2013 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$, $B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$, 则 ( )

(A) $A\cap B=\varnothing$ (B) $A\cup B=\mathbf{R}$ (C) $B\subseteq A$ (D) $A\subseteq B$

2. 若复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})\,z=|4+3\mathrm{i}|$, 则 z 的虚部为 ( )

(A) -4 (B) $-\dfrac{4}{5}$ (C) 4 (D) $\dfrac{4}{5}$

3. 为了解某地区的中小学生视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男女生视力情况差异不大, 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ( )

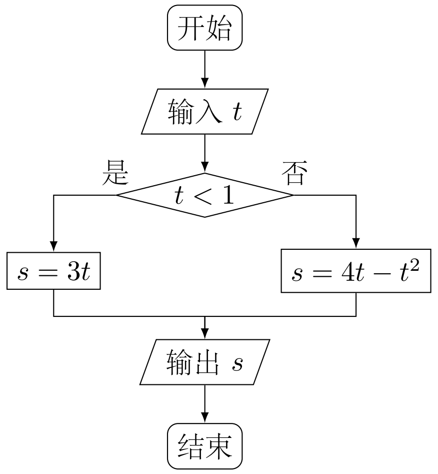
(A) 简单随机抽样 (B) 按性别分层抽样

(C) 按学段分层抽样 (D) 系统抽样

4. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为 ( )

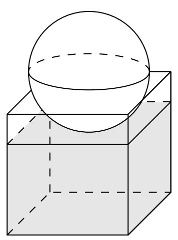
(A) $y=\pm\dfrac{1}{4}x$ (B) $y=\pm\dfrac{1}{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ (D) $y=\pm x$

5. 执行下面的程序框图, 若输入的 $t\in[-1,3]$, 则输出的 s 属于 ( )



(A) $[-3,4]$ (B) $[-5,2]$ (C) $[-4,3]$ (D) $[-2,5]$

6. 如图, 有一个水平放置的透明无盖的正方体容器, 容器高 8 cm, 将一个球放在容器口, 再向容器内注水, 当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm, 如果不计容器的厚度, 则球的体积为 ( )

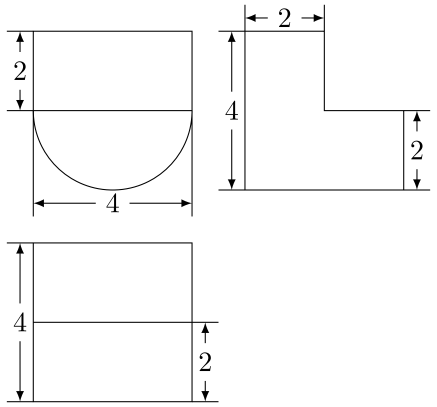


(A) $\dfrac{500\pi}{3}$ cm^3 (B) $\dfrac{866\pi}{3}$ cm^3 (C) $\dfrac{1372\pi}{3}$ cm^3 (D) $\dfrac{2048\pi}{3}$ cm^3

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_{m-1}=-2$, $S_m=0$, $S_{m+1}=3$, 则 $m=$ ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何的体积为 ( )



(A) $16+8\pi$ (B) $8+8\pi$ (C) $16+16\pi$ (D) $8+16\pi$

9. 设 m 为正整数, $(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a, $(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b, 若 $13a=7b$, 则 $m=$ ( )

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

10. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$, 过点 F 的直线交 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$, 则 E 的方程为( )

(A) $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,\ x\leqslant 0\\ \ln(x+1),\ x>0\end{cases}$, 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,0]$ (B) $(-\infty,1]$ (C) $[-2,1]$ (D) $[-2,0]$

12. 设 $\triangle A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n, b_n, c_n, $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 S_n, $n=1$, 2, 3, $\cdots$, 若 $b_1>c_1$, $b_1+c_1=2a_1$, $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}$, $c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$, 则 ( )

(A) $\{S_n\}$ 为递减数列

(B) $\{S_n\}$ 为递增数列

(C) $\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列, $\{S_{2n}\}$ 为递减数列

(D) $\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列, $\{S_{2n}\}$ 为递增数列

二、填空题

13. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$______.

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=$______.

15. 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$______.

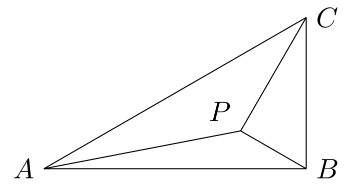
16. 若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称, 则 $f(x)$ 的最大值是______.

三、解答题

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90°$, $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BPC=90°$.

(1) 若 $PB=\dfrac{1}{2}$, 求 PA;

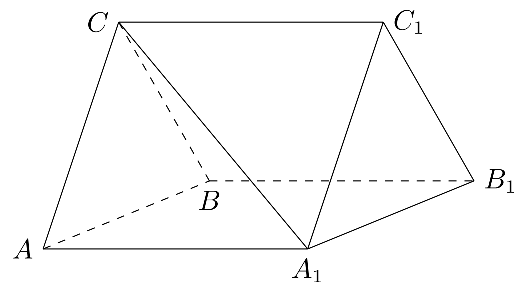
(2) 若 $\angle APB=150°$, 求 $\tan\angle PBA$.



18. 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60°$.

(1) 证明: $AB\perp A_1C$;

(2) 若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B, $AB=CB$, 求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.

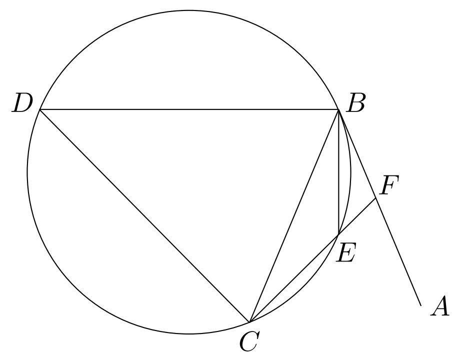


19. 一批产品需要进行质量检验, 检验方案是: 先从这批产品中任取 4 件作检验, 这 4 件产品中优质品的件数记为 n. 如果 $n=3$, 再从这批产品中任取 4 件作检验, 若都为优质品, 则这批产品通过检验; 如果 $n=4$, 再从这批产品中任取 1 件作检验, 若为优质品, 则这批产品通过检验; 其他情况下, 这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%, 即取出的产品是优质品的概率都为 $\dfrac{1}{2}$, 且各件产品是否为优质品相互独立.
(1) 求这批产品通过检验的概率;
(2) 已知每件产品检验费用为 100 元, 凡抽取的每件产品都需要检验, 对这批产品作质量检验所需的费用记为 X (单位: 元), 求 X 的分布列及数学期望.

20. 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.
(1) 求 C 的方程;
(2) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 当圆 P 的半径最长时, 求 $|AB|$.

21. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x(cx+d)$, 若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$, 且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$.
(1) 求 a, b, c, d 的值;
(2) 若 $x\geqslant -2$ 时, $f(x)\leqslant kg(x)$, 求 k 的取值范围.

22. 如图, 直线 AB 为圆的切线, 切点为 B, 点 C 在圆上, $\angle ABC$ 的角平分线 BE 交圆于点 E, DB 垂直 BE 交圆于 D.
(1) 证明: $DB=DC$;
(2) 设圆的半径为 1, $BC=\sqrt{3}$, 延长 CE 交 AB 于点 F, 求 $\triangle BCF$ 外接圆的半径.



23. 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.
(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程;
(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho\geqslant 0$, $0\leqslant\theta<2\pi$).

24. 已知函数 $f(x)=|2x-1|+|2x+a|$, $g(x)=x+3$.
(1) 当 $a=-2$ 时, 求不等式 $f(x)<g(x)$ 的解集;
(2) 设 $a>-1$, 且当 $x\in\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$, 求 a 的取值范围.