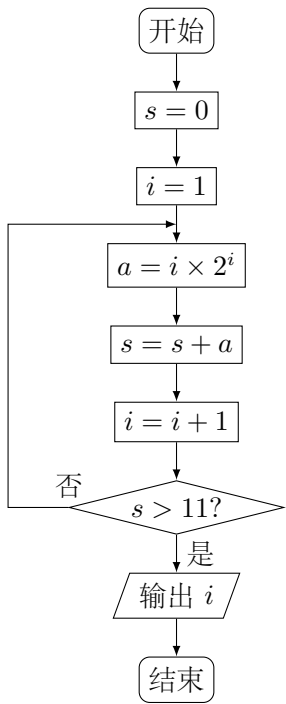


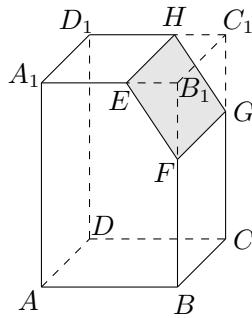
理科数学

一、选择题

- 计算 $\sin 43^\circ \cos 13^\circ - \cos 43^\circ \sin 13^\circ$ 的结果等于 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 以抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为圆心, 且过坐标原点的圆的方程为 ()
 (A) $x^2 + y^2 + 2x = 0$ (B) $x^2 + y^2 + x = 0$
 (C) $x^2 + y^2 - x = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = -11$, $a_4 + a_6 = -6$, 则当 S_n 取最小值时, n 等于 ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
- 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0 \\ -2 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 的零点个数为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的 i 值等于 ()



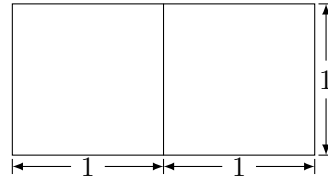
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 如图, 若 Ω 是长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $EFGH$ 截去几何体 $EFGHB_1C_1$ 后得到的几何体, 其中 E 为线段 A_1B_1 上异于 B_1 的点, F 为线段 BB_1 上异于 B_1 的点, 且 $EH \parallel A_1D_1$, 则下列结论中不正确的是()



- (A) $EH \parallel FG$ (B) 四边形 $EFGH$ 是矩形
 (C) Ω 是棱柱 (D) Ω 是棱台
- 若点 O 和点 $F(-2, 0)$ 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 的中心和左焦点, 点 P 为双曲线右支上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的取值范围为 ()
 (A) $[3 - 2\sqrt{3}, +\infty)$ (B) $[3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$
 (C) $[-\frac{7}{4}, +\infty)$ (D) $[\frac{7}{4}, +\infty)$
 - 设不等式组 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ y \geq x \end{cases}$ 所表示的平面区域是 Ω_1 , 平面区域 Ω_2 与 Ω_1 关于直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 对称. 对于 Ω_1 中的任意点 A 与 Ω_2 中的任意点 B , $|AB|$ 的最小值等于 ()
 (A) $\frac{28}{5}$ (B) 4 (C) $\frac{12}{5}$ (D) 2
 - 对于复数 a, b, c, d , 若集合 $S = \{a, b, c, d\}$ 具有性质“对任意 $x, y \in S$, 必有 $xy \in S$ ”, 则当 $\begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = b \end{cases}$ 时, $b + c + d$ 等于 ()
 (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) i
 - 对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x) = kx + b$ (k, b 为常数), 对任给的正数 m , 存在相应的 $x_0 \in D$, 使得当 $x \in D$ 且 $x > x_0$ 时, 总有 $\begin{cases} 0 < f(x) - h(x) < m \\ 0 < h(x) - g(x) < m \end{cases}$, 则称直线 $l: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的“分渐近线”. 给出定义域均为 $D = \{x | x > 1\}$ 的四组函数如下:
 ① $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$;
 ② $f(x) = 10^{-x} + 2, g(x) = \frac{2x - 3}{x}$;
 ③ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}, g(x) = \frac{x \ln x + 1}{\ln x}$;
 ④ $f(x) = \frac{2x^2}{x + 1}, g(x) = 2(x - 1 - e^{-x})$.
 其中, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 存在“分渐近线”的是 ()
 (A) ①④ (B) ②③ (C) ②④ (D) ③④

二、填空题

- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若公比 $q = 4$, 且前 3 项之和等于 21, 则该数列的通项公式为 $a_n =$ _____.
- 若一个底面是正三角形的三棱柱的正视图如图所示, 则其表面积等于_____.



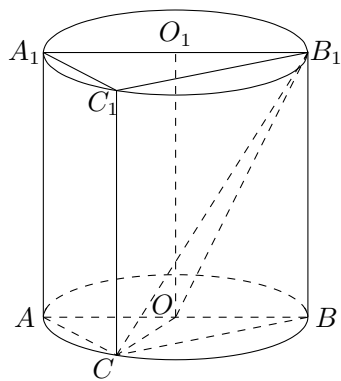
- 某次知识竞赛规则如下: 在主办方预设的 5 个问题中, 选手若能连续正确回答出两个问题, 即停止答题, 晋级下一轮. 假设某选手正确回答每个问题的概率都是 0.8, 且每个问题的回答结果相互独立, 则该选手恰好回答了 4 个问题就晋级下一轮的概率等于_____.
- 已知函数 $f(x) = 3 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 和 $g(x) = 2 \cos(2x + \varphi) + 1$ 的图象的对称轴完全相同. 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $f(x)$ 的取值范围是_____.
- 已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足, (1) 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $f(2x) = 2f(x)$ 成立; (2) 当 $x \in (1, 2]$ 时, $f(x) = 2 - x$, 给出结论如下:
 ① 对任意 $m \in \mathbf{Z}$, 有 $f(2^m) = 0$;
 ② 函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$;
 ③ 存在 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $f(2^n + 1) = 9$;
 ④ “函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减”的充要条件是“存在 $k \in \mathbf{Z}$, 使得 $(a, b) \subseteq (2^k, 2^{k+1})$ ”.
 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

- 设 S 是不等式 $x^2 - x - 6 \leq 0$ 的解集, 整数 $m, n \in S$.
 (1) 记使得“ $m + n = 0$ 成立的有序数组 (m, n) ”为事件 A , 试列举 A 包含的基本事件;
 (2) 设 $\xi = m^2$, 求 ξ 的分布列及其数学期望 $E\xi$.

17. 已知中心在坐标原点 O 的椭圆 C 经过点 $A(2, 3)$, 且点 $F(2, 0)$ 为其右焦点.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 是否存在平行于 OA 的直线 l , 使得直线 l 与椭圆 C 有公共点, 且直线 OA 与 l 的距离等于 4? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

18. 如图, 圆柱 OO_1 内有一个三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 三棱柱的底面为圆柱底面的内接三角形, 且 AB 是圆 O 直径.
- (1) 证明: 平面 $A_1ACC_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1 ;
- (2) 设 $AB = AA_1$, 在圆柱 OO_1 内随机选取一点, 记该点取自于三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内的概率为 p .
- ① 当点 C 在圆周上运动时, 求 p 的最大值;
- ② 记平面 A_1ACC_1 与平面 B_1OC 所成的角为 θ ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$), 当 p 取最大值时, 求 $\cos \theta$ 的值.



19. 某港口 O 要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上. 在小艇出发时, 轮船位于港口 O 北偏西 30° 且与该港口相距 20 海里的 A 处, 并以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶. 假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶, 经过 t 小时与轮船相遇.
- (1) 若希望相遇时小艇的航行距离最小, 则小艇航行速度的大小应为多少?
- (2) 假设小艇的最高航行速度只能达到 30 海里/小时, 试设计航行方案 (即确定航行方向与航行速度的大小), 使得小艇能以最短时间与轮船相遇, 并说明理由.

20. (1) 已知函数 $f(x) = x^3 - x$, 其图象记为曲线 C .
- ① 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- ② 证明: 若对于任意非零实数 x_1 , 曲线 C 与其在点 $P_1(x_1, f(x_1))$ 处的切线交于另一点 $P_2(x_2, f(x_2))$, 曲线 C 与其在点 $P_2(x_2, f(x_2))$ 处的切线交于另一点 $P_3(x_3, f(x_3))$, 线段 P_1P_2, P_2P_3 与曲线 C 所围成封闭图形的面积分别记为 S_1, S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2}$ 为定值;
- (2) 对于一般的三次函数 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), 请给出类似于 (1) ② 的正确命题, 并予以证明.

21. 三选二.

- 【A】已知矩阵 $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} c & 2 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, 且 $MN = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (1) 求实数 a, b, c, d 的值;
- (2) 求直线 $y = 3x$ 在矩阵 M 所对应的线性变换下的像的方程.

- 【B】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 圆 C 的方程为 $\rho = 2\sqrt{5} \sin \theta$.
- (1) 求圆 C 的直角坐标方程;
- (2) 设圆 C 与直线 l 交于点 A, B , 若点 P 的坐标为 $(3, \sqrt{5})$, 求 $|PA| + |PB|$.

- 【C】已知函数 $f(x) = |x - a|$.
- (1) 若不等式 $f(x) \leq 3$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 5\}$, 求实数 a 的值;
- (2) 在 (1) 的条件下, 若 $f(x) + f(x+5) \geq m$ 对一切实数 x 恒成立, 求实数 m 的取值范围.