2003 年普通高等学校招生考试（全国卷）

文科数学

一、选择题

1. 直线 $y=2x$ 关于 x 轴对称的直线方程为 (　)

(A) $y=-\frac{1}{2}x$　(B) $y=\frac{1}{2}x$　(C) $y=-2x$　(D) $y=2x$

2. 已知 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\frac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ (　)

(A) $\frac{7}{24}$　(B) $-\frac{7}{24}$　(C) $\frac{24}{7}$　(D) $-\frac{24}{7}$

3. 抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 $y=2$, 则 a 的值为 (　)

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $-\frac{1}{8}$　(C) 8　(D) -8

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 (　)

(A) 48　(B) 49　(C) 50　(D) 51

5. 双曲线虚轴的一个端点为 M, 两个焦点为 F_1, F_2, $\angle F_1MF_2=120^\circ$, 则双曲线的离心率为 (　)

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,\ x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}},\ x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是(　)

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7. 已知 $f(x^5)=\lg x$, 则 $f(2)=$ (　)

(A) $\lg 2$　(B) $\lg 32$　(C) $\lg\frac{1}{32}$　(D) $\frac{1}{5}\lg 2$

8. 函数 $y=\sin(x+\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 则 $\varphi=$ (　)

(A) 0　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{2}$　(D) π

9. 已知点 $(a,2)$ $(a>0)$ 到直线 $l:x-y+3=0$ 的距离为 1, 则 $a=$ (　)

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2-\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}-1$　(D) $\sqrt{2}+1$

10. 已知圆锥的底面半径为 R, 高为 $3R$, 它的内接圆柱的底面半径为 $\frac{3}{4}R$, 该圆柱的全面积为 (　)

(A) $2\pi R^2$　(B) $\frac{9}{4}\pi R^2$　(C) $\frac{8}{3}\pi R^2$　(D) $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角). 若 P_1 与 P_4 重合, 则 $\tan\theta=$ (　)

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1

12. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 (　)

(A) 3π　(B) 4π　(C) $3\sqrt{3}\pi$　(D) 6π

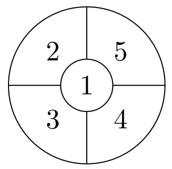
二、填空题

13. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是______.

14. $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是______.

15. 在平面几何里, 有勾股定理:“设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2+AC^2=BC^2$. ”拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是:“设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两互相垂直, 则______. ”

16. 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻地区不得使用同一颜色, 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有种______. (以数字作答)

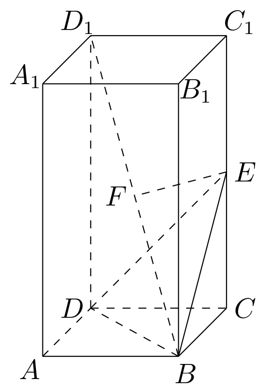


三、解答题

17. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



18. 已知复数 z 的辐角为 60°, 且 $|z-1|$ 是 $|z|$ 和 $|z-2|$ 的等比中项, 求 $|z|$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

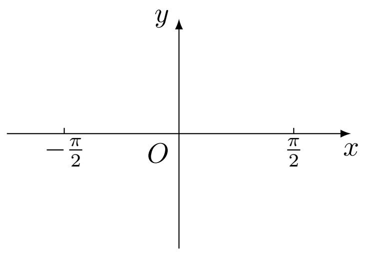
(1) 求 a_2, a_3;

(2) 证明: $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

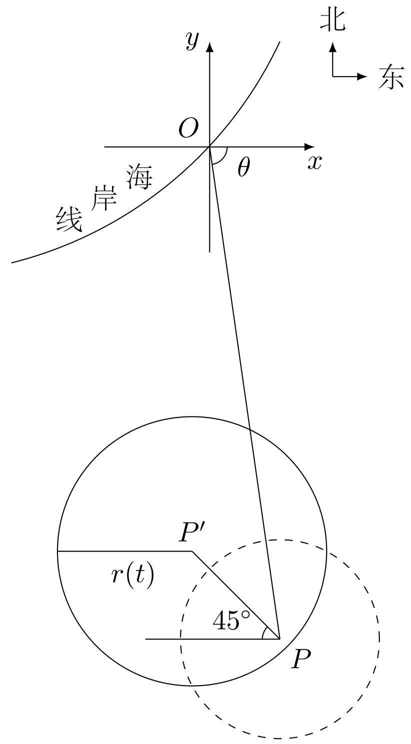
20. 已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.



21. 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市 O (如图) 的东偏南 θ $\left(\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ 方向 300 km 的海面 P 处, 并以 20 km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为 60 km, 并以 10 km/h 的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. 已知常数 $a>0$, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=4a$, O 为 AB 的中点, 点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动, 且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$, P 为 GE 与 OF 的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使 P 到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.