# 2017 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

# 理科数学

## 一、选择题

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $2+\mathrm{i}$　(D) $2-\mathrm{i}$

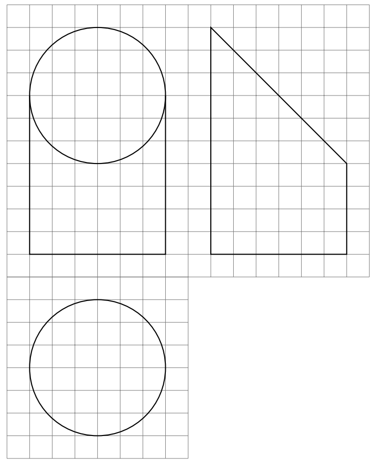
2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ ( )

(A) $\{1,-3\}$　(B) $\{1,0\}$　(C) $\{1,3\}$　(D) $\{1,5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?” 意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 ( )

(A) 1 盏　(B) 3 盏　(C) 5 盏　(D) 9 盏

4. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为( )



(A) $90\pi$　(B) $63\pi$　(C) $42\pi$　(D) $36\pi$

5. 设 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\ 2x-3y+3\geqslant 0\\ y+3\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=2x+y$ 的最小值是( )

(A) $-15$　(B) $-9$　(C) $1$　(D) $9$

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 ( )

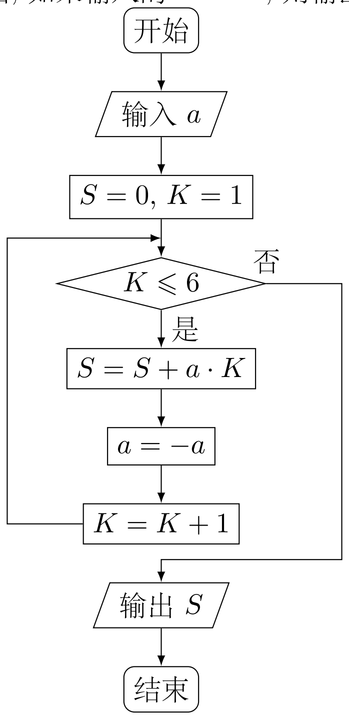
(A) 12 种　(B) 18 种　(C) 24 种　(D) 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 ( )

(A) 乙可以知道四人的成绩　(B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩　(D) 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ ( )




(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

9. 若双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2, 则 $C$ 的离心率为 ( )

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 $AB_1$ 与 $BC_1$ 所成角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　(C) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ( )

(A) $-1$　(B) $-2\mathrm{e}^{-3}$　(C) $5\mathrm{e}^{-3}$　(D) $1$

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $P$ 为平面 $ABC$ 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 ( )

(A) $-2$　(B) $-\dfrac{3}{2}$　(C) $-\dfrac{4}{3}$　(D) $-1$

## 二、填空题

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, $X$ 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$______.

14. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\ \left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$______.

16. 已知 $F$ 是抛物线 $C$: $y^2=8x$ 的焦点, $M$ 是 $C$ 上一点, $FM$ 的延长线交 $y$ 轴于点 $N$. 若 $M$ 为 $FN$ 的中点, 则 $|FN|=$______.

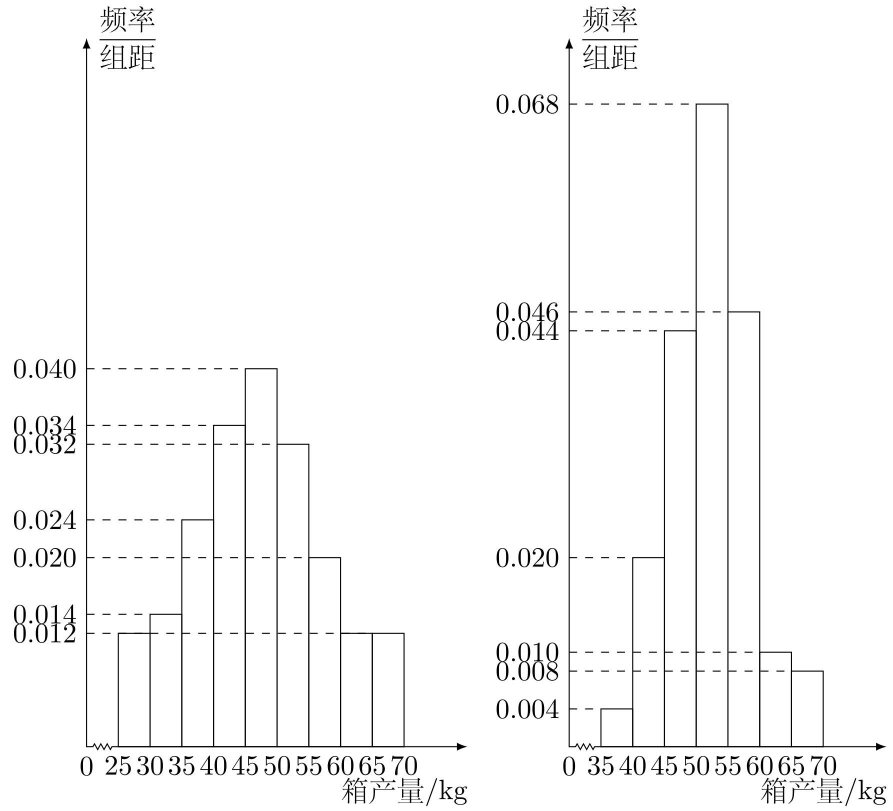
## 三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 $b$.

18. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:




旧养殖法　　新养殖法

(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 $A$ 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg”, 估计 $A$ 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

| | 箱产量 $<50$ kg | 箱产量 $\geqslant 50$ kg |
|---|---|---|
| 旧养殖法 | | |
| 新养殖法 | | |

(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

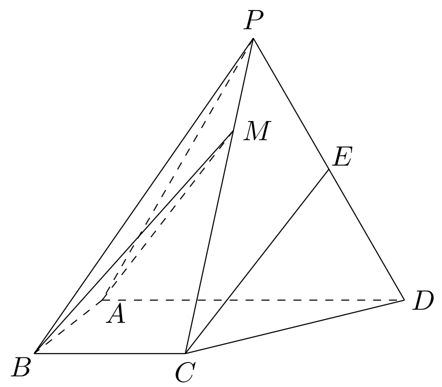
| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $K$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD$ 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$, $E$ 是 $PD$ 的中点.

(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 $PAB$;

(2) 点 $M$ 在棱 $PC$ 上, 且直线 $BM$ 与底面 $ABCD$ 所成角为 $45^{\circ}$, 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.




20. 设 $O$ 为坐标原点, 动点 $M$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 $M$ 作 $x$ 轴的垂线, 垂足为 $N$, 点 $P$ 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 $P$ 的轨迹方程;

(2) 设点 $Q$ 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 $P$ 且垂直于 $OQ$ 的直线 $l$ 过 $C$ 的左焦点 $F$.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geqslant 0$.

(1) 求 $a$;

(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 $x_0$, 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

22. 在直角坐标系 $xOy$ 中, 以坐标原点为极点, $x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

(1) $M$ 为曲线 $C_1$ 上的动点, 点 $P$ 在线段 $OM$ 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 $P$ 的轨迹 $C_2$ 的直角坐标方程;

(2) 设点 $A$ 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, 点 $B$ 在曲线 $C_2$ 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:

(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;

(2) $a+b\leqslant 2$.