2005 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}^3}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}=$ （　）

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$　(C) $2\sqrt{2}-\mathrm{i}$　(D) $-2\sqrt{2}+\mathrm{i}$

2. 设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是 （　）

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

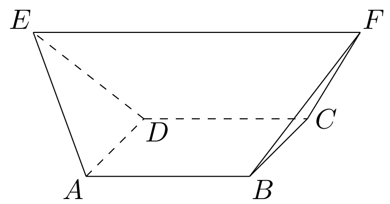
3. 一个与球心距离为 1 的平面截球所得的圆面面积为 π, 则球的表面积为 （　）

(A) $8\sqrt{2}\pi$　(B) 8π　(C) $4\sqrt{2}\pi$　(D) 4π

4. 已知直线 l 过点 $(-2,0)$, 当直线 l 与圆 $y=1-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 有两个交点时, 其斜率 k 的取值范围是 （　）

(A) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　(B) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　(C) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$

5. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 已知 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 且 $\triangle ADE$、$\triangle BCF$ 均为正三角形, $EF\parallel AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为 （　）



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

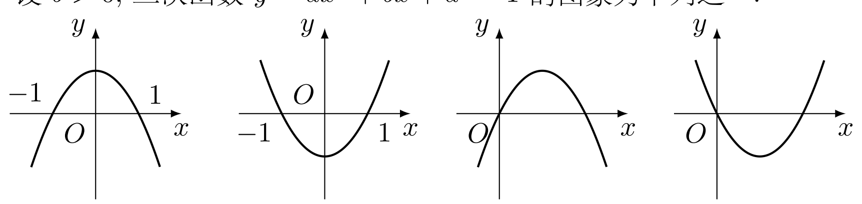
6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 的一条准线与抛物线 $y^2=-6x$ 的准线重合, 则该双曲线的离心率为 （　）

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$ 的最小值为 （　）

(A) 2　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{3}$

8. 设 $b>0$, 二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象为下列之一:



则 a 的值为 （　）

(A) 1　(B) -1　(C) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　(D) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 设 $0<a<1$, 函数 $f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使 $f(x)<0$ 的 x 取值范围是 （　）

(A) $f(x)$　(B) $(0,+\infty)$　(C) $(-\infty,\log_a 3)$　(D) $(\log_a 3,+\infty)$

10. 在坐标平面上, 不等式组 $\begin{cases} y\geqslant x-1 \\ y\leqslant -3|x|+1 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 （　）

(A) $\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(D) 2

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\sin C$, 给出以下四个论断: ① $\tan A\cdot\cot B=1$; ② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$; ③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$; ④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$. 其中正确的是 （　）

(A) ①③　(B) ②④　(C) ①④　(D) ②③

12. 过三棱柱任意两个顶点的直线共 15 条, 其中异面直线有 （　）

(A) 18 对　(B) 24 对　(C) 30 对　(D) 36 对

二、填空题

13. 若正整数 m 满足 $10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则 $m=$______. $(\lg 2\approx 0.3010)$

14. $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中, 常数项为______. (用数字作答)

15. $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O, 两条边上的高的交点为 H, $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, 则实数 $m=$______.

16. 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 过对角线 BD' 的一个平面交 AA' 于 E, 交 CC' 于 F, 则:

① 四边形 $BFD'E$ 一定是平行四边形;
② 四边形 $BFD'E$ 有可能是正方形;
③ 四边形 $BFD'E$ 在底面 $ABCD$ 内的投影一定是正方形;
④ 平面 $BFD'E$ 有可能垂直于平面 $BB'D$.

以上结论正确的为______. (写出所有正确结论的编号)

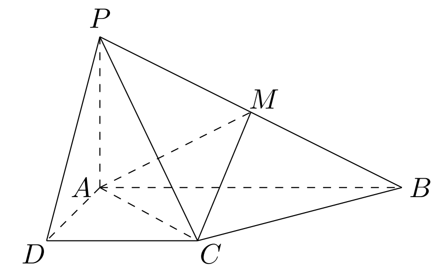
三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\sin(2\pi+\varphi)$ $(-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\dfrac{\pi}{8}$.

(1) 求 φ;
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调增区间;
(3) 证明直线 $5x-2y+c=0$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不相切.

18. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=DE=\dfrac{1}{2}AB=1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明: 面 $PAD\perp$ 面 PCD;
(2) 求 AC 与 PB 所成的角;
(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.



19. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和 $S_n>0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$.

(1) 求 q 的取值范围;
(2) 设 $b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$, 记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 试比较 S_n 和 T_n 的大小.

20. 9 粒种子分种在 3 个坑内, 每坑 3 粒, 每粒种子发芽的概率为 0.5, 若一个坑内至少有 1 粒种子发芽, 则这个坑不需要补种, 若一个坑里的种子都没发芽, 则这个坑需要补种, 假定每个坑至多补种一次, 每补种 1 个坑需 10 元, 用 ξ 表示补种费用, 写出 ξ 的分布列并求 ξ 的数学期望. (精确到 0.01)

21. 已知椭圆的中心为坐标原点 O, 焦点在 x 轴上, 斜率为 1 且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\vec{a}=(3,-1)$ 共线.
(1) 求椭圆的离心率;
(2) 设 M 为椭圆上任意一点, 且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$ (λ, $\mu\in\mathbf{R}$), 证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

22. (1) 设函数 $f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)$ $(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 设正数 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_{2^n} 满足 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$, 证明: $p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^n}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.