2009 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $P=\{\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=(1,0)+m(0,1), m\in\mathbf{R}\}$, $Q=\{\boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}=(1,1)+n(-1,1), n\in\mathbf{R}\}$ 是两个向量集合, 则 $P\cap Q=$ （ ）

(A) $\{(1,1)\}$　(B) $\{(-1,1)\}$　(C) $\{(1,0)\}$　(D) $\{(0,1)\}$

2. 函数 $y=\dfrac{1-ax}{1+ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{a}\right)$ 的反函数是 （ ）

(A) $y=\dfrac{1-ax}{1+ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq-\dfrac{1}{a}\right)$　(B) $y=\dfrac{1+ax}{1-ax}\left(x\in\mathbf{R},\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$

(C) $y=\dfrac{1+x}{a(1-x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq1)$　(D) $y=\dfrac{1-x}{a(1+x)}\ (x\in\mathbf{R},\ x\neq-1)$

3. 投掷两颗骰子, 得到其向上的点数分别为 m 和 n, 则复数 $(m+n\mathrm{i})(n-m\mathrm{i})$ 为实数的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{6}$　(D) $\dfrac{1}{12}$

4. 函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$ 的图象 F 按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移到 F', F' 的解析式 $y=f(x)$, 当 $y=f(x)$ 为奇函数时, 向量 $\boldsymbol{a}$ 可以等于 （ ）

(A) $\left(-\dfrac{\pi}{6},-2\right)$　(B) $\left(-\dfrac{\pi}{6},2\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$　(D) $\left(\dfrac{\pi}{6},2\right)$

5. 将甲、乙、丙、丁四名学生分到三个不同的班, 每个班至少分到一名学生, 且甲、乙两名学生不能分到一个班, 则不同分法的种数为 （ ）

(A) 18　(B) 24　(C) 30　(D) 36

6. 设 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+x\right)^{2n}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n})^2-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})^2\right]=$（ ）

(A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的准线过椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦点, 则直线 $y=kx+2$ 与椭圆至多有一个交点的充要条件是 （ ）

(A) $k\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　(B) $k\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

(C) $k\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(D) $k\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

8. 在“家电下乡”活动中, 某厂要将 100 台洗衣机运往邻近的乡镇, 现有 4 辆甲型货车和 8 辆乙型货车可供使用, 每辆甲型货车运输费用 400 元, 可装洗衣机 20 台; 每辆乙型货车运输费用 300 元, 可装洗衣机 10 台, 若每辆至多只运一次, 则该厂所花的最少运输费用为 （ ）

(A) 2000 元　(B) 2200 元　(C) 2400 元　(D) 2800 元

9. 设球的半径为时间 t 的函数 $R(t)$. 若球的体积以均匀速度 c 增长, 则球的表面积的增长速度与球半径 （ ）

(A) 成正比, 比例系数为 c　(B) 成正比, 比例系数为 $2c$

(C) 成反比, 比例系数为 c　(D) 成反比, 比例系数为 $2c$

10. 古希腊人常用小石子在沙滩上摆成各种性状来研究数, 例如:

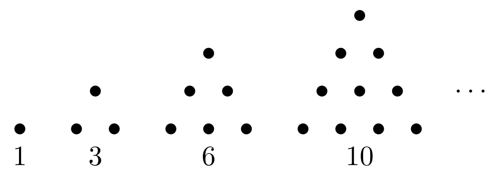


图 1

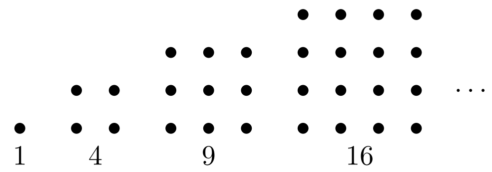


图 2

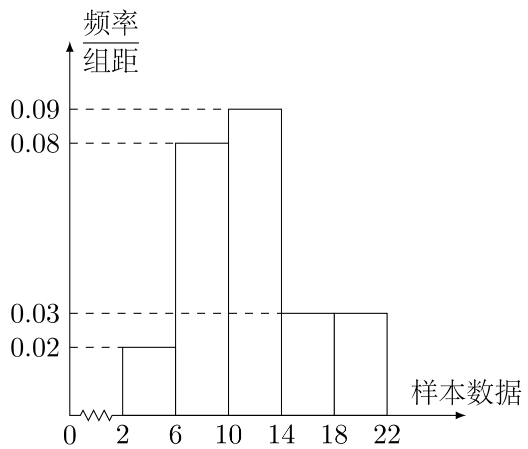
他们研究过图 1 中的 1, 3, 6, 10, $\cdots$, 由于这些数能够表示成三角形, 将其称为三角形数; 类似地, 称图 2 中的 1, 4, 9, 16$\cdots$ 这样的数成为正方形数. 下列数中及时三角形数又是正方形数的是 （ ）

(A) 289　(B) 1024　(C) 1225　(D) 1378

二、填空题

11. 已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, 则 $a=$______.

12. 样本容量为 200 的频率分布直方图. 根据样本的频率分布直方图估计, 样本数落在 $[6,10)$ 内的频数为______, 数据落在 $[2,10)$ 内的概率约为______.



13. 卫星和地面之间的电视信号沿直线传播, 电视信号能够传送到达的地面区域, 称为这个卫星的覆盖区域. 为了转播 2008 年北京奥运会, 我国发射了“中星九号”广播电视直播卫星, 它离地球表面的距离约为 36000 km. 已知地球半径约为 6400 km, 则“中星九号”覆盖区域内的任意两点的球面距离的最大值约为______km. (结果中保留反余弦的符号)

14. 已知函数 $f(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为______.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=m$ (m 为正整数), $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & \text{当}a_n\text{为偶数时}\\ 3a_n+1, & \text{当}a_n\text{为奇数时}\end{cases}$. 若 $a_6=1$, 则 m 所有可能的取值为______.

三、解答题

16. 一个盒子里装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 2, 3, 4, 5; 另一个盒子也装有 4 张大小形状完全相同的卡片, 分别标有数 3, 4, 5, 6. 现从一个盒子中任取一张卡片, 其上面的数记为 x; 再从另一盒子里任取一张卡片, 其上面的数记为 y, 记随机变量 $\eta=x+y$, 求 η 的分布列和数学期望.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $\boldsymbol{c}=(-1,0)$.

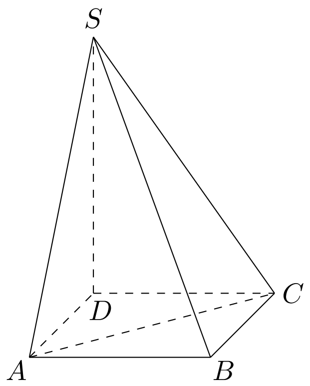
(1) 求向量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的长度的最大值;

(2) 设 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, 且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, 求 $\cos\beta$ 的值.

18. 如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形, $SD\perp$ 平面 $ABCD$, $SD=2a$, $AD=\sqrt{2}a$, 点 E 是 SD 上的点, 且 $DE=\lambda a\ (0<\lambda\leqslant 2)$.

(1) 求证: 对任意的 $\lambda\in(0,2]$, 都有 $AC\perp BE$;

(2) 设二面角 $C-AE-D$ 的大小为 θ, 直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 φ. 若 $\tan\theta\cdot\tan\varphi=1$, 求 λ 的值.



19. 已知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-a_n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$ (n 为正整数).

(1) 令 $b_n=2^na_n$, 求证数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n=\dfrac{n+1}{n}a_n$, $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$, 试比较 T_n 与 $\dfrac{5n}{2n+1}$ 的大小, 并予以证明.

20. 过抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的对称轴上一点 $A(a,0)\ (a>0)$ 的直线与抛物线相交于 M、N 两点, 自 M、N 向直线 l: $x=-a$ 作垂线, 垂足分别为 M_1、N_1.

(1) 当 $a=\dfrac{p}{2}$ 时, 求证: $AM_1\perp AN_1$;

(2) 记 $\triangle AMM_1$、$\triangle AM_1N_1$、$\triangle ANN_1$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3, 是否存在 λ, 使得对任意的 $a>0$, 都有 $S_2^2=\lambda S_1S_3$ 成立. 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

21. 在 $\mathbf{R}$ 上定义运算 $\otimes$: $p\otimes q=-\dfrac{1}{3}(p-c)(q-b)+4bc$ (p、q 为实常数). 记 $f_1(x)=x^2-2c$, $f_2(x)=x-2b$, $x\in\mathbf{R}$. 令 $f(x)=f_1(x)\otimes f_2(x)$.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 $-\dfrac{4}{3}$, 试确定 b、c 的值;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 上斜率为 c 的切线与该曲线的公共点;

(3) 记 $g(x)=|f'(x)|\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的最大值为 M. 若 $M\geqslant k$ 对任意的 b、c 恒成立, 试求 k 的最大值.