2015 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, i^{607} 的共轭复数为 ( )

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) 1 (D) -1

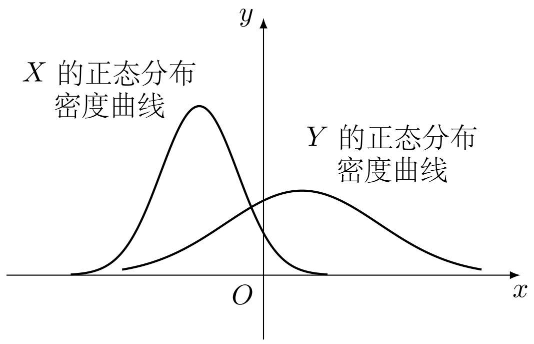
2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ( )

(A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石

3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ( )

(A) 2^{12} (B) 2^{11} (C) 2^{10} (D) 2^{9}

4. 设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 下列结论中正确的是 ( )



(A) $P(Y\geqslant\mu_2)\geqslant P(Y\geqslant\mu_1)$

(B) $P(X\leqslant\sigma_2)\leqslant P(X\leqslant\sigma_1)$

(C) 对任意正数 t, $P(X\leqslant t)\geqslant P(Y\leqslant t)$

(D) 对任意正数 t, $P(X\geqslant t)\geqslant P(Y\geqslant t)$

5. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{R}$, $n\geqslant 3$. 若 p: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成等比数列; q: $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$, 则 ( )

(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件

(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件

(C) p 是 q 的充分必要条件

(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件

6. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $g(x)=f(x)-f(ax)$ $(a>1)$, 则 ( )

(A) $\operatorname{sgn}[g(x)]=\operatorname{sgn} x$ (B) $\operatorname{sgn}[g(x)]=-\operatorname{sgn} x$

(C) $\operatorname{sgn}[g(x)]=\operatorname{sgn}[f(x)]$ (D) $\operatorname{sgn}[g(x)]=-\operatorname{sgn}[f(x)]$

7. 在区间 $[0,1]$ 上随机取两个数 x, y, 记 p_1 为事件“$x+y\geqslant\frac{1}{2}$”的概率, p_2 为事件“$|x-y|\leqslant\frac{1}{2}$”的概率, p_3 为事件“$xy\leqslant\frac{1}{2}$”的概率, 则 ( )

(A) $p_1<p_2<p_3$ (B) $p_2<p_3<p_1$ (C) $p_3<p_1<p_2$ (D) $p_3<p_2<p_1$

8. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b $(a\neq b)$ 同时增加 m $(m>0)$ 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2, 则 ( )

(A) 对任意的 a, b, $e_1>e_2$

(B) 当 $a>b$ 时, $e_1>e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1<e_2$

(C) 对任意的 a, b, $e_1<e_2$

(D) 当 $a>b$ 时, $e_1<e_2$; 当 $a<b$ 时, $e_1>e_2$

9. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x,\ y\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 2,\ x,\ y\in\mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)\mid (x_1,y_1)\in A,\ (x_2,y_2)\in B\}$, 则 $A\oplus B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30

10. 设 $x\in\mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若存在实数 t, 使得 $[t]=1$, $[t^2]=2$, $\cdots$, $[t^n]=n$ 同时成立, 则正整数 n 的最大值是 ( )

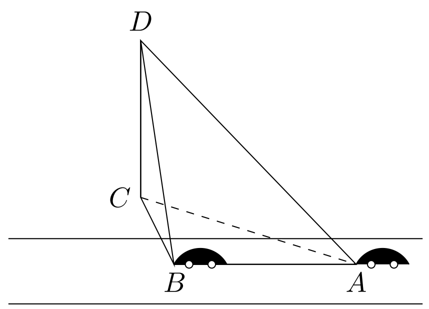
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

二、填空题

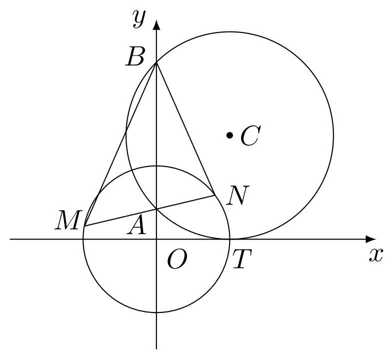
11. 已知向量 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{OA}|=3$, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$______.

12. 函数 $f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2\sin x-|\ln(x+1)|$ 的零点个数为______.

13. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30°, 则此山的高度 $CD=$______m.



14. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1,0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB|=2$.



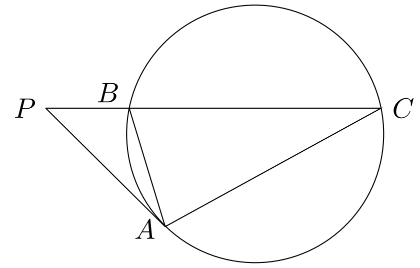
(1) 圆 C 的标准方程为______;

(2) 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2+y^2=1$ 相交于 M, N 两点, 下列三个结论:

① $\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{|MA|}{|MB|}$; ② $\frac{|NB|}{|NA|}-\frac{|MA|}{|MB|}=2$; ③ $\frac{|NB|}{|NA|}+\frac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是______. (写出所有正确结论的序号)

15. 如图, PA 是圆的切线, A 为切点, PBC 是圆的割线, 且 $BC=3PB$, 则 $\frac{AB}{AC}=$______.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-\frac{1}{t}\\ y=t+\frac{1}{t}\end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

三、解答题

17. 某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 将 $y=f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ $(\theta>0)$ 个单位长度, 得到 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$, 求 θ 的最小值.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q. 已知 $b_1=a_1$, $b_2=2$, $q=d$, $S_{10}=100$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

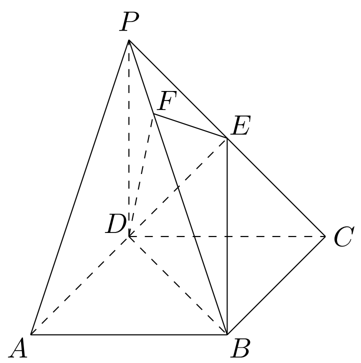
(2) 当 $d>1$ 时, 记 $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

19.《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.

如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD=CD$, 过棱 PC 的中点 E, 作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F, 连接 DE, DF, BD, BE.

(1) 证明: $PB\perp$ 平面 DEF. 试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 说明理由.

(2) 若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$, 求 $\dfrac{DC}{BC}$ 的值.



20. 某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A, B 两种奶制品. 生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨, 使用设备 1 小时, 获利 1000 元; 生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨, 使用设备 1.5 小时, 获利 1200 元. 要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍, 设备每天生产 A, B 两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量 W (单位: 吨) 是一个随机变量, 其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产, 使其获利最大, 因此每天的最大获利 Z (单位: 元) 是一个随机变量.

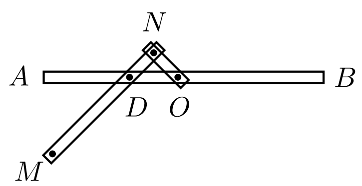
(1) 求 Z 的分布列和均值;

(2) 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立, 求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

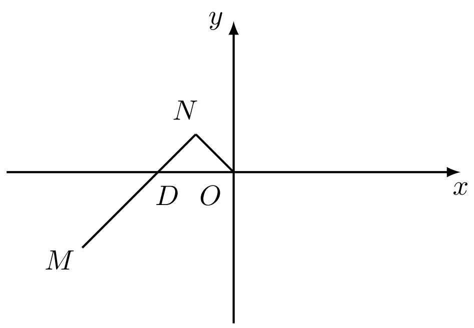
21. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN=ON=1$, $MN=3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C. 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x-2y=0$ 和 $l_2: x+2y=0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



①



②

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $b_n=n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a_n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, e 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x)=1+x-\mathrm{e}^x$ 的单调区间, 并比较 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小;

(2) 计算 $\dfrac{b_1}{a_1}$, $\dfrac{b_1b_2}{a_1a_2}$, $\dfrac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$, 由此推测计算 $\dfrac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;

(3) 令 $c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 数列 $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n, 证明: $T_n<\mathrm{e}S_n$.