2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $a, b\in\mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $a-\mathrm{i}$ 与 $2+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数, 则 $(a+b\mathrm{i})^2=$ ( )

(A) $5-4\mathrm{i}$　(B) $5+4\mathrm{i}$　(C) $3-4\mathrm{i}$　(D) $3+4\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{x\,|\,|x-1|<2\}$, $B=\{y\,|\,y=2^x, x\in[0,2]\}$, 则 $A\cap B=$( )

(A) $[0,2]$　(B) $(1,3)$　(C) $[1,3)$　(D) $(1,4)$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$ 的定义域为 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $(2,+\infty)$

(C) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

4. 用反证法证明命题"设 a, b 为实数, 则方程 $x^3+ax+b=0$ 至少有一个实根"时, 要做的假设是 ( )

(A) 方程 $x^3+ax+b=0$ 没有实根

(B) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有一个实根

(C) 方程 $x^3+ax+b=0$ 至多有两个实根

(D) 方程 $x^3+ax+b=0$ 恰好有两个实根

5. 已知实数 x, y 满足 $a^x<a^y$ $(0<a<1)$, 则下列关系式恒成立的是 ( )

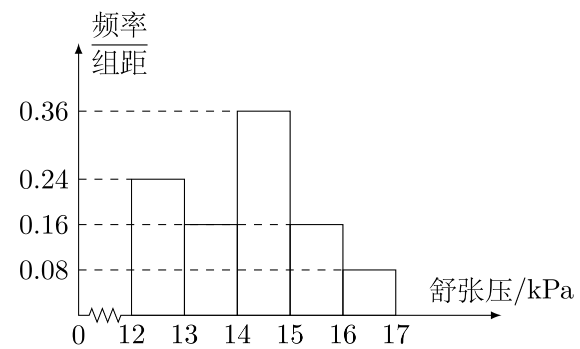
(A) $\dfrac{1}{x^2+1}>\dfrac{1}{y^2+1}$　(B) $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$

(C) $\sin x>\sin y$　(D) $x^3>y^3$

6. 直线 $y=4x$ 与曲线 $y=x^3$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为 ( )

(A) $2\sqrt{2}$　(B) $4\sqrt{2}$　(C) 2　(D) 4

7. 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12,13)$, $[13,14)$, $[14,15)$, $[15,16)$, $[16,17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, $\cdots$, 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 ( )



(A) 6　(B) 8　(C) 12　(D) 18

8. 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$, 若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,+\infty)$

9. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\ 2x-y-3\geqslant 0\end{cases}$, 当目标函数 $z=ax+by$ $(a>0,\ b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时, a^2+b^2 的最小值为( )

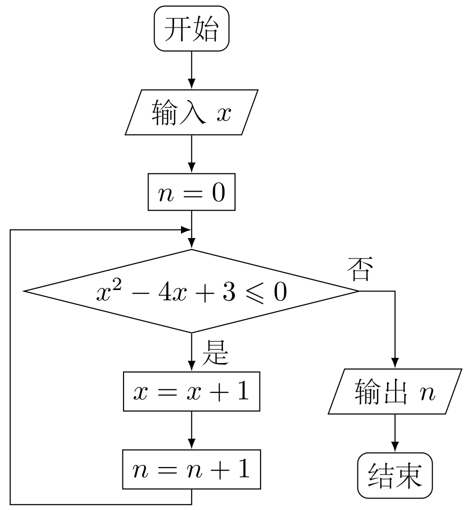
(A) 5　(B) 4　(C) $\sqrt{5}$　(D) 2

10. 已知 $a>b>0$, 椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 双曲线 C_2 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, C_1 与 C_2 的离心率之积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 则 C_2 的渐近线方程为( )

(A) $x\pm\sqrt{2}y=0$　(B) $\sqrt{2}x\pm y=0$　(C) $x\pm 2y=0$　(D) $2x\pm y=0$

二、填空题

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为______.



12. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\tan A$, 当 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为______.

13. 三棱锥 $P-ABC$ 中, D, E 分别为 PB, PC 的中点, 记三棱锥 $D-ABE$ 的体积为 V_1, $P-ABC$ 的体积为 V_2, 则 $\dfrac{V_1}{V_2}=$______.

14. 若 $\left(ax^2+\dfrac{b}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 项的系数为 20, 则 a^2+b^2 的最小值为______.

15. 已知函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$. 对函数 $y=g(x)$ $(x\in I)$, 定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的"对称函数"为函数 $y=h(x)$ $(x\in I)$, $y=h(x)$ 满足: 对任意 $x\in I$, 两个点 $(x,h(x))$, $(x,g(x))$ 关于点 $(x,f(x))$ 对称. 若 $h(x)$ 是 $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x)=3x+b$ 的"对称函数", 且 $h(x)>g(x)$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围是______.

三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$, $\boldsymbol{b}=(\sin 2x, n)$, 函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 且 $y=f(x)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},\sqrt{3}\right)$ 和点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},-2\right)$.

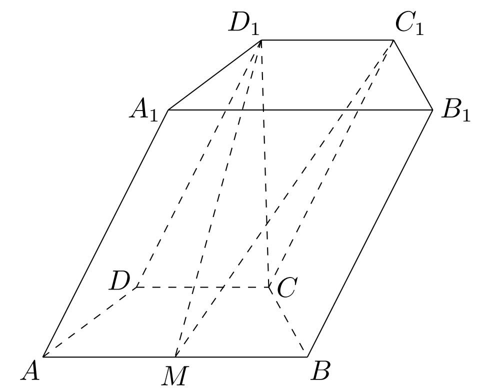
(1) 求 m, n 的值;

(2) 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 φ $(0<\varphi<\pi)$ 个单位后得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 若 $y=g(x)$ 的图象上各最高点到点 $(0,3)$ 的距离的最小值为 1, 求 $y=g(x)$ 的单调增区间.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $\angle DAB=60^\circ$, $AB=2CD=2$, M 是线段 AB 的中点.

(1) 求证: $C_1M\,/\!/$ 平面 A_1ADD_1;

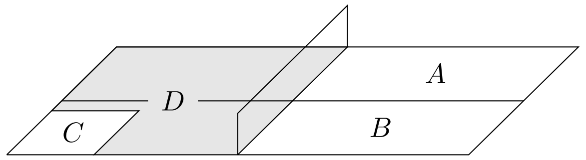
(2) 若 CD_1 垂直于平面 $ABCD$ 且 $CD_1=\sqrt{3}$, 求平面 C_1D_1M 和平面 $ABCD$ 所成的角 (锐角) 的余弦值.



18. 乒乓球台面被球网分隔成甲、乙两部分, 如图, 甲上有两个不相交的区域 A, B, 乙被划分为两个不相交的区域 C, D. 某次测试要求队员接到落点在甲上的来球后向乙回球. 规定: 回球一次, 落点在 C 上记 3 分, 在 D 上记 1 分, 其他情况记 0 分. 对落点在 A 上的来球, 队员小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{2}$, 在 D 上的概率为 $\frac{1}{3}$; 对落点在 B 上的来球, 小明回球的落点在 C 上的概率为 $\frac{1}{5}$, 在 D 上的概率为 $\frac{3}{5}$. 假设共有两次来球且落在 A, B 上各一次, 小明的两次回球互不影响. 求:

(1) 小明两次回球的落点中恰有一次的落点在乙上的概率;

(2) 两次回球结束后, 小明得分之和 ξ 的分布列与数学期望.



19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 前 n 项和为 S_n, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = (-1)^{n-1}\frac{4n}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$ (k 为常数, $e = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底数).

(1) 当 $k \leqslant 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在两个极值点, 求 k 的取值范围.

21. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ $(p > 0)$ 的焦点为 F, A 为 C 上异于原点的任意一点, 过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B, 交 x 轴的正半轴于点 D, 且有 $|FA| = |FD|$. 当点 A 的横坐标为 3 时, $\triangle ADF$ 为正三角形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 $l_1 \parallel l$, 且 l_1 和 C 有且只有一个公共点 E,

① 证明直线 AE 过定点, 并求出定点坐标;

② $\triangle ABE$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.