

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{x|x^2 < 4\}$, $N = \{x|x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 $M \cap N =$ ()
(A) $\{x|x < -2\}$ (B) $\{x|x > 3\}$
(C) $\{x|-1 < x < 2\}$ (D) $\{x|2 < x < 3\}$
2. 函数 $y = \frac{1}{x+5}$ ($x \neq -5$) 的反函数是 ()
(A) $y = \frac{1}{x} - 5$ ($x \neq 0$) (B) $y = x + 5$ ($x \in \mathbf{R}$)
(C) $y = \frac{1}{x} + 5$ ($x \neq 0$) (D) $y = x - 5$ ($x \in \mathbf{R}$)
3. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 ()
(A) $y = 3x - 4$ (B) $y = -3x + 2$ (C) $y = -4x + 3$ (D) $y = 4x - 5$
4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 关于直线 $y = -x$ 对称, 则圆 C 的方程为 ()
(A) $(x+1)^2 + y^2 = 1$ (B) $x^2 + y^2 = 1$
(C) $x^2 + (y+1)^2 = 1$ (D) $x^2 + (y-1)^2 = 1$
5. 已知函数 $y = \tan(2x + \varphi)$ 的图象过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 则 φ 可以是 ()
(A) $-\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $-\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{12}$
6. 正四棱锥的侧棱长与底面边长都是 1, 则侧棱与底面所成的角为 ()
(A) 75° (B) 60° (C) 45° (D) 30°
7. 函数 $y = -e^x$ 的图象 ()
(A) 与 $y = e^x$ 的图象关于 y 轴对称
(B) 与 $y = e^x$ 的图象关于坐标原点对称
(C) 与 $y = e^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称
(D) 与 $y = e^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称
8. 已知点 $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, 则线段 AB 的垂直平分线的方程为 ()
(A) $4x + 2y = 5$ (B) $4x - 2y = 5$ (C) $x + 2y = 5$ (D) $x - 2y = 5$
9. 已知向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 满足: $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 2$, 则 $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| =$ ()
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$
10. 已知球 O 的半径为 1, A 、 B 、 C 三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则球心 O 到平面 ABC 的距离为 ()
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
11. 函数 $y = \sin^4 x + \cos^2 x$ 的最小正周期为 ()
(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) 2π

12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有 ()
(A) 56 个 (B) 57 个 (C) 58 个 (D) 60 个

二、填空题

13. 已知 a 为实数, $(x+a)^{10}$ 展开式中 x^7 的系数是 -15 , 则 $a =$ _____.
14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是_____.
15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是_____.
16. 下面是关于四棱柱的四个命题:
① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;
② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;
③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;
④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.
其中, 真命题的编号是_____. (写出所有真命题的编号)

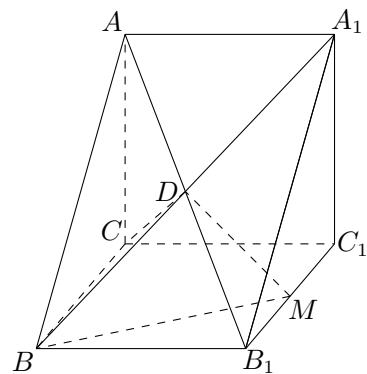
三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $a_2 = 9$, $a_5 = 21$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 令 $b_n = 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$.
(1) 求证: $\tan A = 2 \tan B$;
(2) 设 $AB = 3$, 求 AB 边上的高.

19. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为 A 、 B 两组, 每组 4 支. 求:
(1) A 、 B 两组中有一组恰有两支弱队的概率;
(2) A 组中至少有两支弱队的概率.

20. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 1$, $CB = \sqrt{2}$, 侧棱 $AA_1 = 1$, 侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D , B_1C_1 的中点为 M .
- (1) 求证: $CD \perp$ 平面 BDM ;
- (2) 求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.



21. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$ 在区间 $(1, 4)$ 内为减函数, 在区间 $(6, +\infty)$ 上为增函数, 试求实数 a 的取值范围.

22. 给定抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点.
- (1) 设 l 的斜率为 1, 求 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 夹角的大小;
- (2) 设 $\overrightarrow{FB} = \lambda \overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda \in [4, 9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.