

2001 年普通高等学校春季招生考试 (京蒙皖)
理科数学

一、选择题

1. 集合 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集个数是 ()
 (A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15

2. 函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 对于任意的实数 x, y 都有 ()
 (A) $f(xy) = f(x)f(y)$ (B) $f(xy) = f(x) + f(y)$
 (C) $f(x+y) = f(x)f(y)$ (D) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{2n}}{\binom{n+1}{2n+2}} =$ ()
 (A) 0 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

4. 函数 $y = -\sqrt{1-x}$ ($x \leq 1$) 的反函数是 ()
 (A) $y = x^2 - 1$ ($-1 \leq x \leq 0$) (B) $y = x^2 - 1$ ($0 \leq x \leq 1$)
 (C) $y = 1 - x^2$ ($x \leq 0$) (D) $y = 1 - x^2$ ($0 \leq x \leq 1$)

5. 极坐标系中, 圆 $\rho = 4 \cos \theta + 3 \sin \theta$ 的圆心的坐标是 ()
 (A) $\left(\frac{5}{2}, \arcsin \frac{3}{5}\right)$ (B) $\left(5, \arcsin \frac{4}{5}\right)$ (C) $\left(5, \arcsin \frac{3}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{5}{2}, \arcsin \frac{4}{5}\right)$

6. 设动点 P 在直线 $x = 1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 $Rt\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 ()
 (A) 圆 (B) 两条平行直线
 (C) 抛物线 (D) 双曲线

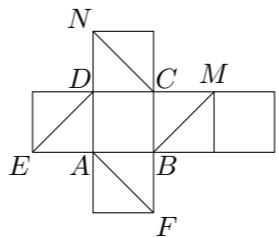
7. 已知 $f(x^6) = \log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 ()
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) 8 (C) 18 (D) $\frac{1}{2}$

8. 若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B - \sin A, \sin B - \cos A)$ 在 ()
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 ()
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

10. 若实数 a, b 满足 $a + b = 2$, 则 $3^a + 3^b$ 的最小值是 ()
 (A) 18 (B) 6 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直.
 以上四个命题中, 正确命题的序号是 ()



18. 已知 $z^7 = 1$ ($z \in \mathbf{C}$ 且 $z \neq 1$).
 (1) 证明 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$;
 (2) 设 z 的辐角为 α , 求 $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha$ 的值.

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S , 那么球体积等于_____.
14. 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 长轴上一个顶点为 A , 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是_____.
15. 已知 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ (α, β, γ 均为锐角), 那么 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 的最大值等于_____.

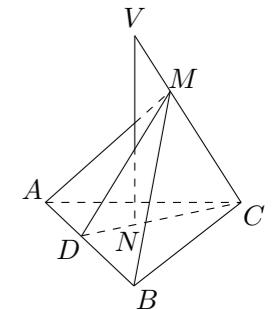
16. 已知 m, n 是直线, α, β, γ 是平面, 给出下列命题:
 ① 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = m, n \perp m$, 则 $n \perp \alpha$ 或 $n \perp \beta$;
 ② 若 $\alpha \parallel \beta, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n$, 则 $m \parallel n$;
 ③ 若 m 不垂直于 α , 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;
 ④ 若 $\alpha \cap \beta = m, n \parallel m$, 且 $n \not\subset \alpha, n \not\subset \beta$, 则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$.

其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 设函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ ($a > b > 0$), 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

19. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB = a, VC$ 与 AB 之间的距离为 h , 点 $M \in VC$.
 (1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M - AB - C$ 的平面角;
 (2) 当 $\angle MDC = \angle CVN$ 时, 证明 $VC \perp$ 平面 AMB ;
 (3) 若 $\angle MDC = \angle CVN = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 求四面体 $MABC$ 的体积.



20. 在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, 使这 $n+2$ 个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, 使这 $n+2$ 个数成等差数列. 记 $A_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$.
- (1) 求数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的通项;
 - (2) 当 $n \geq 7$ 时, 比较 A_n 与 B_n 的大小, 并证明你的结论.
21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x ($0 < x < 1$), 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 = (出厂价 - 投入成本) × 年销售量.
- (1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
 - (2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?
22. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$). 过动点 $M(a, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A, B , $|AB| \leq 2p$.
- (1) 求 a 的取值范围;
 - (2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N , 求 $Rt\triangle NAB$ 面积的最大值.