# 2012 年普通高等学校招生考试（全国卷）

# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in A, x-y\in A\}$, 则 $B$ 中所含元素的个数为 ( )

(A) 3　　(B) 6　　(C) 8　　(D) 10

2. 将 2 名教师, 4 名学生分成 2 个小组, 分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动, 每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成, 不同的安排方案共有 ( )

(A) 12 种　　(B) 10 种　　(C) 9 种　　(D) 8 种

3. 下面是关于复数 $z=\dfrac{2}{-1+\mathrm{i}}$ 的四个命题: $p_1$: $|z|=2$; $p_2$: $z^2=2\mathrm{i}$; $p_3$: $z$ 的共轭复数为 $1+\mathrm{i}$; $p_4$: $z$ 的虚部为 $-1$. 其中的真命题为 ( )

(A) $p_2, p_3$　　(B) $p_1, p_2$　　(C) $p_2, p_4$　　(D) $p_3, p_4$

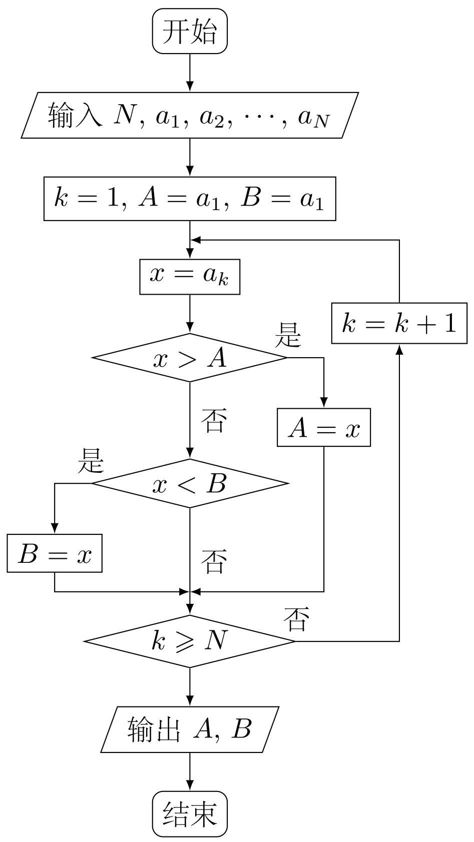
4. 设 $F_1$, $F_2$ 是椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点, $P$ 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 $30^\circ$ 的等腰三角形, 则 $E$ 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{2}{3}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_4+a_7=2$, $a_5a_6=-8$, 则 $a_1+a_{10}=$ ( )

(A) 7　　(B) 5　　(C) $-5$　　(D) $-7$

6. 如果执行下面的程序框图, 输入正整数 $N$ $(N\geqslant 2)$ 和实数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 输出 $A, B$, 则 ( )



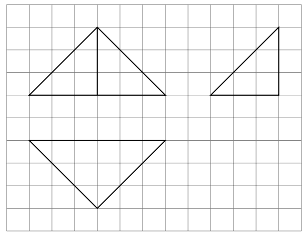

(A) $A+B$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的和

(B) $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的算术平均数

(C) $A$ 和 $B$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最大的数和最小的数

(D) $A$ 和 $B$ 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最小的数和最大的数

7. 如图, 网格上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为 ( )



(A) 6　　(B) 9　　(C) 12　　(D) 18

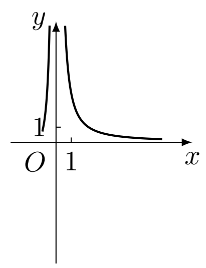
8. 等轴双曲线 $C$ 的中心在原点, 焦点在 $x$ 轴上, $C$ 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 $A, B$ 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 $C$ 的实轴长为 ( )

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}$　　(C) 4　　(D) 8

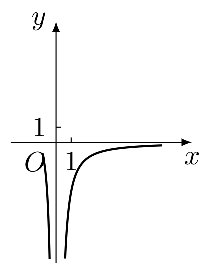
9. 已知 $\omega>0$, 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减, 则 $\omega$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right]$　　(B) $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$　　(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$　　(D) $(0,2]$

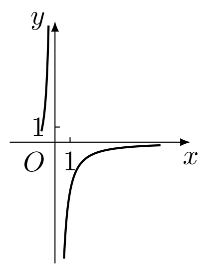
10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$, 则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ( )



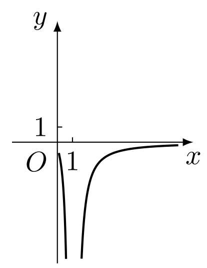

(A)




(B)




(C)




(D)

11. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 $O$ 的球面上, $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, $SC$ 为球 $O$ 的直径, 且 $SC=2$, 则此棱锥的体积为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设点 $P$ 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$ 上, 点 $Q$ 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上, 则 $|PQ|$ 的最小值为 ( )

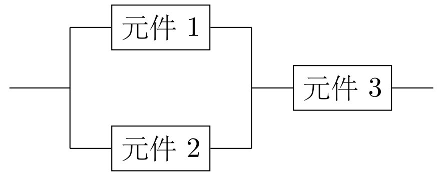
(A) $1-\ln 2$　　(B) $\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　(C) $1+\ln 2$　　(D) $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

## 二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为 $45^\circ$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$______.

14. 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1 \\ x+y\leqslant 3 \\ x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=x-2y$ 的取值范围为______.

15. 某一部件由三个电子元件按下图方式连接而成, 元件 1 或元件 2 正常工作, 且元件 3 正常工作, 则部件正常工作. 设三个电子元件的使用寿命 (单位: 小时) 均服从正态分布 $N(1000, 50^2)$, 且各个元件能否正常工作相互独立, 那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为______.




16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为______.

## 三、解答题

17. 已知 $a, b, c$ 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 $A, B, C$ 的对边, $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

(1) 求 $A$;

(2) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $b, c$.

18. 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售, 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1) 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, 求当天的利润 $y$ (单位: 元) 关于当天需求量 $n$ (单位: 枝, $n\in\mathbf{N}$) 的函数解析式;

(2) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位: 枝), 整理得下表:

| 日需求量 $n$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 10 | 20 | 16 | 16 | 15 | 13 | 10 |

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

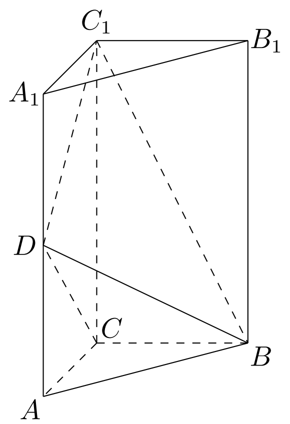
① 若花店一天购进 16 枝玫瑰花, $X$ 表示当天的利润 (单位: 元), 求 $X$ 的分布列、数学期望及方差;

② 若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花, 你认为应购进 16 枝还是 17 枝? 请说明理由.

19. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=BC=\dfrac{1}{2}AA_1$, $D$ 是棱 $AA_1$ 的中点, $DC_1\perp BD$.

(1) 证明: $DC_1\perp BC$;

(2) 求二面角 $A_1-BD-C_1$ 的大小.




20. 设抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 $F$, 准线为 $l$, $A$ 为 $C$ 上一点, 已知以 $F$ 为圆心, $FA$ 为半径的圆 $F$ 交 $l$ 于 $B$, $D$ 两点.

(1) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 $p$ 的值及圆 $F$ 的方程;

(2) 若 $A$, $B$, $F$ 三点在同一直线 $m$ 上, 直线 $n$ 与 $m$ 平行, 且 $n$ 与 $C$ 只有一个公共点, 求坐标原点到 $m$, $n$ 距离的比值.

21. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)\,\mathrm{e}^{x-1}-f(0)\,x+\dfrac{1}{2}x^2$.

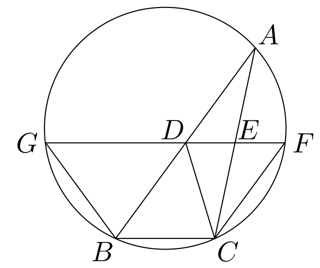
(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$, 求 $(a+1)\,b$ 的最大值.

22. 如图, $D$, $E$ 分别为 $\triangle ABC$ 边 $AB$, $AC$ 的中点, 直线 $DE$ 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 $F$, $G$ 两点. 若 $CF\parallel AB$, 证明:

(1) $CD=BC$;

(2) $\triangle BCD\backsim\triangle GBD$.




23. 已知曲线 $C_1$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}$ ($\varphi$ 是参数) 以坐标原点为极点, $x$ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 $C_2$ 的极坐标方程是 $\rho=2$, 正方形 $ABCD$ 的顶点都在 $C_2$ 上, 且 $A$, $B$, $C$, $D$ 依逆时针次序排列, 点 $A$ 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求点 $A$, $B$, $C$, $D$ 的直角坐标;

(2) 设 $P$ 为 $C_1$ 上任意一点, 求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

24. 已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$.

(1) 当 $a=-3$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 3$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\leqslant|x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$, 求 $a$ 的取值范围.