2011 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$, $B=\{-1,0,2\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调增区间是______.

3. 设复数 z 满足 $\mathrm{i}(z+1)=-3+2\mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 z 的实部是______.

4. 根据如图所示伪代码, 当输入 a, b 分别为 2, 3 时, 最后输出的 m 的值是______.

```
Read  a, b
If  a > b  Then
    m ← a
Else
    m ← b
End  If
Print  m
```

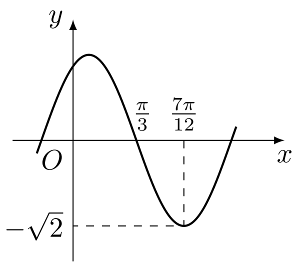
5. 从 1, 2, 3, 4 这四个数中一次随机取两个数, 则其中一个数是另一个的两倍的概率是______.

6. 某老师从星期一到星期五收到信件数分别是 10, 6, 8, 5, 6, 则该组数据的方差 $s^2=$______.

7. 已知 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, 则 $\dfrac{\tan x}{\tan 2x}$ 的值为______.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过坐标原点的一条直线与函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}$ 的图象交于 P、Q 两点, 则线段 PQ 长的最小值是______.

9. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$, ($A$, ω, φ 是常数, $A>0$, $\omega>0$) 的部分图象如图所示, 则 $f(0)=$______.



10. 已知 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的两个单位向量, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 k 的值为______.

11. 已知实数 $a\neq 0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<1\\ -x-2a, & x\geqslant 1\end{cases}$. 若 $f(1-a)=f(1+a)$, 则 a 的值为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 P 是函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ $(x>0)$ 的图象上的动点, 该图象在 P 处的切线 l 交 y 轴于点 M. 过点 P 作 l 的垂线交 y 轴于点 N. 设线段 MN 的中点的纵坐标为 t, 则 t 的最大值是______.

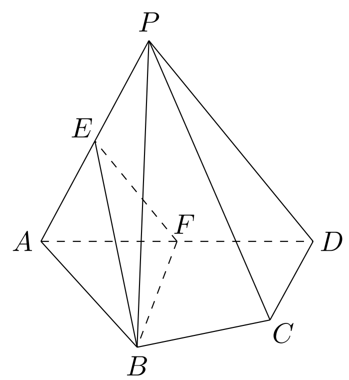
13. 设 $1=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_7$, 其中 a_1, a_3, a_5, a_7 成公比为 q 的等比数列, a_2, a_4, a_6 成公差为 1 的等差数列, 则 q 的最小值是______.

14. 设集合 $A=\left\{(x,y)\mid \dfrac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2,\ x,\ y\in\mathbf{R}\right\}$, $B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1,\ x,\ y\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 则实数 m 的取值范围是______.

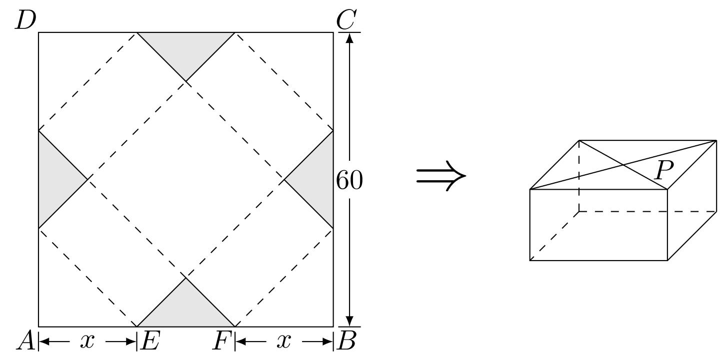
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对应的边为 a, b, c.
(1) 若 $\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos A$, 求 A 的值;
(2) 若 $\cos A=\dfrac{1}{3}$, $b=3c$, 求 $\sin C$ 的值.

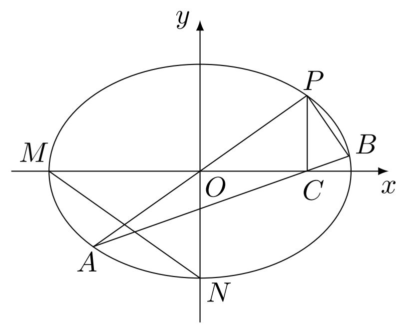
16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, E, F 分别是 AP, AD 的中点. 求证:
(1) 直线 $EF\,/\!/$ 平面 PCD;
(2) 平面 $BEF\perp$ 平面 PAD.



17. 请你设计一个包装盒. 如图所示, $ABCD$ 是边长为 60 cm 的正方形硬纸片, 切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形, 再沿虚线折起, 使得 A, B, C, D 四个点重合于图中的点 P, 正好形成一个正四棱柱形状的包装盒, E, F 在 AB 上, 是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点. 设 $AE=FB=x$ (cm).
(1) 若广告商要求包装盒侧面积 S (cm^2) 最大, 试问 x 应取何值?
(2) 若广告商要求包装盒容积 V (cm^3) 最大, 试问 x 应取何值? 并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, M, N 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的顶点, 过坐标原点的直线交椭圆于 P, A 两点, 其中点 P 在第一象限, 过 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 C, 连接 AC, 并延长交椭圆于点 B, 设直线 PA 的斜率为 k.
(1) 当直线 PA 平分线段 MN 时, 求 k 的值;
(2) 当 $k=2$ 时, 求点 P 到直线 AB 的距离 d;
(3) 对任意 $k>0$, 求证: $PA\perp PB$.

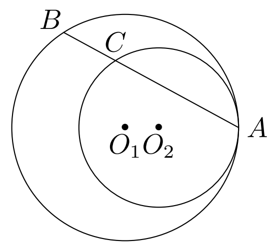


19. 已知 a, b 是实数, 函数 $f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2+bx$, $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 分别是 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数, 若 $f'(x)g'(x)\geqslant 0$ 在区间 I 上恒成立, 则称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上单调性一致.
(1) 设 $a>0$, 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单调性一致, 求实数 b 的取值范围;
(2) 设 $a<0$ 且 $a\neq b$, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在以 a, b 为端点的开区间上单调性一致, 求 $|a-b|$ 的最大值.

20. 设 M 为部分正整数组成的集合, 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n, 已知对任意整数 $k\in M$, 当整数 $n>k$ 时, $S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立.
(1) 设 $M=\{1\}$, $a_2=2$, 求 a_5 的值;
(2) 设 $M=\{3,4\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. 四选二.

【A】如图, 圆 O_1 与圆 O_2 内切于点 A, 其半径分别为 r_1 与 r_2 $(r_1>r_2)$, 圆 O_1 的弦 AB 交圆 O_2 于点 C (O_1 不在 AB 上), 求证: $AB:AC$ 为定值.

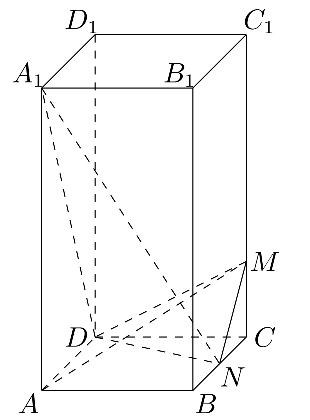


【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, 求向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 使得 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 求过椭圆 $\begin{cases}x=5\cos\varphi\\y=3\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数) 的右焦点, 且与直线 $\begin{cases}x=4-2t\\y=3-t\end{cases}$ (t 为参数) 平行的直线的普通方程.

【D】解不等式: $x+|2x-1|<3$.

22. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, $AB=1$, 点 N 是 BC 的中点, 点 M 在 CC_1 上. 设二面角 A_1-DN-M 的大小为 θ.
(1) 当 $\theta=90^\circ$ 时, 求 AM 的长;
(2) 当 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时, 求 CM 的长.



23. 设整数 $n\geqslant 4$, $P(a,b)$ 是平面直角坐标系 xOy 中的点, 其中 $a,b\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, $a>b$.
(1) 记 A_n 为满足 $a-b=3$ 的点 P 的个数, 求 A_n;
(2) 记 B_n 为满足 $\dfrac{1}{3}(a-b)$ 是整数的点 P 的个数, 求 B_n.