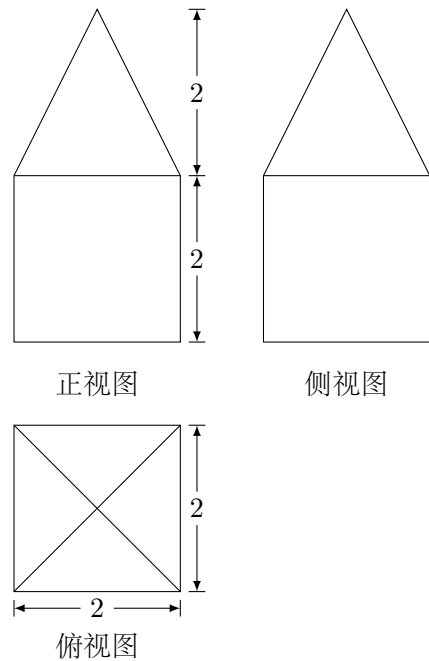


# 文科数学

## 一、选择题

1. 已知集合  $P = \{x \mid x^2 - 2x \geq 3\}$ ,  $Q = \{x \mid 2 < x < 4\}$ , 则  $P \cap Q =$  ( )  
 (A)  $[3, 4)$  (B)  $(2, 3]$  (C)  $(-1, 2)$  (D)  $(-1, 3]$

2. 某几何体的三视图如图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积是 ( )



- (A)  $8 \text{ cm}^3$  (B)  $12 \text{ cm}^3$  (C)  $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$  (D)  $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

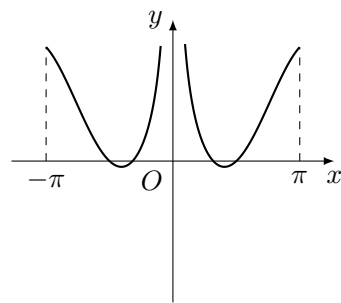
3. 设  $a, b$  是实数, 则“ $a + b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的 ( )

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

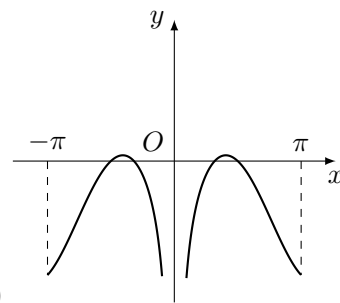
4. 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $l, m$  是两条不同的直线, 且  $l \subset \alpha, m \subset \beta$ . ( )

- (A) 若  $l \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$  (B) 若  $\alpha \perp \beta$ , 则  $l \perp m$   
 (C) 若  $l \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$  (D) 若  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $l \parallel m$

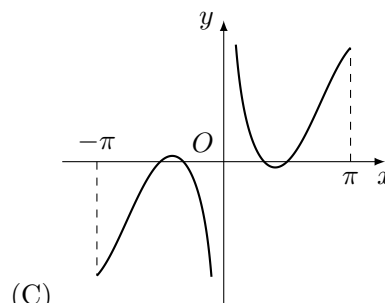
5. 函数  $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$  且  $x \neq 0$ ) 的图象可能为 ( )



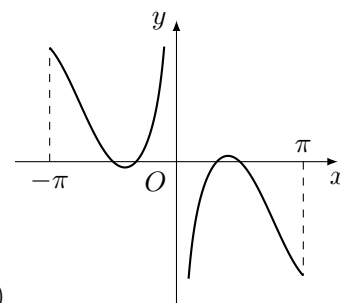
(A)



(B)



(C)

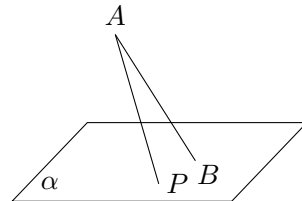


(D)

6. 有三个房间需要粉刷, 粉刷方案要求: 每个房间只用一种颜色, 且三个房间颜色各不相同. 已知三个房间的粉刷面积 (单位:  $\text{m}^2$ ) 分别为  $x, y, z$ , 且  $x < y < z$ , 三种颜色涂料的粉刷费用 (单位: 元 /  $\text{m}^2$ ) 分别为  $a, b, c$ , 且  $a < b < c$ . 在不同的方案中, 最低的总费用 (单位: 元) 是 ( )

- (A)  $ax + by + cz$  (B)  $az + by + cx$  (C)  $ay + bz + cx$  (D)  $ay + bx + cz$

7. 如图, 斜线段  $AB$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $60^\circ$ ,  $B$  为斜足, 平面  $\alpha$  上的动点  $P$  满足  $\angle PAB = 30^\circ$ , 则点  $P$  的轨迹是 ( )



- (A) 直线 (B) 抛物线  
 (C) 椭圆 (D) 双曲线的一支

8. 设实数  $a, b, t$  满足  $|a + 1| = |\sin b| = t$ . 则下列说法中正确的是 ( )

- (A) 若  $t$  确定, 则  $b^2$  唯一确定 (B) 若  $t$  确定, 则  $a^2 + 2a$  唯一确定  
 (C) 若  $t$  确定, 则  $\sin \frac{b}{2}$  唯一确定 (D) 若  $t$  确定, 则  $a^2 + a$  唯一确定

## 二、填空题

9. 计算  $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} =$ \_\_\_\_\_,  $2^{\log_2 3 + \log_4 3} =$ \_\_\_\_\_.

10. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列, 公差  $d$  不为零. 若  $a_2, a_3, a_7$  成等比数列, 且  $2a_1 + a_2 = 1$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_,  $d =$ \_\_\_\_\_.

11. 函数  $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$  的最小正周期是\_\_\_\_\_, 最小值是\_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f(f(-2)) =$ \_\_\_\_\_,  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.

13. 已知  $e_1, e_2$  是平面单位向量, 且  $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{2}$ . 若平面向量  $b$  满足  $b \cdot e_1 = b \cdot e_2 = 1$ , 则  $|b| =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则  $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y|$  的最大值是\_\_\_\_\_.

15. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点  $F(c, 0)$  关于直线  $y = \frac{b}{c}x$  的对称点  $Q$  在椭圆上, 则椭圆的离心率是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

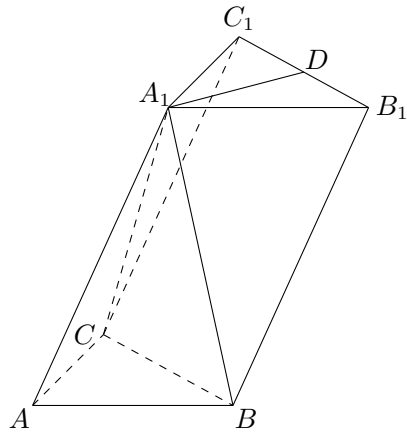
16. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2$ .

- (1) 求  $\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A}$  的值;  
 (2) 若  $B = \frac{\pi}{4}, a = 3$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

17. 已知数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),  $b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \cdots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

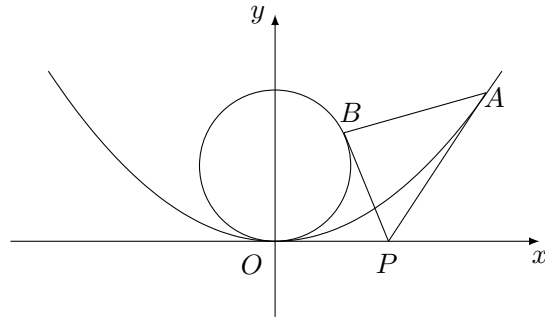
- (1) 求  $a_n$  与  $b_n$ ;  
 (2) 记数列  $\{a_n b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求  $T_n$ .

18. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 2$ ,  $A_1A = 4$ ,  $A_1$  在底面  $ABC$  的射影为  $BC$  的中点,  $D$  是  $B_1C_1$  的中点.
- (1) 证明:  $A_1D \perp$  平面  $A_1BC$ ;
- (2) 求直线  $A_1B$  和平面  $BB_1C_1C$  所成的角的正弦值.



19. 如图, 已知抛物线  $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$ , 圆  $C_2: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , 过点  $P(t, 0)$  ( $t > 0$ ) 作不过原点  $O$  的直线  $PA, PB$  分别与抛物线  $C_1$  和圆  $C_2$  相切,  $A, B$  为切点.
- (1) 求点  $A, B$  的坐标;
- (2) 求  $\triangle PAB$  的面积.

注: 直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则称该直线与抛物线相切, 称该公共点为切点.



20. 设函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).
- (1) 当  $b = \frac{a^2}{4} + 1$  时, 求函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的最小值  $g(a)$  的表达式;
- (2) 已知函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上存在零点,  $0 \leq b - 2a \leq 1$ , 求  $b$  的取值范围.