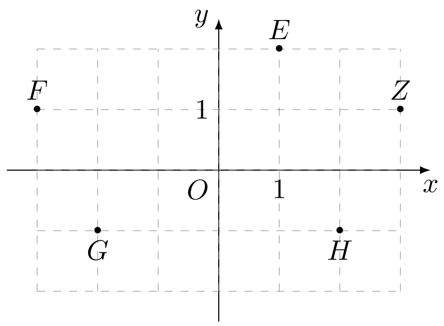
2010 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 若 i 为虚数单位, 图中复平面内点 Z 表示复数 z, 则表示复数 $\dfrac{z}{1+\mathrm{i}}$ 的点是 ( )



(A) E　(B) F　(C) G　(D) H

2. 设集合 $A=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1\right\}$, $B=\{(x,y)\mid y=3^x\}$, 则 $A\cap B$ 的子集的个数是 ( )

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=15$, $b=10$, $A=60^\circ$, 则 $\cos B=$ ( )

(A) $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. 投掷一枚均匀硬币和一枚均匀骰子各一次, 记“硬币正面向上”为事件 A, “骰子向上的点数是 3”为事件 B, 则事件 A, B 中至少有一件发生的概率是 ( )

(A) $\dfrac{5}{12}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{7}{12}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

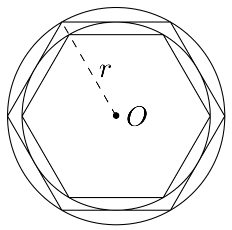
5. 已知 $\triangle ABC$ 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立, 则 $m=$ ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

6. 将参加夏令营的 600 名学生编号为: 001, 002, $\cdots$, 600. 采用系统抽样方法抽取一个容量为 50 的样本, 且随机抽得的号码为 003. 这 600 名学生分住在三个营区, 从 001 到 300 在第 I 营区, 从 301 到 495 住在第 II 营区, 从 496 到 600 住在第 III 营区. 三个营区被抽中的人数依次为 ( )

(A) 26, 16, 8　(B) 25, 17, 8　(C) 25, 16, 9　(D) 24, 17, 9

7. 如图, 在半径为 r 的圆内作内接正六边形, 再作正六边形的内切圆, 又在此内切圆内作内接正六边形, 如此无限继续下去, 设 S_n 为前 n 个圆的面积之和, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=$ ( )



(A) $2\pi r^2$　(B) $\dfrac{8}{3}\pi r^2$　(C) $4\pi r^2$　(D) $6\pi r^2$

8. 现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动, 每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一, 每项工作至少有一人参加. 甲、乙不会开车但能从事其他三项工作, 丙、丁、戊都能胜任四项工作, 则不同安排方案的种数是 ( )

(A) 152　(B) 126　(C) 90　(D) 54

9. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点, 则 b 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-1,1+2\sqrt{2}\right]$　(B) $\left[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right]$

(C) $\left[1-2\sqrt{2},3\right]$　(D) $\left[1-\sqrt{2},3\right]$

10. 记实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中的最大数为 $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边边长为 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$, 定义它的倾斜度为 $t=\max\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}\cdot\min\left\{\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}\right\}$, 则“$t=1$”是“$\triangle ABC$ 为等边三角形”的 ( )

(A) 必要而不充分的条件　(B) 充分而不必要的条件

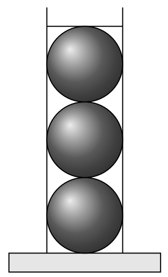
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要的条件

二、填空题

11. 在 $\left(x+\sqrt[4]{3}y\right)^{20}$ 的展开式中, 系数为有理数的项共有______项.

12. 已知 $z=2x-y$, 式中变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant x\\ x+y\geqslant 1\\ x\leqslant 2\end{cases}$, 则 z 的最大值为______.

13. 圆柱形容器内部盛有高度为 8 cm 的水, 若放入三个相同的球 (球的半径与圆柱的底面半径相同) 后, 水恰好淹没最上面的球 (如图所示), 则球的半径是______cm.

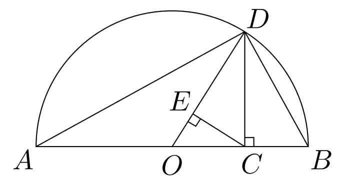


14. 某射手射击所得环数 ξ 的分布列如下:

ξ	7	8	9	10
P	x	0.1	0.3	y

已知 ξ 的期望 $E\xi=8.9$, 则 y 的值为______.

15. 设 $a>0$, $b>0$, 称 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 为 a,b 的调和平均数. 如图, C 为线段 AB 上的点, 且 $AC=a$, $CB=b$, O 为 AB 中点, 以 AB 为直径做半圆. 过点 C 作 AB 的垂线交半圆于 D. 连接 OD, AD, BD. 过点 C 作 OD 的垂线, 垂足为 E. 则图中线段 OD 的长度是 a,b 的算术平均数, 线段______的长度是 a,b 的几何平均数, 线段______的长度是 a,b 的调和平均数.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的最大值, 并求使 $h(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

17. 为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗, 房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层. 某幢建筑物要建造可使用 20 年的隔热层, 每厘米厚的隔热层建造成本为 6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C (单位: 万元) 与隔热层厚度 x (单位: cm) 满足关系: $C(x)=\dfrac{k}{3x+5}$ $(0\leqslant x\leqslant 10)$, 若不建隔热层, 每年能源消耗费用为 8 万元. 设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 20 年的能源消耗费用之和.

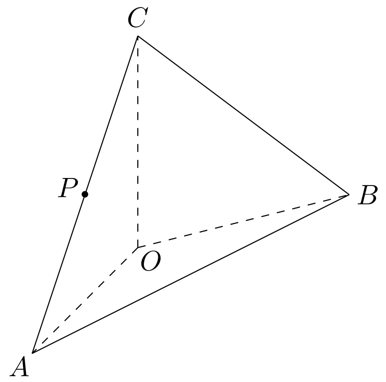
(1) 求 k 的值及 $f(x)$ 的表达式.

(2) 隔热层修建多厚时, 总费用 $f(x)$ 达到最小, 并求最小值.

18. 如图, 在四面体 $ABOC$ 中, $OC \perp OA$, $OC \perp OB$, $\angle AOB = 120^\circ$, 且 $OA = OB = OC = 1$.

(1) 设 P 为 AC 的中点, 证明: 在 AB 上存在一点 Q, 使 $PQ \perp OA$, 并计算 $\dfrac{AB}{AQ}$ 的值;

(2) 求二面角 $O-AC-B$ 的平面角的余弦值.



19. 已知一条曲线 C 在 y 轴的右边, C 上每一点到点 $F(1,0)$ 的距离减去它到 y 轴距离的差都是 1.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 是否存在正数 m, 对于过点 $M(m,0)$ 且与曲线 C 有两个交点 A、B 的任一直线, 都有 $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} < 0$? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n} = \dfrac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$, $a_n a_{n+1} < 0$ $(n \geqslant 1)$; 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$ $(n \geqslant 1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 中的任意三项不可能成等差数列.

21. 已知函数 $f(x) = ax + \dfrac{b}{x} + c$ $(a > 0)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 用 a 表示出 b, c;

(2) 若 $f(x) \geqslant \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

(3) 证明: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} > \ln(n+1) + \dfrac{n}{2(n+1)}$ $(n \geqslant 1)$.