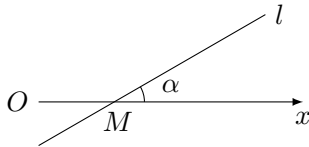


理科数学

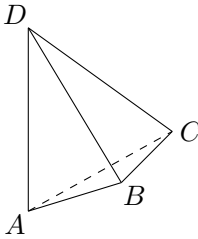
一、填空题

- 计算: $\frac{3-i}{1+i}$ = _____. (i 为虚数单位)
- 若集合 $A = \{x \mid 2x + 1 > 0\}$, $B = \{x \mid |x - 1| < 2\}$, 则 $A \cap B$ = _____.
- 函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & \cos x \\ \sin x & -1 \end{vmatrix}$ 的值域是_____.
- 若 $\vec{n} = (-2, 1)$ 是直线 l 的一个法向量, 则 l 的倾斜角的大小为_____. (结果用反三角函数值表示)
- 在 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项等于_____.
- 有一列正方体, 棱长组成以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 体积分别记为 $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n)$ = _____.
- 已知函数 $f(x) = e^{|x-a|}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是_____.
- 若一个圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆面, 则该圆锥的体积为_____.
- 已知 $y = f(x) + x^2$ 是奇函数, 且 $f(1) = 1$. 若 $g(x) = f(x) + 2$, 则 $g(-1)$ = _____.
- 如图, 在极坐标系中, 过点 $M(2, 0)$ 的直线 l 与极轴的夹角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 若将 l 的极坐标方程写成 $\rho = f(\theta)$ 的形式, 则 $f(\theta)$ = _____.



- 三位同学参加跳高、跳远、铅球项目的比赛. 若每人都选择其中两个项目, 则有且仅有两人选择的项目完全相同的概率是_____. (结果用最简分数表示)
- 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 边 AB, AD 的长分别为 2, 1. 若 M, N 分别是边 BC, CD 上的点, 且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 的取值范围是_____.
- 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 $A(0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, $C(1, 0)$. 函数 $y = xf(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) 的图象与 x 轴围成的图形的面积为_____.

- 如图, AD 与 BC 是四面体 $ABCD$ 中互相垂直的棱, $BC = 2$. 若 $AD = 2c$, 且 $AB + BD = AC + CD = 2a$, 其中 a, c 为常数, 则四面体 $ABCD$ 的体积的最大值是_____.

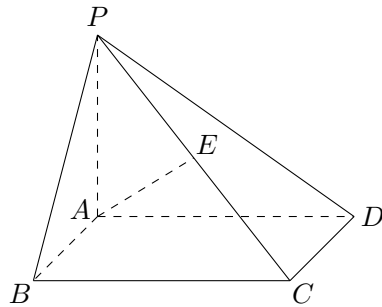


二、选择题

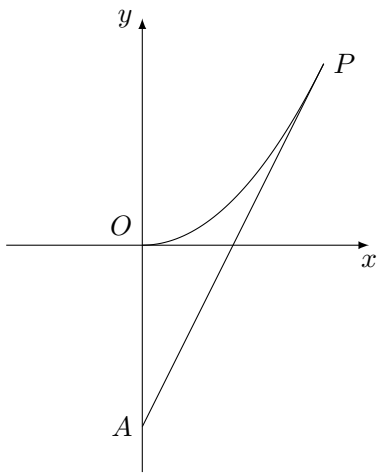
- 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根, 则()
(A) $b = 2, c = 3$ (B) $b = -2, c = 3$
(C) $b = -2, c = -1$ (D) $b = 2, c = -1$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()
(A) 锐角三角形 (B) 直角三角形 (C) 钝角三角形 (D) 不能确定
- 设 $10 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 10^4$, $x_5 = 10^5$. 随机变量 ξ_1 取值 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的概率均为 0.2, 随机变量 ξ_2 取值 $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \frac{x_4+x_5}{2}, \frac{x_5+x_1}{2}$ 的概率也均为 0.2. 若记 $D\xi_1, D\xi_2$ 分别为 ξ_1, ξ_2 的方差, 则 ()
(A) $D\xi_1 > D\xi_2$
(B) $D\xi_1 = D\xi_2$
(C) $D\xi_1 < D\xi_2$
(D) $D\xi_1$ 与 $D\xi_2$ 的大小关系与 x_1, x_2, x_3, x_4 的取值有关
- 设 $a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{25}$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. 在 S_1, S_2, \dots, S_{100} 中, 正数的个数是 ()
(A) 25 (B) 50 (C) 75 (D) 100

三、解答题

- 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, E 是 PC 的中点. 已知 $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$. 求:
(1) 三角形 PCD 的面积;
(2) 异面直线 BC 与 AE 所成的角的大小.



21. 海事救援船对一艘失事船进行定位：以失事船的当前位置为原点，以正北方向为 y 轴正方向建立平面直角坐标系 (以 1 海里为单位长度)，则救援船恰好在失事船正南方向 12 海里 A 处，如图. 现假设：①失事船的移动路径可视为抛物线 $y = \frac{12}{49}x^2$ ；②定位后救援船即刻沿直线匀速前往救援；③救援船出发 t 小时后，失事船所在位置的横坐标为 $7t$.
- (1) 当 $t = 0.5$ 时，写出失事船所在位置 P 的纵坐标. 若此时两船恰好会合，求救援船速度的大小和方向；
- (2) 问救援船的时速至少是多少海里才能追上失事船？



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C_1 : 2x^2 - y^2 = 1$.
- (1) 过 C_1 的左顶点引 C_1 的一条渐近线的平行线，求该直线与另一条渐近线及 x 轴围成的三角形的面积；
- (2) 设斜率为 1 的直线 l 交 C_1 于 P, Q 两点. 若 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切. 求证: $OP \perp OQ$;
- (3) 设椭圆 $C_2 : 4x^2 + y^2 = 1$. 若 M, N 分别是 C_1, C_2 上的动点，且 $OM \perp ON$ ，求证: O 到直线 MN 的距离是定值.

23. 对于数集 $X = \{-1, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，其中 $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, n \geq 2$ ，定义向量集 $Y = \{\vec{a} \mid \vec{a} = (s, t), s \in X, t \in X\}$. 若对任意 $\vec{a}_1 \in Y$ ，存在 $\vec{a}_2 \in Y$ ，使得 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ ，则称 X 具有性质 **P**. 例如 $\{-1, 1, 2\}$ 具有性质 **P**.
- (1) 若 $x > 2$ ，且 $\{-1, 1, 2, x\}$ 具有性质 **P**，求 x 的值；
- (2) 若 X 具有性质 **P**，求证: $1 \in X$ ，且当 $x_n > 1$ 时， $x_1 = 1$ ；
- (3) 若 X 具有性质 **P**，且 $x_1 = 1, x_2 = q$ (q 为常数)，求有穷数列 x_1, x_2, \dots, x_n 的通项公式.