2006 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \sin x - |a|$, $x \in \mathbf{R}$ 为奇函数, 则 $a =$ ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) ± 1

2. 圆 $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 1$ 的切线方程中有一个是 ( )

(A) $x - y = 0$　　(B) $x + y = 0$　　(C) $x = 0$　　(D) $y = 0$

3. 某人 5 次上班途中所花的时间 (单位: 分钟) 分别为 x, y, 10, 11, 9. 已知这组数据的平均数为 10, 方差为 2, 则 $|x - y|$ 的值为 ( )

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 为了得到函数 $y = 2\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象上所有的点 ( )

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

5. $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{3x}\right)^{10}$ 的展开式中含 x 的正整数指数幂的项数是 ( )

(A) 0　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 6

6. 已知两点 $M(-2,0)$, $N(2,0)$, 点 P 为坐标平面内的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MP}\right| + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$, 则动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程为 ( )

(A) $y^2 = 8x$　　(B) $y^2 = -8x$　　(C) $y^2 = 4x$　　(D) $y^2 = -4x$

7. 若 A、B、C 为三个集合, $A \cup B = B \cap C$, 则一定有 ( )

(A) $A \subseteq C$　　(B) $C \subseteq A$　　(C) $A \neq C$　　(D) $A \neq \varnothing$

8. 设 a、b、c 是互不相等的正数, 则下列不等式中不恒成立的是 ( )

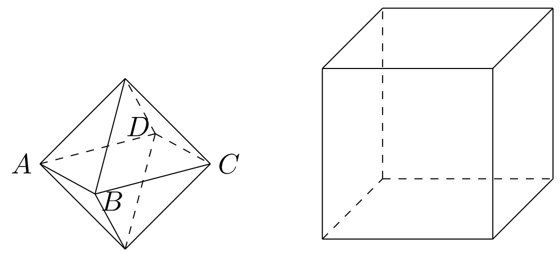
(A) $|a-b| \leqslant |a-c| + |b-c|$

(B) $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqslant a + \dfrac{1}{a}$

(C) $|a-b| + \dfrac{1}{a-b} \geqslant 2$

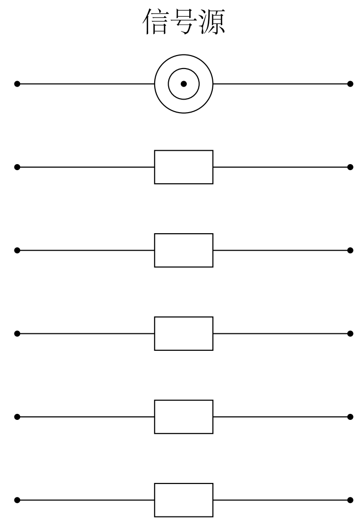
(D) $\sqrt{a+3} - \sqrt{a+1} \leqslant \sqrt{a+2} - \sqrt{a}$

9. 两个相同的正四棱锥组成如图所示的几何体, 可放入棱长为 1 的正方体内, 使正四棱锥的底面 $ABCD$ 与正方体的某一个平面平行, 且各顶点均在正方体的面上, 则这样的几何体体积的可能值有 ( )



(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 无穷多个

10. 图中有一个信号源和五个接收器. 接收器与信号源在同一个串联线路中时, 就能接收到信号, 否则就不能接收到信号. 若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组, 将右端的六个接线点也随机地平均分成三组, 再把所有六组中每组的两个接线点用导线连接, 则这五个接收器能同时接收到信号的概率是 ( )



(A) $\dfrac{4}{45}$　　(B) $\dfrac{1}{36}$　　(C) $\dfrac{4}{15}$　　(D) $\dfrac{8}{15}$

二、填空题

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BC = 12$, $A = 60°$, $B = 45°$, 则 $AC =$______.

12. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \leqslant 2 \\ x - y \geqslant -1 \\ x + y \geqslant 1 \end{cases}$, 则 $z = 2x + 3y$ 的最大值为______.

13. 今有 2 个红球, 3 个黄球, 4 个白球, 同色球不加以区分, 将这 9 个球排成一列有种不同的方法______. (用数字作答)

14. $\cot 20° \cos 10° + \sqrt{3} \sin 10° \tan 70° - 2\cos 40° =$______.

15. 对正整数 n, 设曲线 $y = x^n(1-x)$ 在 $x = 2$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为 a_n, 则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 n 项和的公式是______.

16. 不等式 $\log_2\left(x + \dfrac{1}{x} + 6\right) \leqslant 3$ 的解集为______.

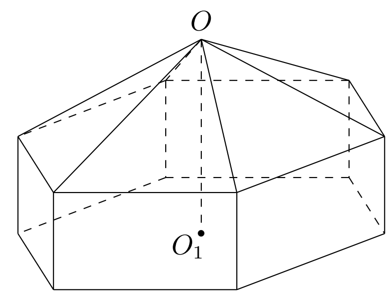
三、解答题

17. 已知三点 $P(5,2)$、$F_1(-6,0)$、$F_2(6,0)$.

(1) 求以 F_1、F_2 为焦点且过点 P 的椭圆的标准方程;

(2) 设点 P、F_1、F_2 关于直线 $y = x$ 的对称点分别为 P'、F_1'、F_2', 求以 F_1'、F_2' 为焦点且过点 P' 的双曲线的标准方程.

18. 请您设计一个帐篷. 它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱, 上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥 (如图所示). 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时, 帐篷的体积最大?



19. 在正三角形 ABC 中, E、F、P 分别是 AB、AC、BC 边上的点, 满足 $AE:EB=CF:FA=CP:PB=1:2$ (如图 1). 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折起到 $\triangle A_1EF$ 的位置, 使二面角 A_1-EF-B 成直二面角, 连接 A_1B、A_1P (如图 2).

(1) 求证: $A_1E\perp$ 平面 BEP;

(2) 求直线 A_1E 与平面 A_1BP 所成角的大小;

(3) 求二面角 $B-A_1P-F$ 的大小. (用反三角函数表示)

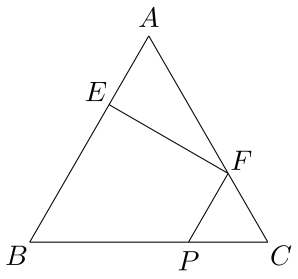


图 1

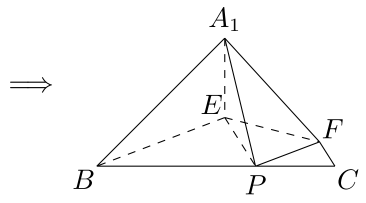


图 2

20. 设 a 为实数, 设函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.

(1) 设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$, 求 t 的取值范围, 并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$;

(2) 求 $g(a)$;

(3) 试求满足 $g(a)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a.

21. 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$), 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是 $\{c_n\}$ 为等差数列且 $b_n\leqslant b_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$).