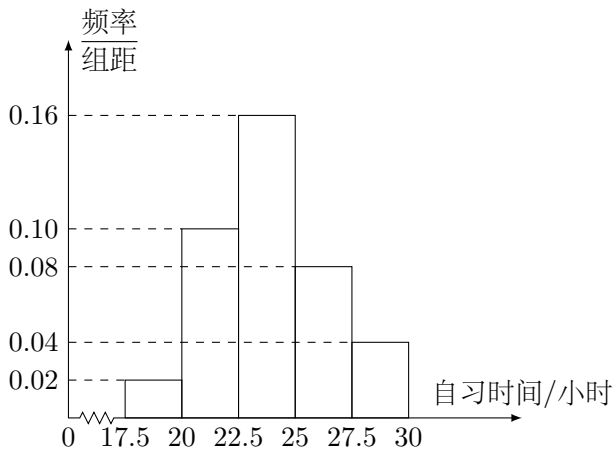


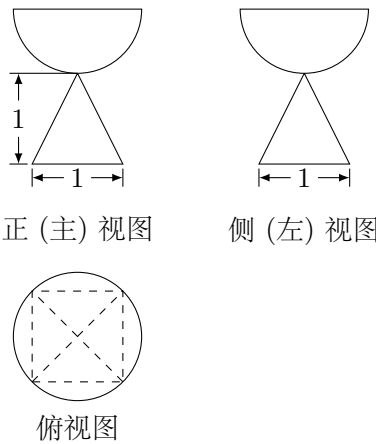
# 文科数学

## 一、选择题

1. 设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 则  $\complement_U(A \cup B) =$  ( )  
(A)  $\{2, 6\}$  (B)  $\{3, 6\}$  (C)  $\{1, 3, 4, 5\}$  (D)  $\{1, 2, 4, 6\}$
2. 若复数  $z = \frac{2}{1-i}$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $\bar{z} =$  ( )  
(A)  $1+i$  (B)  $1-i$  (C)  $-1+i$  (D)  $-1-i$
3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是  $[17.5, 30]$ , 样本数据分组为  $[17.5, 20)$ ,  $[20, 22.5)$ ,  $[22.5, 25)$ ,  $[25, 27.5)$ ,  $[27.5, 30]$ . 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ( )



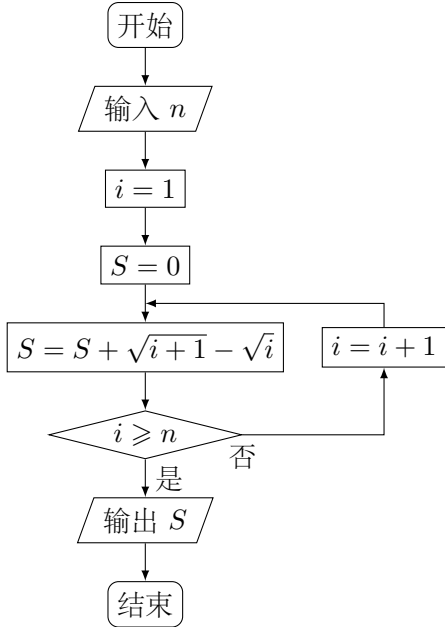
- (A) 56 (B) 60 (C) 120 (D) 140
4. 若变量  $x, y$  满足  $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$ , 则  $x^2+y^2$  的最大值是 ( )  
(A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12
5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ( )



- (A)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi$  (B)  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$  (C)  $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$  (D)  $1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$
6. 已知直线  $a, b$  分别在两个不同的平面  $\alpha, \beta$  内. 则“直线  $a$  和直线  $b$  相交”是“平面  $\alpha$  和平面  $\beta$  相交”的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
7. 已知圆  $M: x^2 + y^2 - 2ay = 0$  ( $a > 0$ ) 截直线  $x + y = 0$  所得线段的长度是  $2\sqrt{2}$ , 则圆  $M$  与圆  $N: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  的位置关系是 ( )  
(A) 内切 (B) 相交 (C) 外切 (D) 相离
8.  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 已知  $b = c$ ,  $a^2 = 2b^2(1 - \sin A)$ , 则  $A =$  ( )  
(A)  $\frac{3\pi}{4}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$
9. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ . 当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^3 - 1$ ; 当  $-1 \leq x \leq 1$  时,  $f(-x) = -f(x)$ ; 当  $x > \frac{1}{2}$  时,  $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ . 则  $f(6) =$  ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-1$  (C)  $0$  (D)  $2$
10. 若函数  $y = f(x)$  的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称  $y = f(x)$  具有  $T$  性质. 下列函数中具有  $T$  性质的是 ( )  
(A)  $y = \sin x$  (B)  $y = \ln x$  (C)  $y = e^x$  (D)  $y = x^3$

## 二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入  $n$  的值为 3, 则输出的  $S$  的值为\_\_\_\_\_.



12. 观察下列等式:  
 $\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 1 \times 2;$   
 $\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 2 \times 3;$   
 $\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{7}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{6\pi}{7}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 3 \times 4;$

$$\left(\sin \frac{\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{9}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{8\pi}{9}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 4 \times 5;$$

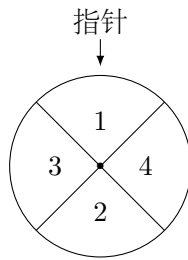
.....

$$\text{照此规律, } \left(\sin \frac{\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{2n\pi}{2n+1}\right)^{-2} = \text{_____}.$$

13. 已知  $\mathbf{a} = (1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (6, -4)$ . 若  $\mathbf{a} \perp (t\mathbf{a} + \mathbf{b})$ , 则实数  $t$  的值为\_\_\_\_\_.
14. 已知双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ). 矩形  $ABCD$  的四个顶点在  $E$  上,  $AB, CD$  的中点为  $E$  的两个焦点, 且  $2|AB| = 3|BC|$ , 则  $E$  的离心率是\_\_\_\_\_.
15. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ , 其中  $m > 0$ . 若存在实数  $b$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x) = b$  有三个不同的根, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

16. 某儿童乐园在“六一”儿童节推出了一项趣味活动. 参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次, 每次转动后, 待转盘停止转动时, 记录指针所指区域中的数. 设两次记录的数分别为  $x, y$ . 奖励规则如下:  
 ① 若  $xy \leq 3$ , 则奖励玩具一个;  
 ② 若  $xy \geq 8$ , 则奖励水杯一个;  
 ③ 其余情况奖励饮料一瓶.  
 假设转盘质地均匀, 四个区域划分均匀. 小亮准备参加此项活动.  
 (1) 求小亮获得玩具的概率;  
 (2) 请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小, 并说明理由.



17. 设  $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 把  $y = f(x)$  图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 得到函数  $y = g(x)$  的图象, 求  $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$  的值.

19. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 3n^2 + 8n$ ,  $\{b_n\}$  是等差数列, 且  $a_n = b_n + b_{n+1}$ .

(1) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 令  $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

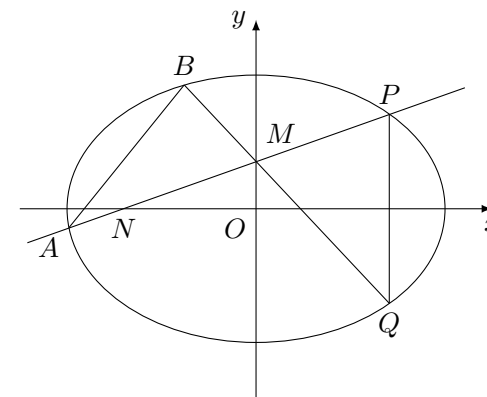
21. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的长轴长为 4, 焦距为  $2\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 过动点  $M(0, m)$  ( $m > 0$ ) 的直线交  $x$  轴于点  $N$ , 交  $C$  于点  $A, P$  ( $P$  在第一象限), 且  $M$  是线段  $PN$  的中点, 过点  $P$  作  $x$  轴的垂线交  $C$  于另一点  $Q$ , 延长线  $QM$  交  $C$  于点  $B$ .

① 设直线  $PM$ 、 $QM$  的斜率分别为  $k$ 、 $k'$ , 证明  $\frac{k'}{k}$  为定值;

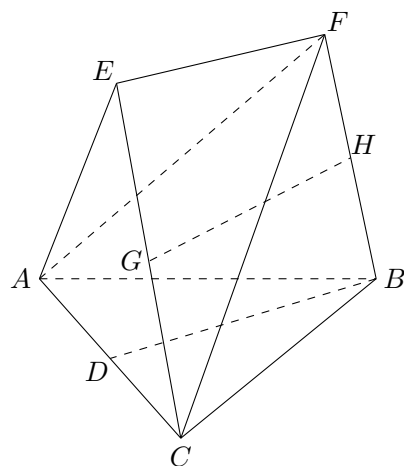
② 求直线  $AB$  的斜率的最小值.



18. 在如图所示的几何体中,  $D$  是  $AC$  的中点,  $EF \parallel DB$ .

(1) 已知  $AB = BC$ ,  $AE = EC$ . 求证:  $AC \perp FB$ ;

(2) 已知  $G, H$  分别是  $EC$  和  $FB$  的中点, 求证:  $GH \parallel$  平面  $ABC$ .



20. 设函数  $f(x) = x \ln x - ax^2 + (2a - 1)x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 令  $g(x) = f'(x)$ , 求函数  $g(x)$  的单调区间;

(2) 已知  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值, 求实数  $a$  的取值范围.