

文科数学

一、填空题

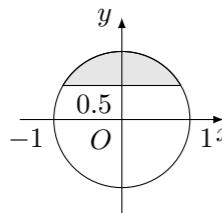
1. 若 $z \in \mathbf{C}$, $(3+z)\mathbf{i} = 1$ (\mathbf{i} 为虚数单位), 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 120° , 且 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, 则 $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 方程 $\log_3(1 - 2 \times 3^x) = 2x + 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 若正四棱锥的底面边长为 $2\sqrt{3}$ cm, 体积为 4 cm³, 则它的侧面与底面所成的二面角的大小是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 在二项式 $(1+3x)^n$ 和 $(2x+5)^n$ 的展开式中, 各项系数之和分别记为 a_n 、 b_n , n 是正整数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2b_n}{3a_n - 4b_n} = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 已知圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 和圆外一点 $P(-2, 0)$, 过点 P 作圆的切线, 则两条切线夹角的正切值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 在某次花样滑冰比赛中, 发生裁判受贿事件, 竞赛委员会决定将裁判由原来的 9 名增至 14 名, 但只任取其中 7 名裁判的评分作为有效分, 若 14 名裁判中有 2 人受贿, 则有效分中没有受贿裁判的评分的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果用数值表示)
8. 抛物线 $(y-1)^2 = 4(x-1)$ 的焦点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. 某工程由下列工序组成, 则工程总时数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 天.

工序	a	b	c	d	e	f
紧前工序	-	-	a, b	c	c	d, e
工时数 (天)	2	3	2	5	4	1

10. 设函数 $f(x) = \sin 2x$, 若 $f(x+t)$ 是偶函数, 则 t 的一个可能值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 若数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, 且 $a_{n+1} = a_n^2$ (n 是正整数), 则数列的通项 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x$ ($x \in D$) 的充要条件是 $y = f^{-1}(x)$ 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题

13. 如图, 与复平面中的阴影部分 (含边界) 对应的复数集合是 ()

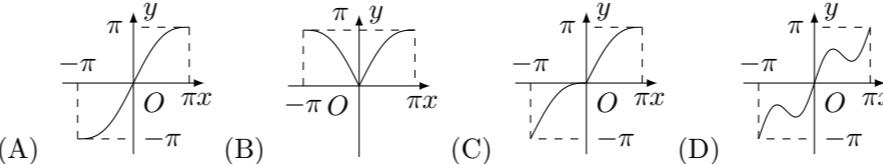


- (A) $\left\{ z \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C} \right\}$ (B) $\left\{ z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C} \right\}$
 (C) $\left\{ z \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C} \right\}$ (D) $\left\{ z \mid |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{2}, z \in \mathbf{C} \right\}$

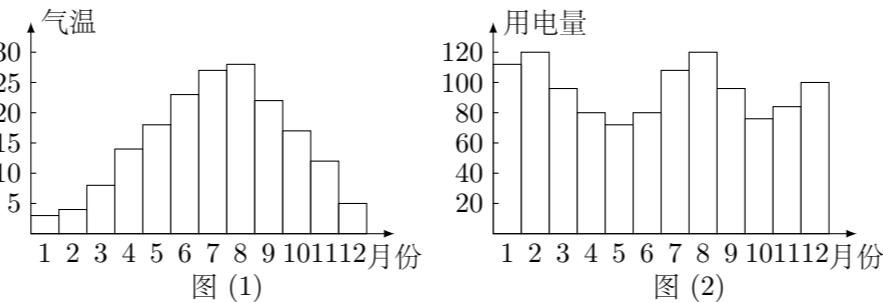
14. 已知直线 l, m , 平面 α, β , 且 $l \perp \alpha, m \subset \beta$, 给出下列四个命题.
 ① 若 $\alpha \parallel \beta$, $l \perp m$; ② $l \perp m$, $\alpha \parallel \beta$; ③ 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \parallel m$; ④ 若 $l \parallel m$, $\alpha \perp \beta$.
 其中正确命题的个数是 ()

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

15. 函数 $y = x + \sin|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图象是 ()



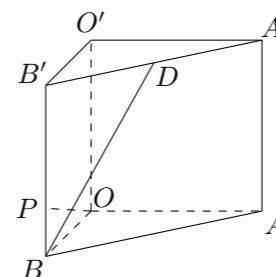
16. 一般地, 家庭用电量 (千瓦时) 与气温 ($^{\circ}\text{C}$) 有一定的关系. 图(1) 表示某年 12 个月中每月的平均气温, 图(2) 表示某家庭在这年 12 个月中每月的用电量, 根据这些信息, 以下关于该家庭用电量与气温间关系的叙述中, 正确的是 ()



- (A) 气温最高时, 用电量最多
 (B) 气温最低时, 用电量最少
 (C) 当气温大于某一值时, 用电量随气温增高而增加
 (D) 当气温小于某一值时, 用电量随气温降低而增加

三、解答题

17. 如图, 在直三棱柱 $ABO - A'B'O'$ 中, $OO' = 4$, $OA = 4$, $OB = 3$, $\angle AOB = 90^\circ$, D 是线段 $A'B'$ 的中点, P 是侧棱 BB' 上的一点, 若 $OP \perp BD$, 求 OP 与底面 AOB 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知点 $A(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $B(\sqrt{3}, 0)$, 动点 C 到 A, B 两点的距离之差的绝对值为 2, 点 C 的轨迹与直线 $y = x - 2$ 交于 D, E 两点, 求线段 DE 的长.

20. 某商场在促销期间规定: 商场内所有商品按标价的 80% 出售, 同时, 当顾客在该商场内消费满一定金额后, 按如下方案获得相应金额的奖券:

消费金额的范围	[200, 400)	[400, 500)	[500, 700)	[700, 900)	...
获得奖券的金额	30	60	100	130	...

根据上述促销方法, 顾客在该商场购物可以获得双重优惠, 例如, 购买标价为 400 元的商品, 则消费金额为 320 元, 获得的优惠额为: $400 \times 0.2 + 30 = 110$ (元), 设购买商品得到的优惠率 = $\frac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$. 试问:

- (1) 若购买一件标价为 1000 元的商品, 顾客得到的优惠率是多少?
- (2) 对于标价在 [500, 800] (元) 内的商品, 顾客购买标价为多少元的商品, 可得到不小于 $\frac{1}{3}$ 的优惠率?

21. 已知函数 $f(x) = a \times b^x$ 的图象过点 $A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5, 1)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 解关于 n 的不等式 $a_n S_n \leq 0$;
- (3) 对于 (2) 中的 a_n 与 S_n , 整数 96 是否为数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项? 若是, 则求出相应的项数; 若不是, 则说明理由.

22. 规定 $C_x^m = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!}$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, m 是正整数, 且 $C_x^0 = 1$, 这是组合数 C_n^m (n, m 是正整数, 且 $m \leq n$) 的一种推广.

- (1) 求 C_{-15}^3 的值.
- (2) 设 $x > 0$, 当 x 为何值时, $\frac{C_x^3}{(C_x^1)^2}$ 取得最小值?
- (3) 组合数的两个性质: ① $C_n^m = C_n^{n-m}$; ② $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ 是否都能推广到 C_x^m ($x \in \mathbf{R}$, m 是正整数) 的情形? 若能推广, 则写出推广的形式并给出证明; 若不能, 则说明理由.