2020 年普通高等学校招生考试（全国卷 III）

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$, $B=\{x\mid 3<x<15\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

2. 若 $\overline{z}\,(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $1-\mathrm{i}$　(B) $1+\mathrm{i}$　(C) $-\mathrm{i}$　(D) i

3. 设一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方差为 0.01, 则数据 $10x_1, 10x_2, \cdots, 10x_n$ 的方差为 ( )

(A) 0.01　(B) 0.1　(C) 1　(D) 10

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领城. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 ($\ln 19\approx 3$) ( )

(A) 60　(B) 63　(C) 66　(D) 69

5. 已知 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$, 则 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

6. 在平面内, A, B 是两个定点, C 是动点. 若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=1$, 则点 C 的轨迹为 ( )

(A) 圆　(B) 椭圆　(C) 抛物线　(D) 直线

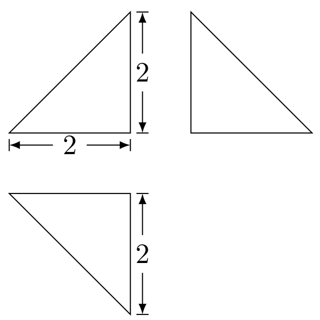
7. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 C: $y^2=2px\ (p>0)$ 交于 D, E 两点. 若 $OD\perp OE$, 则 C 的焦点坐标为 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$　(C) $(1,0)$　(D) $(2,0)$

8. 点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 距离的最大值为 ( )

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2

9. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 ( )



(A) $6+4\sqrt{2}$　(B) $4+4\sqrt{2}$　(C) $6+2\sqrt{3}$　(D) $4+2\sqrt{3}$

10. 设 $a=\log_3 2$, $b=\log_5 3$, $c=\dfrac{2}{3}$, 则 ( )

(A) $a<c<b$　(B) $a<b<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\tan B=$ ( )

(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $4\sqrt{5}$　(D) $8\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 的最小值为 2

(B) $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

(C) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

(D) $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ 2x-y\geqslant 0 \\ x\leqslant 1 \end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

14. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$, 则 C 的离心率为______.

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+a}$. 若 $f'(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$, 则 $a=$______.

16. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

三、解答题

17. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2=4$, $a_3-a_1=8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\{\log_3 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$, 求 m.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;

(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);

(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leqslant 400$	人次 >400
空气质量好		
空气质量不好		

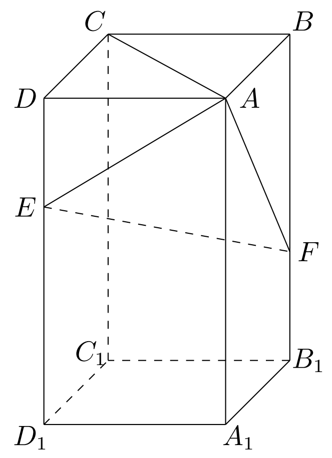
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$. 证明:

(1) 当 $AB=BC$ 时, $EF\perp AC$;

(2) 点 C_1 在平面 AEF 内.



20. 已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有三个零点, 求 k 的取值范围.

21. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t-t^2\\y=2-3t+t^2\end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;

(2) 用 $\max\{a,b,c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,b,c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.