2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ ( )

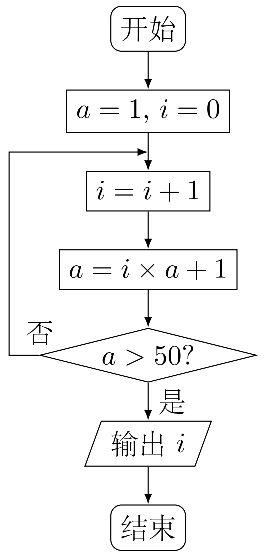
(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-1+2\mathrm{i}$ (D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 设 $x, y\in\mathbf{R}$, 则“$x\geqslant 2$ 且 $y\geqslant 2$”是“$x^2+y^2\geqslant 4$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 阅读下面的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 i 的值为 ( )



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

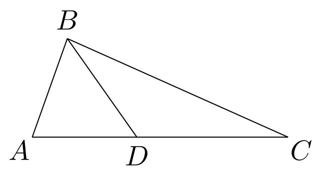
4. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其公差为 -2, 且 a_7 是 a_3 与 a_9 的等比中项, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 S_{10} 的值为 ( )

(A) -110 (B) -90 (C) 90 (D) 110

5. 在 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中, x^2 的系数为 ( )

(A) $-\dfrac{15}{4}$ (B) $\dfrac{15}{4}$ (C) $-\dfrac{3}{8}$ (D) $\dfrac{3}{8}$

6. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上的点, 且 $AB=AD$, $2AB=\sqrt{3}BD$, $BC=2BD$, 则 $\sin C$ 的值为 ( )



(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

7. 已知 $a=5^{\log_2 3.4}$, $b=5^{\log_4 3.6}$, $c=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $a>c>b$ (D) $c>a>b$

8. 对实数 a 与 b, 定义运算“$\otimes$”: $a\otimes b=\begin{cases}a, & a-b\leqslant 1\\ b, & a-b>1\end{cases}$. 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-x^2)$, $x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 ( )

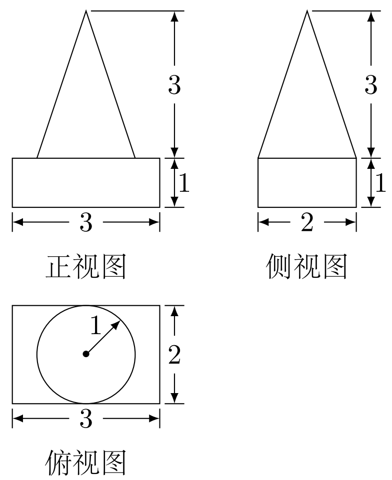
(A) $(-\infty,-2]\cup\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ (B) $(-\infty,-2]\cup\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)$

(C) $\left(-1,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ (D) $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

二、填空题

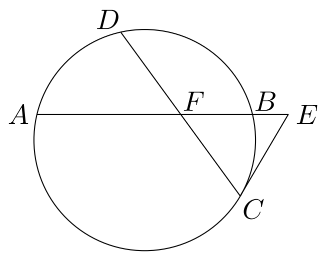
9. 一支田径队有男运动员 48 人, 女运动员 36 人, 若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本, 则抽取男运动员的人数为______.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为______m^3.



11. 已知抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=8t^2\\ y=8t\end{cases}$ (t 为参数), 若斜率为 1 的直线经过抛物线 C 的焦点, 且与圆 $(x-4)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 相切, 则 $r=$______.

12. 如图, 已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F, E 是 AB 延长线上一点, 且 $DF=CF=\sqrt{2}$, $AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为______.



13. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x+3|+|x-4|\leqslant 9\}$, $B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x=4t+\dfrac{1}{t}-6, t\in(0,+\infty)\right\}$, 则集合 $A\cap B=$______.

14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2$, $BC=1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;

(2) 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$, 若 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\cos 2\alpha$, 求 α 的大小.

16. 学校游园活动有这样一个游戏项目: 甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球, 乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球, 若摸出的白球不少于 2 个, 则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)

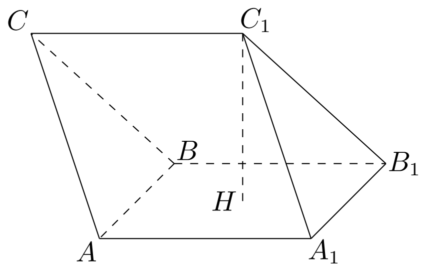
(1) 求在一次游戏中,

① 摸出 3 个白球的概率;

② 获奖的概率;

(2) 求在两次中获奖次数 X 的分布列及数学期望 $E(X)$.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1=2\sqrt{2}$, $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B, 且 $C_1H=\sqrt{5}$.
(1) 求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值;
(2) 求二面角 $A-A_1C_1-B_1$ 的正弦值;
(3) 设 N 为棱 B_1C_1 的中点, 点 M 在平面 AA_1B_1B 内, 且 $MN\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 求线段 BM 的长.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $P(a,b)$ $(a>b>0)$ 为动点, F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点. 已知 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形.
(1) 求椭圆的离心率 e;
(2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, M 是直线 PF_2 上的点, 满足 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=-2$, 求点 M 的轨迹方程.

19. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\ln x-ax^2$, $x>0$. ($f(x)$ 的图象连续不断)
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(2) 当 $a=\dfrac{1}{8}$ 时, 证明: 存在 $x_0\in(2,+\infty)$, 使 $f(x_0)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$;
(3) 若存在均属于区间 $[1,3]$ 的 α, β, 且 $\beta-\alpha\geqslant 1$, 使 $f(\alpha)=f(\beta)$, 证明: $\dfrac{\ln 3-\ln 2}{5}\leqslant a\leqslant\dfrac{\ln 2}{3}$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_na_n+a_{n+1}+b_{n+1}a_{n+2}=0$, $b_n=\dfrac{3+(-1)^n}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $a_1=2$, $a_2=4$.
(1) 求 a_3, a_4, a_5 的值;
(2) 设 $c_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\{c_n\}$ 是等比数列;
(3) 设 $S_k=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}$, $k\in\mathbf{N}^*$, 证明: $\sum\limits_{k=1}^{4n}\dfrac{S_k}{a_k}<\dfrac{7}{6}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.