

文科数学

一、选择题

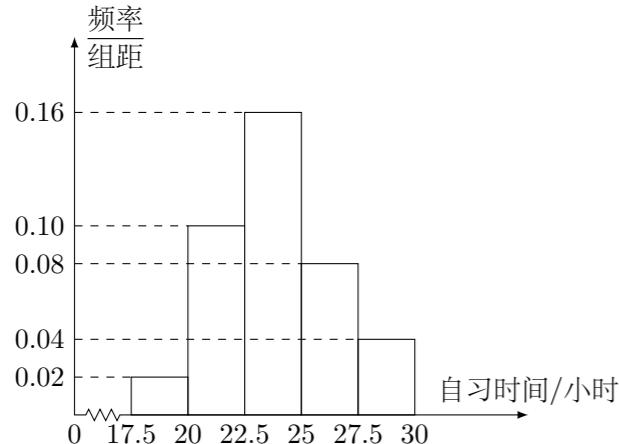
1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $C_U(A \cup B) =$ ()

- (A) $\{2, 6\}$ (B) $\{3, 6\}$ (C) $\{1, 3, 4, 5\}$ (D) $\{1, 2, 4, 6\}$

2. 若复数 $z = \frac{2}{1-i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\bar{z} =$ ()

- (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ()

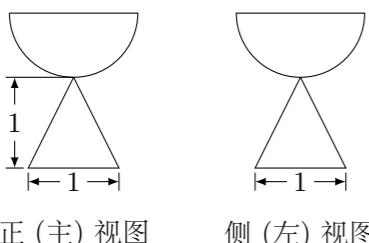


- (A) 56 (B) 60 (C) 120 (D) 140

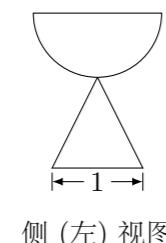
4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ 2x-3y \leq 9 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 ()

- (A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12

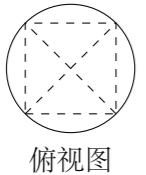
5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ()



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

- (A) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\pi$ (B) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (C) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$ (D) $1 + \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ($a > 0$) 截直线 $x + y = 0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$, 则圆 M 与圆 $N: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的位置关系是 ()

- (A) 内切 (B) 相交 (C) 外切 (D) 相离

8. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 已知 $b = c$, $a^2 = 2b^2(1 - \sin A)$, 则 $A =$ ()

- (A) $\frac{3\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} . 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 则 $f(6) =$ ()

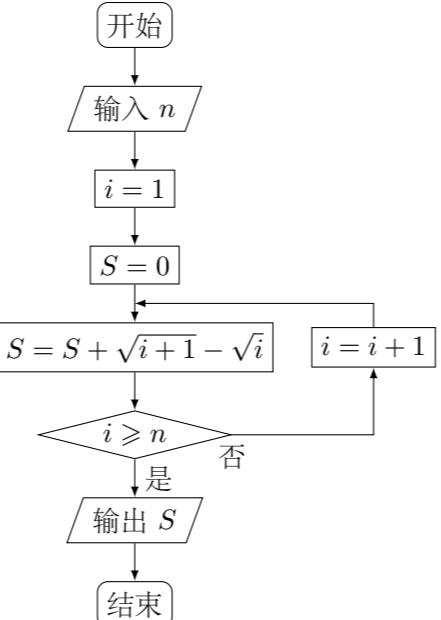
- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

10. 若函数 $y = f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y = f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是 ()

- (A) $y = \sin x$ (B) $y = \ln x$ (C) $y = e^x$ (D) $y = x^3$

二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入 n 的值为 3, 则输出的 S 的值为 ____.



$$\left(\sin \frac{\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{9}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{9}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{8\pi}{9}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 4 \times 5;$$

$$\text{照此规律, } \left(\sin \frac{\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{2n+1}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{2n\pi}{2n+1}\right)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. 已知 $\mathbf{a} = (1, -1)$, $\mathbf{b} = (6, -4)$. 若 $\mathbf{a} \perp (t\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则实数 t 的值为 ____.

14. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$). 矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2|AB| = 3|BC|$, 则 E 的离心率是 ____.

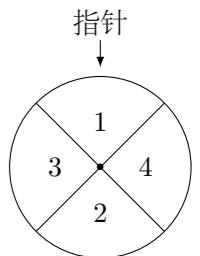
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$, 其中 $m > 0$. 若存在实数 b , 使得关于 x 的方程 $f(x) = b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是 ____.

三、解答题

16. 某儿童乐园在“六一”儿童节推出了一项趣味活动. 参加活动的儿童需转动如图所示的转盘两次, 每次转动后, 待转盘停止转动时, 记录指针所指区域中的数. 设两次记录的数分别为 x, y . 奖励规则如下:

- ① 若 $xy \leq 3$, 则奖励玩具一个;
② 若 $xy \geq 8$, 则奖励水杯一个;
③ 其余情况奖励饮料一瓶.

假设转盘质地均匀, 四个区域划分均匀. 小亮准备参加此项活动.
(1) 求小亮获得玩具的概率;
(2) 请比较小亮获得水杯与获得饮料的概率的大小, 并说明理由.



12. 观察下列等式:

$$\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 1 \times 2;$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{5}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 2 \times 3;$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{2\pi}{7}\right)^{-2} + \left(\sin \frac{3\pi}{7}\right)^{-2} + \cdots + \left(\sin \frac{6\pi}{7}\right)^{-2} = \frac{4}{3} \times 3 \times 4;$$

17. 设 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\pi - x)\sin x - (\sin x - \cos x)^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 把 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

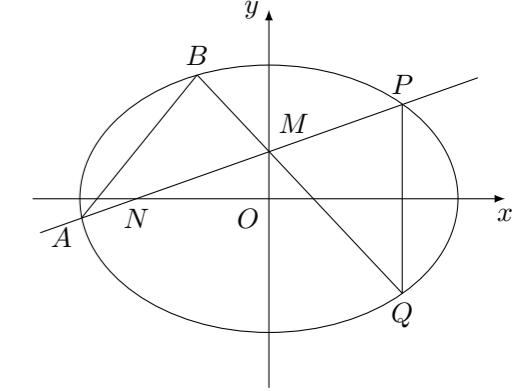
21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长轴长为 4, 焦距为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过动点 $M(0, m)$ ($m > 0$) 的直线交 x 轴于点 N , 交 C 于点 A, P (P 在第一象限), 且 M 是线段 PN 的中点, 过点 P 作 x 轴的垂线交 C 于另一点 Q , 延长线 QM 交 C 于点 B .

① 设直线 PM, QM 的斜率分别为 k, k' , 证明 $\frac{k'}{k}$ 为定值;

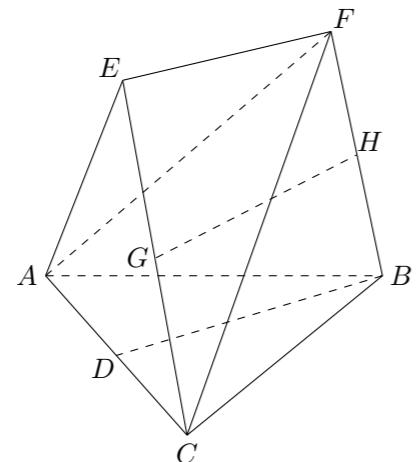
② 求直线 AB 的斜率的最小值.



18. 在如图所示的几何体中, D 是 AC 的中点, $EF \parallel DB$.

(1) 已知 $AB = BC, AE = EC$. 求证: $AC \perp FB$;

(2) 已知 G, H 分别是 EC 和 FB 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 ABC .



20. 设函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 + (2a - 1)x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 令 $g(x) = f'(x)$, 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 求实数 a 的取值范围.