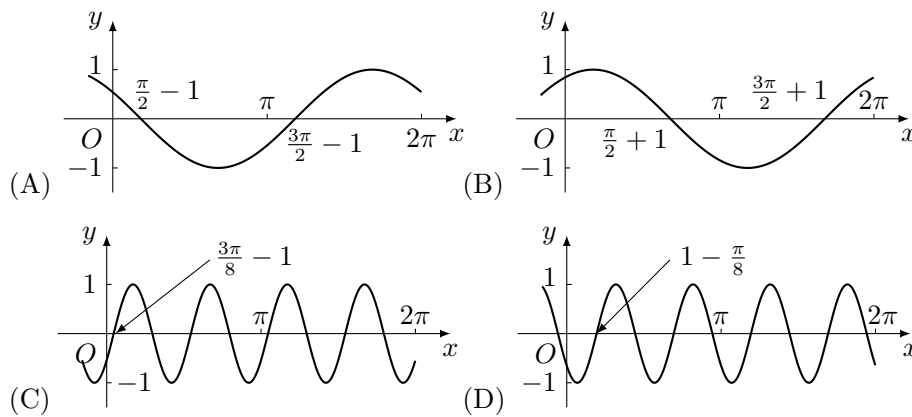


理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A = \{x | 1 < x < 4\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ()
(A) $(1, 4)$ (B) $(3, 4)$ (C) $(1, 3)$ (D) $(1, 2) \cup (3, 4)$
2. 已知 i 是虚数单位, 则 $\frac{3+i}{1-i} =$ ()
(A) $1 - 2i$ (B) $2 - i$ (C) $2 + i$ (D) $1 + 2i$
3. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a = 1$ ”是“直线 $l_1 : ax + 2y - 1 = 0$ 与直线 $l_2 : x + (a+1)y + 4 = 0$ 平行”的 ()
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 把函数 $y = \cos 2x + 1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 然后向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 得到的图象是 ()

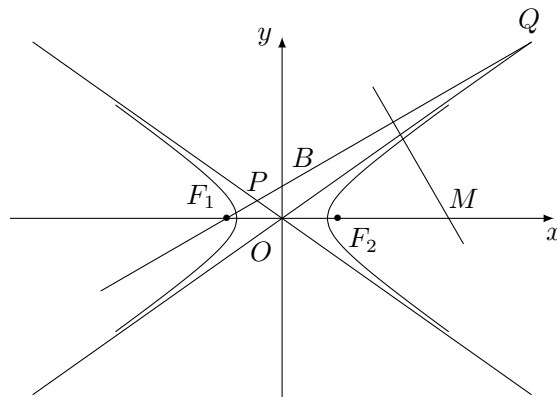


5. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是两个非零向量. ()
(A) 若 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
(B) 若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$
(C) 若 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$, 则存在实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$
(D) 若存在实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

6. 若从 1, 2, 3, \dots , 9 这 9 个整数中同时取 4 个不同的数, 其和为偶数, 则不同的取法共有 ()
(A) 60 种 (B) 63 种 (C) 65 种 (D) 66 种

7. 设 S_n 是公差为 d ($d \neq 0$) 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则下列命题错误的是 ()
(A) 若 $d < 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 有最大项
(B) 若数列 $\{S_n\}$ 有最大项, 则 $d < 0$
(C) 若数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_n > 0$
(D) 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_n > 0$, 则数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

8. 如图, F_1, F_2 分别是双曲线 $C : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 的左、右焦点, B 是虚轴的端点, 直线 F_1B 与 C 的两条渐近线分别交于 P, Q 两点, 线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M . 若 $|MF_2| = |F_1F_2|$, 则 C 的离心率是 ()



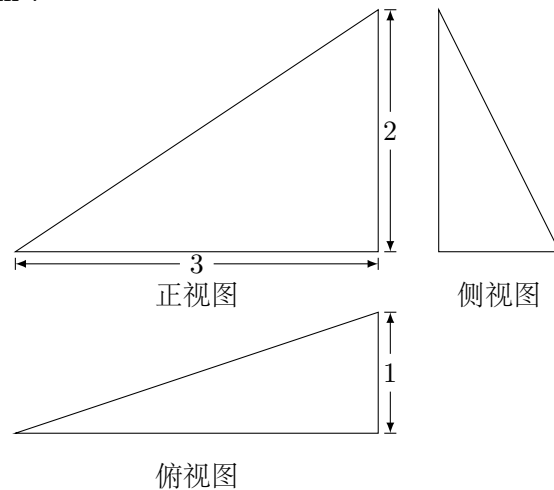
- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

9. 设 $a > 0, b > 0$. ()
(A) 若 $2^a + 2a = 2^b + 3b$, 则 $a > b$ (B) 若 $2^a + 2a = 2^b + 3b$, 则 $a < b$
(C) 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a > b$ (D) 若 $2^a - 2a = 2^b - 3b$, 则 $a < b$

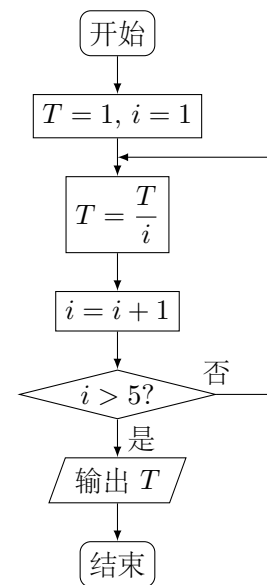
10. 已知矩形 $ABCD$, $AB = 1, BC = \sqrt{2}$, 将 $\triangle ABD$ 沿矩形的对角线 BD 所在的直线进行翻折, 在翻折过程中 ()
(A) 存在某个位置, 使得直线 AC 与直线 BD 垂直
(B) 存在某个位置, 使得直线 AB 与直线 CD 垂直
(C) 存在某个位置, 使得直线 AD 与直线 BC 垂直
(D) 对任意位置, 三对直线“ AC 与 BD ”, “ AB 与 CD ”, “ AD 与 BC ”均不垂直

二、填空题

11. 已知某三棱锥的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该三棱锥的体积等于 _____ cm^3 .



12. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是_____.



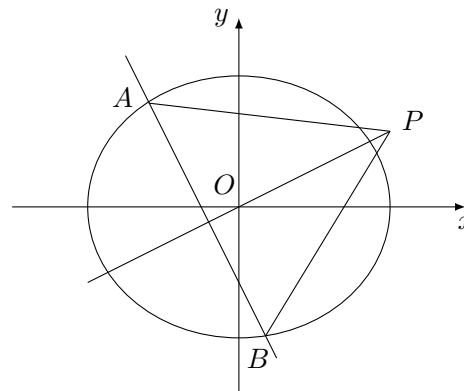
13. 设公比为 q ($q > 0$) 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $S_2 = 3a_2 + 2$, $S_4 = 3a_4 + 2$, 则 $q =$ _____.
14. 若将函数 $f(x) = x^5$ 表示为 $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_5(1+x)^5$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_5$ 为实数, 则 $a_3 =$ _____.
15. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 3, BC = 10$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.
16. 定义: 曲线 C 上的点到直线 l 的距离的最小值称为曲线 C 到直线 l 的距离. 已知曲线 $C_1 : y = x^2 + a$ 到直线 $l : y = x$ 的距离等于曲线 $C_2 : x^2 + (y+4)^2 = 2$ 到直线 $l : y = x$ 的距离, 则实数 $a =$ _____.
17. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $x > 0$ 时均有 $[(a-1)x - 1](x^2 - ax - 1) \geq 0$, 则 $a =$ _____.

三、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\cos A = \frac{2}{3}$, $\sin B = \sqrt{5} \cos C$.
(1) 求 $\tan C$ 的值;
(2) 若 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. 已知箱中装有 4 个白球和 5 个黑球, 且规定: 取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分. 现从该箱中任取 (无放回, 且每球取到的机会均等) 3 个球, 记随机变量 X 为取出此 3 球所得分数之和.
- (1) 求 X 的分布列;
- (2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

21. 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 其左焦点到点 $P(2, 1)$ 的距离为 $\sqrt{10}$, 不过原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 且线段 AB 被直线 OP 平分.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 求 $\triangle ABP$ 面积取最大值时直线 l 的方程.



22. 已知 $a > 0, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = 4ax^3 - 2bx - a + b$.
- (1) 证明: 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,
- ① 函数 $f(x)$ 的最大值为 $|2a - b| + a$;
- ② $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$;
- (2) 若 $-1 \leq f(x) \leq 1$ 对 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 求 $a + b$ 的取值范围.

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的菱形, $\angle BAD = 120^\circ$, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 2\sqrt{6}$, M, N 分别为 PB, PD 的中点.
- (1) 证明: $MN \parallel$ 平面 $ABCD$;
- (2) 过点 A 作 $AQ \perp PC$, 垂足为点 Q , 求二面角 $A-MN-Q$ 的平面角的余弦值.

