2010 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid x>2\}$, 则 $A\cap B$ 等于 ( )

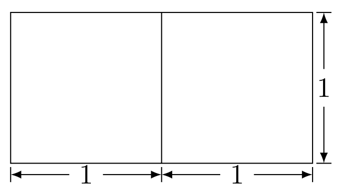
(A) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid x\geqslant 1\}$

(C) $\{x\mid 2\leqslant x<3\}$　(D) $\{x\mid x>2\}$

2. 计算 $1-2\sin^2 22.5^\circ$ 的结果等于 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其侧面积等于 ( )



(A) $\sqrt{3}$　(B) 2　(C) $2\sqrt{3}$　(D) 6

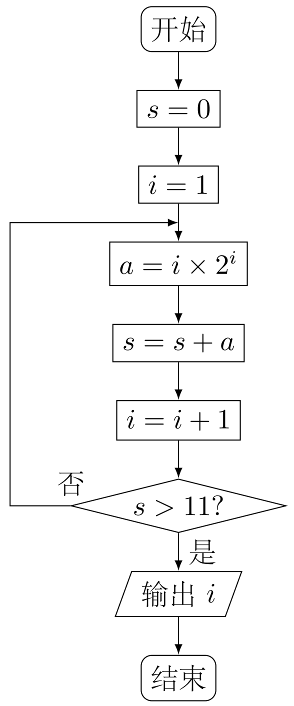
4. i 是虚数单位, $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^4$ 等于 ( )

(A) i　(B) $-$i　(C) 1　(D) -1

5. 若 $x, y\in\mathbf{R}$, 且 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x-2y+3\geqslant 0\\ y\geqslant x\end{cases}$, 则 $z=x+2y$ 的最小值等于 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) 9

6. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于 ( )



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3,\ x\leqslant 0\\ -2+\ln x,\ x>0\end{cases}$ 的零点个数为 ( )

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

8. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x,3)$ $(x\in\mathbf{R})$, 则“$x=4$”是“$|\boldsymbol{a}|=5$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

9. 若某校高一年级 8 个班参加合唱比赛的得分如茎叶图所示, 则这组数据的中位数和平均数分别是 ( )

8	9	7				
9	3	1	6	4	0	2

(A) 91.5 和 91.5　(B) 91.5 和 92　(C) 91 和 91.5　(D) 92 和 92

10. 将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位, 若所得图象与原图象重合, 则 ω 的值不可能等于 ( )

(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 12

11. 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{FP}$ 的最大值为 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 6　(D) 8

12. 设非空集合 $S=\{x\mid m\leqslant x\leqslant l\}$ 满足: 当 $x\in S$ 时, 有 $x^2\in S$. 给出如下三个命题:

① 若 $m=1$, 则 $S=\{1\}$;

② 若 $m=-\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$;

③ 若 $l=\dfrac{1}{2}$, 则 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$.

其中正确命题的个数是 ( )

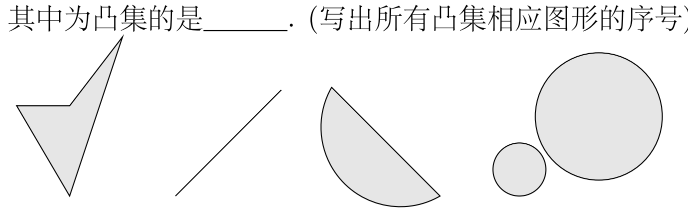
(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

二、填空题

13. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则 b 等于______.

14. 将容量为 n 的样本中的数据分成 6 组, 绘制频率分步直方图. 若第一组至第六组数据的频率之比为 $2:3:4:6:4:1$, 且前三组数据的频数之和等于 27, 则 n 等于______.

15. 对于平面上的点集 Ω, 如果连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω, 则称 Ω 为平面上的凸集, 给出平面上 4 个点集的图形如图所示 (阴影区域及其边界), 其中为凸集的是______. (写出所有凸集相应图形的序号)



①　②　③　④

16. 观察下列等式:

① $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

② $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$;

③ $\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$;

④ $\cos 8\alpha=128\cos^8\alpha-256\cos^6\alpha+160\cos^4\alpha-32\cos^2\alpha+1$;

⑤ $\cos 10\alpha=m\cos^{10}\alpha-1280\cos^8\alpha+1120\cos^6\alpha+n\cos^4\alpha+p\cos^2\alpha-1$.

可以推测, $m-n+p=$______.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}-S_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 以及前 n 项和 S_n;

(2) 若 S_1, $t(S_1+S_2)$, $3(S_2+S_3)$ 成等差数列, 求实数 t 的值.

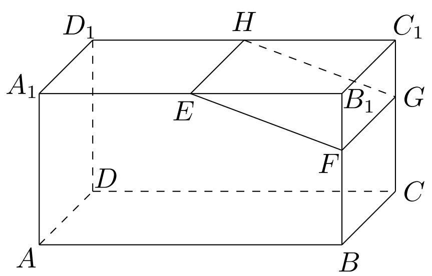
18. 设平面向量 $\boldsymbol{a_m}=(m,1)$, $\boldsymbol{b_n}=(2,n)$, 其中 $m, n\in\{1,2,3,4\}$.

(1) 请列出有序数组 (m,n) 的所有可能结果;

(2) 记“使得 $\boldsymbol{a_m}\perp(\boldsymbol{a_m}-\boldsymbol{b_n})$ 成立的 (m,n)”为事件 A, 求事件 A 发生的概率.

19. 已知抛物线 C: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 过点 $A(1, -2)$.
(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其准线方程;
(2) 是否存在平行于 OA (O 为坐标原点) 的直线 l, 使得直线 l 与抛物线 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, H 分别是棱 A_1B_1, D_1C_1 上的点 (点 E 与 B_1 不重合), 且 $EH \parallel A_1D_1$. 过 EH 的平面与棱 BB_1, CC_1 相交, 交点分别为 F, G.
(1) 证明: $AD \parallel$ 平面 $EFGH$;
(2) 设 $AB = 2AA_1 = 2a$. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内随机选取一点. 记该点取自几何体 $A_1ABFE-D_1DCGH$ 内的概率为 p, 当点 E, F 分别在棱 A_1B_1, B_1B 上运动且满足 $EF = a$ 时, 求 p 的最小值.



21. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 $30°$ 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.
(1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?
(2) 为保证小艇在 30 分钟内 (含 30 分钟) 能与轮船相遇, 试确定小艇航行速度的最小值;
(3) 是否存在 v, 使得小艇以 v 海里/小时的航行速度行驶, 总能有两种不同的航行方向与轮船相遇? 若存在, 试确定 v 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + ax + b$ 的图象在点 $P(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 3x - 2$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 设 $g(x) = f(x) + \dfrac{m}{x-1}$ 是 $[2, +\infty)$ 上的增函数.
① 求实数 m 的最大值;
② 当 m 取最大值时, 是否存在点 Q, 使得过点 Q 的直线若能与曲线 $y = g(x)$ 围成两个封闭图形, 则这两个封闭图形的面积总相等? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.