2008 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$, 那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 ( )

(A) $\{x|-2\leqslant x<4\}$ (B) $\{x|x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

(C) $\{x|-2\leqslant x<-1\}$ (D) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

2. 若 $a=2^{0.5}$, $b=\log_\pi 3$, $c=\log_2\sin\dfrac{2\pi}{5}$, 则 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $c>a>b$ (D) $b>c>a$

3. "函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数"是"函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 若点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点 $(2,0)$ 的距离小 1, 则点 P 的轨迹为 ( )

(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \\ x\leqslant 0 \end{cases}$, 则 $z=3^{x+2y}$ 的最小值是 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) 9

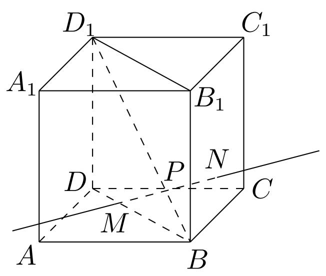
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $p, q\in\mathbf{N}^*$ 满足 $a_{p+q}=a_p+a_q$, 且 $a_2=-6$, 那么 a_{10} 等于 ( )

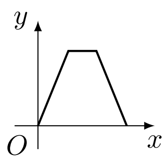
(A) -165 (B) -33 (C) -30 (D) -21

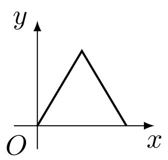
7. 过直线 $y=x$ 上的一点作圆 $(x-5)^2+(y-1)^2=2$ 的两条切线 l_1, l_2, 当直线 l_1, l_2 关于 $y=x$ 对称时, 它们之间的夹角为 ( )

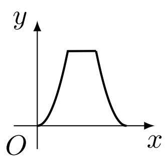
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

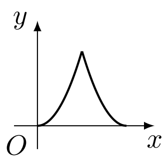
8. 如图, 动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上. 过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线, 与正方体表面相交于 MN. 设 $BP=x$, $MN=y$, 则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是 ( )



(A)


(B)


(C)


(D)


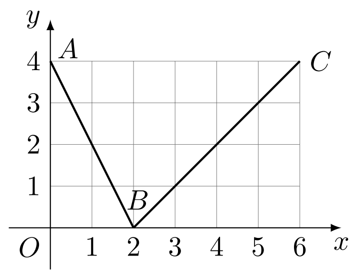
二、填空题

9. 已知 $(a-\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 那么实数 $a=$______.

10. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°, 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=4$, 那么 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 的值为______.

11. 若 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ 展开式的各项系数之和为 32, 则 $n=$______, 其展开式中的常数项为______. (用数字作答)

12. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC, 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(0,4)$, $(2,0)$, $(6,4)$, 则 $f(f(0))=$______; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$______. (用数字作答)



13. 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$, 对于 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的任意 x_1, x_2, 有如下条件: ① $x_1>x_2$; ② $x_1^2>x_2^2$; ③ $|x_1|>x_2$. 其中能使 $f(x_1)>f(x_2)$ 恒成立的条件序号是______.

14. 某校数学课外小组在坐标纸上, 为学校的一块空地设计植树方案如下: 第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k,y_k)$ 处, 其中 $x_1=1$, $y_1=1$, 当 $k\geqslant 2$ 时, $\begin{cases} x_k=x_{k-1}+1-5\left[T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right)\right] \\ y_k=y_{k-1}+T\left(\dfrac{k-1}{5}\right)-T\left(\dfrac{k-2}{5}\right) \end{cases}$. $T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6)=2$, $T(0.2)=0$. 按此方案, 第 6 棵树种植点的坐标应为______; 第 2008 棵树种植点的坐标应为______.

三、解答题

15. 已知函数 $f(x)=\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

(1) 求 ω 的值;

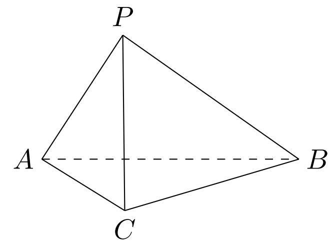
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的取值范围.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC=BC=2$, $\angle ACB=90^\circ$, $AP=BP=AB$, $PC\perp AC$.

(1) 求证: $PC\perp AB$;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的大小;

(3) 求点 C 到平面 APB 的距离.



17. 甲、乙等五名奥运志愿者被随机地分到 A, B, C, D 四个不同的岗位服务, 每个岗位至少有一名志愿者.

(1) 求甲、乙两人同时参加 A 岗位服务的概率;

(2) 求甲、乙两人不在同一个岗位服务的概率;

(3) 设随机变量 ξ 为这五名志愿者中参加 A 岗位服务的人数, 求 ξ 的分布列.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-b}{(x-1)^2}$, 求导函数 $f'(x)$, 并确定 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 A, C 在椭圆 $x^2+3y^2=4$ 上, 对角线 BD 所在直线的斜率为 1.

(1) 当直线 BD 过点 $(0,1)$ 时, 求直线 AC 的方程;

(2) 当 $\angle ABC=60^\circ$ 时, 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

20. 对于每项均是正整数的数列 A: a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 定义变换 T_1, T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A)$: n, a_1-1, a_2-1, $\cdots$, a_n-1. 对于每项均是非负整数的数列 B: b_1, b_2, $\cdots$, b_m, 定义变换 T_2, T_2 将数列 B 各项从大到小排列, 然后去掉所有为零的项, 得到数列 $T_2(B)$; 又定义 $S(B)=2(b_1+2b_2+\cdots+mb_m)+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2$. 设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列, 令 $A_{k+1}=T_2(T_1(A_k))$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

(1) 如果数列 A_0 为 5, 3, 2, 写出数列 A_1, A_2;

(2) 对于每项均是正整数的有穷数列 A, 证明 $S(T_1(A))=S(A)$;

(3) 证明: 对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0, 存在正整数 K, 当 $k\geqslant K$ 时, $S(A_{k+1})=S(A_k)$.