2017 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2,6\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{1,2,3,4\}$, 则 $(A\cup B)\cap C=$(　)

(A) $\{2\}$　(B) $\{1,2,4\}$　(C) $\{1,2,4,6\}$　(D) $\{1,2,3,4,6\}$

2. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$2-x\geqslant 0$”是“$|x-1|\leqslant 1$”的　(　)

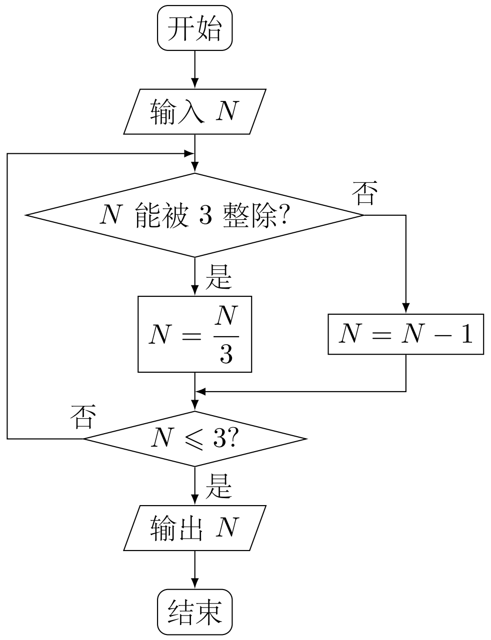
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 有 5 支彩笔 (除颜色外无差别), 颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫. 从这 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔, 则取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的概率为　(　)

(A) $\dfrac{4}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{5}$

4. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 19, 则输出 N 的值为　(　)



(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形 (O 为原点), 则双曲线方程为　(　)

(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$　(C) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. 若 $a=-f\left(\log_2\dfrac{1}{5}\right)$, $b=f(\log_2 4.1)$, $c=f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为　(　)

(A) $a<b<c$　(B) $b<a<c$　(C) $c<b<a$　(D) $c<a<b$

7. 设函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $|\varphi|<\pi$. 若 $f\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=2$, $f\left(\dfrac{11\pi}{8}\right)=0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π, 则　(　)

(A) $\omega=\dfrac{2}{3}, \varphi=\dfrac{\pi}{12}$　(B) $\omega=\dfrac{2}{3}, \varphi=-\dfrac{11\pi}{12}$

(C) $\omega=\dfrac{1}{3}, \varphi=-\dfrac{11\pi}{24}$　(D) $\omega=\dfrac{1}{3}, \varphi=\dfrac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|+2, & x<1\\ x+\dfrac{2}{x}, & x\geqslant 1\end{cases}$, 设 $a\in\mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant\left|\dfrac{x}{2}+a\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是　(　)

(A) $[-2,2]$　(B) $[-2\sqrt{3},2]$　(C) $[-2,2\sqrt{3}]$　(D) $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

二、填空题

9. 已知 $a\in\mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\dfrac{a-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 为实数, 则 a 的值为______.

10. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l, 则 l 在 y 轴上的截距为______.

11. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为______.

12. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 已知点 C 在 l 上, 以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A. 若 $\angle FAC=120^\circ$, 则圆的方程为______.

13. 若 $a, b\in\mathbf{R}$, $ab>0$, 则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为______.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $AB=3$, $AC=2$. 若 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$, 且 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-4$, 则 λ 的值为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a\sin A=4b\sin B$, $ac=\sqrt{5}(a^2-b^2-c^2)$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 求 $\sin(2B-A)$ 的值.

16. 电视台播放甲、乙两套连续剧, 每次播放连续剧时, 需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时, 连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示:

	连续剧播放时长 (分钟)	广告播放时长 (分钟)	收视人次 (万)
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟, 广告的总播放时间不少于 30 分钟, 且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 x, y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(1) 用 x, y 列出满足题目条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;

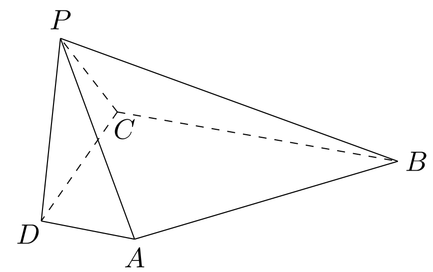
(2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次, 才能使总收视人次最多?

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD\perp$ 平面 PDC, $AD\parallel BC$, $PD\perp PB$, $AD=1$, $BC=3$, $CD=4$, $PD=2$.

(1) 求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 求证: $PD\perp$ 平面 PBC;

(3) 求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 $S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2+b_3=12$, $b_3=a_4-2a_1$, $S_{11}=11b_4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 $(n\in\mathbf{N}^*)$.

19. 设 $a,\ b\in\mathbf{R}$, $|a|\leqslant 1$. 已知函数 $f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$, $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象在公共点 (x_0,y_0) 处有相同的切线.

① 求证: $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 0;

② 若关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant \mathrm{e}^x$ 在区间 $[x_0-1,x_0+1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-c,0)$, 右顶点为 A, 点 E 的坐标为 $(0,c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\dfrac{b^2}{2}$.

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ|=\dfrac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P, 点 M, N 在 x 轴上, $PM \parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c, 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.

① 求直线 FP 的斜率;

② 求椭圆的方程.