

## 文科数学

## 一、选择题

1. 设全集  $U = \{x \in \mathbf{N}^* | x < 6\}$ , 集合  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{3, 5\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$  ( )  
 (A)  $\{1, 4\}$       (B)  $\{1, 5\}$       (C)  $\{2, 4\}$       (D)  $\{2, 5\}$

2. 不等式  $\frac{x-3}{x+2} < 0$  的解集为 ( )  
 (A)  $\{x | -2 < x < 3\}$       (B)  $\{x | x < -2\}$   
 (C)  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$       (D)  $\{x | x > 3\}$

3. 已知  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ , 则  $\cos(\pi - 2\alpha) =$  ( )  
 (A)  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$       (B)  $-\frac{1}{9}$       (C)  $\frac{1}{9}$       (D)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 函数  $y = 1 + \ln(x-1) (x > 1)$  的反函数是 ( )  
 (A)  $y = e^{x+1} - 1 (x > 0)$       (B)  $y = e^{x-1} + 1 (x > 0)$   
 (C)  $y = e^{x+1} - 1 (x \in \mathbf{R})$       (D)  $y = e^{x-1} + 1 (x \in \mathbf{R})$

5. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x + 2y \leq 5 \end{cases}$ , 则  $z = 2x + y$  的最大值为 ( )  
 (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

6. 如果等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_3 + a_4 + a_5 = 12$ , 那么  $a_1 + a_2 + \dots + a_7 =$  ( )  
 (A) 14      (B) 21      (C) 28      (D) 35

7. 若曲线  $y = x^2 + ax + b$  在点  $(0, b)$  处的切线方程是  $x - y + 1 = 0$ , 则 ( )  
 (A)  $a = 1, b = 1$       (B)  $a = -1, b = 1$   
 (C)  $a = 1, b = -1$       (D)  $a = -1, b = -1$

8. 在三棱锥  $S-ABC$  中, 底面  $ABC$  为边长等于 2 的等边三角形,  $SA$  垂直于底面  $ABC$ ,  $SA = 3$ , 那么直线  $AB$  与平面  $SBC$  所成角的正弦值为 ( )  
 (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       (B)  $\frac{\sqrt{5}}{4}$       (C)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$       (D)  $\frac{3}{4}$

9. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的放法共有 ( )  
 (A) 12 种      (B) 18 种      (C) 36 种      (D) 54 种

10.  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  在边  $AB$  上,  $CD$  平分  $\angle ACB$ . 若  $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CA} = \mathbf{b}, |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$ , 则  $\overrightarrow{CD} =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$       (B)  $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$       (C)  $\frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b}$       (D)  $\frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$

11. 与正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的三条棱  $AB, CC_1, A_1D_1$  所在直线的距离相等的点 ( )

- (A) 有且只有 1 个      (B) 有且只有 2 个  
 (C) 有且只有 3 个      (D) 有无数个

12. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过右焦点  $F$  且斜率为  $k (k > 0)$  的直线与  $C$  相交于  $A, B$  两点. 若  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ , 则  $k =$  ( )  
 (A) 1      (B)  $\sqrt{2}$       (C)  $\sqrt{3}$       (D) 2

## 二、填空题

13. 已知  $\alpha$  是第二象限的角,  $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ , 则  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_.

14.  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$  的展开式中  $x^3$  的系数是 \_\_\_\_\_.

15. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的准线为  $l$ , 过  $M(1, 0)$  且斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $l$  相交于点  $A$ , 与  $C$  的一个交点为  $B$ . 若  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ , 则  $p =$  \_\_\_\_\_.

16. 已知球  $O$  的半径为 4, 圆  $M$  与圆  $N$  为该球的两个小圆,  $AB$  为圆  $M$  与圆  $N$  的公共弦,  $AB = 4$ . 若  $OM = ON = 3$ , 则两圆圆心的距离  $MN =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

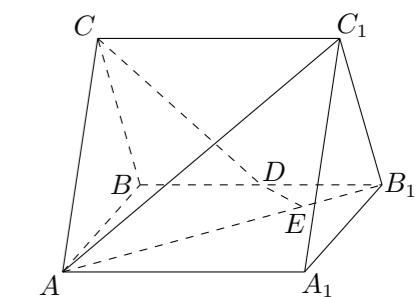
17.  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  上的一点,  $BD = 33, \sin B = \frac{5}{13}, \cos \angle ADC = \frac{3}{5}$ , 求  $AD$ .

18. 已知  $\{a_n\}$  是各项均为正数的等比数列, 且  $a_1 + a_2 = 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$ ,  $a_3 + a_4 + a_5 = 64\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}\right)$ .

- (1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 设  $b_n = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

19. 如图, 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AC = BC, AA_1 = AB, D$  为  $BB_1$  的中点,  $E$  为  $AB_1$  上的一点,  $AE = 3EB_1$ .

- (1) 证明:  $DE$  为异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的公垂线;  
 (2) 设异面直线  $AB_1$  与  $CD$  的夹角为  $45^\circ$ , 求二面角  $A_1-AC_1-B_1$  的大小.



20. 如图, 由  $M$  到  $N$  的电路中有 4 个组件, 分别标为  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , 电流能通过  $T_1, T_2, T_3$  的概率都是  $p$ , 电流能通过  $T_4$  的概率是 0.9. 电流通路是否通过各组件相互独立. 已知  $T_1, T_2, T_3$  中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.
- (1) 求  $p$ ;
  - (2) 求电流通路在  $M$  与  $N$  之间通过的概率.
21. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3x + 1$ .
- (1) 设  $a = 2$ , 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (2) 设  $f(x)$  在区间  $(2, 3)$  中至少有一个极值点, 求  $a$  的取值范围.
22. 已知斜率为 1 的直线  $l$  与双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  相交于  $B, D$  两点, 且  $BD$  的中点为  $M(1, 3)$ .
- (1) 求  $C$  的离心率;
  - (2) 设  $C$  的右顶点为  $A$ , 右焦点为  $F$ ,  $|DF| \cdot |BF| = 17$ , 证明: 过  $A, B, D$  三点的圆与  $x$  轴相切.

