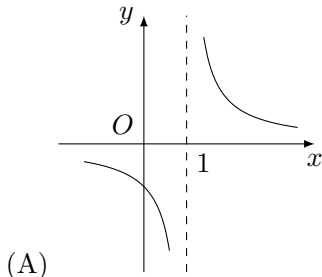


# 理科数学

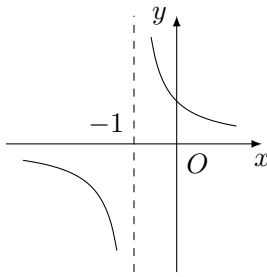
## 一、选择题

1.  $\frac{1-i}{(1+i)^2} + \frac{1+i}{(1-i)^2} =$  ( )  
 (A) i (B) -i (C) 1 (D) -1

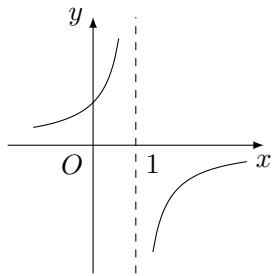
2. 函数  $y = \frac{1-x}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 的反函数图象大致是 ( )



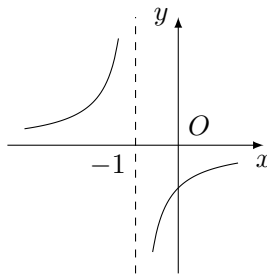
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 已知函数  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ , 则下列判断正确的是 ( )

- (A) 此函数的最小周期为  $2\pi$ , 其图象的一个对称中心是  $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$   
 (B) 此函数的最小周期为  $\pi$ , 其图象的一个对称中心是  $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$   
 (C) 此函数的最小周期为  $2\pi$ , 其图象的一个对称中心是  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$   
 (D) 此函数的最小周期为  $\pi$ , 其图象的一个对称中心是  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

4. 下列函数既是奇函数, 又在区间  $[-1, 1]$  上单调递减的是 ( )

- (A)  $f(x) = \sin x$  (B)  $f(x) = -|x+1|$   
 (C)  $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$  (D)  $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

5. 如果  $\left(3x - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$  的展开式中各项系数之和为 128, 则展开式中  $\frac{1}{x^3}$  的系数是 ( )

- (A) 7 (B) -7 (C) 21 (D) -21

6. 函数  $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0 \\ e^{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$ , 若  $f(1) + f(a) = 2$ , 则  $a$  的所有可能值为 ( )

- (A) 1 (B)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)  $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (D)  $1, \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知向量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 且  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}, \overrightarrow{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$ , 则一定共线的三点是 ( )

- (A) A、B、D (B) A、B、C (C) B、C、D (D) A、C、D

8. 设地球的半径为  $R$ , 若甲地位于北纬  $45^\circ$  东经  $120^\circ$ , 乙地位于南纬  $75^\circ$  东经  $120^\circ$ , 则甲、乙两地的球面距离为 ( )

- (A)  $\sqrt{3}R$  (B)  $\frac{\pi}{6}R$  (C)  $\frac{5\pi}{6}R$  (D)  $\frac{2\pi}{3}R$

9. 10 张奖券中只有 3 张有奖, 5 个人购买, 每人 1 张, 至少有 1 人中奖的概率是 ( )

- (A)  $\frac{3}{10}$  (B)  $\frac{1}{12}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $\frac{11}{12}$

10. 设集合  $A, B$  是全集  $U$  的两个子集, 则  $A \subsetneq B$  是  $(\complement_U A) \cup B = U$  的 ( )

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

11.  $0 < a < 1$ , 下列不等式一定成立的是 ( )

- (A)  $|\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)| > 2$   
 (B)  $|\log_{(1+a)}(1-a)| < |\log_{(1-a)}(1+a)|$   
 (C)  $|\log_{(1+a)}(1-a) + \log_{(1-a)}(1+a)| < |\log_{(1+a)}(1-a)| + |\log_{(1-a)}(1+a)|$   
 (D)  $|\log_{(1+a)}(1-a) - \log_{(1-a)}(1+a)| < |\log_{(1+a)}(1-a)| - |\log_{(1-a)}(1+a)|$

12. 设直线  $l: 2x + y + 2 = 0$  关于原点对称的直线为  $l'$ , 若  $l'$  与椭圆  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  的交点为  $A, B$ , 点  $P$  为椭圆上的动点, 则使  $\triangle PAB$  的面积为  $\frac{1}{2}$  的点  $P$  的个数为 ( )

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

## 二、填空题

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^2 + 2C_n^{n-2}}{(n+1)^2} =$ \_\_\_\_\_.

14. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 右准线  $l$  与两条渐近线交于  $P, Q$  两点, 如果  $\triangle PQF$  是直角三角形, 则双曲线的离心率  $e =$ \_\_\_\_\_.

15. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$ , 则使得目标函数  $z = 6x + 5y$  的最大的点  $(x, y)$  是\_\_\_\_\_.

16. 已知  $m, n$  是不同的直线,  $\alpha, \beta$  是不重合的平面, 给出下列命题:

- ① 若  $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ , 则  $m \parallel n$ ;  
 ② 若  $m, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;  
 ③ 若  $m \perp \alpha, n \perp \beta, m \parallel n$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ ;  
 ④  $m, n$  是两条异面直线, 若  $m \parallel \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$ .

上面的命题中, 真命题的序号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

## 三、解答题

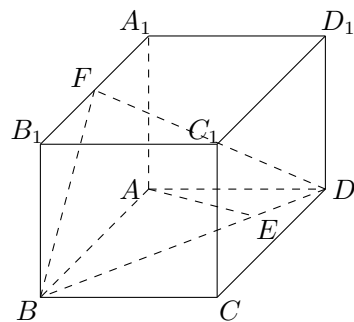
17. 已知向量  $\vec{m} = (\cos \theta, \sin \theta)$  和  $\vec{n} = (\sqrt{2} - \sin \theta, \cos \theta)$ ,  $\theta \in (\pi, 2\pi)$ , 且  $|\vec{m} + \vec{n}| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$ , 求  $\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$  的值.

18. 袋中装有黑球和白球共 7 个, 从中任取 2 个球都是白球的概率为  $\frac{1}{7}$ , 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取 1 球, 甲先取, 乙后取, 然后甲再取  $\dots$ , 取后不放回, 直到两人中有一人取到白球时既终止. 每个球在每一次被取出的机会是等可能的, 用  $\xi$  表示取球终止所需要的取球次数.

- (1) 求袋中所有的白球的个数;  
 (2) 求随机变量  $\xi$  的概率分布;  
 (3) 求甲取到白球的概率.

19. 已知  $x = 1$  是函数  $f(x) = mx^3 - 3(m+1)x^2 + nx + 1$  的一个极值点, 其中  $m, n \in \mathbf{R}, m < 0$ .
- (1) 求  $m$  与  $n$  的关系式;
  - (2) 求  $f(x)$  的单调区间;
  - (3) 当  $x \in [-1, 1]$  时, 函数  $y = f(x)$  的图象上任意一点的切线斜率恒大于  $3m$ , 求  $m$  的取值范围.

20. 如图, 已知长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB = 2$ ,  $AA_1 = 1$ , 直线  $BD$  与平面  $AA_1B_1B$  所成的角为  $30^\circ$ ,  $AE$  垂直  $BD$  于  $E$ ,  $F$  为  $A_1B_1$  的中点.
- (1) 求异面直线  $AE$  与  $BF$  所成的角;
  - (2) 求平面  $BDF$  与平面  $AA_1B$  所成的二面角 (锐角) 的大小;
  - (3) 求点  $A$  到平面  $BDF$  的距离.



21. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = 5$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_{n+1} = S_n + n + 5$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).
- (1) 证明数列  $\{a_n + 1\}$  是等比数列;
  - (2) 令  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , 求函数  $f(x)$  在点  $x = 1$  处的导数  $f'(1)$  并比较  $2f'(1)$  与  $23n^2 - 13n$  的大小.

22. 已知动圆过定点  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 且与直线  $x = -\frac{p}{2}$  相切, 其中  $p > 0$ .
- (1) 求动圆圆心  $C$  的轨迹的方程;
  - (2) 设  $A, B$  是轨迹  $C$  上异于原点  $O$  的两个不同点, 直线  $OA$  和  $OB$  的倾斜角分别为  $\alpha$  和  $\beta$ , 当  $\alpha, \beta$  变化且  $\alpha + \beta$  为定值  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) 时, 证明直线  $AB$  恒过定点, 并求出该定点的坐标.