2006 年普通高等学校招生考试（陕西卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 10\}$, 集合 $Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2+x-6\leqslant 0\}$, 则 $P\cap Q$ 等于 ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{1,2\}$ (C) $\{2,3\}$ (D) $\{1,2,3\}$

2. 复数 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$ 等于 ( )

(A) $1-\mathrm{i}$ (B) $1+\mathrm{i}$ (C) $-1+\mathrm{i}$ (D) $-1-\mathrm{i}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})}$ 等于 ( )

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 0

4. 设函数 $f(x)=\log_a(x+b)$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象过点 $(2,1)$, 其反函数的图象过点 $(2,8)$, 则 $a+b$ 等于 ( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0,a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切, 则 a 的值为( )

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. "等式 $\sin(\alpha+\gamma)=\sin 2\beta$ 成立"是"α,β,γ 成等差数列"的 ( )

(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ $(a>\sqrt{2})$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知不等式 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x,y 恒成立, 则正实数 a 的最小值为 ( )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

9. 已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 ( )

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

10. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(0<a<3)$. 若 $x_1<x_2$, $x_1+x_2=1-a$, 则 ( )

(A) $f(x_1)<f(x_2)$ (B) $f(x_1)=f(x_2)$

(C) $f(x_1)>f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

11. 已知平面 α 外不共线的三点 A,B,C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 ( )

(A) 平面 ABC 必平行于 α

(B) 平面 ABC 必与 α 相交

(C) 平面 ABC 必不垂直于 α

(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

12. 为确保信息安全, 信息需加密传播, 发送方由明文 $\longrightarrow$ 密文 (加密), 接收方由密文 $\longrightarrow$ 明文 (解密). 已知加密规则为: 明文 a,b,c,d 对应密文 $a+2b$, $2b+c$, $2c+3d$, $4d$. 例如, 明文 1, 2, 3, 4 对应密文 5, 7, 18, 16. 当接收方收到密文 14, 9, 23, 28 时, 则解密得到的明文为 ( )

(A) 4, 6, 1, 7 (B) 7, 6, 1, 4 (C) 6, 4, 1, 7 (D) 1, 6, 4, 7

二、填空题

13. $\cos 43^\circ\cos 77^\circ+\sin 43^\circ\cos 167^\circ$ 的值为______.

14. $\left(3x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 展开式中 x^{-3} 的系数为______. (用数字作答)

15. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是______.

16. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 甲和丙只能同去或同不去, 则不同的选派方案共有______种.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

18. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{5}$、$\dfrac{1}{2}$.

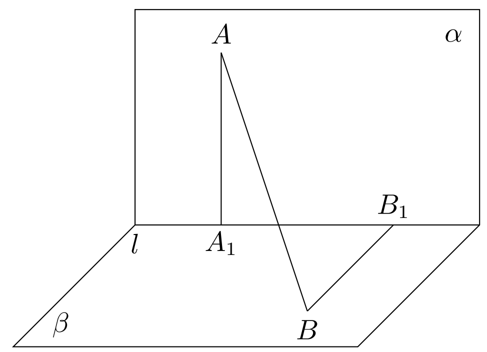
(1) 现 3 人各投篮 1 次, 求 3 人都没有投进的概率;

(2) 用 ξ 表示乙投篮 3 次的进球数, 求随机变量 ξ 的概率分布及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=l$, $A\in\alpha$, $B\in\beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1, 点 B 在 l 上的射影为 B_1. 已知 $AB=2$, $AA_1=1$, $BB_1=\sqrt{2}$. 求:

(1) 直线 AB 分别与平面 α,β 所成角的大小;

(2) 二面角 A_1-AB-B_1 的大小.

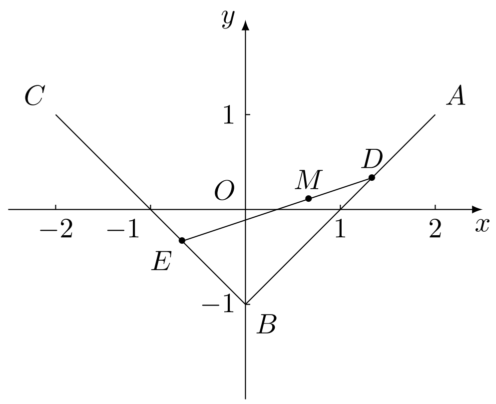


20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n = a_n^2 + 5a_n + 6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

21. 如图, 三定点 $A(2,1)$, $B(0,-1)$, $C(-2,1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DE}$, $t \in [0,1]$.

(1) 求动直线 DE 斜率的变化范围;

(2) 求动点 M 的轨迹方程.



22. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$, 且存在 $x_0 \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, 使 $f(x_0) = x_0$.

(1) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数;

(2) 设 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_{n+1} = f(y_n)$, 其中 $n = 1, 2, \cdots$. 证明: $x_n < x_{n+1} < x_0 < y_{n+1} < y_n$;

(3) 证明: $\dfrac{y_{n+1} - x_{n+1}}{y_n - x_n} < \dfrac{1}{2}$.