

2013 年普通高等学校招生考试 (北京卷)

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{0\}$ (B) $\{-1, 0\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{-1, 0, 1\}$

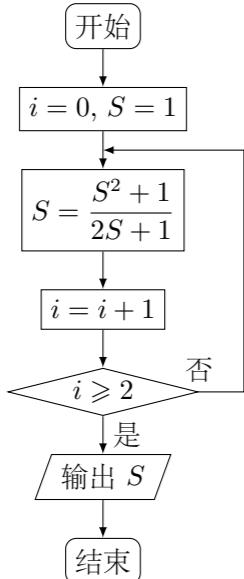
2. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 ()
 (A) $ac > bc$ (B) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (C) $a^2 > b^2$ (D) $a^3 > b^3$

3. 下列函数中, 既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()
 (A) $y = \frac{1}{x}$ (B) $y = e^{-x}$ (C) $y = -x^2 + 1$ (D) $y = \lg|x|$

4. 在复平面内, 复数 $i(2-i)$ 对应的点位于 ()
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = 5$, $\sin A = \frac{1}{3}$, 则 $\sin B =$ ()
 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (D) 1

6. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ()

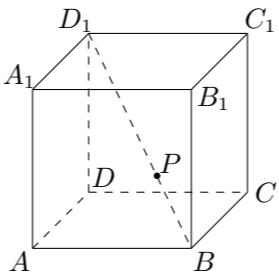


- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{13}{21}$ (D) $\frac{610}{987}$

7. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率大于 $\sqrt{2}$ 的充分必要条件是 ()

- (A) $m > \frac{1}{2}$ (B) $m \geq 1$ (C) $m > 1$ (D) $m > 2$

8. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为对角线 BD_1 的三等分点, P 到各顶点的距离的不同取值有 ()

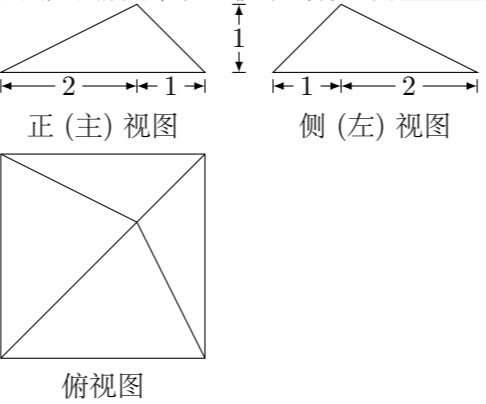


- (A) 3 个 (B) 4 个 (C) 5 个 (D) 6 个

二、填空题

9. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 则 $p =$ _____; 准线方程为 _____.

10. 某四棱锥的三视图如图所示, 该四棱锥的体积为 _____.



11. 若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 + a_5 = 40$, 则公比 $q =$ _____, 前 n 项和 $S_n =$ _____.

12. 设 D 为不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - y \leq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域, 区域 D 上的点与点 $(1, 0)$ 之间的距离的最小值为 _____.

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}x, & x \geq 1 \\ 2^x, & x < 1 \end{cases}$ 的值域为 _____.

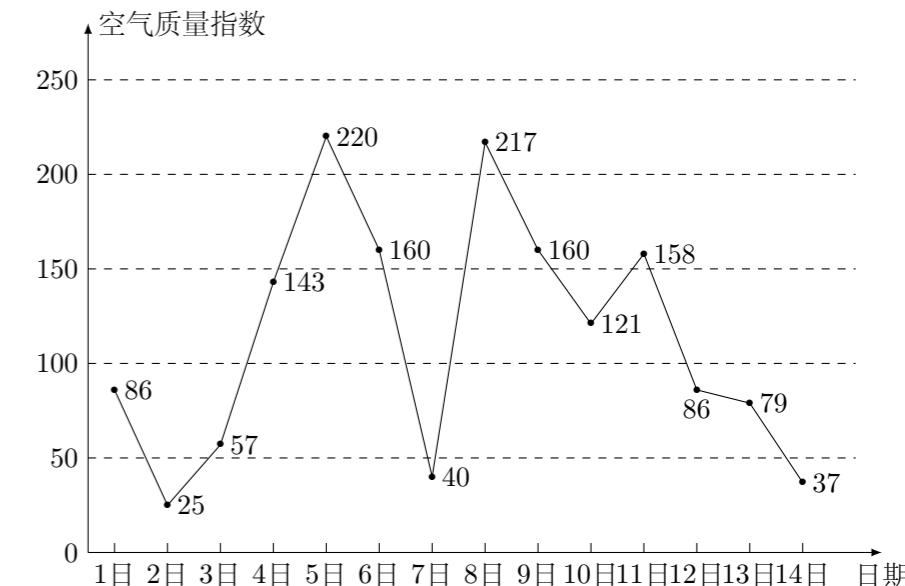
14. 已知点 $A(1, -1)$, $B(3, 0)$, $C(2, 1)$. 若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ($1 \leq \lambda \leq 2$, $0 \leq \mu \leq 1$) 的点 P 组成, 则 D 的面积为 _____.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = (2\cos^2 x - 1) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 4x$.

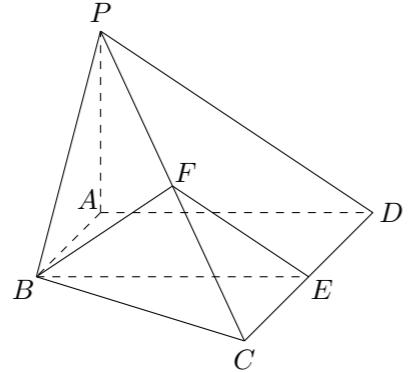
- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及最大值;
 (2) 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $f(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 α 的值.

16. 下图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图, 空气质量指数小于 100 表示空气质量优良, 空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市, 并停留 2 天.



- (1) 求此人到达当日空气质量优良的概率;
 (2) 求此人在该市停留期间只有 1 天空气质量重度污染的概率;
 (3) 由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大? (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $CD = 2AB$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $PA \perp AD$, E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点. 求证:
- (1) $PA \perp$ 底面 $ABCD$;
 - (2) $BE \parallel$ 平面 PAD ;
 - (3) 平面 $BEF \perp$ 平面 PCD .



19. 直线 $y = kx + m$ ($m \neq 0$) 与椭圆 $W: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 相交于 A, C 两点, O 是坐标原点.
- (1) 当点 B 的坐标为 $(0, 1)$, 且四边形 $OABC$ 为菱形时, 求 AC 的长;
 - (2) 当点 B 在 W 上且不是 W 的顶点时, 证明: 四边形 $OABC$ 不可能为菱形.
20. 给定数列 a_1, a_2, \dots, a_n , 对 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 该数列前 i 项的最大值记为 A_i , 后 $n-i$ 项 $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$ 的最小值记为 B_i , $d_i = A_i - B_i$.
- (1) 设数列 $\{a_n\}$ 为 $3, 4, 7, 1$, 写出 d_1, d_2, d_3 的值;
 - (2) 设 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 4$) 是公比大于 1 的等比数列, 且 $a_1 > 0$. 证明: d_1, d_2, \dots, d_{n-1} 是等比数列;
 - (3) 设 d_1, d_2, \dots, d_{n-1} 是公差大于 0 的等差数列, 且 $d_1 > 0$. 证明: a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 是等差数列.

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + x \sin x + \cos x$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a, f(a))$ 处与直线 $y = b$ 相切, 求 a 与 b 的值;
- (2) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = b$ 有两个不同交点, 求 b 的取值范围.