2014 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, 则 $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

2. 若二项式 $\left(2x+\frac{a}{x}\right)^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 84, 则实数 $a=$ ( )

(A) 2 (B) $\sqrt[5]{4}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. 设 U 为全集, A, B 是集合, 则"存在集合 C 使得 $A\subseteq C$, $B\subseteq \complement_U C$"是"$A\cap B=\varnothing$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

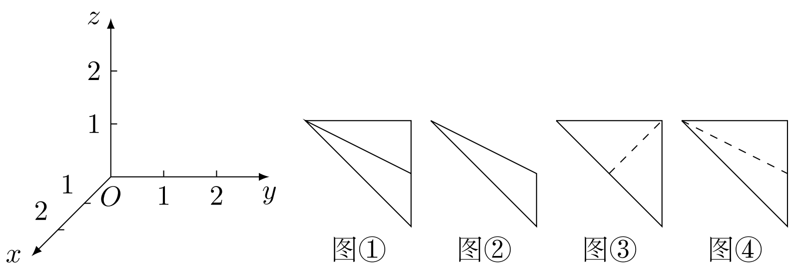
4. 根据如下样本数据

x	3	4	5	6	7	8
y	4.0	2.5	-0.5	0.5	-2.0	-3.0

得到的回归方程为 $\widehat{y}=bx+a$, 则 ( )

(A) $a>0, b>0$ (B) $a>0, b<0$ (C) $a<0, b>0$ (D) $a<0, b<0$

5. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 一个四面体的顶点坐标分别是 $(0,0,2)$, $(2,2,0)$, $(1,2,1)$, $(2,2,2)$. 给出编号为①②③④的四个图, 则该四面体的正视图和俯视图分别为 ( )



(A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

6. 若函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则称 $f(x)$, $g(x)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的一组正交函数, 给出三组函数:

① $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$, $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$;

② $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$;

③ $f(x)=x$, $g(x)=x^2$.

其中为区间 $[-1,1]$ 上的正交函数的组数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

7. 由不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\geqslant 0\\ y-x-2\leqslant 0\end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_1, 不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 1\\ x+y\geqslant -2\end{cases}$ 确定的平面区域记为 Ω_2, 在 Ω_1 中随机取一点, 则该点恰好在 Ω_2 内的概率为 ( )

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{8}$

8.《算数书》竹简于上世纪八十年代在湖北省江陵县张家山出土, 这是我国现存最早的有系统的数学典籍, 其中记载有求"囷盖"的术: 置如其周, 令相乘也. 又以高乘之, 三十六成一. 该术相当于给出了由圆锥的底面周长 L 与高 h, 计算其体积 V 的近似公式 $V\approx\frac{1}{36}L^2h$. 它实际上是将圆锥体积公式中的圆周率 π 近似取为 3. 那么, 近似公式 $V\approx\frac{2}{75}L^2h$ 相当于将圆锥体积公式中的 π 近似取为 ( )

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{25}{8}$ (C) $\frac{157}{50}$ (D) $\frac{355}{113}$

9. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为 ( )

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) 3 (D) 2

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\frac{1}{2}(|x-a^2|+|x-2a^2|-3a^2)$. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x-1)\leqslant f(x)$, 则实数 a 的取值范围为 ( )

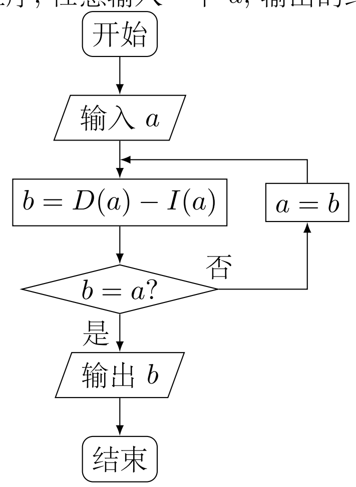
(A) $\left[-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$ (B) $\left[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ (D) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

二、填空题

11. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$, 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$, 则实数 $\lambda=$______.

12. 直线 $l_1: y=x+a$ 和 $l_2: y=x+b$ 将单位圆 $C: x^2+y^2=1$ 分成长度相等的四段弧, 则 $a^2+b^2=$______.

13. 设 a 是一个各位数字都不是 0 且没有重复数字的三位数. 将组成 a 的 3 个数字按从小到大排成的三位数记为 $I(a)$, 按从大到小排成的三位数记为 $D(a)$ (例如 $a=815$, 则 $I(a)=158$, $D(a)=851$). 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 任意输入一个 a, 输出的结果 $b=$______.



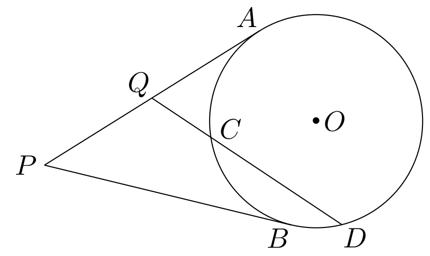
14. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 且 $f(x)>0$, 对任意 $a>0$, $b>0$, 若经过点 $(a,f(a))$, $(b,-f(b))$ 的直线与 x 轴的交点为 $(c,0)$, 则称 c 为 a, b 关于函数 $f(x)$ 的平均数, 记为 $M_f(a,b)$, 例如, 当 $f(x)=1$ $(x>0)$ 时, 可得 $M_f(a,b)=c=\frac{a+b}{2}$, 即 $M_f(a,b)$ 为 a, b 的算术平均数.

(1) 当 $f(x)=$______$(x>0)$ 时, $M_f(a,b)$ 为 a, b 的几何平均数;

(2) 当 $f(x)=$______$(x>0)$ 时, $M_f(a,b)$ 为 a, b 的调和平均数 $\frac{2ab}{a+b}$.

(以上两空各只需写出一个符合要求的函数即可)

15. 如图, P 为 $\odot O$ 外一点, 过 P 点作 $\odot O$ 的两条切线, 切点分别为 A, B, 过 PA 的中点 Q 作割线交 $\odot O$ 于 C, D 两点. 若 $QC=1$, $CD=3$, 则 $PB=$______.



16. 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=\sqrt{t}\\ y=\frac{\sqrt{3t}}{3}\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$, 则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为______.

三、解答题

17. 某实验室一天的温度 (单位: °C) 随时间 t (单位: h) 的变化近似满足函数关系: $f(t)=10-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}t-\sin\frac{\pi}{12}t$, $t\in[0,24)$.

(1) 求实验室这一天的最大温差;

(2) 若要求实验室温度不高于 11°C, 则在哪段时间实验室需要降温?

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=2$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

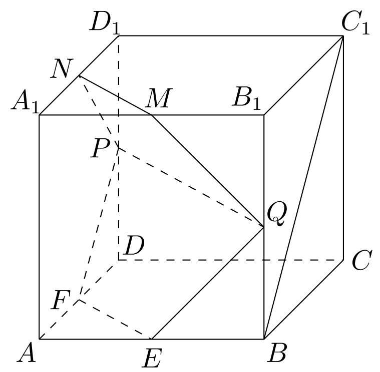
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 是否存在正整数 n, 使得 $S_n>60n+800$? 若存在, 求出 n 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别是棱 AB, AD, A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BB_1 上移动, 且 $DP=BQ=\lambda$ $(0<\lambda<2)$.

(1) 当 $\lambda=1$ 时, 证明: 直线 $BC_1 /\!/$ 平面 $EFPQ$;

(2) 是否存在 λ, 使平面 $EFPQ$ 与面 $PQMN$ 所成的二面角为直二面角? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.



20. 计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站, 过去 50 年的水文资料显示, 水库年入流量 X (年入流量: 一年内上游来水与库区降水之和. 单位: 亿立方米) 都在 40 以上. 其中, 不足 80 的年份有 10 年, 不低于 80 且不超过 120 的年份有 35 年, 超过 120 的年份有 5 年. 将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率, 并假设各年的年入流量相互独立.

(1) 求未来 4 年中, 至多有 1 年的年入流量超过 120 的概率;

(2) 水电站希望安装的发电机尽可能运行, 但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制, 并有如下关系;

年入流量 X	$40<X<80$	$80\leqslant X\leqslant 120$	$X>120$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行, 则该台年利润为 5000 万元; 若某台发电机未运行, 则该台年亏损 800 万元, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机多少台?

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1,0)$ 的距离比它到 y 轴的距离多 1, 记点 M 的轨迹为 C.

(1) 求轨迹为 C 的方程;

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2,1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点, 两个公共点, 三个公共点时 k 的相应取值范围.

22. π 为圆周率, $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间;

(2) 求 e^3, 3^{e}, e^{π}, π^{e}, 3^{π}, π^3 这 6 个数中的最大数与最小数;

(3) 将 e^3, 3^{e}, e^{π}, π^{e}, 3^{π}, π^3 这 6 个数按从小到大的顺序排列, 并证明你的结论.