2011 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

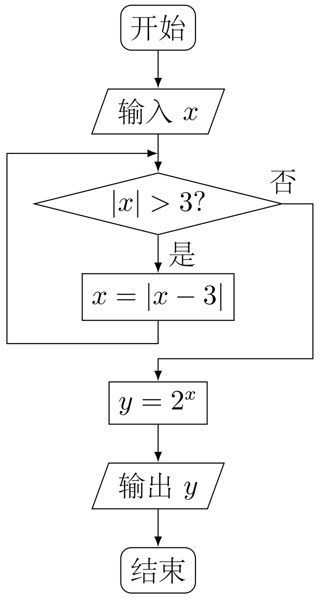
1. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$ （　）

(A) $2-\mathrm{i}$　(B) $2+\mathrm{i}$　(C) $-1-2\mathrm{i}$　(D) $-1+2\mathrm{i}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x\geqslant 1 \\ x+y-4\leqslant 0 \\ x-3y+4\leqslant 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z=3x-y$ 的最大值为 （　）

(A) -4　(B) 0　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) 4

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 x 的值为 -4, 则输出 y 的值为（　）



(A) 0.5　(B) 1　(C) 2　(D) 4

4. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x-2>0\}$, $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x<0\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\mid x(x-2)>0\}$, 则“$x\in A\cup B$”是“$x\in C$”的 （　）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a=\log_2 3.6$, $b=\log_4 3.2$, $c=\log_4 3.6$, 则 （　）

(A) $a>b>c$　(B) $a>c>b$　(C) $b>a>c$　(D) $c>a>b$

6. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的左顶点与抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点的距离为 4, 且双曲线的一条渐近线与抛物线的准线的交点坐标为 $(-2,-1)$, 则双曲线的焦距为 （　）

(A) $2\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $4\sqrt{3}$　(D) $4\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $\omega>0$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 6π, 且当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 （　）

(A) $f(x)$ 在区间 $[-2\pi,0]$ 上是增函数

(B) $f(x)$ 在区间 $[-3\pi,-\pi]$ 上是增函数

(C) $f(x)$ 在区间 $[3\pi,5\pi]$ 上是减函数

(D) $f(x)$ 在区间 $[4\pi,6\pi]$ 上是减函数

8. 对实数 a 和 b, 定义运算“$\otimes$”: $a\otimes b=\begin{cases} a, & a-b\leqslant 1 \\ b, & a-b>1 \end{cases}$. 设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1)$, $x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 （　）

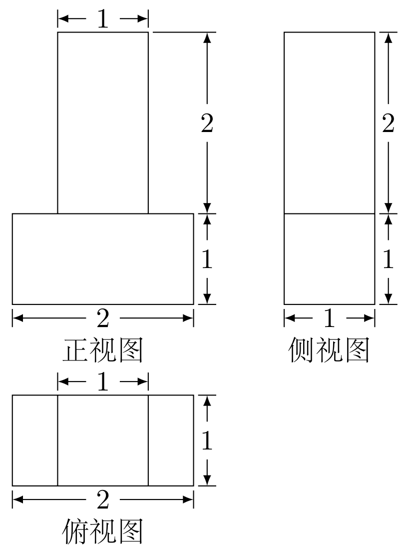
(A) $(-1,1]\cup(2,+\infty)$　(B) $(-2,-1]\cup(1,2]$

(C) $(-\infty,-2)\cup(1,2]$　(D) $[-2,-1]$

二、填空题

9. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-1|<2\}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集, 则集合 $A\cap\mathbf{Z}$ 中所有元素的和等于______.

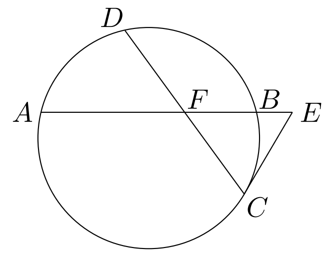
10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则这个几何体的体积为______m^3.



11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, $n\in\mathbf{N}^*$. 若 $a_3=16$, $S_{20}=20$, 则 S_{10} 的值为______.

12. 已知 $\log_2 a+\log_2 b\geqslant 1$, 则 3^a+9^b 的最小值为______.

13. 如图, 已知圆中两条弦 AB 与 CD 相交于点 F, E 是 AB 延长线上一点, 且 $DF=CF=\sqrt{2}$, $AF:FB:BE=4:2:1$. 若 CE 与圆相切, 则 CE 的长为______.



14. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle ADC=90^\circ$, $AD=2$, $BC=1$, P 是腰 DC 上的动点, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为______.

三、解答题

15. 编号分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_{16}$ 名篮球运动员在某次训练比赛中的得分记录如下:

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(1) 将得分在对应区间内的人数填入相应的空格;

区间	$[10,20)$	$[20,30)$	$[30,40]$
人数			

(2) 从得分在区间 $[20,30)$ 内的运动员中随机抽取 2 人,

① 用运动员编号列出所有可能的抽取结果;

② 求这 2 人得分之和大于 50 的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $B=C$, $2b=\sqrt{3}a$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

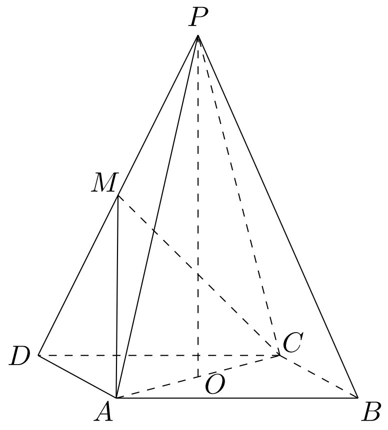
(2) $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ADC=45^\circ$, $AD=AC=1$, O 为 AC 中点, $PO\perp$ 平面 $ABCD$, $PO=2$, M 为 PD 中点.

(1) 证明: $PB\parallel$ 平面 ACM;

(2) 证明: $AD\perp$ 平面 PAC;

(3) 求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2. 点 $P(a,b)$ 满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$.

(1) 求椭圆的离心率 e;

(2) 设直线 PF_2 与椭圆相交于 A, B 两点, 若直线 PF_2 与圆 $(x+1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16$ 相交于 M, N 两点, 且 $|MN|=\dfrac{5}{8}|AB|$, 求椭圆的方程.

19. 已知函数 $f(x)=4x^3+3tx^2-6t^2x+t-1$, $x\in\mathbf{R}$, 其中 $t\in\mathbf{R}$.

(1) 当 $t=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 当 $t\neq 0$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 证明: 对任意的 $t\in(0,+\infty)$, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内均存在零点.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足: $b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$, $b_n=\dfrac{3+(-1)^{n-1}}{2}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 且 $a_1=2$.

(1) 求 a_2, a_3 的值;

(2) 设 $c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 证明: 数列 $\{c_n\}$ 是等比数列;

(3) 设 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明 $\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{S_{2n-1}}{a_{2n-1}}+\dfrac{S_{2n}}{a_{2n}}\leqslant n-\dfrac{1}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.