq 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$  ( )  
(A)  $\{x|0 < x \leq 1\}$  (B)  $\{x|0 < x < 1\}$  (C)  $\{x|1 \leq x < 2\}$  (D)  $\{x|0 < x < 2\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \leq 4 \\ -x + y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则目标函数  $z = 3x + 5y$  的最大值为 ( )  
(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入  $N$  的值为 20, 则输出  $T$  的值为 ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”是“ $x^3 < 1$ ”的 ( )  
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知  $a = \log_2 e$ ,  $b = \ln 2$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )  
(A)  $a > b > c$  (B)  $b > a > c$  (C)  $c > b > a$  (D)  $c > a > b$

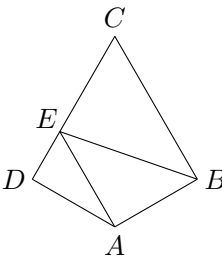
6. 将函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{10}$  个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )

- (A) 在区间  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$  上单调递增 (B) 在区间  $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$  上单调递减  
(C) 在区间  $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$  上单调递增 (D) 在区间  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  上单调递减

7. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于  $x$  轴的直线与双曲线交于  $A, B$  两点. 设  $A, B$  到双曲线同一条渐近线的距离分别为  $d_1$  和  $d_2$ , 且  $d_1 + d_2 = 6$ , 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

8. 如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AD \perp CD$ ,  $\angle BAD = 120^\circ$ ,  $AB = AD = 1$ . 若点  $E$  为边  $CD$  上的动点, 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}$  的最小值为 ( )



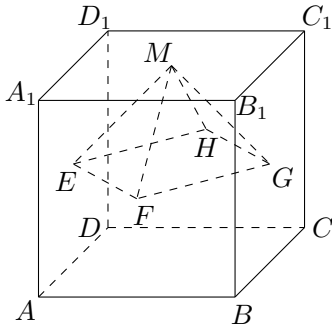
- (A)  $\frac{21}{16}$  (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{25}{16}$  (D) 3

二、填空题

9.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{6 + 7i}{1 + 2i} =$ \_\_\_\_\_.

10. 在  $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_.

11. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1, 除面  $ABCD$  外, 该正方体其余各面的中心分别为点  $E, F, G, H, M$  (如图), 则四棱锥  $M - EFGH$  的体积为\_\_\_\_\_.



12. 已知圆  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  的圆心为  $C$ , 直线  $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参数) 与该圆相交于  $A, B$  两点, 则  $\triangle ABC$  的面积为\_\_\_\_\_.

13. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a - 3b + 6 = 0$ , 则  $2^a + \frac{1}{8^b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

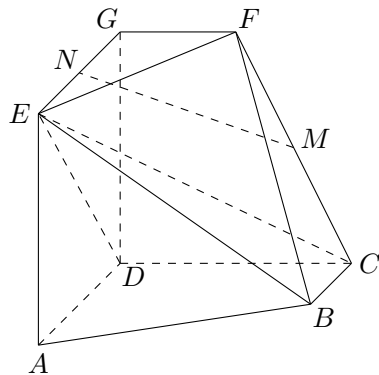
14. 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0 \end{cases}$ . 若关于  $x$  的方程  $f(x) = ax$  恰有 2 个互异的实数解, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ .  
(1) 求角  $B$  的大小;  
(2) 设  $a = 2, c = 3$ , 求  $b$  和  $\sin(2A - B)$  的值.

16. 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24, 16, 16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人, 进行睡眠时间的调查.  
(1) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?  
(2) 若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足, 3 人睡眠充足, 现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.  
① 用  $X$  表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量  $X$  的分布列与数学期望;  
② 设  $A$  为事件“抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件  $A$  发生的概率.

17. 如图,  $AD \parallel BC$  且  $AD = 2BC$ ,  $AD \perp CD$ ,  $EG \parallel AD$  且  $EG = AD$ ,  $CD \parallel FG$  且  $CD = 2FG$ ,  $DG \perp$  平面  $ABCD$ ,  $DA = DC = DG = 2$ .
- (1) 若  $M$  为  $CF$  的中点,  $N$  为  $EG$  的中点, 求证:  $MN \parallel$  平面  $CDE$ ;
- (2) 求二面角  $E - BC - F$  的正弦值;
- (3) 若点  $P$  在线段  $DG$  上, 且直线  $BP$  与平面  $ADGE$  所成的角为  $60^\circ$ , 求线段  $DP$  的长.



19. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ , 上顶点为  $B$ . 已知椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ , 点  $A$  的坐标为  $(b, 0)$ , 且  $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ .
- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设直线  $l: y = kx$  ( $k > 0$ ) 与椭圆在第一象限的交点为  $P$ , 且  $l$  与直线  $AB$  交于点  $Q$ . 若  $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$  ( $O$  为原点), 求  $k$  的值.

20. 已知函数  $f(x) = a^x$ ,  $g(x) = \log_a x$ , 其中  $a > 1$ .
- (1) 求函数  $h(x) = f(x) - x \ln a$  的单调区间;
- (2) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线与曲线  $y = g(x)$  在点  $(x_2, g(x_2))$  处的切线平行, 证明  $x_1 + g(x_2) = -\frac{2 \ln \ln a}{\ln a}$ ;
- (3) 证明当  $a \geq e^{\frac{1}{e}}$  时, 存在直线  $l$ , 使  $l$  是曲线  $y = f(x)$  的切线, 也是曲线  $y = g(x)$  的切线.

18. 设  $\{a_n\}$  是等比数列, 公比大于 0, 其前  $n$  项和为  $S_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),  $\{b_n\}$  是等差数列. 已知  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = a_2 + 2$ ,  $a_4 = b_3 + b_5$ ,  $a_5 = b_4 + 2b_6$ .
- (1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 设数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- ① 求  $T_n$ ;
- ② 证明  $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).