

文科数学

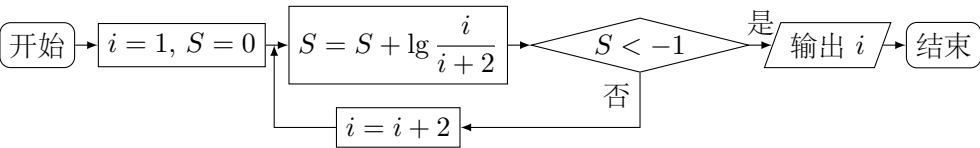
一、选择题

1. 若复数  $z$  满足  $z(1+i) = 2i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$  ( )  
(A) 1 (B) 2 (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$
2. 设全集为  $\mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x | x^2 - 9 < 0\}$ ,  $B = \{x | -1 < x \leq 5\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$  ( )  
(A)  $(-3, 0)$  (B)  $(-3, -1)$  (C)  $(-3, -1]$  (D)  $(-3, 3)$
3. 掷两颗均匀的骰子, 则点数之和为 5 的概率等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{18}$  (B)  $\frac{1}{9}$  (C)  $\frac{1}{6}$  (D)  $\frac{1}{12}$
4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a \cdot 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 若  $f[f(-1)] = 1$ , 则  $a =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2
5. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $3a = 2b$ , 则  $\frac{2\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A}$  的值为 ( )  
(A)  $-\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C) 1 (D)  $\frac{7}{2}$
6. 下列叙述中正确的是 ( )  
(A) 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 则“ $ax^2 + bx + c \geq 0$ ”的充分条件是“ $b^2 - 4ac \leq 0$ ”  
(B) 若  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab^2 > cb^2$ ”的充要条件是“ $a > c$ ”  
(C) 命题“对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $x^2 \geq 0$ ”的否定是“存在  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $x^2 \geq 0$ ”  
(D)  $l$  是一条直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 若  $l \perp \alpha, l \perp \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
7. 某人研究中学生的性别与成绩、视力、智商、阅读量这 4 个变量之间的关系, 随机抽查了 52 名中学生, 得到统计数据如表 1 至表 4, 则与性别有关的可能性最大的变量是 ( )

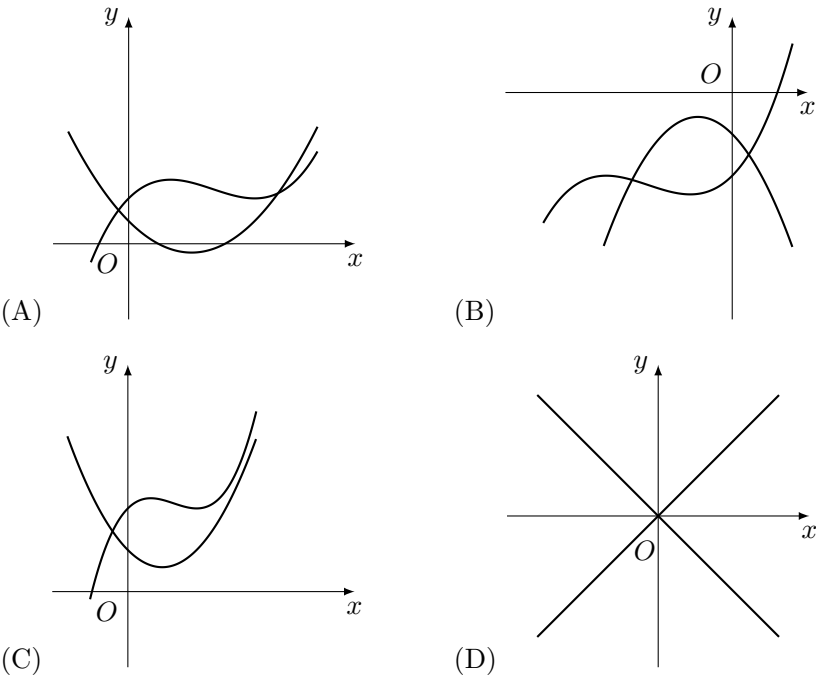
| 成绩<br>性别 | 不及格 | 及格 | 总计 | 视力<br>性别 | 好  | 差  | 总计 |
|----------|-----|----|----|----------|----|----|----|
| 男        | 6   | 14 | 20 | 男        | 4  | 16 | 20 |
| 女        | 10  | 22 | 32 | 女        | 12 | 20 | 32 |
| 总计       | 16  | 36 | 52 | 总计       | 16 | 36 | 52 |

| 智商<br>性别 | 偏高 | 正常 | 总计 | 阅读量<br>性别 | 丰富 | 不丰富 | 总计 |
|----------|----|----|----|-----------|----|-----|----|
| 男        | 8  | 12 | 20 | 男         | 14 | 6   | 20 |
| 女        | 8  | 24 | 32 | 女         | 2  | 30  | 32 |
| 总计       | 16 | 36 | 52 | 总计        | 16 | 36  | 52 |

- (A) 成绩 (B) 视力 (C) 智商 (D) 阅读量
8. 阅读如下程序框图, 运行相应的程序, 则程序运行后输出的结果为 ( )



- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11
9. 过双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的右顶点作  $x$  轴的垂线与  $C$  的一条渐近线相交于  $A$ . 若以  $C$  的右焦点为圆心、半径为 4 的圆经过  $A, O$  两点 ( $O$  为坐标原点), 则双曲线  $C$  的方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$
10. 在同一直角坐标系中, 函数  $y = ax^2 - x + \frac{a}{2}$  与  $y = a^2x^3 - 2ax^2 + x + a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 的图象不可能的是 ( )



二、填空题

11. 若曲线  $y = x \ln x$  上点  $P$  处的切线平行于直线  $2x - y + 1 = 0$ , 则点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.
12. 已知单位向量  $\mathbf{e}_1$  与  $\mathbf{e}_2$  的夹角为  $\alpha$ , 且  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , 向量  $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ , 则  $|\mathbf{a}| =$ \_\_\_\_\_.
13. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 7$ , 公差为  $d$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 当且仅当  $n = 8$  时  $S_n$  取最大值, 则  $d$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
14. 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作  $x$  轴的垂线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $F_1B$  与  $y$  轴交于点  $D$ , 若  $AD \perp F_1B$ , 则椭圆  $C$  的离心率等于\_\_\_\_\_.
15. 已知  $x, y \in \mathbf{R}$ , 若  $|x| + |y| + |x-1| + |y-1| \leq 2$ , 则  $x+y$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

三、解答题

16. 已知函数  $f(x) = (a + 2\cos^2 x) \cos(2x + \theta)$  为奇函数, 且  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 其中  $a \in \mathbf{R}, \theta \in (0, \pi)$ .  
(1) 求  $a, \theta$  的值;  
(2) 若  $f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = -\frac{2}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 求  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$  的值.
17. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}, n \in \mathbf{N}^*$ .  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 证明: 对任意  $n > 1$ , 都有  $m \in \mathbf{N}^*$ , 使得  $a_1, a_n, a_m$  成等比数列.

18. 已知函数  $f(x) = (4x^2 + 4ax + a^2)\sqrt{x}$ , 其中  $a < 0$ .

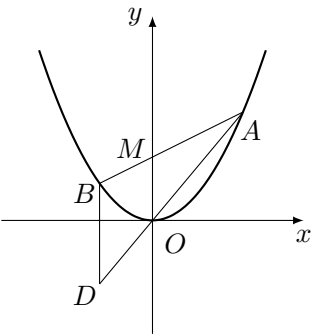
(1) 当  $a = -4$  时, 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 若  $f(x)$  在区间  $[1, 4]$  上的最小值为 8, 求  $a$  的值.

20. 如图, 已知抛物线  $C: x^2 = 4y$ , 过点  $M(0, 2)$  任作一直线与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 过点  $B$  作  $y$  轴的平行线与直线  $AO$  相交于点  $D$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 证明: 动点  $D$  在定直线上;

(2) 作  $C$  的任意一条切线  $l$  (不含  $x$  轴) 与直线  $y = 2$  相交于点  $N_1$ , 与第一问中的定直线相交于点  $N_2$ , 证明:  $|MN_2|^2 - |MN_1|^2$  为定值, 并求此定值.



21. 将连续正整数  $1, 2, \dots, n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 从小到大排列构成一个数  $123 \cdots n$ ,  $F(n)$  为这个数的位数 (如  $n = 12$  时, 此数为  $123456789101112$ , 共有 15 个数字,  $F(12) = 15$ ), 现从这个数中随机取一个数字,  $p(n)$  为恰好取到 0 的概率.

(1) 求  $p(100)$ ;

(2) 当  $n \leq 2014$  时, 求  $F(n)$  的表达式;

(3) 令  $g(n)$  为这个数中数字 0 的个数,  $f(n)$  为这个数中数字 9 的个数,  $h(n) = f(n) - g(n)$ ,  $S = \{n \mid h(n) = 1, n \leq 100, n \in \mathbf{N}^*\}$ , 求当  $n \in S$  时  $p(n)$  的最大值.

19. 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 \perp BC$ ,  $A_1B \perp BB_1$ .

(1) 求证:  $A_1C \perp CC_1$ ;

(2) 若  $AB = 2$ ,  $AC = \sqrt{3}$ ,  $BC = \sqrt{7}$ , 问  $AA_1$  为何值时, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  体积最大, 并求此最大值.

