

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, $\frac{i}{\sqrt{3}+3i} =$ ()

- (A) $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}i$ (B) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}i$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ (D) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$

2. 若集合 $A = \left\{x \mid \log_{\frac{1}{2}} x \geq \frac{1}{2}\right\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A =$ ()

- (A) $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
(C) $(-\infty, 0] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ (D) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

3. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 ()

- (A) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ (B) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 与 \mathbf{b} 垂直 (D) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

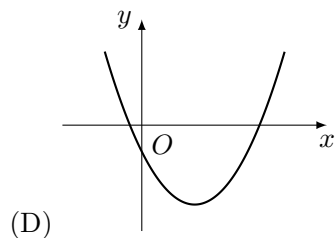
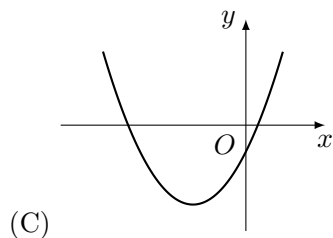
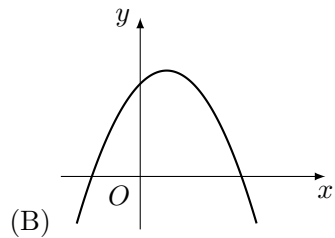
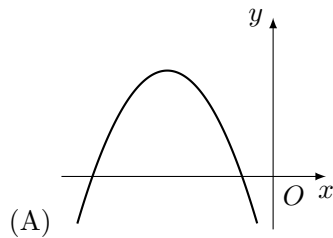
4. 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上周期为 5 的奇函数, 且满足 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, 则 $f(3) - f(4) =$ ()

- (A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2

5. 双曲线方程为 $x^2 - 2y^2 = 1$, 则它的右焦点坐标为 ()

- (A) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ (C) $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ (D) $(\sqrt{3}, 0)$

6. 设 $abc > 0$, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象可能是 ()

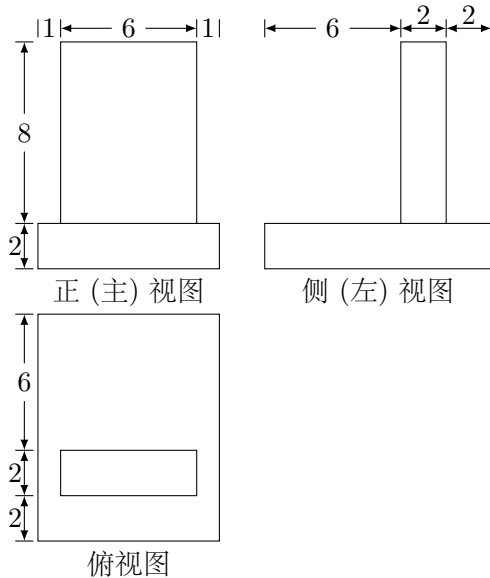


7. 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\theta \\ y = -1 + 3\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的方程为

$x - 3y + 2 = 0$, 则曲线 C 上到直线 l 的距离为 $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ 的点的个数为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 一个几何体的三视图如图, 该几何体的表面积为 ()



- (A) 280 (B) 292 (C) 360 (D) 372

9. 动点 $A(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上绕坐标原点沿逆时针方向匀速旋转, 12 秒旋转一周. 已知时间 $t = 0$ 时, 点 A 的坐标是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则当 $0 \leq t \leq 12$ 时, 动点 A 的纵坐标 y 关于 t (单位: 秒) 的函数的单调递增区间是 ()

- (A) $[0, 1]$ (B) $[1, 7]$ (C) $[7, 12]$ (D) $[0, 1]$ 和 $[7, 12]$

10. 设 $\{a_n\}$ 是任意等比数列, 它的前 n 项和, 前 $2n$ 项和与前 $3n$ 项和分别为 X, Y, Z , 则下列等式中恒成立的是 ()

- (A) $X + Z = 2Y$ (B) $Y(Y - X) = Z(Z - X)$
(C) $Y^2 = XZ$ (D) $Y(Y - X) = X(Z - X)$

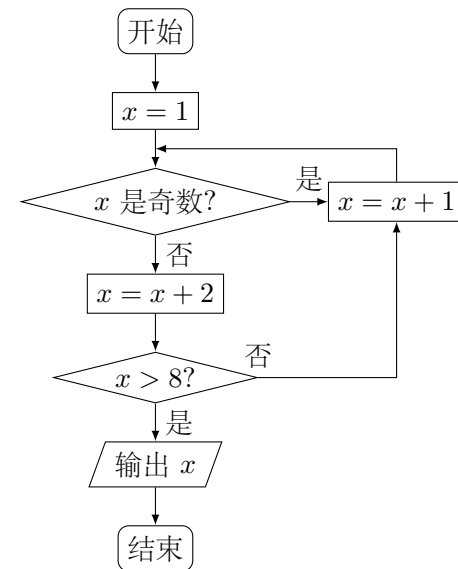
二、填空题

11. 命题“对任何 $x \in \mathbf{R}$, $|x - 2| + |x - 4| > 3$ ”的否定是_____.

12. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, x^3 的系数等于_____.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0 \\ 8x - y - 4 \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$. 若目标函数 $z = abx + y$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值为 8, 则 $a + b$ 的最小值为_____.

14. 如图所示, 程序框图 (算法流程图) 的输出值 $x =$ _____.



15. 甲罐中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙罐中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球, 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐, 分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲罐取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙罐中随机取出一球, 以 B 表示由乙罐取出的球是红球的事件, 则下列结论中正确的是_____. (写出所有正确结论的编号)

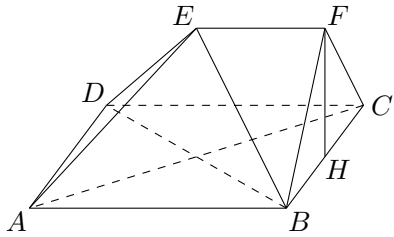
- ① $P(B) = \frac{2}{5}$;
② $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$;
③ 事件 B 与事件 A_1 相互独立;
④ A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件;
⑤ $P(B)$ 的值不能确定, 因为它与 A_1, A_2, A_3 中究竟哪一个发生有关.

三、解答题

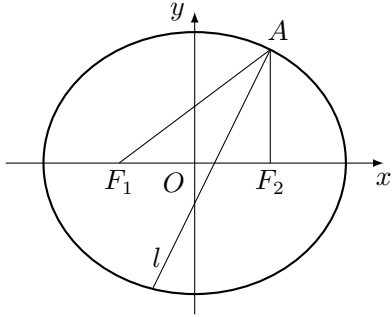
16. 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, a, b, c 分别是内角 A, B, C 所对边长, 并且 $\sin^2 A = \sin\left(\frac{\pi}{3} + B\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right) + \sin^2 B$.
(1) 求角 A 的值;
(2) 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$, $a = 2\sqrt{7}$, 求 b, c (其中 $b < c$).

17. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = e^x - 2x + 2a, x \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;
 - (2) 求证: 当 $a > \ln 2 - 1$ 且 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2ax + 1$.

18. 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EF \parallel AB$, $EF \perp FB$, $AB = 2EF$, $\angle BFC = 90^\circ$, $BF = FC$, H 为 BC 的中点.
- (1) 求证: $FH \parallel$ 平面 EDB ;
 - (2) 求证: $AC \perp$ 平面 EDB ;
 - (3) 求二面角 $B - DE - C$ 的大小.



19. 如图, 已知椭圆 E 经过点 $A(2, 3)$, 对称轴为坐标轴, 焦点 F_1, F_2 在 x 轴上, 离心率 $e = \frac{1}{2}$.
- (1) 求椭圆 E 的方程;
 - (2) 求 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线所在直线 l 的方程;
 - (3) 在椭圆 E 上是否存在关于直线 l 对称的相异两点? 若存在, 请找出; 若不存在, 说明理由.



20. 设数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 中的每一项都不为 0. 证明: $\{a_n\}$ 为等差数列的充分必要条件是: 对任何 $n \in \mathbf{N}_+$, 都有 $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

21. 品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试, 一般通常采用的测试方法如下: 拿出 n 瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝, 要求其按品质优劣为它们排序; 经过一段时间, 等其记忆淡忘之后, 再让其品尝这 n 瓶酒, 并重新按品质优劣为它们排序, 这称为一轮测试. 根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分.
- 现设 $n = 4$, 分别以 a_1, a_2, a_3, a_4 表示第一次排序时被排为 1, 2, 3, 4 的四种酒在第二次排序时的序号, 并令 $X = |1 - a_1| + |2 - a_2| + |3 - a_3| + |4 - a_4|$, 则 X 是对两次排序的偏离程度的一种描述.
- (1) 写出 X 的可能值集合;
 - (2) 假设 a_1, a_2, a_3, a_4 等可能的为 1, 2, 3, 4 的各种排列, 求 X 的分布列;
 - (3) 某品酒师在相继进行的三轮测试中, 都有 $X \leq 2$,
 - ① 试按 (2) 中的结果, 计算出出现这种现象的概率 (假定各轮测试相互独立);
 - ② 你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何? 说明理由.