2007 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

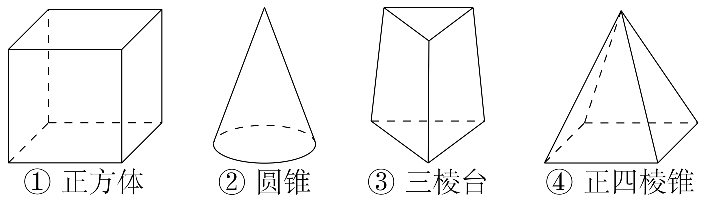
1. 若 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ (i 为虚数单位), 则 $z^2=-1$ 的 θ 值可能是　(　)

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

2. 已知集合 $M=\{-1,1\}$, $N=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<2^{x+1}<4, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap N=$(　)

(A) $\{-1,1\}$　(B) $\{-1\}$　(C) $\{0\}$　(D) $\{-1,0\}$

3. 下列几何体各自的三视图中, 有且仅有两个视图相同的是　(　)



(A) ①②　(B) ①③　(C) ①④　(D) ②④

4. 设 $a\in\left\{-1,1,\frac{1}{2},3\right\}$, 则使函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 α 值为　(　)

(A) 1, 3　(B) -1, 1　(C) -1, 3　(D) -1, 1, 3

5. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期和最大值分别为(　)

(A) π, 1　(B) π, $\sqrt{2}$　(C) 2π, 1　(D) 2π, $\sqrt{2}$

6. 给出下列三个等式: $f(xy)=f(x)+f(y)$, $f(x+y)=f(x)f(y)$, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 下列函数中不满足其中任何一个等式的是　(　)

(A) $f(x)=3^x$　(B) $f(x)=\sin x$　(C) $f(x)=\log_2 x$　(D) $f(x)=\tan x$

7. 命题"对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$"的否定是　(　)

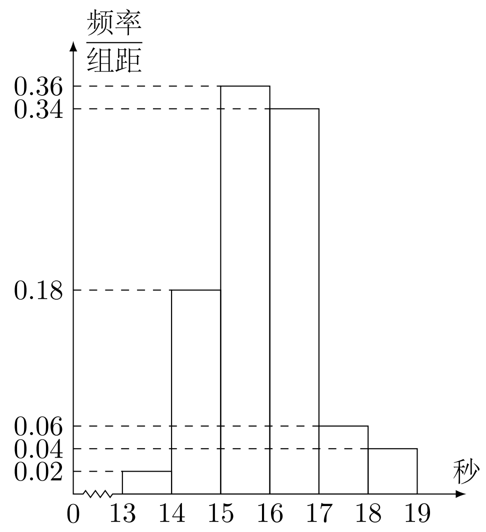
(A) 不存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(B) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1\leqslant 0$

(C) 存在 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

(D) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$, $x^3-x^2+1>0$

8. 某班 50 名学生在一次百米测试中, 成绩全部介于 13 秒与 19 秒之间, 将测试结果按如下方式分成六组: 第一组, 成绩大于等于 13 秒且小于 14 秒; 第二组, 成绩大于等于 14 秒且小于 15 秒; $\cdots$; 第六组, 成绩大于等于 18 秒且小于 19 秒. 如图是按上述分组方法得到的频率分布直方图. 设成绩小于 17 秒的学生人数占全班总人数的百分比为 x, 成绩大于等于 15 秒且小于 17 秒的学生人数为 y, 则从频率分布直方图中可分析出 x 和 y 分别为(　)



(A) 0.9, 35　(B) 0.9, 45　(C) 0.1, 35　(D) 0.1, 45

9. 下列各小题中, p 是 q 的充要条件的是　(　)

① p: $m<2$ 或 $m>6$; q: $y=x^2+mx+m+3$ 有两个不同的零点.

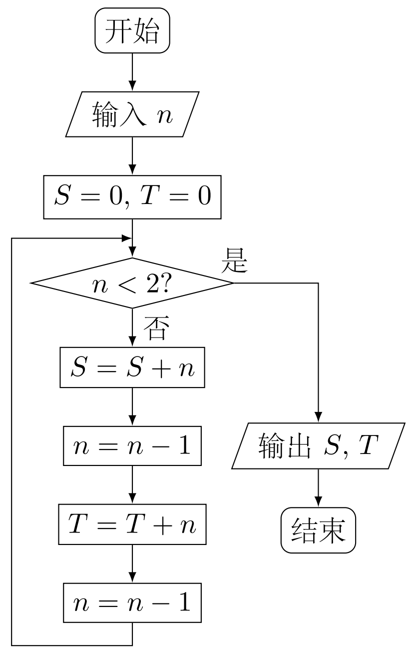
② p: $\frac{f(-x)}{f(x)}=1$; q: $y=f(x)$ 是偶函数.

③ p: $\cos\alpha=\cos\beta$; q: $\tan\alpha=\tan\beta$.

④ p: $A\cap B=A$; q: $\complement_U B\subseteq\complement_U A$.

(A) ①②　(B) ②③　(C) ③④　(D) ①④

10. 阅读如图的程序框图, 若输入的 n 是 100, 则输出的变量 S 和 T 的值依次是　(　)



(A) 2500, 2500　(B) 2550, 2550　(C) 2500, 2550　(D) 2550, 2500

11. 在直角 $\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的高, 则下列等式不成立的是(　)

(A) $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

(B) $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

(D) $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\frac{\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}$

12. 位于坐标原点的一个质点 P 按下述规则移动: 质点每次移动一个单位; 移动的方向为向上或向右, 并且向上、向右移动的概率都是 $\frac{1}{2}$. 质点 P 移动 5 次后位于点 $(2,3)$ 的概率为　(　)

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$　(B) $\mathrm{C}_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$　(C) $\mathrm{C}_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3$　(D) $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

二、填空题

13. 设 O 是坐标原点, F 是抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点, A 是抛物线上的一点, $\overrightarrow{FA}$ 与 x 轴正向的夹角为 60°, 则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 为______.

14. 设 D 是不等式组 $\begin{cases}x+2y\leqslant 10\\2x+y\geqslant 3\\0\leqslant x\leqslant 4\\y\geqslant 1\end{cases}$ 表示的平面区域, 则 D 中的点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=10$ 距离的最大值是______.

15. 与直线 $x+y-2=0$ 和曲线 $x^2+y^2-12x-12y+54=0$ 都相切的半径最小的圆的标准方程是______.

16. 函数 $y=\log_a(x+3)-1$ $(a>0, a\neq 1)$ 的图象恒过定点 A, 若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上, 其中 $mn>0$, 则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+3^2a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n}{3}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 设 $b_n=\frac{n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数, 用随机变量 ξ 表示方程 $x^2+bx+c=0$ 实根的个数 (重根按一个计).

(1) 求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率;

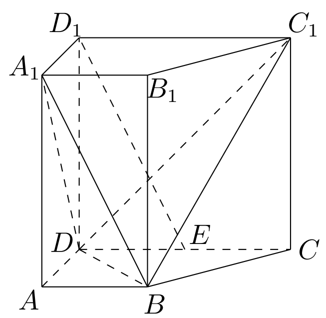
(2) 求 ξ 的分布列和数学期望;

(3) 求在先后两次出现的点数中有 5 的条件下, 方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

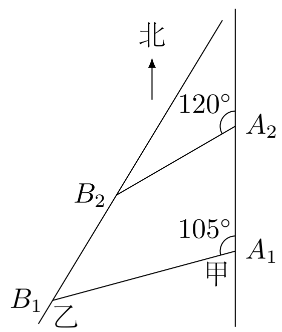
19. 如图, 在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$, $AD\perp DC$, $AB\parallel DC$.

(1) 设 E 是 DC 的中点, 求证: $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD;

(2) 求二面角 A_1-BD-C_1 的余弦值.



20. 如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船按固定方向匀速直线航行. 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里. 问乙船每小时航行多少海里?



21. 已知椭圆 C 的中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上, 椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3, 最小值为 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若直线 l: $y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点. 求证: 直线 l 过定点, 并求出该定点的坐标.

22. 设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$, 其中 $b\neq 0$.

(1) 当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(3) 证明对任意的正整数 n, 不等式 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ 都成立.