

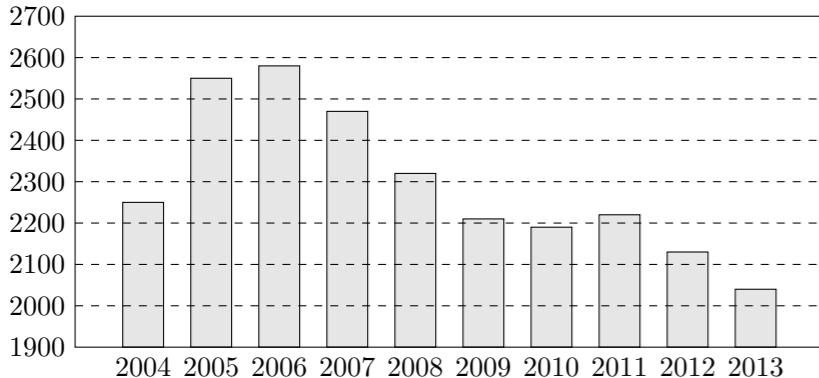
2015 年普通高等学校招生考试 (全国卷 II)

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 则 $A \cup B = \text{()}$
 (A) $(-1, 3)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(2, 3)$
2. 若 a 为实数, 且 $\frac{2+ai}{1+i} = 3+i$, 则 $a = \text{()}$
 (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ()

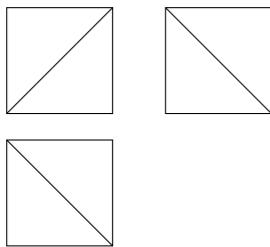


- (A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
 (B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
 (C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
 (D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

4. 已知 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$, 则 $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \text{()}$
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 + a_3 + a_5 = 3$, 则 $S_5 = \text{()}$
 (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()

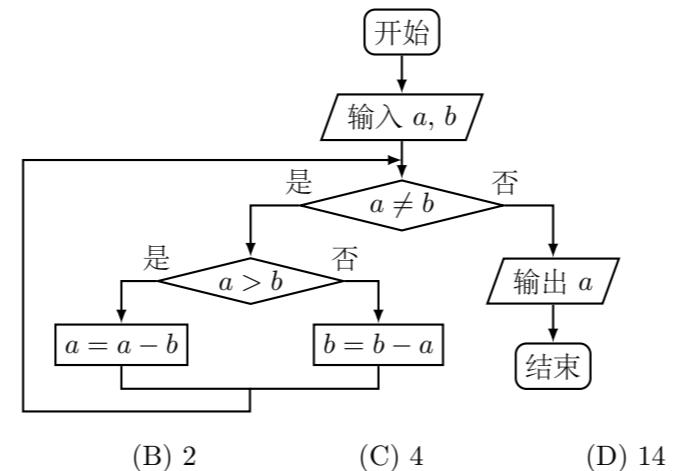


- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$

7. 已知三点 $A(1, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$, $C(2, \sqrt{3})$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a = \text{()}$

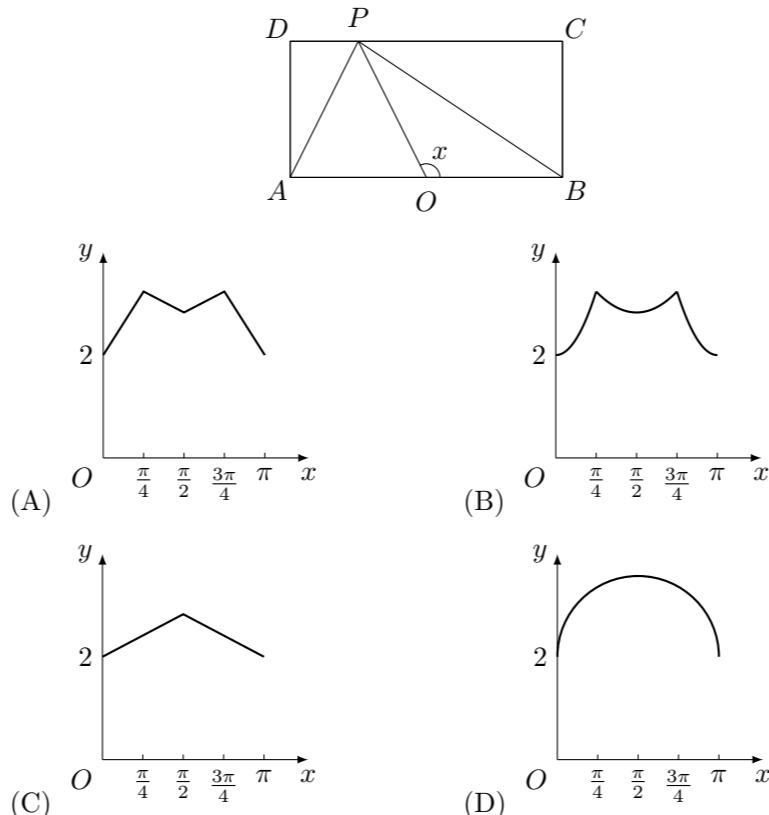


- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_2 = \text{()}$
 (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$

10. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()
 (A) 36π (B) 64π (C) 144π (D) 256π

11. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB = 2$, $BC = 1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP = x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象大致为 ()



12. 设函数 $f(x) = \ln(1+|x|) - \frac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1}{3}, 1)$ (B) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$
 (C) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (D) $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

二、填空题

13. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 2x$ 的图象过点 $(-1, 4)$, 则 $a = \text{_____}$.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-5 \leqslant 0 \\ 2x-y-1 \geqslant 0 \\ x-2y+1 \leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x+y$ 的最大值为 _____ .

15. 已知双曲线过点 $(4, \sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程为 _____ .

16. 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a+2)x + 1$ 相切, 则 $a = \text{_____}$.

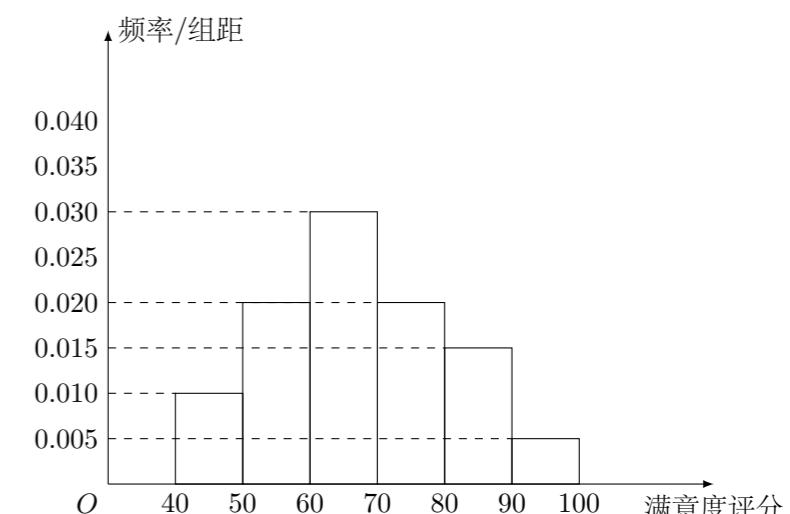
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD = 2DC$.

- (1) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$;
- (2) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 求 $\angle B$.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对其产品的满意度的评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频率分布表.

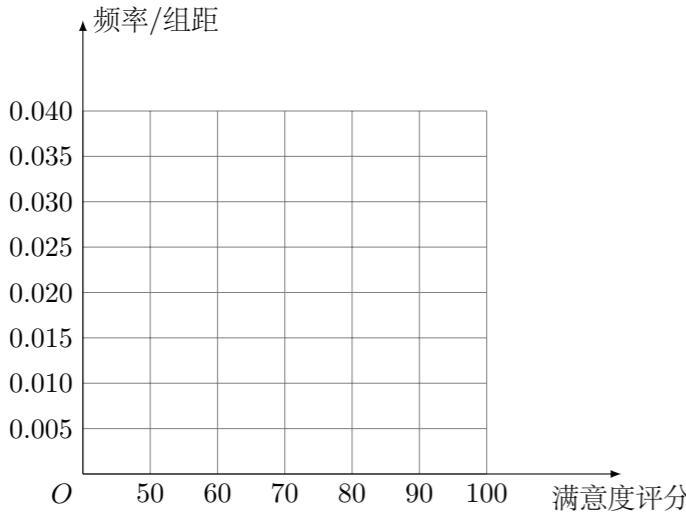
A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布表

满意度评分分组	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
频数	2	8	14	10	6

(1) 在图中作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图, 并通过此图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度; (不要求计算出具体值, 给出结论即可)



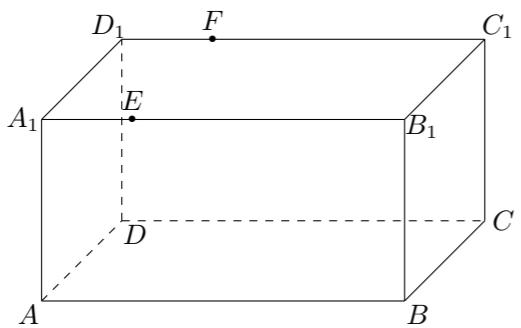
(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度评分分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区的用户的满意度等级为不满意的概率大, 说明理由.

19. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 16$, $BC = 10$, $AA_1 = 8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E = D_1F = 4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.

- 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
- 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.

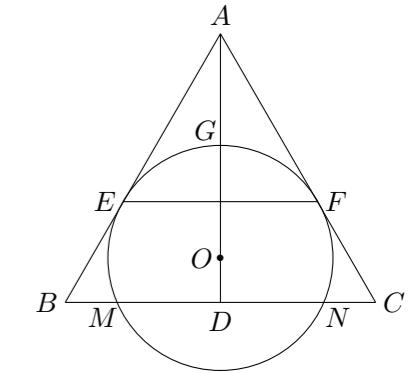


20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2, \sqrt{2})$ 在 C 上.

- 求 C 的方程;
- 直线 l 不经过原点 O , 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 中点为 M , 证明: 直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率乘积为定值.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G , 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.

- 证明: $EF \parallel BC$;
- 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$.

- 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
- 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

21. 已知 $f(x) = \ln x + a(1-x)$.

- 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

- 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;
- $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.