2008 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(-3,4)$, $\boldsymbol{c}=(3,2)$, 则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$ （ ）

(A) $(-15,12)$ (B) 0 (C) -3 (D) -11

2. 若非空集合 A, B, C 满足 $A\cup B=C$, 且 B 不是 A 的子集, 则 （ ）

(A) “$x\in C$”是“$x\in A$”的充分条件但不是必要条件

(B) “$x\in C$”是“$x\in A$”的必要条件但不是充分条件

(C) “$x\in C$”是“$x\in A$”的充要条件

(D) “$x\in C$”既不是“$x\in A$”的充分条件也不是“$x\in A$”必要条件

3. 用与球心距离为 1 的平面去截球, 所得的截面面积为 π, 则球的休积为( )

(A) $\dfrac{8\pi}{3}$ (B) $\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ (C) $8\sqrt{2}\pi$ (D) $\dfrac{32\pi}{3}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}\right)$ 的定义域为 （ ）

(A) $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$ (B) $(-4,0)\cup(0,1)$

(C) $[-4,0)\cup(0,1]$ (D) $[-4,0)\cup(0,1)$

5. 将函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 的图象 F 按向量 $\left(\dfrac{\pi}{3},3\right)$ 平移得到图象 F', 若 F' 的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$, 则 θ 的一个可能取值是 （ ）

(A) $\dfrac{5}{12}\pi$ (B) $-\dfrac{5}{12}\pi$ (C) $\dfrac{11}{12}\pi$ (D) $-\dfrac{11}{12}\pi$

6. 将 5 名志愿者分配到 3 个不同的奥运场馆参加接待工作, 每个场馆至少分配一名志愿者的方案种数为 （ ）

(A) 540 (B) 300 (C) 180 (D) 150

7. 若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数, 则 b 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,+\infty)$ (B) $(-1,+\infty)$ (C) $(-\infty,-1]$ (D) $(-\infty,-1)$

8. 已知 $m\in\mathbf{N}^*$, a, $b\in\mathbf{R}$, 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^m+a}{x}=b$, 则 $a\cdot b=$ （ ）

(A) $-m$ (B) m (C) -1 (D) 1

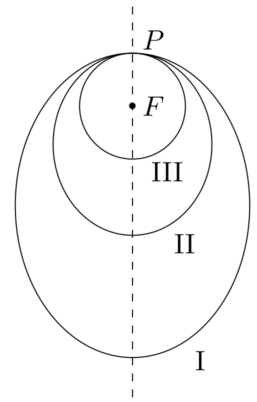
9. 过点 $A(11,2)$ 作圆 $x^2+y^2+2x-4y-164=0$ 的弦, 其中弦长为整数的共有 （ ）

(A) 16 条 (B) 17 条 (C) 32 条 (D) 34 条

10. 如图所示, “嫦娥一号”探月卫星沿地月转移轨道飞向月球, 在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道 I 绕月飞行, 之后卫星在 P 点第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道 II 绕月飞行, 最终卫星在 P 点第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 III 绕月飞行, 若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭轨道 I 和 II 的焦距, 用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道 I 和 II 的长轴的长, 给出下列式子:

① $a_1+c_1=a_2+c_2$; ② $a_1-c_1=a_2-c_2$; ③ $c_1a_2>a_1c_2$; ④ $\dfrac{c_1}{a_1}<\dfrac{c_2}{a_2}$.

其中正确式子的序号是 （ ）



(A) ①③ (B) ②③ (C) ①④ (D) ②④

二、填空题

11. 设 z_1 是复数, $z_2=z_1-\mathrm{i}\overline{z}_1$ (其中 $\overline{z}_1$ 表示 z_1 的共轭复数) , 已知 z_2 的实部是 -1, 则 z_2 的虚部为______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 三个角 A, B, C 的对边边长分别为 $a=3$, $b=4$, $c=6$, 则 $bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C$ 的值为______.

13. 已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$, $f(bx)=9x^2-6x+2$, 其中 $x\in\mathbf{R}$, a, b 为常数, 则方程 $f(ax+b)=0$ 的解集为______.

14. 已知函数 $f(x)=2^x$, 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2. 若 $f(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})=4$, 则 $\log_2[f(a_1)\cdot f(a_2)\cdot f(a_3)\cdot\cdots\cdot f(a_{10})]=$______.

15. 观察下列等式:

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^6=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^k=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+a_{k-2}n^{k-2}+\cdots+a_1n+a_0,$$

可以推测, 当 $k\geqslant2$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 时, $a_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$, $a_k=\dfrac{1}{2}$, $a_{k-1}=$______, $a_{k-2}=$______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(t)=\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$, $g(x)=\cos x\cdot f(\sin x)+\sin x\cdot f(\cos x)$, $x\in\left(\pi,\dfrac{17\pi}{12}\right]$.

(1) 将函数 $g(x)$ 化简成 $A\sin(\omega x+\varphi)+B$ $(A>0,\ \omega>0,\ \varphi\in[0,2\pi))$ 的形式;

(2) 求函数 $g(x)$ 的值域.

17. 袋中有 20 个大小相同的球, 其中记上 0 号的有 10 个, 记上 n 号的有 n 个 $(n=1,2,3,4)$. 现从袋中任取一球. ξ 表示所取球的标号.

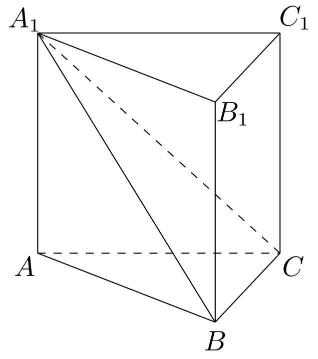
(1) 求 ξ 的分布列, 期望和方差;

(2) 若 $\eta=a\xi+b$, $E\eta=1$, $D\eta=11$, 试求 a, b 的值.

18. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $A_1BC\perp$ 侧面 A_1ABB_1.

(1) 求证: $AB\perp BC$;

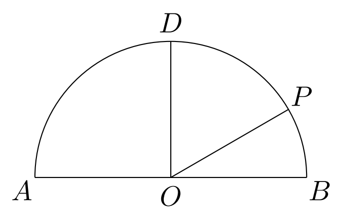
(2) 若直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 θ, 二面角 A_1-BC-A 的大小为 φ, 试判断 θ 与 φ 的大小关系, 并予以证明.



19. 如图, 在以点 O 为圆心, $|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中, $OD\perp AB$, P 是半圆弧上一点, $\angle POB=30^\circ$, 曲线 C 是满足 $||MA|-|MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹, 且曲线 C 过点 P.

(1) 建立适当的平面直角坐标系, 求曲线 C 的方程;

(2) 设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E、F. 若 $\triangle OEF$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$, 求直线 l 斜率的取值范围.



20. 水库的蓄水量随时间而变化. 现用 t 表示时间, 以月为单位, 年初为起点. 根据历年数据, 某水库的蓄水量 (单位: 亿立方米) 关于 t 的近似函数关系式为 $V(t)=\begin{cases}(-t^2+14t-40)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}+50,\ 0<t\leqslant 10\\ 4(t-10)(3t-41)+50,\ 10<t\leqslant 12\end{cases}$.

(1) 该水库的蓄求量小于 50 的时期称为枯水期. 以 $i-1<t<i$ 表示第 i 月份 ($i=1,2,\cdots,12$), 同一年内哪几个月份是枯水期?

(2) 求一年内该水库的最大蓄水量 (取 $\mathrm{e}=2.7$ 计算).

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足: $a_1=\lambda$, $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+n-4$, $b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$, 其中 λ 为实数, n 为正整数.

(1) 对任意实数 λ, 证明数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列;

(2) 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并证明你的结论;

(3) 设 $0<a<b$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 是否存在实数 λ, 使得对任意正整数 n, 都有 $a<S_n<b$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.