2011 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. i 为虚数单位, 则 $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{2011}=$ ( )

(A) $-\mathrm{i}$ (B) -1 (C) i (D) 1

2. 已知 $U=\{y\mid y=\log_2 x, x>1\}$, $P=\left\{y\mid y=\dfrac{1}{x}, x>2\right\}$, 则 $\complement_U P=$ ( )

(A) $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

(C) $(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,0)\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)\geqslant 1$, 则 x 的取值范围为 ( )

(A) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\left\{x\mid k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(D) $\left\{x\mid 2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

4. 将两个顶点在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上, 另一个顶点是此抛物线焦点的正三角形个数记为 n, 则 ( )

(A) $n=0$ (B) $n=1$ (C) $n=2$ (D) $n\geqslant 3$

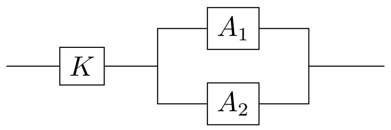
5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$, 且 $P(\xi<4)=0.8$, 则 $P(0<\xi<2)=$ ( )

(A) 0.6 (B) 0.4 (C) 0.3 (D) 0.2

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2\ (a>0$, 且 $a\neq 1)$. 若 $g(2)=a$, 则 $f(2)=$ ( )

(A) 2 (B) $\dfrac{15}{4}$ (C) $\dfrac{17}{4}$ (D) a^2

7. 如图, 用 K、A_1、A_2 三类不同的元件连接成一个系统. 当 K 正常工作且 A_1、A_2 至少有一个正常工作时, 系统正常工作. 已知 K、A_1、A_2 正常工作的概率依次为 0.9、0.8、0.8, 则系统正常工作的概率为 ( )



(A) 0.960 (B) 0.864 (C) 0.720 (D) 0.576

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+z,3)$, $\boldsymbol{b}=(2,y-z)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若 x, y 满足不等式 $|x|+|y|\leqslant 1$, 则 z 的取值范围为 ( )

(A) $[-2,2]$ (B) $[-2,3]$ (C) $[-3,2]$ (D) $[-3,3]$

9. 若实数 a, b 满足 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, 且 $ab=0$, 则称 a 与 b 互补. 记 $\varphi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b$, 那么 $\varphi(a,b)=0$ 是 a 与 b 互补的 ( )

(A) 必要而不充分条件 (B) 充分而不必要条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 放射性元素由于不断有原子放射出微粒子而变成其他元素, 其含量不断减少, 这种现象称为衰变. 假设在放射性同位素铯 137 的衰变过程中, 其含量 M (单位: 太贝克) 与时间 t (单位: 年) 满足函数关系: $M(t)=M_0 2^{-\frac{t}{30}}$, 其中 M_0 为 $t=0$ 时铯 137 的含量. 已知 $t=30$ 时, 铯 137 含量的变化率是 $-10\ln 2$ (太贝克/年), 则 $M(60)=$ ( )

(A) 5 太贝克 (B) $75\ln 2$ 太贝克

(C) $150\ln 2$ 太贝克 (D) 150 太贝克

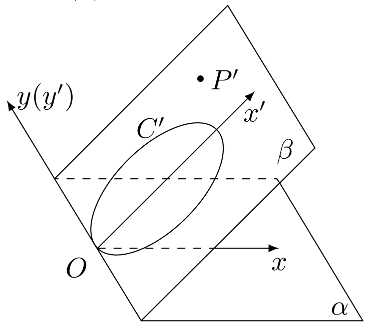
二、填空题

11. $\left(x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式中含 x^{15} 的项的系数为______. (结果用数值表示)

12. 在 30 瓶饮料中, 有 3 瓶已过了保质期. 从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶, 则至少取到 1 瓶已过保质期饮料的概率为______. (结果用最简分数表示)

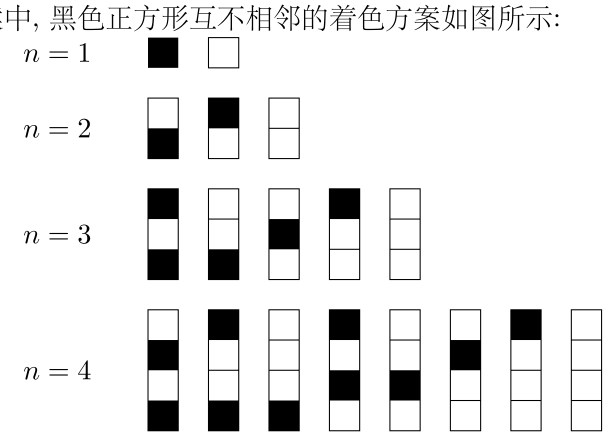
13.《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为______升.

14. 如图, 直角坐标系 xOy 所在的平面为 α, 直角坐标系 $x'Oy'$ (其中 y' 轴与 y 轴重合) 所在的平面为 β, $\angle xOx'=45°$.



(1) 已知平面 β 内有一点 $P'\left(2\sqrt{2},2\right)$, 则点 P' 在平面 α 内的射影 P 的坐标为______.
(2) 已知平面 β 内的曲线 C' 的方程是 $\left(x'-\sqrt{2}\right)^2+2y'^2-2=0$, 则曲线 C' 在平面 α 内的射影 C 的方程是______.

15. 给 n 个自上而下相连的正方形着黑色或白色. 当 $n\leqslant 4$ 时, 在所有不同的着色方案中, 黑色正方形互不相邻的着色方案如图所示:



由此推断, 当 $n=6$ 时, 黑色正方形互不相邻的着色方案共有______种, 至少有两个黑色正方形相邻的着色方案共有______种. (结果用数值表示)

三、解答题

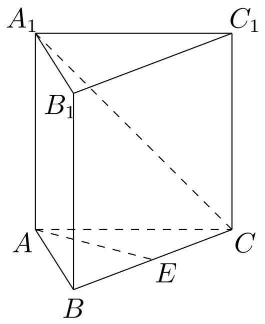
16. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a=1$, $b=2$, $\cos C=\dfrac{1}{4}$.
(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长;
(2) 求 $\cos(A-C)$ 的值.

17. 提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状况. 在一般情况下, 大桥上的车流速度 v (单位: 千米/小时) 是车流密度 x (单位: 辆/千米) 的函数. 当桥上的车流密度达到 200 辆/千米时, 造成堵塞, 此时车流速度为 0; 当车流密度不超过 20 辆/千米时, 车流速度为 60 千米/小时. 研究表明: 当 $20\leqslant x\leqslant 200$ 时, 车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.
(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时, 求函数 $v(x)$ 的表达式;
(2) 当车流密度 x 为多大时, 车流量 (单位时间内通过桥上某观测点的车辆数, 单位: 辆/小时) $f(x)=x\cdot v(x)$ 可以达到最大, 并求出最大值. (精确到 1 辆/小时)

18. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各棱长都是 4, E 是 BC 的中点, 动点 F 在侧棱 CC_1 上, 且不与点 C 重合.

(1) 当 $CF=1$ 时, 求证: $EF\perp A_1C$;

(2) 设二面角 $C-AF-E$ 的大小为 θ, 求 $\tan\theta$ 的最小值.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且满足 $a_1=a$ $(a\neq 0)$, $a_{n+1}=rS_n$ $(n\in\mathbf{N}^*, r\in\mathbf{R}, r\neq -1)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若存在 $k\in\mathbf{N}^*$, 使得 S_{k+1}, S_k, S_{k+2} 成等差数列, 试判断: 对于任意的 $m\in\mathbf{N}^*$, 且 $m\geqslant 2$, a_{m+1}, a_m, a_{m+2} 是否成等差数列, 并证明你的结论.

20. 平面内与两定点 $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ $(a>0)$ 连线的斜率之积等于非零常数 m 的点的轨迹, 加上 A_1, A_2 两点所成的曲线 C 可以是圆、椭圆或双曲线.

(1) 求曲线 C 的方程, 并讨论 C 的形状与 m 值的关系;

(2) 当 $m=-1$ 时, 对应的曲线为 C_1; 对给定的 $m\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, 对应的曲线为 C_2. 设 F_1, F_2 是 C_2 的两个焦点. 试问: 在 C_1 上, 是否存在点 N, 使得 $\triangle F_1NF_2$ 的面积 $S=|m|a^2$? 若存在, 求 $\tan\angle F_1NF_2$ 的值; 若不存在, 请说明理由.

21. (1) 已知函数 $f(x)=\ln x-x+1$, $x\in(0,+\infty)$, 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 设 a_k, b_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 均为正数, 证明:

① 若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$, 则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant 1$;

② 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$, 则 $\dfrac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.