2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 若集合 $S=\{-1,0,1\}$, 则 （ ）

(A) $\mathrm{i}\in S$ (B) $\mathrm{i}^2\in S$ (C) $\mathrm{i}^3\in S$ (D) $\dfrac{2}{\mathrm{i}}\in S$

2. 若 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=2$”是“$(a-1)(a-2)=0$”的 （ ）

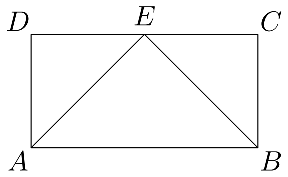
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 若 $\tan\alpha=3$, 则 $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 的值等于 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6

4. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 的中点, 若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q, 则点 Q 取自 $\triangle ABE$ 内部的概率等于 （ ）



(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{3}$

5. $\int_0^1(\mathrm{e}^x+2x)\,\mathrm{d}x$ 等于 （ ）

(A) 1 (B) $\mathrm{e}-1$ (C) e (D) $\mathrm{e}+1$

6. $(1+2x)^5$ 的展开式中, x^2 的系数等于 （ ）

(A) 80 (B) 40 (C) 20 (D) 10

7. 设圆锥曲线 $\varGamma$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2. 若曲线 $\varGamma$ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$, 则曲线 $\varGamma$ 的离心率等于 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ 或 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ 或 2 (D) $\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

8. 已知 O 是坐标原点, 点 $A(-1,1)$, 若点 $M(x,y)$ 为平面区域 $\begin{cases}x+y\geqslant 2\\x\leqslant 1\\y\leqslant 2\end{cases}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的取值范围是 （ ）

(A) $[-1,0]$ (B) $[0,1]$ (C) $[0,2]$ (D) $[-1,2]$

9. 对于函数 $f(x)=a\sin x+bx+c$ (其中 $a,b\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{Z}$), 选取 a, b, c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$, 所得出的正确结果一定不可能是 （ ）

(A) 4 和 6 (B) 3 和 1 (C) 2 和 4 (D) 1 和 2

10. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+x$, 对于曲线 $y=f(x)$ 上横坐标成等差数列的三个点 A, B, C, 给出以下判断:

① $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形

② $\triangle ABC$ 可能是直角三角形

③ $\triangle ABC$ 可能是等腰三角形

④ $\triangle ABC$ 不可能是等腰三角形

其中, 正确的判断是 （ ）

(A) ①③ (B) ①④ (C) ②③ (D) ②④

二、填空题

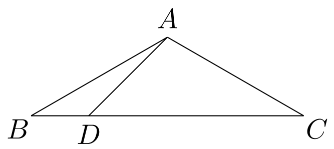
11. 运行如图所示的程序, 输出的结果是______.

```
a = 1
b = 2
a = a + b
PRINT  a
END
```

12. 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $PA=3$, 底面 ABC 是边长为 2 的正三角形, 则三棱锥 $P-ABC$ 的体积等于______.

13. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 个球, 其中红色球 3 个, 黄色球 2 个. 若从中随机取出 2 个球, 则所取出的 2 个球颜色不同的概率等于______.

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 点 D 在 BC 边上, $\angle ADC=45^\circ$, 则 AD 的长度等于______.



15. 设 V 是全体平面向量构成的集合, 若映射 f: $V\to\mathbf{R}$ 满足: 对任意向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\in V$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)\in V$, 以及任意 $\lambda\in\mathbf{R}$, 均有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{b})$, 则称映射 f 具有性质 P. 现给出如下映射:

① f_1: $V\to\mathbf{R}$, $f_1(\boldsymbol{m})=x-y$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

② f_2: $V\to\mathbf{R}$, $f_2(\boldsymbol{m})=x^2+y$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$;

③ f_3: $V\to\mathbf{R}$, $f_3(\boldsymbol{m})=x+y+1$, $\boldsymbol{m}=(x,y)\in V$.

其中, 具有性质 P 的映射的序号为______. (写出所有具有性质 P 的映射的序号)

三、解答题

16. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$, 前 3 项和 $S_3=\dfrac{13}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$ $(A>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 处取得最大值, 且最大值为 a_3, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

17. 已知直线 $l:y=x+m$, $m\in\mathbf{R}$.

(1) 若以点 $M(2,0)$ 为圆心的圆与直线 l 相切于点 P, 且点 P 在 y 轴上, 求该圆的方程;

(2) 若直线 l 关于 x 轴对称的直线为 l', 问直线 l' 与抛物线 $C:x^2=4y$ 是否相切? 说明理由.

18. 某商场销售某种商品的经验表明, 该商品每日的销售量 y (单位: 千克) 与销售价格 x (单位: 元/千克) 满足关系式 $y=\dfrac{a}{x-3}+10(x-6)^2$, 其中 $3<x<6$, a 为常数. 已知销售价格为 5 元/千克时, 每日可售出该商品 11 千克.

(1) 求 a 的值;

(2) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

19. 某产品按行业生产标准分成 8 个等级, 等级系数 X 依次为 $1, 2, \cdots, 8$, 其中 $X \geqslant 5$ 为标准 A, $X \geqslant 3$ 为标准 B, 已知甲厂执行标准 A 生产该产品, 产品的零售价为 6 元/件; 乙厂执行标准 B 生产该产品, 产品的零售价为 4 元/件, 假定甲、乙两厂的产品都符合相应的执行标准.

(1) 已知甲厂产品的等级系数 X_1 的概率分布列如下表所示:

X_1	5	6	7	8
P	0.4	a	b	0.1

且 X_1 的数学期望 $EX_1 = 6$, 求 a, b 的值;

(2) 为分析乙厂产品的等级系数 X_2, 从该厂生产的产品中随机抽取 30 件, 相应的等级系数组成一个样本, 数据如下:

3	5	3	3	8	5	5	6	3	4
6	3	4	7	5	3	4	8	5	3
8	3	4	3	4	4	7	5	6	7

用这个样本的频率分布估计总体分布, 将频率视为概率, 求等级系数 X_2 的数学期望;

(3) 在 (1)、(2) 的条件下, 若以" 性价比" 为判断标准, 则哪个工厂的产品更具可购买性? 说明理由.

注: ① 产品的"性价比"$=\dfrac{\text{产品的等级系数的数学期望}}{\text{产品的零售价}}$;

② "性价比"大的产品更具可购买性.

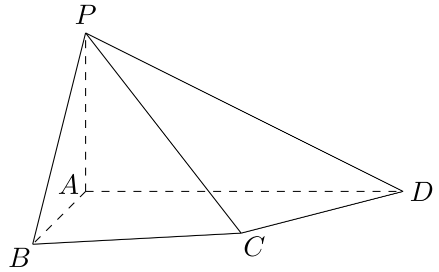
20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $AB + AD = 4$, $CD = \sqrt{2}$, $\angle CDA = 45°$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD;

(2) 设 $AB = AP$.

① 若直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 $30°$, 求线段 AB 的长;

② 在线段 AD 上是否存在一个点 G, 使得点 G 到点 P, B, C, D 的距离都相等? 说明理由.



【B】在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的方程为 $x - y + 4 = 0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数).

(1) 已知在极坐标 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 点 P 的极坐标为 $\left(4, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 判断点 P 与直线 l 的位置关系;

(2) 设点 Q 是曲线 C 上的一个动点, 求它到直线 l 的距离的最小值.

21. 三选二.

【A】设矩阵 $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. (其中 $a > 0, b > 0$)

(1) 若 $a = 2, b = 3$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1};

(2) 若曲线 $C: x^2 + y^2 = 1$ 在矩阵 M 所对应的线性变换作用下得到曲线 $C': \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 求 a, b 的值.

【C】设不等式 $|2x - 1| < 1$ 的解集为 M.

(1) 求集合 M;

(2) 若 $a, b \in M$, 试比较 $ab + 1$ 与 $a + b$ 的大小.