2006 年普通高等学校招生考试（广东卷）

数学试卷

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是　　(　)

(A) $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　(B) $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$　(C) $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　(D) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$

2. 若复数 z 满足方程 $z^2+2=0$, 则 $z^3=$　　(　)

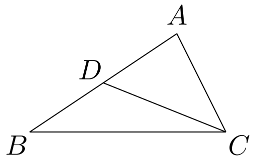
(A) $\pm 2\sqrt{2}$　(B) $-2\sqrt{2}$　(C) $-2\sqrt{2}\mathrm{i}$　(D) $\pm 2\sqrt{2}\mathrm{i}$

3. 下列函数中, 在其定义域内既是奇函数又是减函数的是　　(　)

(A) $y=-x^3$, $x\in\mathbf{R}$　(B) $y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$

(C) $y=x$, $x\in\mathbf{R}$　(D) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $x\in\mathbf{R}$

4. 如图所示, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中点, 则向量 $\overrightarrow{CD}=$　　(　)



(A) $-\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　(B) $-\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

(C) $\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　(D) $\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

5. 给出以下四个命题:

① 如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直线和交线平行;

② 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面;

③ 如果两条直线都平行于一个平面, 那么这两条直线互相平行;

④ 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直.

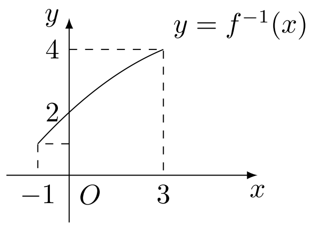
其中真命题的个数是　　(　)

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

6. 已知某共有 10 项, 其奇数项之和为 15, 偶数项之和为 30, 则其公差为(　)

(A) 5　(B) 4　(C) 3　(D) 2

7. 函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于点 $P(0,2)$ (如图所示), 则方程 $f(x)=0$ 在 $[1,4]$ 上的根是 $x=$　　(　)



(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

8. 已知双曲线 $3x^2-y^2=9$, 则双曲线右支上的点 P 到右焦点的距离与点 P 到右准线的距离之比等于　　(　)

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　(C) 2　(D) 4

9. 在约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant s \\ y+2x\leqslant 4 \end{cases}$ 下, 当 $3\leqslant s\leqslant 5$ 时, 目标函数 $z=3x+2y$ 的最大值的变化范围是　　(　)

(A) $[6,15]$　(B) $[7,15]$　(C) $[6,8]$　(D) $[7,8]$

10. 对于任意的两个实数对 (a,b) 和 (c,d), 规定: $(a,b)=(c,d)$, 当且仅当 $a=c$, $b=d$; 运算“$\otimes$”为: $(a,b)\otimes(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$; 运算“$\oplus$”为: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$. 设 p, $q\in\mathbf{R}$, 若 $(1,2)\otimes(p,q)=(5,0)$, 则 $(1,2)\oplus(p,q)=$　　(　)

(A) $(4,0)$　(B) $(2,0)$　(C) $(0,2)$　(D) $(0,-4)$

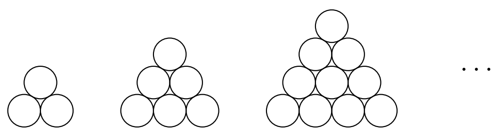
二、填空题

11. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2+x}\right)=$______.

12. 棱长为 3 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为______.

13. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^{11}$ 的展开式中, x^5 的系数为______.

14. 在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间, 某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品, 其中第 1 堆只有 1 层, 就一个球; 第 2, 3, 4, $\cdots$ 堆最底层 (第一层) 分别按图示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球, 以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数, 则 $f(3)=$______; $f(n)=$______. (答案用 n 表示)



三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 的的最大值和最小值;

(3) 若 $f(\alpha)=\dfrac{3}{4}$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

16. 某运动员射击一次所得环数 X 的分布列如下:

X	$0\sim 6$	7	8	9	10
P	0	0.2	0.3	0.3	0.2

(1) 求该运动员两次都命中 7 环的概率;

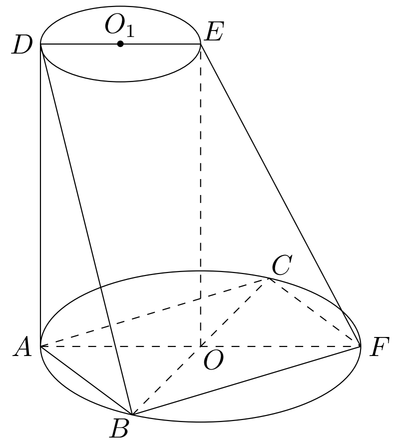
(2) 求 ξ 的分布列;

(3) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

17. 如图所示, AF, DE 分别是 $\odot O$, $\odot O_1$ 的直径, AD 与两圆所在的平面均垂直, $AD=8$, BC 是 $\odot O$ 的直径, $AB=AC=6$, $OE\parallel AD$.

(1) 求二面角 $B-AD-F$ 的大小;

(2) 求直线 BD 与 EF 所成的角.



18. 设函数 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分别在 x_1, x_2 处取得极小值、极大值, xOy 平面上点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, 该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$, 点 Q 是点 P 关于直线 $y=2(x-4)$ 的对称点, 求:
(1) 求点 A, B 的坐标;
(2) 动点 Q 的轨迹方程.

19. 已知公比为 q $(0<q<1)$ 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和为 9, 无穷等比数列 $\{a_n^2\}$ 各项的和为 $\dfrac{81}{5}$.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 和公比 q;
(2) 对给定的 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$, 设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k, 公差为 $2a_k-1$ 的等差数列, 求 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和;
(3) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项, $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 求 S_n, 并求正整数 m $(m>1)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零.

20. A 是由定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合: ① 对任意的 $x\in[1,2]$, 都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$; ② 存在常数 L $(0<L<1)$, 使得对任意的 x_1, $x_2\in[1,2]$, 都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$.
(1) 设 $\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+x}$, $x\in[2,4]$, 证明: $\varphi(x)\in A$;
(2) 设 $\varphi(x)\in A$, 如果存在 $x_0\in(1,2)$, 使得 $x_0=\varphi(2x_0)$, 那么这样的 x_0 是唯一的;
(3) 设 $\varphi(x)\in A$, 任取 $x_1\in(1,2)$, 令 $x_{n-1}=\varphi(2x_n)$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 证明: 给定正整数 k, 对任意的正整数 p, 成立不等式 $|x_{k+p}-x_k|\leqslant\dfrac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$.