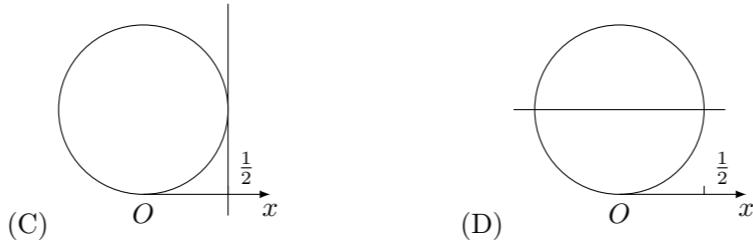
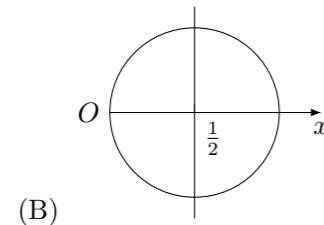
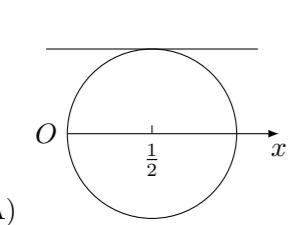


数学试卷

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$ 的最小正周期是 ()
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π
2. 圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心到直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的距离是 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$
3. 不等式 $(1+x)(1-|x|) > 0$ 的解集是 ()
 (A) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x | x < 0 \text{ 且 } x \neq -1\}$
 (C) $\{x | -1 < x < 1\}$ (D) $\{x | x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
4. 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ (B) $(\frac{\pi}{4}, \pi)$
 (C) $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ (D) $(\frac{\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$
5. 设集合 $M = \left\{ x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, $N = \left\{ x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$, 则 ()
 (A) $M = N$ (B) $M \subseteq N$ (C) $M \supseteq N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
6. 一个圆锥和一个半球有公共底面, 如果圆锥的体积恰好与半球的体积相等, 那么这个圆锥轴截面顶角的余弦值是 ()
 (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$
7. 函数 $f(x) = x|x+a| + b$ 是奇函数的充要条件是 ()
 (A) $ab = 0$ (B) $a+b=0$ (C) $a=b$ (D) $a^2+b^2=0$
8. 已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()
 (A) $\log_a(xy) < 0$ (B) $0 < \log_a(xy) < 1$
 (C) $1 < \log_a(xy) < 2$ (D) $\log_a(xy) > 2$
9. 函数 $y = 1 - \frac{1}{x-1}$ ()
 (A) 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递增 (B) 在 $(-1, +\infty)$ 内单调递减
 (C) 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增 (D) 在 $(1, +\infty)$ 内单调递减
10. 极坐标方程 $\rho = \cos \theta$ 与 $\rho \cos \theta = \frac{1}{2}$ 的图形是 ()



18. 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 + a_4 = b_3$, $b_2 b_4 = a_3$, 分别求出 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$ 的前 10 项的和 S_{10} 及 T_{10} .

11. 从正方体的 6 个面中选取 3 个面, 其中有 2 个面不相邻的选法共有 ()

(A) 8 种 (B) 12 种 (C) 16 种 (D) 20 种

12. 据 2002 年 3 月 5 日九届人大五次会议《政府工作报告》: “2001 年国内生产总值达到 95933 亿元, 比上年增长 7.3%”, 如果“十·五”期间 (2001 年 – 2005 年) 每年的国内生产总值都按此年增长率增长, 那么到“十·五”末我国国内生产总值约为 ()

(A) 115000 亿元 (B) 120000 亿元 (C) 127000 亿元 (D) 135000 亿元

二、填空题

13. 椭圆 $5x^2 + ky^2 = 5$ 的一个焦点是 $(0, 2)$, 那么 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $(x^2 + 1)(x-2)^7$ 展开式中 x^3 的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

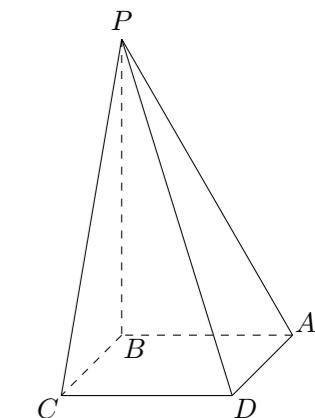
15. 已知 $\sin \alpha = \cos 2\alpha$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的正方形, $PB \perp$ 平面 $ABCD$.
 (1) 若面 PAD 与面 $ABCD$ 所成的二面角为 60° , 求这个四棱锥的体积;
 (2) 证明无论四棱锥的高怎样变化, 面 PAD 与面 PCD 所成的二面角恒大于 90° .

三、解答题

17. 已知复数 $z = 1+i$, 求实数 a, b 使 $az + 2b\bar{z} = (a+2z)^2$.



20. 设 A, B 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 上的两点, 点 $N(1, 2)$ 是线段 AB 的中点.

(1) 求直线 AB 的方程;

(2) 如果线段 AB 的垂直平分线与双曲线相交于 C, D 两点, 那么 A, B, C, D 四点是否共圆? 为什么?

21. (1) 给出两块相同的正三角形纸片 (如图 1, 图 2), 要求用其中一块剪拼成一个三棱锥模型, 另一块剪拼成一个正三棱柱模型, 使它们的全面积都与原三角形的面积相等, 请设计一种剪拼方法, 分别用虚线标示在图 1、图 2 中, 并作简要说明;

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;

(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片 (如图 3), 要求剪拼成一个直三棱柱, 使它的全面积与给出的三角形的面积相等. 请设计一种剪拼方法, 用虚线标示在图 3 中, 并作简要说明.

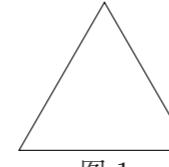


图 1

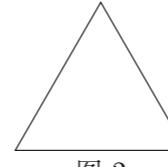


图 2

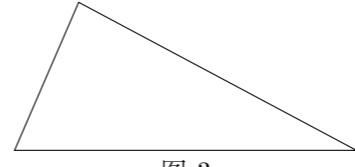


图 3

22. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = ax - bx^2$.

(1) 当 $b > 0$ 时, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x) \leq 1$, 证明: $a \leq 2\sqrt{b}$;

(2) 当 $b > 1$ 时, 证明: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件是 $b - 1 \leq a \leq 2\sqrt{b}$;

(3) 当 $0 < b \leq 1$ 时, 讨论: 对任意 $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 1$ 的充要条件.