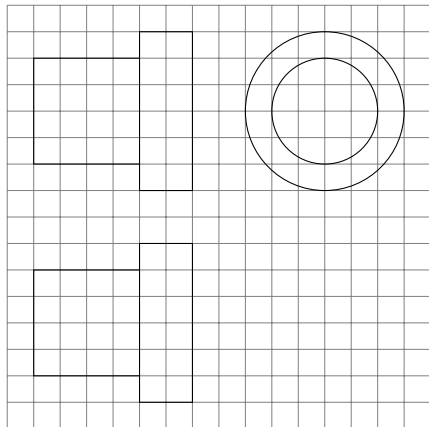


理科数学

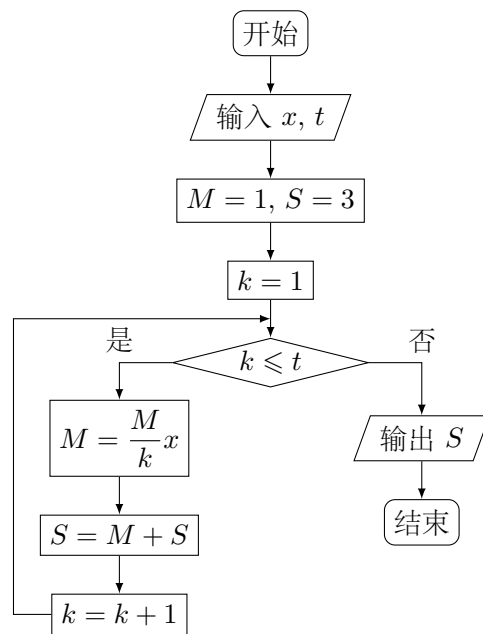
一、选择题

1. 设集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{1\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{1, 2\}$
2. 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, $z_1 = 2 + i$, 则 $z_1 z_2 =$ ()
(A) -5 (B) 5 (C) $-4 + i$ (D) $-4 - i$
3. 设向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{10}$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{6}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5
4. 钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则 $AC =$ ()
(A) 5 (B) $\sqrt{5}$ (C) 2 (D) 1
5. 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75 , 连续两天为优良的概率是 0.6 , 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是 ()
(A) 0.8 (B) 0.75 (C) 0.6 (D) 0.45
6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1 cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm , 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉的部分的体积与原来毛坯体积的比值为 ()



- (A) $\frac{17}{27}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{10}{27}$ (D) $\frac{1}{3}$

7. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2 , 则输出的 $S =$ ()



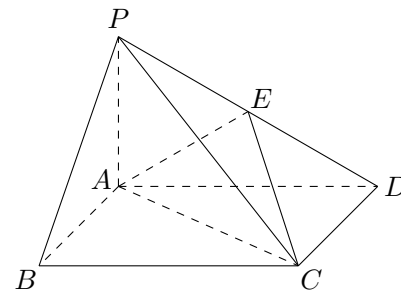
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
8. 设曲线 $y = ax - \ln(x + 1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2x$, 则 $a =$ ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
 9. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 7 \leq 0 \\ x - 3y + 1 \leq 0 \\ 3x - y - 5 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x - y$ 的最大值为 ()
(A) 10 (B) 8 (C) 3 (D) 2
 10. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 ()
(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ (C) $\frac{63}{32}$ (D) $\frac{9}{4}$
 11. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA = 90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC = CA = CC_1$, 则 BM 与 AN 所成角的余弦值为 ()
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{30}}{10}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 12. 设函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{m}$, 若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2 + [f(x_0)]^2 < m^2$, 则 m 的取值范围是 ()
(A) $(-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$ (B) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
(C) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (D) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题

13. $(x + a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数为 15 , 则 $a =$ _____. (用数字填写答案)
14. 函数 $f(x) = \sin(x + 2\varphi) - 2\sin\varphi \cos(x + \varphi)$ 的最大值为_____.
15. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减, $f(2) = 0$, 若 $f(x - 1) > 0$, 则 x 的取值范围是_____.
16. 设点 $M(x_0, 1)$, 若在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上存在点 N , 使得 $\angle OMN = 45^\circ$, 则 x_0 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1$.
(1) 证明 $\left\{a_n + \frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.
18. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.
(1) 证明: $PB \parallel$ 平面 AEC ;
(2) 设二面角 $D - AE - C$ 为 60° , $AP = 1, AD = \sqrt{3}$, 求三棱锥 $E - ACD$ 的体积.



19. 某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入 y (单位: 千元) 的数据如下表:

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

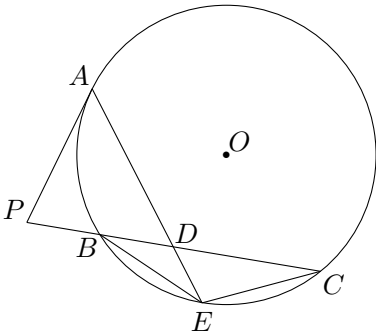
- (1) 求 y 关于 t 的线性回归方程;
(2) 利用 (1) 中的回归方程, 分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况, 并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.
附: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

20. 设 F_1 、 F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N .
(1) 若直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$, 求 C 的离心率;
(2) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN| = 5|F_1N|$, 求 a, b .

21. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 设 $g(x) = f(2x) - 4bf(x)$, 当 $x > 0$ 时, $g(x) > 0$, 求 b 的最大值;
(3) 已知 $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$, 估计 $\ln 2$ 的近似值 (精确到 0.001).

22. 如图, P 是 $\odot O$ 外一点, PA 是切线, A 为切点, 割线 PBC 与 $\odot O$ 相交于点 B, C , $PC = 2PA$, D 为 PC 的中点, AD 的延长线交 $\odot O$ 于点 E . 证明:
(1) $BE = EC$;
(2) $AD \cdot DE = 2PB^2$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(1) 求 C 的参数方程;
(2) 设点 D 在 C 上, C 在 D 处的切线与直线 $l: y = \sqrt{3}x + 2$ 垂直, 根据 (1) 中你得到的参数方程, 确定点 D 的坐标.

24. 设函数 $f(x) = \left|x + \frac{1}{a}\right| + |x - a|$ ($a > 0$).
(1) 证明: $f(x) \geq 2$;
(2) 若 $f(3) < 5$, 求 a 的取值范围.