

文科数学

一、选择题

- 已知两条直线 $y = ax - 2$ 和 $y = (a + 2)x + 1$ 互相垂直, 则 a 等于 ()
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 2, a_2 + a_3 = 13$, 则 $a_4 + a_5 + a_6$ 等于()
(A) 40 (B) 42 (C) 43 (D) 45
- “ $\tan \alpha = 1$ ”是“ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 等于 ()
(A) $\frac{1}{7}$ (B) 7 (C) $-\frac{1}{7}$ (D) -7
- 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 且 $A = \{x||x - 1| > 2\}$, $B = \{x|x^2 - 6x + 8 < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 等于 ()
(A) $[-1, 4)$ (B) $(2, 3)$ (C) $(2, 3]$ (D) $(-1, 4)$
- 函数 $y = \frac{x}{x+1} (x \neq -1)$ 的反函数是 ()
(A) $y = \frac{x}{1-x} (x \neq 1)$ (B) $y = \frac{x}{x-1} (x \neq 1)$
(C) $y = \frac{x-1}{x} (x \neq 0)$ (D) $y = \frac{1-x}{x} (x \neq 0)$
- 已知正方体外接球的体积是 $\frac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于 ()
(A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
- 从 4 名男生和 3 名女生中选出 3 人, 分别从事三项不同的工作, 若这 3 人中至少有 1 名女生, 则选派方案共有 ()
(A) 108 种 (B) 186 种 (C) 216 种 (D) 270 种
- 已知向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 120° , $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$, 则 $|\vec{b}|$ 等于 ()
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 1
- 对于平面 α 和共面的直线 m, n , 下列命题中真命题是 ()
(A) 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n \parallel \alpha$
(B) 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
(C) 若 $m \subset \alpha, n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$
(D) 若 m, n 与 α 所成的角相等, 则 $m \parallel n$

- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 ()
(A) $(1, 2]$ (B) $(1, 2)$ (C) $[2, +\infty)$ (D) $(2, +\infty)$
- 已知 $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \lg x$. 设 $a = f\left(\frac{6}{5}\right), b = f\left(\frac{3}{2}\right), c = f\left(\frac{5}{2}\right)$, 则 ()
(A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $c < b < a$ (D) $c < a < b$

二、填空题

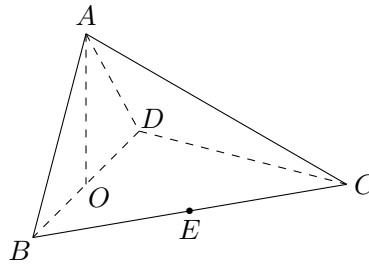
- $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是_____. (用数字作答)
- 已知直线 $x - y - 1 = 0$ 与抛物线 $y = ax^2$ 相切, 则 $a =$ _____.
- 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \leq 1 \\ y \geq |x - 1| \end{cases}$, 则 $x + 2y$ 的最大值是_____.
- 已知函数 $f(x) = 2 \sin \omega x (\omega > 0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于_____.

三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x, x \in \mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;
(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y = \sin 2x (x \in \mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

- 每次抛掷一枚骰子 (六个面上分别标以数 1, 2, 3, 4, 5, 6).
(1) 连续抛掷 2 次, 求向上的数不同的概率;
(2) 连续抛掷 2 次, 求向上的数之和为 6 的概率;
(3) 连续抛掷 5 次, 求向上的数为奇数恰好出现 3 次的概率.

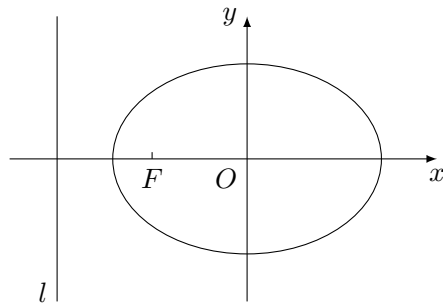
- 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O, E 分别是 BD, BC 的中点, $CA = CB = CD = BD = 2, AB = AD = \sqrt{2}$.
(1) 求证: $AO \perp$ 平面 BCD ;
(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;
(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.



20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点为 F , O 为坐标原点.

(1) 求过点 O 、 F , 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A 、 B 两点, 并且线段 AB 的中点在直线 $x + y = 0$ 上, 求直线 AB 的方程.



21. 已知 $f(x)$ 是二次函数, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 $(0, 5)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最大值是 12.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在自然数 m , 使得方程 $f(x) + \frac{37}{x} = 0$ 在区间 $(m, m+1)$ 内有且只有两个不等的实数根? 若存在, 求出所有 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1} 4^{b_2-1} \dots 4^{b_n-1} = (a_n + 1)^{b_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明: $\{b_n\}$ 是等差数列.