

2015 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

理科数学

一、填空题

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$. 若集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$, 则 $A \cap \complement_U B = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 若复数 z 满足 $3z + \bar{z} = 1 + i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$, 解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$, 则 $c_1 - c_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 若正三棱柱的所有棱长均为 a , 且其体积为 $16\sqrt{3}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上的动点 Q 到焦点的距离的最小值为 1, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为 2π , 则其母线与轴的夹角的大小为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 方程 $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果用数值表示)
9. 已知点 P 和 Q 的横坐标相同, P 的纵坐标是 Q 的纵坐标的 2 倍, P 和 Q 的轨迹分别为双曲线 C_1 和 C_2 . 若 C_1 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 则 C_2 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$, $x \in [0, 2]$ 的反函数, 则 $y = f(x) + f^{-1}(x)$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. 在 $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$ 的展开式中, x^2 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果用数值表示)
12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则 $E\xi_1 - E\xi_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ (元).
13. 已知函数 $f(x) = \sin x$. 若存在 x_1, x_2, \dots, x_m 满足 $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$. 且 $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$ ($m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$), 则 m 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 在锐角三角形 ABC 中, $\tan A = \frac{1}{2}$, D 为边 BC 上的点, $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积分别为 2 和 4. 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \underline{\hspace{2cm}}$.

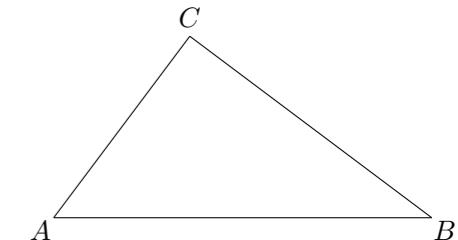
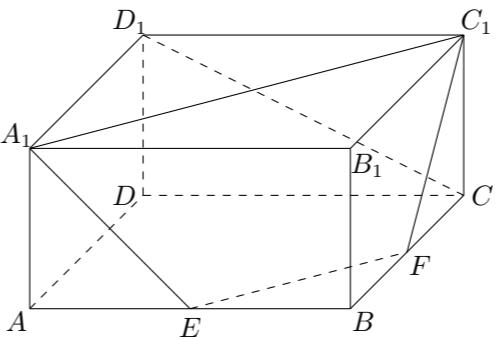
二、选择题

15. 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 则“ z_1, z_2 中至少有一个数是虚数”是“ $z_1 - z_2$ 是虚数”的()
 (A) 充分非必要条件
 (B) 必要非充分条件
 (C) 充要条件
 (D) 既非充分又非必要条件
16. 已知点 A 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 1)$, 将 OA 绕坐标原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 至 OB , 则点 B 的纵坐标为 ()
 (A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 (B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
 (C) $\frac{11}{2}$
 (D) $\frac{13}{2}$
17. 记方程①: $x^2 + a_1x + 1 = 0$, 方程②: $x^2 + a_2x + 2 = 0$, 方程③: $x^2 + a_3x + 4 = 0$, 其中 a_1, a_2, a_3 是正实数. 当 a_1, a_2, a_3 成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是 ()
 (A) 方程①有实根, 且②有实根
 (B) 方程①有实根, 且②无实根
 (C) 方程①无实根, 且②有实根
 (D) 方程①无实根, 且②无实根

18. 设 $P_n(x_n, y_n)$ 是直线 $2x - y = \frac{n}{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限的交点, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} =$ ()
 (A) -1
 (B) $-\frac{1}{2}$
 (C) 1
 (D) 2

三、解答题

19. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 1$, $AB = AD = 2$, E, F 分别是棱 AB, BC 的中点. 证明 A_1, C_1, F, E 四点共面, 并求直线 CD_1 与平面 A_1C_1FE 所成角的正弦值.



20. 如图, A, B, C 三地有直道相通, $AB = 5$ 千米, $AC = 3$ 千米, $BC = 4$ 千米. 现甲、乙两警员同时从 A 地出发匀速前往 B 地, 过 t 小时, 他们之间的距离为 $f(t)$ (单位: 千米). 甲的路线是 AB , 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是 ACB , 速度为 8 千米/小时. 乙到达 B 地后在原地等待. 设 $t = t_1$ 时, 乙到达 C 地.
 (1) 求 t_1 与 $f(t_1)$ 的值;
 (2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当 $t_1 \leq t \leq 1$ 时, 求 $f(t)$ 的表达式, 并判断 $f(t)$ 在 $[t_1, 1]$ 上的最大值是否超过 3? 说明理由.

21. 已知椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于点 A, B 和 C, D . 记得到的平行四边形 $ACBD$ 的面积为 S .
- (1) 设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$. 用 A, C 的坐标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S = 2|x_1y_2 - x_2y_1|$;
 - (2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求面积 S 的值.
22. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 若 $b_n = 3n + 5$, 且 $a_1 = 1$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 设 $\{a_n\}$ 的第 n_0 项是最大项, 即 $a_{n_0} \geq a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 求证: $\{b_n\}$ 的第 n_0 项是最大项;
 - (3) 设 $a_1 = \lambda < 0$, $b_n = \lambda^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 求 λ 的取值范围, 使得 $\{a_n\}$ 有最大值 M 与最小值 m , 且 $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$.
23. 对于定义域为 \mathbf{R} 的函数 $g(x)$, 若存在正常数 T , 使得 $\cos g(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则称 $g(x)$ 为余弦周期函数, 且称 T 为其余弦周期. 已知 $f(x)$ 是以 T 为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为 \mathbf{R} . 设 $f(x)$ 单调递增, $f(0) = 0$, $f(T) = 4\pi$.
- (1) 验证 $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$ 是以 6π 为余弦周期的余弦周期函数;
 - (2) 设 $a < b$, 证明对任意 $c \in [f(a), f(b)]$, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = c$;
 - (3) 证明: “ u_0 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[0, T]$ 上的解”的充要条件是“ $u_0 + T$ 为方程 $\cos f(x) = 1$ 在 $[T, 2T]$ 上的解”, 并证明对任意 $x \in [0, T]$ 都有 $f(x + T) = f(x) + f(T)$.