

# 理科数学

## 一、选择题

- 复数  $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 =$  ( )  
(A)  $-3-4i$  (B)  $-3+4i$  (C)  $3-4i$  (D)  $3+4i$
- 函数  $y = \frac{1+\ln(x-1)}{2}$  ( $x > 1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = e^{2x+1} - 1$  ( $x > 0$ ) (B)  $y = e^{2x-1} + 1$  ( $x > 0$ )  
(C)  $y = e^{2x+1} - 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (D)  $y = e^{2x-1} + 1$  ( $x \in \mathbf{R}$ )
- 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x+2y \leq 5 \end{cases}$ , 则  $z = 2x+y$  的最大值为( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 如果等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 + a_4 + a_5 = 12$ , 那么  $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$  ( )  
(A) 14 (B) 21 (C) 28 (D) 35
- 不等式  $\frac{x^2-x-6}{x-1} > 0$  的解集为 ( )  
(A)  $\{x|x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$  (B)  $\{x|x < -2 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$   
(C)  $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$  (D)  $\{x|-2 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 3\}$
- 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的放法共有 ( )  
(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 36 种 (D) 54 种
- 为了得到函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图像, 只需把函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图像 ( )  
(A) 向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个长度单位 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个长度单位  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个长度单位 (D) 向右平移  $\frac{\pi}{2}$  个长度单位
- $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在边  $AB$  上,  $CD$  平分  $\angle ACB$ . 若  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ ,  $|\mathbf{b}| = 2$ , 则  $\overrightarrow{CD} =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$  (B)  $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$  (C)  $\frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b}$  (D)  $\frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$
- 已知正四棱锥  $S-ABCD$  中,  $SA = 2\sqrt{3}$ , 那么当该棱锥的体积最大时, 它的高为 ( )  
(A) 1 (B)  $\sqrt{3}$  (C) 2 (D) 3
- 若曲线  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  在点  $\left(a, a^{-\frac{1}{2}}\right)$  处的切线与两个坐标轴围成的三角形的面积为 18, 则  $a =$  ( )  
(A) 64 (B) 32 (C) 16 (D) 8

- 与正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的三条棱  $AB$ 、 $CC_1$ 、 $A_1D_1$  所在直线的距离相等的点 ( )  
(A) 有且只有 1 个 (B) 有且只有 2 个  
(C) 有且只有 3 个 (D) 有无数个

- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过右焦点  $F$  且斜率为  $k$  ( $k > 0$ ) 的直线与  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点. 若  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $k =$  ( )  
(A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2

## 二、填空题

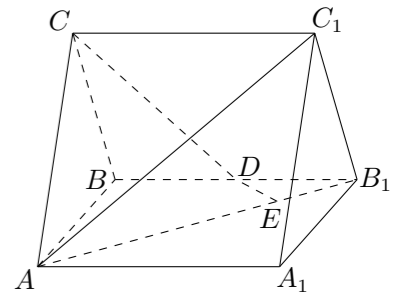
- 已知  $\alpha$  是第二象限的角,  $\tan(\pi + 2\alpha) = -\frac{4}{3}$ , 则  $\tan \alpha =$ \_\_\_\_\_.
- 若  $\left(x - \frac{a}{x}\right)^9$  的展开式中  $x^3$  的系数是  $-84$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
- 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线为  $l$ , 过  $M(1, 0)$  且斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $l$  相交于点  $A$ , 与  $C$  的一个交点为  $B$ . 若  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ , 则  $p =$ \_\_\_\_\_.
- 已知球  $O$  的半径为 4, 圆  $M$  与圆  $N$  为该球的两个小圆,  $AB$  为圆  $M$  与圆  $N$  的公共弦,  $AB = 4$ . 若  $OM = ON = 3$ , 则两圆圆心的距离  $MN =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

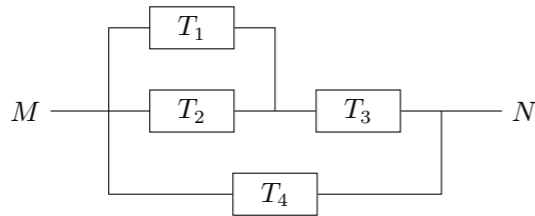
- $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  上的一点,  $BD = 33$ ,  $\sin B = \frac{5}{13}$ ,  $\cos \angle ADC = \frac{3}{5}$ , 求  $AD$ .

- 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = (n^2 + n) \cdot 3^n$ .  
(1) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$ ;  
(2) 证明:  $\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} > 3^n$ .

- 如图, 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AC = BC$ ,  $AA_1 = AB$ ,  $D$  为  $BB_1$  的中点,  $E$  为  $AB_1$  上的一点,  $AE = 3EB_1$ .  
(1) 证明:  $DE$  为异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的公垂线;  
(2) 设异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的夹角为  $45^\circ$ , 求二面角  $A_1-AC_1-B_1$  的大小.



20. 如图, 由  $M$  到  $N$  的电路中有 4 个组件, 分别标为  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , 电流能通过  $T_1, T_2, T_3$  的概率都是  $p$ , 电流能通过  $T_4$  的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知  $T_1, T_2, T_3$  中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.
- (1) 求  $p$ ;
  - (2) 求电流能在  $M$  与  $N$  之间通过的概率;
  - (3)  $\xi$  表示  $T_1, T_2, T_3, T_4$  中能通过电流的组件个数, 求  $\xi$  的期望.



21. 已知斜率为 1 的直线  $l$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 相交于  $B, D$  两点, 且  $BD$  的中点为  $M(1, 3)$ .
- (1) 求  $C$  的离心率;
  - (2) 设  $C$  的右顶点为  $A$ , 右焦点为  $F$ ,  $|DF| \cdot |BF| = 17$ , 证明: 过  $A, B, D$  三点的圆与  $x$  轴相切.

22. 设函数  $f(x) = 1 - e^{-x}$ .
- (1) 证明: 当  $x > -1$  时,  $f(x) \geq \frac{x}{x+1}$ ;
  - (2) 设当  $x \geq 0$  时,  $f(x) \leq \frac{x}{ax+1}$ , 求  $a$  的取值范围.