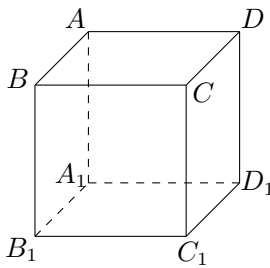


# 理科数学

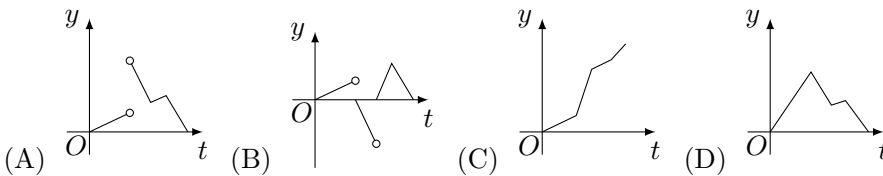
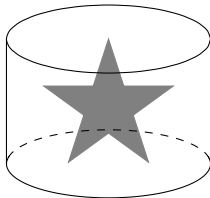
## 一、选择题

- 已知  $(x + i)(1 - i) = y$ , 则实数  $x, y$  分别为 ( )  
 (A)  $x = -1, y = 1$  (B)  $x = -1, y = 2$   
 (C)  $x = 1, y = 1$  (D)  $x = 1, y = 2$
- 已知集合  $A = \{x | |x| \leq 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$  (B)  $\{x | x \geq 0\}$   
 (C)  $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$  (D)  $\emptyset$
- 不等式  $\left| \frac{x-2}{x} \right| > \frac{x-2}{x}$  的解集是 ( )  
 (A)  $(0, 2)$  (B)  $(-\infty, 0)$   
 (C)  $(2, +\infty)$  (D)  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) =$  ( )  
 (A)  $\frac{5}{3}$  (B)  $\frac{3}{2}$  (C) 2 (D) 不存在
- 等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_8 = 4$ , 函数  $f(x) = x(x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_8)$ , 则  $f'(0) =$  ( )  
 (A)  $2^6$  (B)  $2^9$  (C)  $2^{12}$  (D)  $2^{15}$
- $(2 - \sqrt{x})^8$  展开式中不含  $x^4$  项的系数的和为 ( )  
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
- $E, F$  是等腰直角  $\triangle ABC$  斜边  $AB$  上的三等分点, 则  $\tan \angle ECF =$  ( )  
 (A)  $\frac{16}{27}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
- 直线  $y = kx + 3$  与圆  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$  相交于  $M, N$  两点, 若  $|MN| \geq 2\sqrt{3}$ , 则  $k$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left[-\frac{3}{4}, 0\right]$  (B)  $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [0, +\infty)$   
 (C)  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  (D)  $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$
- 给出下列三个命题:  
 ① 函数  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  与  $y = \ln \tan \frac{x}{2}$  是同一函数;  
 ② 若函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称, 则函数  $y = f(2x)$  与  $y = \frac{1}{2}g(x)$  的图象也关于直线  $y = x$  对称;  
 ③ 若奇函数  $f(x)$  对定义域内任意  $x$  都有  $f(x) = f(2-x)$ , 则  $f(x)$  为周期函数.  
 其中真命题是 ( )  
 (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ②

- 过正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的顶点  $A$  作直线  $l$ , 使  $l$  与棱  $AB, AD, AA_1$  所成的角都相等, 这样的直线  $l$  可以作 ( )

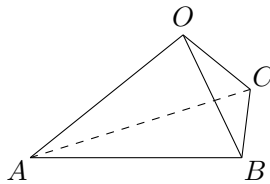


- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条
- 一位国王的铸币大臣在每箱 100 枚的硬币中各掺入了一枚劣币, 国王怀疑大臣作弊, 他用两种方法来检测. 方法一: 在 10 箱中各任意抽查一枚; 方法二: 在 5 箱中各任意抽查两枚. 国王用方法一、二能发现至少一枚劣币的概率分别记为  $p_1$  和  $p_2$ . 则 ( )  
 (A)  $p_1 = p_2$  (B)  $p_1 < p_2$   
 (C)  $p_1 > p_2$  (D) 以上三种情况都有可能
- 如图, 一个正五角星薄片 (其对称轴与水面垂直) 匀速地升出水面, 记  $t$  时刻五角星露出水面部分的图形面积为  $S(t)$  ( $S(0) = 0$ ), 则导函数  $y = S'(t)$  的图象大致为 ( )



## 二、填空题

- 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, \mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 则  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ \_\_\_\_\_.
- 将 6 位志愿者分成 4 组, 其中两个组各 2 人, 另两个组各 1 人, 分赴世博会的四个不同场馆服务, 不同的分配方案有\_\_\_\_\_种. (用数字作答)
- 点  $A(x_0, y_0)$  在双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$  的右支上, 若点  $A$  到右焦点的距离等于  $2x_0$ , 则  $x_0 =$ \_\_\_\_\_.
- 如图, 在三棱锥  $O - ABC$  中, 三条棱  $OA, OB, OC$  两两垂直, 且  $OA > OB > OC$ , 分别经过三条棱  $OA, OB, OC$  作一个截面平分三棱锥的体积, 截面面积依次为  $S_1, S_2, S_3$ , 则  $S_1, S_2, S_3$  的大小关系为\_\_\_\_\_.



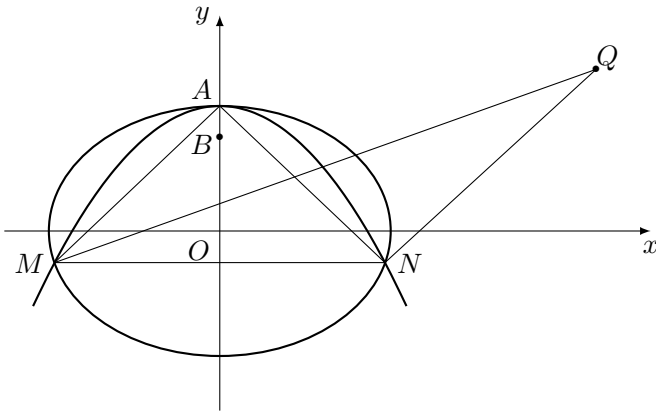
## 三、解答题

- 已知函数  $f(x) = (1 + \cot x) \sin^2 x + m \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .  
 (1) 当  $m = 0$  时, 求  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right]$  上的取值范围;  
 (2) 当  $\tan \alpha = 2$  时,  $f(\alpha) = \frac{3}{5}$ , 求  $m$  的值.

- 某迷宫有三个通道, 进入迷宫的每个人都要经过一个智能门. 首次到达此门, 系统会随机 (即等可能) 为你打开一个通道. 若是 1 号通道, 则需要 1 小时走出迷宫; 若是 2 号、3 号通道, 则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时, 系统会随机打开一个你未到过的通道, 直至走出迷宫为止. 令  $\xi$  表示走出迷宫所需的时间.  
 (1) 求  $\xi$  的分布列;  
 (2) 求  $\xi$  的数学期望.

19. 设函数  $f(x) = \ln x + \ln(2-x) + ax$  ( $a > 0$ ).
- (1) 当  $a = 1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 若  $f(x)$  在  $(0, 1]$  上的最大值为  $\frac{1}{2}$ , 求  $a$  的值.

21. 设椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 抛物线  $C_2: x^2 + by = b^2$ .
- (1) 若  $C_2$  经过  $C_1$  的两个焦点, 求  $C_1$  的离心率;
  - (2) 设  $A(0, b)$ ,  $Q\left(3\sqrt{3}, \frac{5}{4}b\right)$ , 又  $M, N$  为  $C_1$  与  $C_2$  不在  $y$  轴上的两个交点, 若  $\triangle AMN$  的垂心为  $B\left(0, \frac{3}{4}b\right)$ , 且  $\triangle QMN$  的重心在  $C_2$  上, 求椭圆  $C_1$  和抛物线  $C_2$  的方程.



22. 证明以下命题:
- (1) 对任一正整数  $a$ , 都存在正整数  $b, c$  ( $b < c$ ), 使得  $a^2, b^2, c^2$  成等差数列;
  - (2) 存在无穷多个互不相似的三角形  $\triangle_n$ , 其边长  $a_n, b_n, c_n$  为正整数且  $a_n^2, b_n^2, c_n^2$  成等差数列.

20. 如图,  $\triangle BCD$  与  $\triangle MCD$  都是边长为 2 的正三角形, 平面  $MCD \perp$  平面  $BCD$ ,  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $AB = 2\sqrt{3}$ .
- (1) 求点  $A$  到平面  $MBC$  的距离;
  - (2) 求平面  $ACM$  与平面  $BCD$  所成二面角的正弦值.

