2014 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

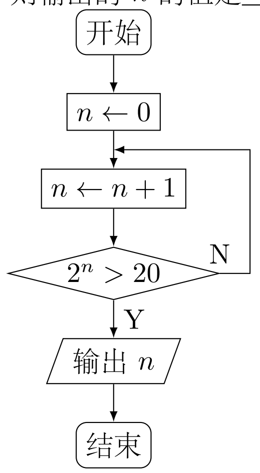
数学试卷

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,3,4\}$, $B=\{-1,2,3\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 已知复数 $z=(5+2\mathrm{i})^2$ (i 为虚数单位), 则 z 的实部为______.

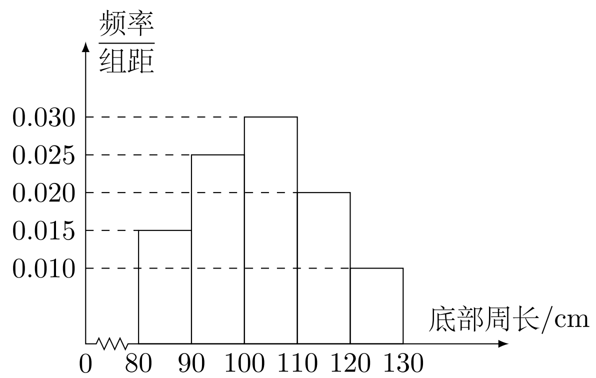
3. 如图是一个算法流程图, 则输出的 n 的值是______.



4. 从 1, 2, 3, 6 这 4 个数中一次随机地取 2 个数, 则所取 2 个数的乘积为 6 的概率是______.

5. 已知函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin(2x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi<\pi)$, 它们的图象有一个横坐标为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的交点, 则 φ 的值是______.

6. 为了了解一片经济林的生长情况, 随机抽测了其中 60 株树木的底部周长 (单位: cm), 所得数据均在区间 $[80,130]$ 上, 其频率分布直方图如图所示, 则在抽测的 60 株树木中, 有______株树木的底部周长小于 100 cm.



7. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2=1$, $a_8=a_6+2a_4$, 则 a_6 的值是______.

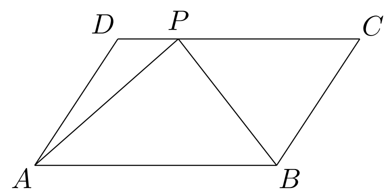
8. 设甲、乙两个圆柱的底面积分别为 S_1、S_2, 体积分别为 V_1、V_2, 若它们的侧面积相等, 且 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{4}$, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}$ 的值是______.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $x+2y-3=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 截得的弦长为______.

10. 已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$, 若对于任意 $x\in[m,m+1]$, 都有 $f(x)<0$ 成立, 则实数 m 的取值范围是______.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y=ax^2+\dfrac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2,-5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行, 则 $a+b$ 的值是______.

12. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=8$, $AD=5$, $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是______.



13. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 3 的函数, 当 $x\in[0,3)$ 时, $f(x)=\left|x^2-2x+\dfrac{1}{2}\right|$. 若函数 $y=f(x)-a$ 在区间 $[-3,4]$ 上有 10 个零点 (互不相同), 则实数 a 的取值范围是______.

14. 若 $\triangle ABC$ 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$, 则 $\cos C$ 的最小值是______.

二、解答题

15. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

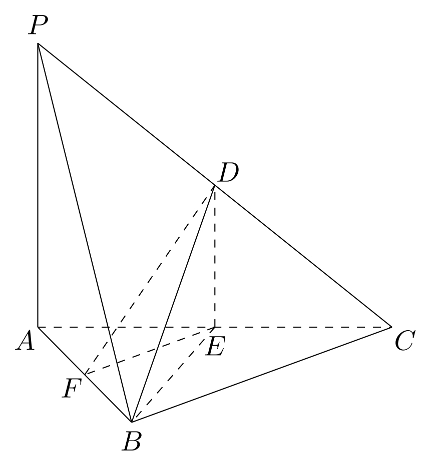
(1) 求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值;

(2) 求 $\cos\left(\dfrac{5}{6}\pi-2\alpha\right)$ 的值.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E, F 分别为棱 PC, AC, AB 的中点. 已知 $PA\perp AC$, $PA=6$, $BC=8$, $DF=5$.

(1) 求证: 直线 $PA\parallel$ 平面 DEF;

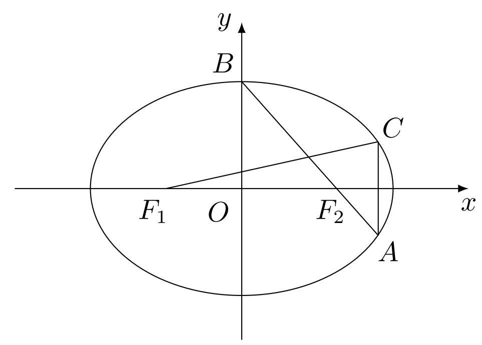
(2) 平面 $BDE\perp$ 平面 ABC.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 顶点 B 的坐标为 $(0,b)$, 连接 BF_2 并延长交椭圆于点 A, 过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C, 连接 F_1C.

(1) 若点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, 且 $BF_2=\sqrt{2}$, 求椭圆的方程;

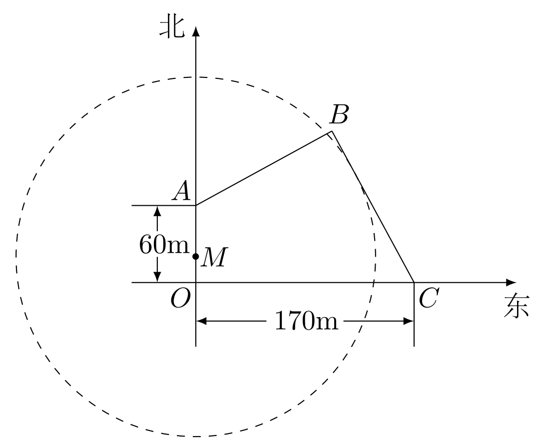
(2) 若 $F_1C\perp AB$, 求椭圆离心率 e 的值.



18. 如图, 为了保护河上古桥 OA, 规划建一座新桥 BC, 同时设立一个圆形保护区. 规划要求: 新桥 BC 与河岸 AB 垂直; 保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆, 且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m. 经测量, 点 A 位于点 O 正北方向 60 m 处, 点 C 位于点 O 正东方向 170 m 处 (OC 为河岸), $\tan\angle BCO=\dfrac{4}{3}$.

(1) 求新桥 BC 的长;

(2) 当 OM 多长时, 圆形保护区的面积最大?



19. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数;

(2) 若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}+m-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 已知正数 a 满足: 存在 $x_0\in[1,+\infty)$, 使得 $f(x_0)<a(-x_0{}^3+3x_0)$ 成立. 试比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小, 并证明你的结论.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若对任意正整数 n, 总存在正整数 m, 使得 $S_n=a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是"H 数列".

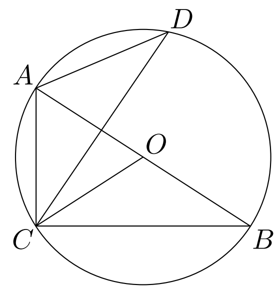
(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: $\{a_n\}$ 是"H 数列";

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其首项 $a_1=1$, 公差 $d<0$. 若 $\{a_n\}$ 是"H 数列", 求 d 的值;

(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个"H 数列"$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$, 使得 $a_n=b_n+c_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 成立.

21. 四选二.

【A】如图, AB 是圆 O 的直径, C、D 是圆 O 上位于 AB 异侧的两点. 证明: $\angle OCB=\angle D$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&x\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$, 向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\y\end{bmatrix}$, x, y 为实数, 若 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{B\alpha}$, 求 $x+y$ 的值.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

【D】已知 $x>0$, $y>0$, 证明: $(1+x+y^2)(1+x^2+y)\geqslant 9xy$.

22. 盒中共有 9 个球, 其中有 4 个红球, 3 个黄球和 2 个绿球, 这些球除颜色外完全相同.

(1) 从盒中一次随机取出 2 个球, 求取出的 2 个球颜色相同的概率 P;

(2) 从盒中一次随机取出 4 个球, 其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1, x_2, x_3, 随机变量 X 表示 x_1, x_2, x_3 中的最大数, 求 X 的概率分布和数学期望 $E(X)$.

23. 已知函数 $f_0(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ (x>0)$, 设 $f_n(x)$ 为 $f_{n-1}(x)$ 的导数, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 $2f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{\pi}{2}f_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的值;

(2) 证明: 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, 等式 $\left|nf_{n-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{4}f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 都成立.