

文科数学

一、选择题

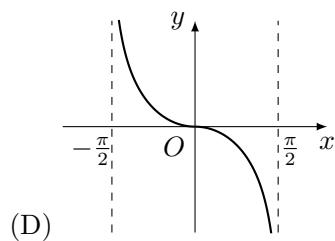
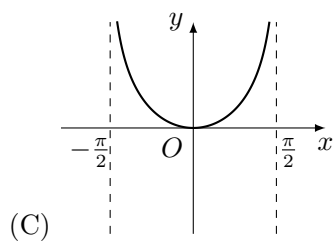
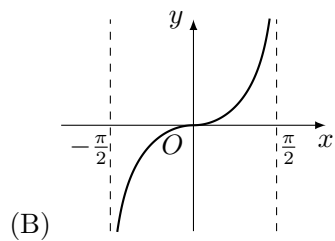
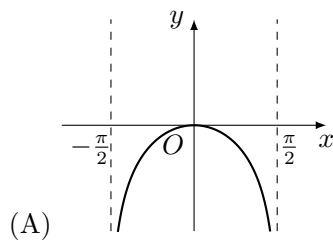
1. 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 的个数是 ()

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. 设 z 的共轭复数是 \bar{z} , 或 $z + \bar{z} = 4$, $z \cdot \bar{z} = 8$, 则 $\frac{\bar{z}}{z}$ 等于 ()

(A) i (B) -i (C) ± 1 (D) $\pm i$

3. 函数 $y = \ln \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 ()



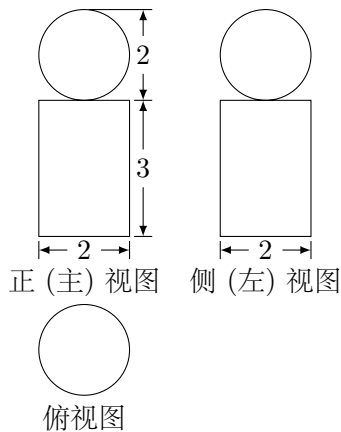
4. 给出命题: 若函数 $y = f(x)$ 是幂函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中, 真命题的个数是 ()

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$ 的值为 ()

(A) $\frac{15}{16}$ (B) $-\frac{27}{16}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) 18

6. 如图是一个几何体的三视图, 根据图中数据, 可得该几何体的表面积是 ()



(A) 9π (B) 10π (C) 11π (D) 12π

7. 不等式 $\frac{x+5}{(x-1)^2} \geq 2$ 的解集是 ()

(A) $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$
(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$ (D) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 3]$

8. 已知 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 向量 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -1)$, $\mathbf{n} = (\cos A, \sin A)$. 若 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$, 且 $a \cos B + b \cos A = c \sin C$, 则角 A, B 的大小分别为 ()

(A) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

9. 从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩, 统计如表, 则这 100 人成绩的标准差为 ()

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (C) 3 (D) $\frac{8}{5}$

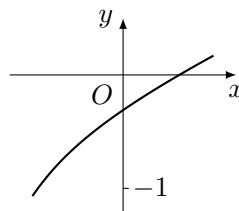
10. 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha = \frac{4}{5}\sqrt{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{7\pi}{6}\right)$ 的值是 ()

(A) $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (C) $-\frac{4}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

11. 若圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴相切, 则该圆的标准方程是 ()

(A) $(x-3)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = 1$ (B) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
(C) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$ (D) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 1$

12. 已知函数 $f(x) = \log_a(2^x + b - 1)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象如图所示, 则 a, b 满足的关系是 ()

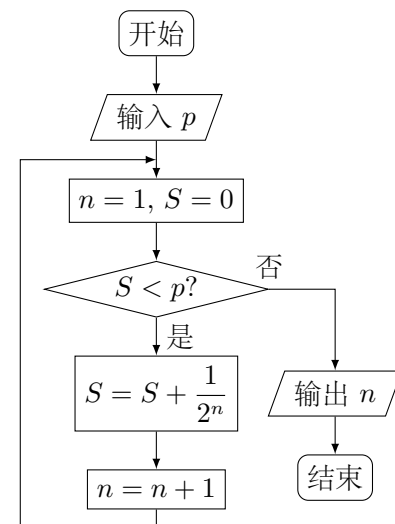


(A) $0 < a^{-1} < b < 1$ (B) $0 < b < a^{-1} < 1$
(C) $0 < b^{-1} < a < -1$ (D) $0 < a^{-1} < b^{-1} < 1$

二、填空题

13. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$. 以圆 C 与坐标轴的交点分别作为双曲线的一个焦点和顶点, 则适合上述条件的双曲线的标准方程为_____.

14. 执行下面的程序框图, 若 $p = 0.8$, 则输出的 $n =$ _____.



15. 已知 $f(3^x) = 4x \log_2 3 + 233$, 则 $f(2) + f(4) + f(8) + \dots + f(2^8)$ 的值等于_____.

16. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0 \\ 5x - y - 10 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为_____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi) - \cos(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi, \omega > 0$) 为偶函数, 且函数 $y = f(x)$ 图象的两相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

- (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ 的值;
(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g(x)$ 的单调递减区间.

18. 现有 8 名奥运会志愿者, 其中志愿者 A_1 、 A_2 、 A_3 通晓日语, B_1 、 B_2 、 B_3 通晓俄语, C_1 、 C_2 通晓韩语. 从中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各 1 名, 组成一个小组.
- (1) 求 A_1 被选中的概率;
- (2) 求 B_1 和 C_1 不全被选中的概率.

20. 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表:

a_1			
a_2	a_3		
a_4	a_5	a_6	
a_7	a_8	a_9	a_{10}
.....			

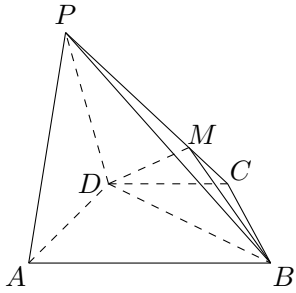
记表中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \dots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$. S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1$ ($n \geq 2$).

- (1) 证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 上表中, 若从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列, 且公比为同一个正数. 当 $a_{81} = -\frac{4}{91}$ 时, 求上表中第 k ($k \geq 3$) 行所有项和的和.

22. 已知曲线 $C_1: \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1$ ($a > b > 0$) 所围成的封闭图形的面积为 $4\sqrt{5}$, 曲线 C_1 的内切圆半径为 $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. 记 C_2 为以曲线 C_1 与坐标轴的交点为顶点的椭圆.

- (1) 求椭圆 C_2 的标准方程;
- (2) 设 AB 是过椭圆 C_2 中心的任意弦, l 是线段 AB 的垂直平分线. M 是 l 上异于椭圆中心的点.
- ① 若 $|MO| = \lambda|OA|$ (O 为坐标原点), 当点 A 在椭圆 C_2 上运动时, 求点 M 的轨迹方程;
- ② 若 M 是 l 与椭圆 C_2 的交点, 求 $\triangle AMB$ 的面积的最小值.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 已知 $BD = 2AD = 8$, $AB = 2DC = 4\sqrt{5}$.
- (1) 设 M 是 PC 上的一点, 证明: 平面 $MBD \perp$ 平面 PAD ;
- (2) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. 设函数 $f(x) = x^2 e^{x-1} + ax^3 + bx^2$, 已知 $x = -2$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点.
- (1) 求 a 和 b 的值;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (3) 设 $g(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.