2008 年普通高等学校招生考试（江苏卷）

数学试卷

一、填空题

1. 若函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(\omega>0)$ 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{5}$, 则 $\omega=$______.

2. 若将一颗质地均匀的骰子 (一种各面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和为 4 的概率是______.

3. 若将复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 表示为 $a+b\mathrm{i}$ (a, $b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位) 的形式, 则 $a+b=$______.

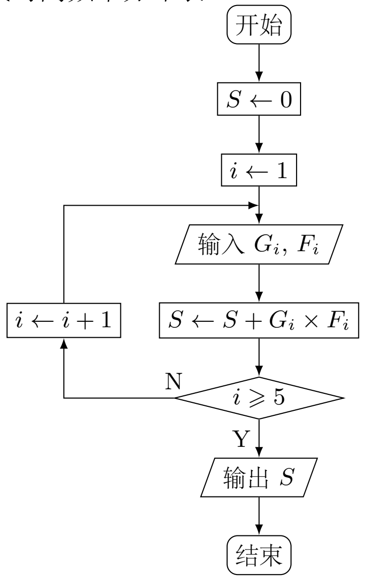
4. 设集合 $A=\left\{x|(x-1)^2<3x+7, x\in\mathbf{R}\right\}$, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中有______个元素.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 则 $|5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$______.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设 D 是横坐标与纵坐标的绝对值均不大于 2 的点构成的区域, E 是到原点的距离不大于 1 的点构成的区域. 向 D 中随机投一点, 则所投的点落在 E 中的概率是______.

7. 某地区为了解 $70\sim 80$ 岁老人的日平均睡眠时间 (单位: h), 随机选择了 50 位老人进行调查. 下表是 50 位老人日睡眠时间频率分布表:

序号 (i)	分组 (睡眠时间)	组中值 (G_i)	频数 (人数)	频率 (F_i)
1	[4, 5)	4.5	6	0.12
2	[5, 6)	5.5	10	0.20
3	[6, 7)	6.5	20	0.40
4	[7, 8)	7.5	10	0.20
5	[8, 9]	8.5	4	0.08



在上述统计数据的分析中, 一部分计算见算法流程图, 则输出的 S 的值为______.

8. 设直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 是曲线 $y=\ln x$ $(x>0)$ 的一条切线, 则实数 b 的值为______.

9. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$; 点 $P(0,p)$ 为线段 AO 上的一点 (异于端点), 这里 a, b, c, p 为非零实数. 设直线 BP, CP 分别与边 AC, AB 交于点 E, F. 某同学已正确求得 OE 的方程: $\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$. 请你完成直线 OF 的方程: (______)$x+\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{a}\right)y=0$.

10. 将全体正整数排成一个三角形数阵:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \end{array}$$

根据以上排列规律, 数阵中第 n ($n\geqslant 3$) 行的从左向右的第 3 个数是______.

11. 设 x, y, z 为正实数, 满足 $x-2y+3z=0$, 则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值为______.

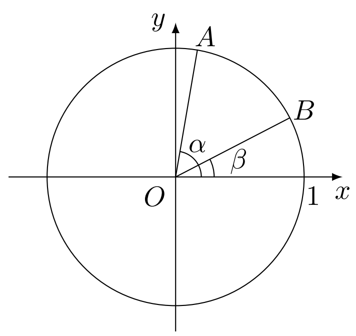
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$, 以点 O 为圆心, a 为半径作圆 M. 若过点 $\left(\dfrac{a^2}{c},0\right)$ 所作圆 M 的两条切线互相垂直, 则该椭圆的离心率 $e=$______.

13. 满足条件 $AB=2$, $AC=\sqrt{2}BC$ 的三角形 ABC 的面积的最大值是______.

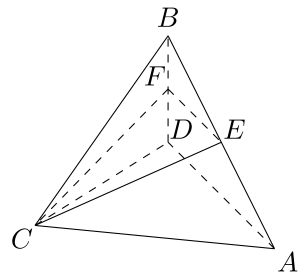
14. 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ $(x\in\mathbf{R})$, 若对于任意 $x\in[-1,1]$, 都有 $f(x)\geqslant 0$ 成立, 则实数 a 的值为______.

二、解答题

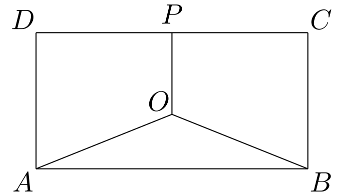
15. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 Ox 轴为始边做两个锐角 α, β, 它们的终边分别与单位圆交于 A、B 两点. 已知 A、B 的横坐标分别为 $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值;
(2) 求 $\alpha+2\beta$ 的值.



16. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $CB=CD$, $AD\perp BD$, 点 E、F 分别是 AB、BD 的中点. 求证:
(1) 直线 $EF\,/\!/$ 平面 ACD;
(2) 平面 $EFC\perp$ 平面 BCD.



17. 如图, 某地有三家工厂, 分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A、B 及 CD 的中点 P 处, 已知 $AB=20$ km, $BC=10$ km. 为了处理三家工厂的污水, 现要在矩形区域上 (含边界), 且与 A、B 等距离的一点 O 处建造一个污水处理厂, 并铺设三条排污管道 AO、BO、PO. 记排污管道的总长度为 y km.
(1) 按下列要求写出函数关系式:
① 设 $\angle BAO=\theta$ (rad), 将 y 表示为 θ 的函数;
② 设 $OP=x$ (km), 将 y 表示为 x 的函数;
(2) 请你选用 (1) 中的一个函数关系式, 确定污水处理厂的位置, 使铺设的排污管道的总长度最短.



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象与两坐标轴有三个交点, 经过这三个交点的圆记为 C.
(1) 求实数 b 的取值范围;
(2) 求圆 C 的方程;
(3) 问圆 C 是否经过定点 (其坐标与 b 无关)? 请证明你的结论.

19. (1) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是各项均不为零的 n $(n \geqslant 4)$ 项等差数列, 且公差 $d \neq 0$. 若将此数列删去某一项得到的数列 (按原来的顺序) 是等比数列,

① 当 $n=4$ 时, 求 $\dfrac{a_1}{d}$ 的数值;

② 求 n 的所有可能值.

(2) 求证: 对于给定的正整数 n $(n \geqslant 4)$, 存在一个各项及公差都不为零的等差数列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 其中任意三项 (按原来顺序) 都不能组成等比数列.

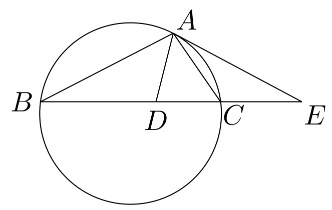
20. 已知函数 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$, $f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$ $(x \in \mathbf{R}$, p_1, p_2 为常数). 函数 $f(x)$ 定义为: 对每个给定的实数 x, $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & 若\ f_1(x) \leqslant f_2(x) \\ f_2(x), & 若\ f_1(x) > f_2(x) \end{cases}$.

(1) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充分必要条件 (用 p_1, p_2 表示);

(2) 设 a, b 是两个实数, 满足 $a<b$, 且 $p_1, p_2 \in (a,b)$. 若 $f(a)=f(b)$, 求证: $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $\dfrac{b-a}{2}$. (闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$)

21. 四选二.

【A】如图, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AE 与 BC 的延长线交于点 E, $\angle BAC$ 的平分线与 BC 交于点 D. 求证: $ED^2=EC\cdot EB$.

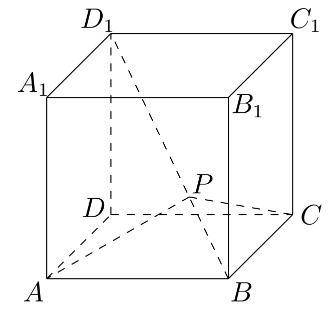


【B】在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $4x^2+y^2=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 对应的变换下得到曲线 F, 求 F 的方程.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $P(x,y)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上的一个动点, 求 $S=x+y$ 的最大值.

【D】设 a, b, c 为正实数, 求证: $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+abc \geqslant 2\sqrt{3}$.

22. 如图, 设动点 P 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上, 记 $\dfrac{D_1P}{D_1B}=\lambda$. 当 $\angle APC$ 为钝角时, 求 λ 的取值范围.



23. 请先阅读: 在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $(x \in \mathbf{R})$ 的两边对 x 求导 $(\cos 2x)'=(2\cos^2 x-1)'$. 由求导法则得 $(-\sin 2x)\cdot 2 = 4\cos x \cdot(-\sin x)$, 化简得等式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

(1) 利用上述想法 (或者其他方法) , 试由等式 $(1+x)^n = \mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$ $(x \in \mathbf{R}$, 整数 $n \geqslant 2)$ 证明: $n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$;

(2) 对于正整数 $n \geqslant 3$, 求证:

① $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k\mathrm{C}_n^k=0$;

② $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2\mathrm{C}_n^k=0$;

③ $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.