2000 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$、$\overrightarrow{OB}=(3,m)$, 若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 则 $m=$______.

2. 函数 $y=\log_2\dfrac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为______.

3. 圆锥曲线 $\begin{cases}x=4\sec\theta+1\\ y=3\tan\theta\end{cases}$ 的焦点坐标是______.

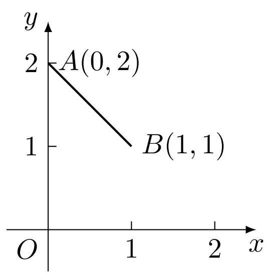
4. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n=$______.

5. 已知 $f(x)=2^x+b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点 $Q(5,2)$, 则 $b=$______.

6. 根据上海市人大十一届三次会议上的市政府工作报告, 1999 年上海市完成 GDP (GDP 是指国内生产总值) 4035 亿元, 2000 年上海市 GDP 预期增长 9%, 市委、市府提出本市常住人口每年的自然增长率将控制在 0.08%, 若 GDP 与人口均按这样的速度增长, 则要使本市年人均 GDP 达到或超过 1999 年的 2 倍, 至少需______年.
按: 1999 年本市常住人口总数约 1300 万.

7. 命题 A: 底面为正三角形, 且顶点在底面的射影为底面中心的三棱锥是正三棱锥, 命题 A 的等价题 B 可以是: 底面为正三角形, 且__________的三棱锥是正三棱锥.

8. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为 2 的偶函数, 它在区间 $[0,1]$ 上的图象为如图所示的线段 AB, 则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$______.



9. 在二项式 $(x-1)^{11}$ 的展开式中, 系数最小的项的系数为______. (结果用数值表示)

10. 有红、黄、蓝三种颜色的旗帜各 3 面, 在每种颜色的 3 面旗帜上分别标上号码 1、2 和 3, 现任取出 3 面, 它们的颜色与号码均不相同的概率是______.

11. 在极坐标系中, 若过点 $(3,0)$ 且与极轴垂直的直线交曲线 $\rho=4\cos\theta$ 于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10}=0$, 则有等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$ $(n<19,\ n\in\mathbf{N}^*)$ 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等此数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9=1$, 则有等式____________________成立.

二、选择题

13. 复数 $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$ (i 是虚数单位) 的三角形式是 ( )

(A) $3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right]$ (B) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

(C) $3\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$ (D) $3\left(\cos\dfrac{6\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\dfrac{6\pi}{5}\right)$

14. 设有不同的直线 a、b 和不同的平面 α、β、γ, 给出下列三个命题:
① 若 $a\parallel\alpha$, $b\parallel\alpha$, 则 $a\parallel b$; ② 若 $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$; ③ 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\beta$. 其中正确的个数是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

15. 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$, $T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $S\cap T$ 是( )

(A) S (B) T (C) $\varnothing$ (D) 有限集

16. 下列命题中正确的命题是 ( )

(A) 若点 $P(a,2a)$ $(a\neq 0)$ 为角 α 终边上一点, 则 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(B) 同时满足 $\sin a=\dfrac{1}{2}$, $\cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的角 a 有且只有一个

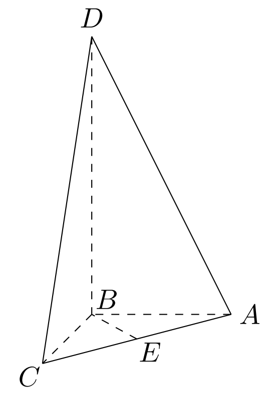
(C) 当 $|a|<1$ 时, $\tan(\arcsin a)$ 的值恒正

(D) 三角方程 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ 的解集为 $\{x|x=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

三、解答题

17. 已知椭圆 C 的焦点分别为 $F_1(-2\sqrt{2},0)$ 和 $F_2(2\sqrt{2},0)$, 长轴长为 6, 设直 $y=x+2$ 交椭圆 C 于 A、B 两点, 求线段 AB 的中点坐标.

18. 如图所示四面体 $ABCD$ 中, AB、BC、BD 两两互相垂直, 且 $AB=BC=2$, E 是 AC 中点, 异面直线 AD 与 BE 所成的角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$, $x\in[1,+\infty)$.
(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f(x)>0$ 恒成立, 试求实数 a 的取值范围.

20. 根据指令 (r,θ) $(r \geqslant 0, -180^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ)$, 机器人在平面上能完成下列动作: 先原地旋转角度 θ (θ 为正时, 按逆时针方向旋转 θ, θ 为负时, 按顺时针方向旋转 $-\theta$), 再朝其面对的方向沿直线行走距离 r.
(1) 现机器人在直角坐标系的坐标原点, 且面对 x 轴正方向, 试给机器人下一个指令, 使其移动到点 $(4,4)$;
(2) 机器人在完成该指令后, 发现在点 $(17,0)$ 处有一小球正向坐标原点作匀速直线滚动, 已知小球滚动的速度为机器人直线行走速度的 2 倍, 若忽略机器人原地旋转所需的时间, 问机器人最快可在何处截住小球? 并给出机器人截住小球所需的指令. (结果精确到小数点后两位)

21. 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$, $P_2(a_2,b_2)$, $\cdots$, $P_n(a_n,b_n)$, $\cdots$, 对每个自然数 n, 点 P_n 位于函数 $y = 2000 \cdot \left(\dfrac{a}{10}\right)^2$ $(0 < a < 10)$ 的图象上, 且点 P_n, 点 $(n,0)$ 与点 $(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.
(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;
(2) 若对每个自然数 n, 以 b_n, b_{n+1}, b_{n+2} 为边长能构成一个三角形, 求 a 取值范围;
(3) 设 $B_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ $(n \in \mathbf{N})$, 若 a 取 (2) 中确定的范围内的最小整数, 求数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数.

22. 已知复数 $z_0 = 1 - m\mathrm{i}$ $(m > 0)$, $z = x + y\mathrm{i}$ 和 $\omega = x' + y'\mathrm{i}$, 其中 x, y, x', y' 均为实数, i 为虚数单位, 且对于任意复数 z, 有 $\omega = \overline{z_0} \cdot \overline{z}$, $|\omega| = 2|z|$.
(1) 试求 m 的值, 并分别写出 x' 和 y' 用 x、y 表示的关系式;
(2) 将 (x,y) 作为点 P 的坐标, (x',y') 作为点 Q 的坐标, 上述关系可以看作是坐标平面上点的一个变换: 它将平面上的点 P 变到这一平面上的点 Q, 当点 P 在直线 $y = x + 1$ 上移动时, 试求点 P 经该变换后得到的点 Q 的轨迹方程;
(3) 是否存在这样的直线: 它上面的任一点经上述变换后得到的点仍在该直线上? 若存在, 试求出所有这些直线; 若不存在, 则说明理由.