

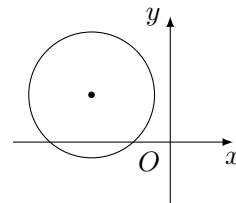
数学试卷

一、选择题

- 已知平面向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (x, -3)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $x =$ ()
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3
- 已知 $A = \{x | |2x + 1| > 3\}$, $B = \{x | x^2 + x \leq 6\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $[-3, -2] \cup (1, 2]$ (B) $[-3, -2] \cup (1, +\infty)$
(C) $(-3, -2] \cup [1, 2)$ (D) $(-\infty, -3] \cup (1, 2]$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{x^2-4} - \frac{2}{x-2}, & x > 2 \\ a, & x \leq 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 处连续, 则 $a =$ ()
(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+1} - \cdots + \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n}{n+1} \right)$ 的值为 ()
(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
- 函数 $f(x) = \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ 是 ()
(A) 周期为 π 的偶函数 (B) 周期为 π 的奇函数
(C) 周期为 2π 的偶函数 (D) 周期为 2π 的奇函数
- 一台 X 型号自动机床在一小时内不需要工人照看的概率为 0.8000 , 有四台这种型号的自动机床各自独立工作, 则在一小时内至多 2 台机床需要工人照看的概率是 ()
(A) 0.1536 (B) 0.1808 (C) 0.5632 (D) 0.9728
- 在棱长为 1 的正方体上, 分别用过共顶点的三条棱中点的平面截该正方体, 则截去 8 个三棱锥后, 剩下的凸多面体的体积是 ()
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$
- 若双曲线 $2x^2 - y^2 = k$ ($k > 0$) 的焦点到它相对应的准线的距离是 2, 则 $k =$ ()
(A) 6 (B) 8 (C) 1 (D) 4
- 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, 函数 $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x - \sin^2 x}$ 的最小值是 ()
(A) 4 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{4}$
- 变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 2x + 9y \geq 36 \\ 2x + 3y = 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, 则使 $z = 3x + 2y$ 的值最小的 (x, y) 是 ()
(A) $(4.5, 3)$ (B) $(3, 6)$ (C) $(9, 2)$ (D) $(6, 4)$

- 若 $f(x) = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, 则 ()
(A) $f(-1) > f(0) > f(1)$ (B) $f(0) > f(1) > f(-1)$
(C) $f(1) > f(0) > f(-1)$ (D) $f(0) > f(-1) > f(1)$

- 如图, 定圆半径为 a , 圆心为 (b, c) , 则直线 $ax + by + c = 0$ 与直线 $x - y + 1 = 0$ 的交点在 ()



- (A) 第四象限 (B) 第三象限 (C) 第二象限 (D) 第一象限

二、填空题

- 某班委会由 4 名男生与 3 名女生组成, 现从中选出 2 人担任正副班长, 其中至少有 1 名女生当选的概率是_____. (用分数作答)
- 已知复数 z 与 $(z + 2)^2 - 8i$ 均是纯虚数, 则 $z =$ _____.
- 由图 (1) 有面积关系: $\frac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{PA' \cdot PB'}{PA \cdot PB}$, 则由图 (2) 有体积关系: $\frac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}} =$ _____.

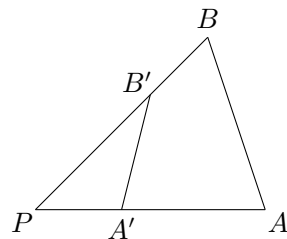


图 (1)

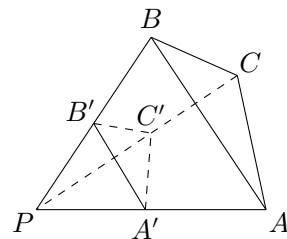


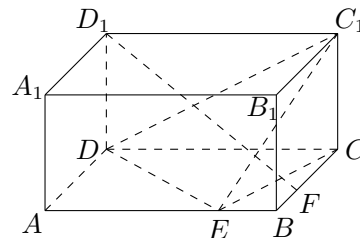
图 (2)

- 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x+1} - 1)$ ($x > 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.

三、解答题

- 已知 α, β, γ 成公比为 2 的等比数列 ($\alpha \in [0, 2\pi]$), 且 $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ 也成等比数列. 求 α, β, γ 的值.

- 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 2$. E, F 分别是线段 AB, BC 上的点, 且 $EB = FB = 1$.
(1) 求二面角 $C - DE - C_1$ 的正切值;
(2) 求直线 EC_1 与 FD_1 所成的余弦值.



- 设函数 $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$ ($x > 0$).
(1) 证明: 当 $0 < a < b$, 且 $f(a) = f(b)$ 时, $ab > 1$;
(2) 点 $P(x_0, y_0)$ ($0 < x_0 < 1$) 在曲线 $y = f(x)$ 上, 求曲线在点 P 处的切线与 x 轴和 y 轴的正向所围成的三角形面积表达式 (用 x_0 表达).

20. 某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响，正东观测点听到的时间比其他两观测点晚 4 s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1020 m. 试确定该巨响发生的位置. (假定当时声音传播的速度为 340 m/s, 相关各点均在同一平面上)
21. 设函数 $f(x) = x - \ln(x + m)$, 其中常数 m 为整数.
- (1) 当 m 为何值时, $f(x) \geq 0$;
- (2) 定理: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a)$ 与 $g(b)$ 异号, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $g(x_0) = 0$. 试用上述定理证明: 当整数 $m > 1$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 在 $[e^{-m} - m, e^{2m} - m]$ 内有两个实根.
22. 设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 相交于 A, B 两点, l 又与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 相交于 C, D 两点, C, D 三等分线段 AB . 求直线 l 的方程.