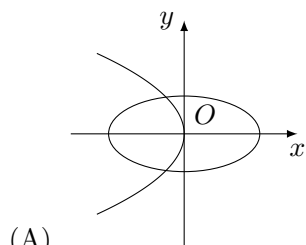


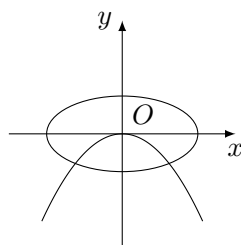
理科数学

一、选择题

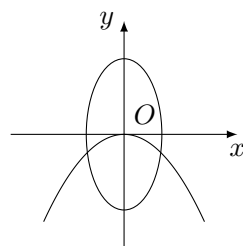
- 若集合 $M = \{y|y = 2^{-x}\}$, $P = \{y|y = \sqrt{x-1}\}$, 则 $M \cap P =$ ()
(A) $\{y|y > 1\}$ (B) $\{y|y \geq 1\}$ (C) $\{y|y > 0\}$ (D) $\{y|y \geq 0\}$
- 若 $f(x) = \frac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x) = x$ 的根是 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2
- 设复数 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\arg \frac{z_1}{z_2} =$ ()
(A) $\frac{13}{12}\pi$ (B) $\frac{7}{12}\pi$ (C) $\frac{5}{12}\pi$ (D) $-\frac{5}{12}\pi$
- 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 ()
(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$
- 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ 与 $ax + by^2 = 0$ ($a > b > 0$) 的曲线大致是 ()



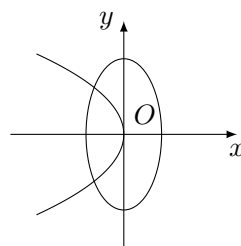
(A)



(B)



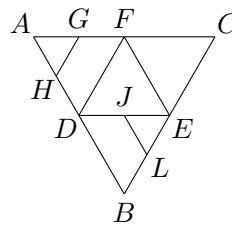
(C)



(D)

- 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A < B < C$ ($C \neq \frac{\pi}{2}$), 则下列结论中正确的是 ()
(A) $\sin A < \sin C$ (B) $\cos A < \cos C$
(C) $\tan A < \tan C$ (D) $\cot A < \cot C$
- 椭圆 $\begin{cases} x = 4 + 5\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 的焦点坐标为 ()
(A) $(0, 0), (0, -8)$ (B) $(0, 0), (-8, 0)$
(C) $(0, 0), (0, 8)$ (D) $(0, 0), (8, 0)$

- 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 ()

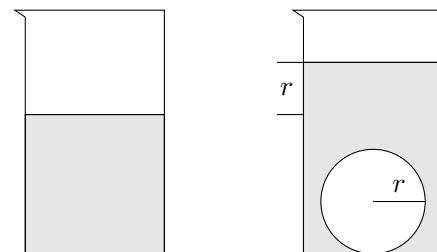


- (A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 0°

- 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 那么不同插法的种数为 ()
(A) 42 (B) 30 (C) 20 (D) 12
- 已知直线 $ax + by + c = 0$ ($abc \neq 0$) 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|, |b|, |c|$ 的三角形 ()
(A) 是锐角三角形 (B) 是直角三角形
(C) 是钝角三角形 (D) 不存在
- 若不等式 $|ax + 2| < 6$ 的解集为 $(-1, 2)$, 则实数 a 等于 ()
(A) 8 (B) 2 (C) -4 (D) -8
- 在直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle AOB$ 三边所在直线的方程分别为 $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 30$, 则 $\triangle AOB$ 内部和边上整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 的总数是 ()
(A) 95 (B) 91 (C) 88 (D) 75

二、填空题

- 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r , 则 $\frac{R}{r} =$ _____.



- 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

- 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是_____.

- 若存在常数 $p > 0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px) = f\left(px - \frac{p}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $f(x)$ 的一个正周期为_____.

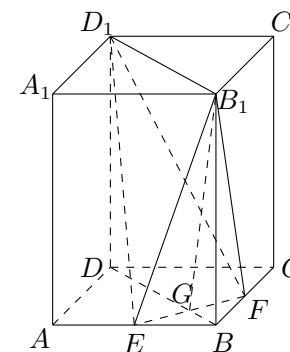
三、解答题

- 解不等式: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) - 1$.

- 已知函数 $f(x) = \frac{6\cos^4x + 5\sin^2x - 4}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

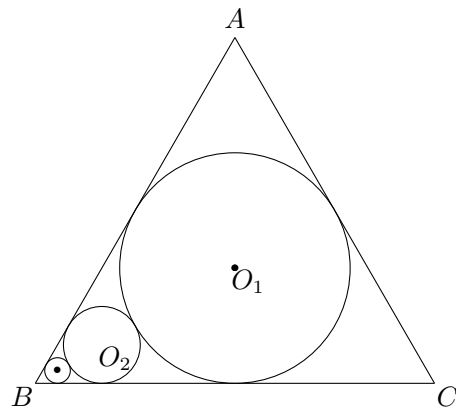
- 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 4. E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, $EF \cap BD = G$.

- 求证: 平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1B_1 ;
- 求点 D_1 到平面 B_1EF 的距离 d ;
- 求三棱锥 B_1-EFD_1 的体积 V .



20. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.
- (1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?
- (2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

21. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, \cdots , 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n ($n \in \mathbf{N}$).
- (1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 的值.



22. 已知动圆过定点 $P(1, 0)$, 且与定直线 $l: x = -1$ 相切, 点 C 在 l 上.
- (1) 求动圆圆心的轨迹 M 的方程;
- (2) 设过点 P , 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A, B 两点.
- ① 问: $\triangle ABC$ 能否为正三角形? 若能, 求点 C 的坐标; 若不能, 说明理由;
- ② 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 求这种点 C 的纵坐标的取值范围.