2005 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

数学试卷

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}-1$ 在复平面内, z 所对应的点在 （ ）

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续的 （ ）

(A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

3. 设袋中有 80 个红球, 20 个白球, 若从袋中任取 10 个球, 则其中恰有 6 个红球的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{4}\cdot\mathrm{C}_{10}^{6}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (B) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{6}\cdot\mathrm{C}_{10}^{4}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (C) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{4}\cdot\mathrm{C}_{20}^{6}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$ (D) $\dfrac{\mathrm{C}_{80}^{6}\cdot\mathrm{C}_{20}^{4}}{\mathrm{C}_{100}^{10}}$

4. 已知 m、n 是两条不重合的直线, α、β、γ 是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题:

① 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

② 若 $\alpha\perp\gamma$, $\beta\perp\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

③ 若 $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, $m\parallel n$, 则 $\alpha\parallel\beta$;

④ 若 m、n 是异面直线, $m\subset\alpha$, $m\parallel\beta$, $n\subset\beta$, $n\parallel\alpha$, 则 $\alpha\parallel\beta$.

其中真命题是 （ ）

(A) ①和② (B) ①和③ (C) ③和④ (D) ①和④

5. 函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (B) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ (D) $y=-\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

6. 若 $\log_{2a}\dfrac{1+a^2}{1+a}<0$, 则 a 的取值范围是 （ ）

(A) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (B) $(1,+\infty)$ (C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ (D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

7. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes: x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立, 则 （ ）

(A) $-1<a<1$ (B) $0<a<2$ (C) $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2}$

8. 若钝角三角形三内角的度数成等差数列, 且最大边长与最小边长的比值为 m, 则 m 的范围是 （ ）

(A) $(1,2)$ (B) $(2,+\infty)$ (C) $[3,+\infty)$ (D) $(3,+\infty)$

9. 若直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\vec{a}=(1,-1)$ 平移后与圆 $x^2+y^2=5$ 相切, 则 c 的值为 （ ）

(A) 8 或 -2 (B) 6 或 -4 (C) 4 或 -6 (D) 2 或 -8

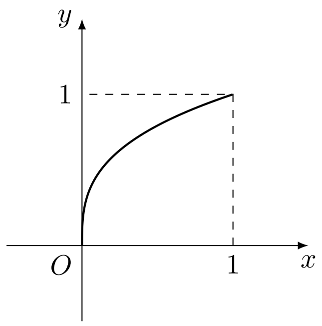
10. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 实数 $x_1\neq x_2$, $\lambda\neq-1$, $\alpha=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $\beta=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$, 若 $|f(x_1)-f(x_2)|<|f(\alpha)-f(\beta)|$, 则( )

(A) $\lambda<0$ (B) $\lambda=0$ (C) $0<\lambda<1$ (D) $\lambda\geqslant1$

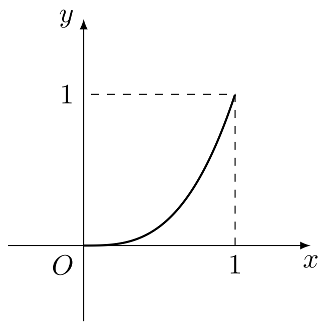
11. 已知双曲线的中心在原点, 离心率为 $\sqrt{3}$. 若它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合, 则该双曲线与抛物线 $y^2=4x$ 的交点到原点的距离是 （ ）

(A) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) $18+12\sqrt{2}$ (D) 21

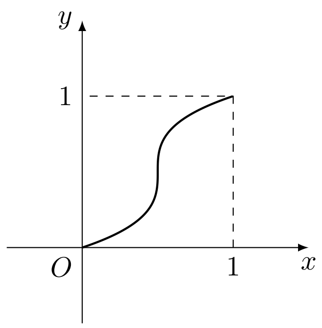
12. 一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中, 并且对任意 $a_1\in(0,1)$, 由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 则该函数的图象是 （ ）



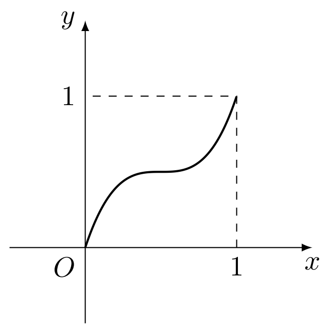
(A)



(B)



(C)

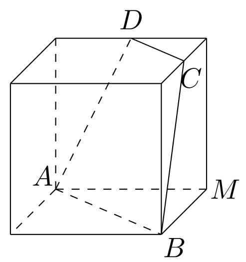


(D)

二、填空题

13. $\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 的展开式中常数项是______.

14. 如图, 正方体的棱长为 1, C、D 分别是两条棱的中点, A、B、M 是顶点, 那么点 M 到截面 $ABCD$ 的距离是______.



15. 用 1、2、3、4、5、6、7、8 组成没有重复数字的八位数, 要求 1 和 2 相邻, 3 与 4 相邻, 5 与 6 相邻, 而 7 与 8 不相邻, 这样的八位数共有______个. (用数字作答)

16. ω 是正实数, 设 $S_\omega=\{\theta|f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$ 是奇函数 $\}$, 若对每个实数 a, $S_\omega\cap(a,a+1)$ 的元素不超过 2 个, 且有 a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含 2 个元素, 则 ω 的取值范围是______.

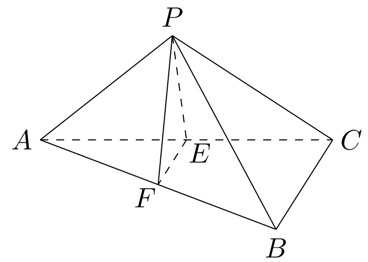
三、解答题

17. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, E、F 分别是 AC、AB 的中点, $\triangle ABC$, $\triangle PEF$ 都是正三角形, $PF\perp AB$.

(1) 证明: $PC\perp$ 平面 PAB;

(2) 求二面角 $P-AB-C$ 的平面角的余弦值;

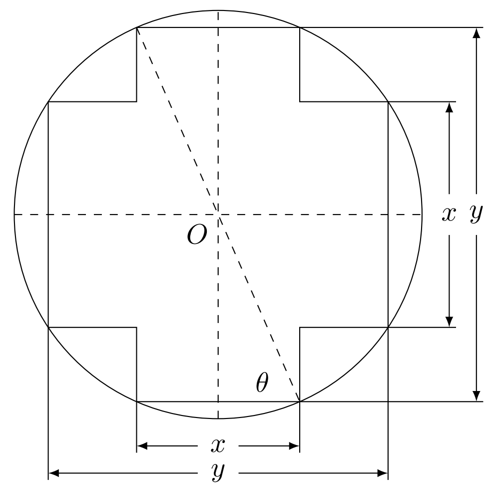
(3) 若点 P、A、B、C 在一个表面积为 12π 的球面上, 求 $\triangle ABC$ 的边长.



18. 如图, 在直径为 1 的圆 O 中, 作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形, 其中 $y>x>0$.

(1) 将十字形的面积表示为 θ 的函数;

(2) θ 为何值时, 十字形的面积最大? 最大面积是多少?



19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}\ (x\neq-1)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|$, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 用数学归纳法证明: $b_n\leqslant\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$;

(2) 证明: $S_n<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

20. 某工厂生产甲、乙两种产品, 每种产品都是经过第一和第二工序加工而成, 两道工序的加工结果相互独立, 每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级. 对每种产品, 两道工序的加工结果都为 A 级时, 产品为一等品, 其余均为二等品.

(1) 已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示, 分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$;

概率 \ 工序 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

表一

(2) 已知一件产品的利润如表二所示, 用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润, 在 (1) 的条件下, 求 ξ、η 的分布列及 $E\xi$、E_η;

利润 \ 等级 / 产品	一等	二等
甲	5 (万元)	2.5 (万元)
乙	2.5 (万元)	1.5 (万元)

表二

(3) 已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示. 该工厂有工人 40 名, 可用资. 金 60 万元. 设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量, 在 (2) 的条件下, x、y 为何值时, $z=xE\xi+yE_\eta$ 最大? 最大值是多少?

用量 \ 项目 / 产品	工人 (名)	资金 (万元)
甲	8	8
乙	2	10

表三

21. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, Q 是椭圆外的动点, 满足 $\left|\overrightarrow{F_1Q}\right|=2a$. 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点, 点 T 在线段 F_2Q 上, 并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$, $\left|\overrightarrow{TF_2}\right|\neq0$.

(1) 设 x 为点 P 的横坐标, 证明: $\left|\overrightarrow{F_1P}\right|=a+\dfrac{c}{a}x$;

(2) 求点 T 的轨迹 C 的方程;

(3) 试问: 在点 T 的轨迹 C 上, 是否存在点 M, 使 $\triangle F_1MF_2$ 的面积 $S=b^2$. 若存在, 求 $\angle F_1MF_2$ 的正切值; 若不存在, 请说明理由.

22. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导, 导函数 $f'(x)$ 是减函数, 且 $f'(x)>0$. 设 $x_0\in(0,+\infty)$, $y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程, 并设函数 $g(x)=kx+m$.

(1) 用 x_0、$f(x_0)$、$f'(x_0)$ 表示 m;

(2) 证明: 当 $x_0\in(0,+\infty)$, $g(x)\geqslant f(x)$;

(3) 若关于 x 的不等式 $x^2+1\geqslant ax+b\geqslant\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立, 其中 a、b 为实数, 求 b 的取值范围及 a 与 b 所满足的关系.