

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P = \{x | x^2 \leq 1\}$, $M = \{a\}$. 若 $P \cup M = P$, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $(-\infty, -1]$ (B) $[1, +\infty)$
(C) $[-1, 1]$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

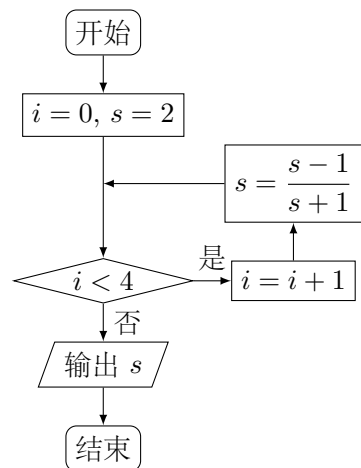
2. 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$ ()

(A) i (B) $-i$ (C) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (D) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3. 在极坐标系中, 圆 $\rho = -2\sin\theta$ 的圆心的极坐标是 ()

(A) $(1, \frac{\pi}{2})$ (B) $(1, -\frac{\pi}{2})$ (C) $(1, 0)$ (D) $(1, \pi)$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 的值为 ()

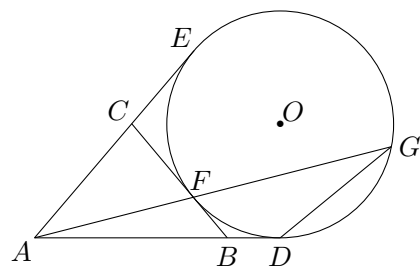


(A) -3 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2

5. 如图, AD, AE, BC 分别与圆 O 切于点 D, E, F , 延长 AF 与圆 O 交于另一点 G . 给出下列三个结论:

① $AD + AE = AB + BC + CA$;
② $AF \cdot AG = AD \cdot AE$;
③ $\triangle AFB \sim \triangle ADG$.

其中正确结论的序号是

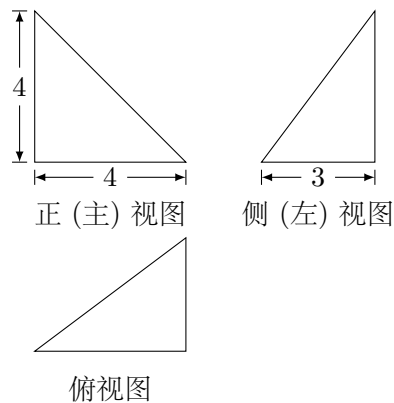


(A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) ①②③

6. 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 (单位: 分钟) 为 $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases}$ (A, c 为常数). 已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟, 组装第 A 件产品用时 15 分钟, 那么 c 和 A 的值分别是 ()

(A) 75, 25 (B) 75, 16 (C) 60, 25 (D) 60, 16

7. 某四面体的三视图如图所示, 该四面体四个面的面积中最大的是 ()



(A) 8 (B) $6\sqrt{2}$ (C) 10 (D) $8\sqrt{2}$

8. 设 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(t+4, 4)$, $D(t, 4)$ ($t \in \mathbf{R}$). 记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部 (不含边界) 的整点的个数, 其中整点是指横、纵坐标都是整数的点, 则函数 $N(t)$ 的值域为 ()

(A) $\{9, 10, 11\}$ (B) $\{9, 10, 12\}$ (C) $\{9, 11, 12\}$ (D) $\{10, 11, 12\}$

二、填空题

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 5$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$, $\tan A = 2$, 则 $\sin A =$ ____; $a =$ _____.

10. 已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\mathbf{b} = (0, -1)$, $\mathbf{c} = (k, \sqrt{3})$. 若 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 共线, 则 $k =$ _____.

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_4 = -4$, 则公比 $q =$ ____; $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| =$ _____.

12. 用数字 2, 3 组成四位数, 且数字 2, 3 至少都出现一次, 这样的四位数共有_____个. (用数字作答)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是_____.

14. 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的距离的积等于常数 a^2 ($a > 1$) 的点的轨迹. 给出下列三个结论:

① 曲线 C 过坐标原点;
② 曲线 C 关于坐标原点对称;
③ 若点 P 在曲线 C 上, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积不大于 $\frac{1}{2}a^2$.
其中, 所有正确结论的序号是_____.

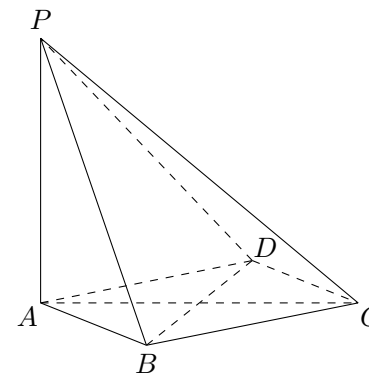
三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = 4\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $AB = 2$, $\angle BAD = 60^\circ$.

(1) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
(2) 若 $PA = AB$, 求 PB 与 AC 所成角的余弦值;
(3) 当平面 PBC 与平面 PDC 垂直时, 求 PA 的长.



17. 以下茎叶图记录了甲、乙两组各四名同学的植树棵数. 乙组记录中有一个数据模糊, 无法确认, 在图中以 X 表示.

甲组				乙组	
9	9	0	X	8	9
1	1	1	0		

- (1) 如果 $X = 8$, 求乙组同学植树棵数的平均数和方差;
 (2) 如果 $X = 9$, 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 求这两名同学的植树总棵数 Y 的分布列和数学期望.
 (注: 方差 $s^2 = \frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$, 其中 \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

19. 已知椭圆 $G: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. 过点 $(m, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A, B 两点.
 (1) 求椭圆 G 的焦点坐标和离心率;
 (2) 将 $|AB|$ 表示为 m 的函数, 并求 $|AB|$ 的最大值.

20. 若数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) 满足 $|a_{n+1} - a_k| = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), 则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
 (1) 写出一个满足 $a_1 = a_5 = 0$, 且 $S(A_5) > 0$ 的 E 数列 A_5 ;
 (2) 若 $a_1 = 12, n = 2000$, 证明: E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n = 2011$;
 (3) 对任意给定的整数 n ($n \geq 2$), 是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n , 使得 $S(A_n) = 0$? 如果存在, 写出一个满足条件的 E 数列 A_n ; 如果不存在, 说明理由.

18. 已知函数 $f(x) = (x - k)^2 e^{\frac{x}{k}}$.
 (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若对于任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 求 k 的取值范围.