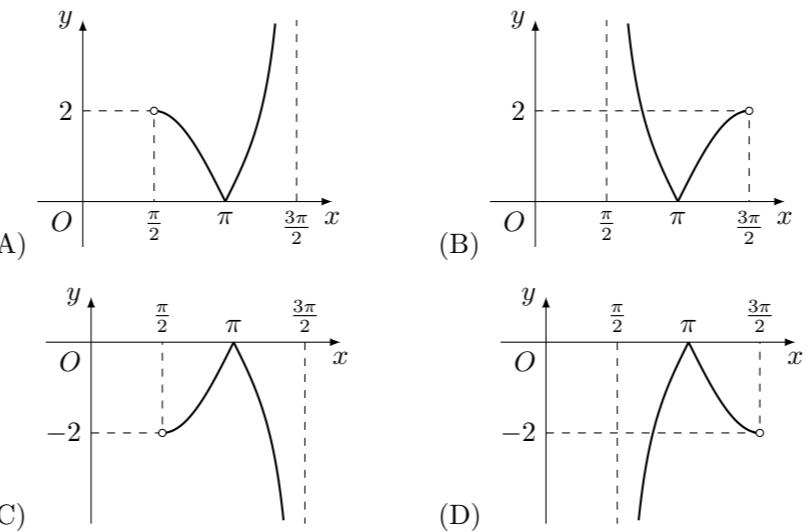


文科数学

一、选择题

1. “ $|x| = |y|$ ”是“ $x = y$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
2. 定义集合运算: $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$. 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, 则集合 $A * B$ 的所有元素之和为 ()
 (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 6
3. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是 ()
 (A) $[0, 1]$ (B) $[0, 1)$ (C) $[0, 1) \cup (1, 4]$ (D) $(0, 1)$
4. 若 $0 < x < y < 1$, 则
 (A) $3^y < 3^x$ (B) $\log_x 3 < \log_y 3$
 (C) $\log_4 x < \log_4 y$ (D) $\left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^y$
5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 则 $a_n =$ ()
 (A) $2 + \ln n$ (B) $2 + (n-1) \ln n$ (C) $2 + n \ln n$ (D) $1 + n + \ln n$
6. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + 2 \sin \frac{x}{2}}$ 是 ()
 (A) 以 4π 为周期的偶函数 (B) 以 2π 为周期的奇函数
 (C) 以 2π 为周期的偶函数 (D) 以 4π 为周期的奇函数
7. 已知 F_1 、 F_2 是椭圆的两个焦点, 满足 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$ 的点 M 总在椭圆内部, 则椭圆离心率的取值范围是 ()
 (A) $(0, 1)$ (B) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$
8. $(1+x)^{10} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ 展开式中的常数项为 ()
 (A) 1 (B) $(C_{10}^1)^2$ (C) C_{20}^1 (D) C_{20}^{10}
9. 设直线 m 与平面 α 相交但不垂直, 则下列说法中正确的是 ()
 (A) 在平面 α 内有且只有一条直线与直线 m 垂直
 (B) 过直线 m 有且只有一个平面与平面 α 垂直
 (C) 与直线 m 垂直的直线不可能与平面 α 平行
 (D) 与直线 m 平行的平面不可能与平面 α 垂直

10. 函数 $y = \tan x + \sin x - |\tan x - \sin x|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内的图象大致是 ()



17. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha, \beta \in (0, \pi)$. (1) 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值;

(2) 求函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(x - \alpha) + \cos(x + \beta)$ 的最大值.

11. 电子钟一天显示的时间是从 00 : 00 到 23 : 59, 每一刻都由四个数字组成, 则一天中任一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为 ()

- (A) $\frac{1}{180}$ (B) $\frac{1}{288}$ (C) $\frac{1}{360}$ (D) $\frac{1}{480}$

12. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + (4-m)x + 4 - m$, $g(x) = mx$, 若对于任一实数 x , $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值至少有一个为正数, 则实数 m 的取值范围是 ()

- (A) $[-4, 4]$ (B) $(-4, 4)$ (C) $(-\infty, 4)$ (D) $(-\infty, -4)$

二、填空题

13. 不等式 $2^{x^2+2x-4} \leq \frac{1}{2}$ 的解集为_____.

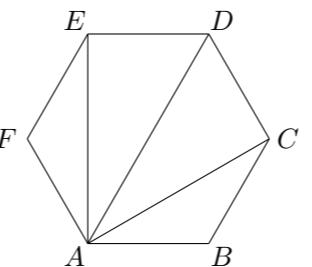
14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 若顶点到渐近线的距离为 1, 则双曲线方程为_____.

15. 连结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为 4 的球的两条弦 AB 、 CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}$ 、 $4\sqrt{3}$, 每条弦的两端都在球面上运动, 则两弦中点之间距离的最大值为_____.

16. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, 有下列四个命题:

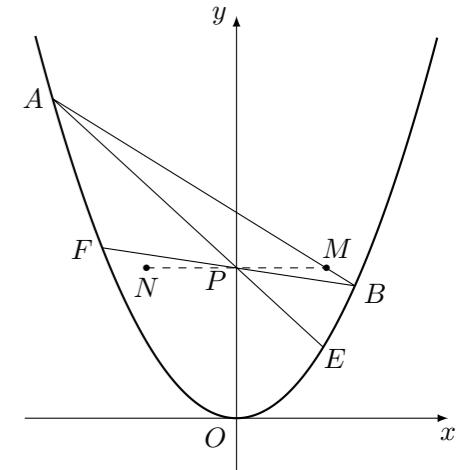
- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BC}$;
 B. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$;
 C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$;
 D. $(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF}) \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} (\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF})$.

其中真命题的代号是_____. (写出所有真命题的代号)



三、解答题

19. 等差数列 $\{a_n\}$ 各项均为正整数, $a_1 = 3$, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, 且 $b_2 S_2 = 64$, $b_3 S_3 = 960$.
- (1) 求 a_n 与 b_n ;
 - (2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n}$.
21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 - a^2x^2 + a^4$ ($a > 0$).
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 若函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 恰有两个交点, 求 a 的取值范围.
22. 已知抛物线 $y = x^2$ 和三个点 $M(x_0, y_0)$, $P(0, y_0)$, $N(-x_0, y_0)$ ($y_0 \neq x_0^2$, $y_0 > 0$), 过点 M 的一条直线交抛物线于 A 、 B 两点, AP 、 BP 的延长线分别交曲线 C 于 E 、 F .
- (1) 证明 E 、 F 、 N 三点共线;
 - (2) 如果 A 、 B 、 M 、 N 四点共线, 问: 是否存在 y_0 , 使以线段 AB 为直径的圆与抛物线有异于 A 、 B 的交点? 如果存在, 求出 y_0 的取值范围, 并求出该交点到直线 AB 的距离; 若不存在, 请说明理由.



20. 如图, 正三棱锥 $O - ABC$ 的三条侧棱 OA 、 OB 、 OC 两两垂直, 且长度均为 2. E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点, H 是 EF 的中点, 过 EF 的一个平面与侧棱 OA 、 OB 、 OC 或其延长线分别相交于 A_1 、 B_1 、 C_1 , 已知 $OA_1 = \frac{3}{2}$.
- (1) 证明: $B_1C_1 \perp$ 平面 OAH ;
 - (2) 求二面角 $O - A_1B_1 - C_1$ 的大小.

