

2008 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合  $M = \{x| -3 < x < 1\}$ ,  $N = \{x|x \leqslant -3\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )  
(A)  $\varnothing$  (B)  $\{x|x \geqslant -3\}$  (C)  $\{x|x \geqslant 1\}$  (D)  $\{x|x < 1\}$
2. 若函数  $y = (x + 1)(x - a)$  为偶函数, 则  $a =$  ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $1$  (D)  $2$
3. 圆  $x^2 + y^2 = 1$  与直线  $y = kx + 2$  没有公共点的充要条件是 ( )  
(A)  $k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  (B)  $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$   
(C)  $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  (D)  $k \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
4. 已知  $0 < a < 1$ ,  $x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}$ ,  $y = \frac{1}{2} \log_a 5$ ,  $z = \log_a \sqrt{21} - \log_a \sqrt{3}$ , 则 ( )  
(A)  $x > y > z$  (B)  $z > y > x$  (C)  $y > x > z$  (D)  $z > x > y$
5. 已知四边形  $ABCD$  的三个顶点  $A(0, 2)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $C(3, 1)$ , 且  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ , 则顶点  $D$  的坐标为 ( )  
(A)  $\left(2, \frac{7}{2}\right)$  (B)  $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$  (C)  $(3, 2)$  (D)  $(1, 3)$
6. 设  $P$  为曲线  $C: y = x^2 + 2x + 3$  上的点, 且曲线  $C$  在点  $P$  处切线倾斜角的取值范围是  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , 则点  $P$  横坐标的取值范围是 ( )  
(A)  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-1, 0]$  (C)  $[0, 1]$  (D)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
7. 4 张卡片上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 从这 4 张卡片中随机抽取 2 张, 则取出的 2 张卡片上的数字之和为奇数的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{3}{4}$
8. 将函数  $y = 2^x + 1$  的图象按向量  $\boldsymbol{a}$  平移得到函数  $y = 2^{x+1}$  的图象, 则( )  
(A)  $\boldsymbol{a} = (-1, -1)$  (B)  $\boldsymbol{a} = (1, -1)$  (C)  $\boldsymbol{a} = (1, 1)$  (D)  $\boldsymbol{a} = (-1, 1)$
9. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y + x - 1 \leqslant 0 \\ y - 3x - 1 \leqslant 0 \\ y - x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最大值为 ( )  
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D)  $-4$
10. 一生产过程有 4 道工序, 每道工序需要安排一人照看. 现从甲、乙、丙等 6 名工人中安排 4 人分别照看一道工序, 第一道工序只能从甲、乙两工人中安排 1 人, 第四道工序只能从甲、丙两工人中安排 1 人, 则不同的安排方案共有 ( )  
(A) 24 种 (B) 36 种 (C) 48 种 (D) 72 种

11. 已知双曲线  $9y^2 - m^2x^2 = 1$  ( $m > 0$ ) 的一个顶点到它的一条渐近线的距离为  $\frac{1}{5}$ , 则  $m =$  ( )  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
12. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为棱  $AA_1, CC_1$  的中点, 则在空间中与三条直线  $A_1D_1, EF, CD$  都相交的直线 ( )  
(A) 不存在 (B) 有且只有两条 (C) 有且只有三条 (D) 有无数条

二、填空题

13. 函数  $y = e^{2x+1}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) 的反函数是\_\_\_\_\_.
14. 在体积为  $4\sqrt{3}\pi$  的球的表面上有  $A, B, C$  三点,  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ ,  $A, C$  两点的球面距离为  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ , 则球心到平面  $ABC$  的距离为\_\_\_\_\_.
15.  $(1 + x^3)\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$  展开式中的常数项为\_\_\_\_\_.
16. 设  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则函数  $y = \frac{2\sin^2x + 1}{\sin 2x}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题

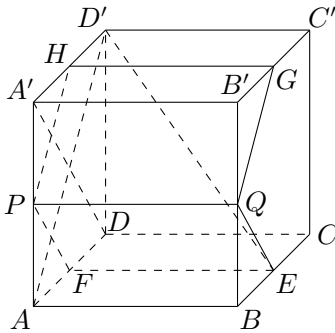
17. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  对边的边长分别是  $a, b, c$ . 已知  $c = 2, C = \frac{\pi}{3}$ .  
(1) 若  $\triangle ABC$  的面积等于  $\sqrt{3}$ , 求  $a, b$ ;  
(2) 若  $\sin B = 2\sin A$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. 某批发市场对某种商品的周销售量 (单位: 吨) 进行统计, 最近 100 周的统计结果如下表所示:

周销售量	2	3	4
频数	20	50	30

- (1) 根据上面统计结果, 求周销售量分别为 2 吨, 3 吨和 4 吨的频率;
- (2) 若以上述频率作为概率, 且各周的销售量相互独立, 求  
① 4 周中该种商品至少有一周的销售量为 4 吨的概率;  
② 该种商品 4 周的销售量总和至少为 15 吨的概率.

19. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中,  $AP = BQ = b$  ( $0 < b < 1$ ), 截面  $PQEF \parallel A'D$ , 截面  $PQGH \parallel AD'$ .  
(1) 证明: 平面  $PQEF$  和平面  $PQGH$  互相垂直;  
(2) 证明: 截面  $PQEF$  和截面  $PQGH$  面积之和是定值, 并求出这个值;  
(3) 若  $b = \frac{1}{2}$ , 求  $D'E$  与平面  $PQEF$  所成角的正弦值.



20. 在数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  是各项均为正数的等比数列, 设  $c_n = \frac{b_n}{a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- (1) 数列  $\{c_n\}$  是否为等比数列? 证明你的结论;
- (2) 设数列  $\{\ln a_n\}$ ,  $\{\ln b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$ ,  $T_n$ . 若  $a_1 = 2$ ,  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+1}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和.
21. 在直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P$  到两点  $(0, -\sqrt{3})$ ,  $(0, \sqrt{3})$  的距离之和为 4, 设点  $P$  的轨迹为  $C$ .
- (1) 写出  $C$  的方程;
- (2) 设直线  $y = kx + 1$  与  $C$  交于  $A$ ,  $B$  两点.  $k$  为何值时  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ? 此时  $\left| \overrightarrow{AB} \right|$  的值是多少?
22. 设函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3a^2x + 1$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 在  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  处取得极值, 且  $|x_1 - x_2| = 2$ .
- (1) 若  $a = 1$ , 求  $b$  的值, 并求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若  $a > 0$ , 求  $b$  的取值范围.