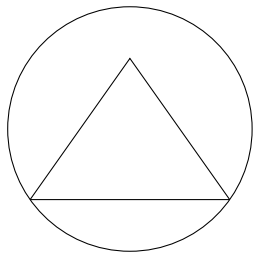


# 2006 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

## 理科数学

### 一、选择题

- 函数  $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$  的定义域是 ( )  
(A)  $(3, +\infty)$  (B)  $[3, +\infty)$  (C)  $(4, +\infty)$  (D)  $[4, +\infty)$
- 若数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = \frac{1}{3}$ , 且对任意正整数  $m, n$  都有  $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{2}{3}$  (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 2
- 过平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  任意两条棱的中点作直线, 其中与平面  $DBB_1D_1$  平行的直线共有 ( )  
(A) 4 条 (B) 6 条 (C) 8 条 (D) 12 条
- “ $a = 1$ ”是“函数  $f(x) = |x - a|$  在区间  $[1, +\infty)$  上为增函数”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 已知  $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$ , 且关于  $x$  的方程  $x^2 + |\vec{a}|x + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  有实根, 则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角的取值范围是 ( )  
(A)  $[0, \frac{\pi}{6}]$  (B)  $[\frac{\pi}{3}, \pi]$  (C)  $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$  (D)  $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
- 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 ( )  
(A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种
- 过双曲线  $M: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的左顶点  $A$  作斜率为 1 的直线  $l$ , 若  $l$  与双曲线  $M$  的两条渐近线分别相交于点  $B, C$ , 且  $|AB| = |BC|$ , 则双曲线  $M$  的离心率是 ( )  
(A)  $\sqrt{10}$  (B)  $\sqrt{5}$  (C)  $\frac{\sqrt{10}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- 设函数  $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$ , 集合  $M = \{x|f(x) < 0\}$ ,  $P = \{x|f'(x) > 0\}$ , 若  $M \subsetneq P$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(0, 1)$  (C)  $(1, +\infty)$  (D)  $[1, +\infty)$
- 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图, 则图中三角形 (正四面体的截面) 的面积是 ( )

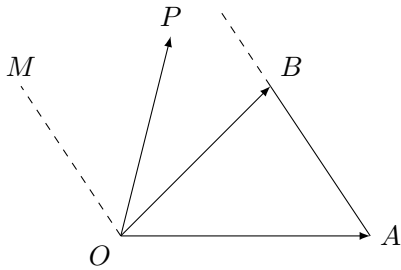


- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$

- 若圆  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$  上至少有三个不同的点到直线  $l: ax + by = 0$  的距离为  $2\sqrt{2}$ , 则直线  $l$  的倾斜角的取值范围是 ( )  
(A)  $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$  (B)  $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$  (C)  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  (D)  $[0, \frac{\pi}{2}]$

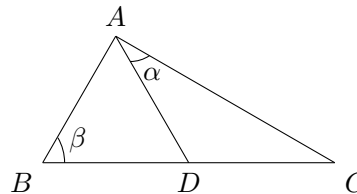
### 二、填空题

- 若  $(ax - 1)^5$  的展开式中  $x^3$  的系数是  $-80$ , 则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_.
- 已知  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $x^2 + y^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.
- 曲线  $y = \frac{1}{x}$  和  $y = x^2$  在它们交点处的两条切线与  $x$  轴所围成的三角形的面积是\_\_\_\_\_.
- 若  $f(x) = a \sin(x + \frac{\pi}{4}) + b \sin(x - \frac{\pi}{4})$  ( $ab \neq 0$ ) 是偶函数, 则有序实数对  $(a, b)$  可以是\_\_\_\_\_. (写出你认为正确的一组数字即可)
- 如图,  $OM \parallel AB$ , 点  $P$  在由射线  $OM$ 、线段  $OB$  及  $AB$  的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且  $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ , 则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_; 当  $x = -\frac{1}{2}$  时,  $y$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



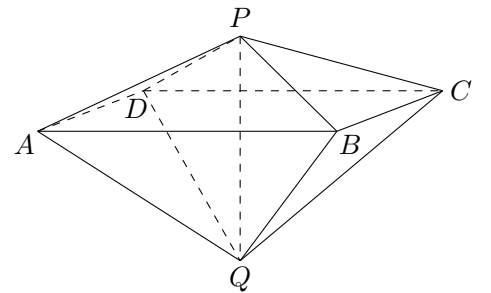
### 三、解答题

- 如图,  $D$  是直角  $\triangle ABC$  斜边  $BC$  上一点,  $AB = AD$ , 记  $\angle CAD = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ .  
(1) 证明:  $\sin \alpha + \cos 2\beta = 0$ ;  
(2) 若  $AC = \sqrt{3}DC$ , 求  $\beta$  的值.



- 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):  
(1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;  
(2) 平均有多少家煤矿必须整改;  
(3) 至少关闭一家煤矿的概率.

- 如图, 已知两个正四棱锥  $P - ABCD$  与  $Q - ABCD$  的高分别为 1 和 2,  $AB = 4$ .  
(1) 证明:  $PQ \perp$  平面  $ABCD$ ;  
(2) 求异面直线  $AQ$  与  $PB$  所成的角;  
(3) 求点  $P$  到平面  $QAD$  的距离.



19. 已知函数  $f(x) = x - \sin x$ , 数列  $\{a_n\}$  满足:  $0 < a_1 < 1$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 证明:
- (1)  $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ ;
  - (2)  $a_{n+1} < \frac{1}{6}a_n^3$ .
20. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为:  $1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$ ) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为  $a$  ( $1 \leq a \leq 3$ ). 设用  $x$  单位质量的水初次清洗后的清洁度是  $\frac{x+0.8}{x+1}$  ( $x > a-1$ ), 用  $y$  单位质量的水第二次清洗后的清洁度是  $\frac{y+ac}{y+a}$ , 其中  $c$  ( $0.8 < c < 0.99$ ) 是该物体初次清洗后的清洁度.
- (1) 分别求出方案甲以及  $c = 0.95$  时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;
  - (2) 若采用方案乙, 当  $a$  为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论  $a$  取不同数值时对最少总用水量多少的影响.
21. 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 抛物线  $C_2: (y-m)^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), 且  $C_1$ 、 $C_2$  的公共弦  $AB$  过椭圆  $C_1$  的右焦点.
- (1) 当  $AB \perp x$  轴时, 求  $m$ 、 $p$  的值, 并判断抛物线  $C_2$  的焦点是否在直线  $AB$  上;
  - (2) 是否存在  $m$ 、 $p$  的值, 使抛物线  $C_2$  的焦点恰在直线  $AB$  上? 若存在, 求出符合条件的  $m$ 、 $p$  的值; 若不存在, 请说明理由.