

数学试卷

一、单选题

1. 设集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 4\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 (A) $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$ (B) $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$
 (C) $\{x \mid 1 \leq x < 4\}$ (D) $\{x \mid 1 < x < 4\}$
2. $\frac{2-i}{1+2i} =$ ()
 (A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i
3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有()
 (A) 120 种 (B) 90 种 (C) 60 种 (D) 30 种
4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 40° , 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 ()



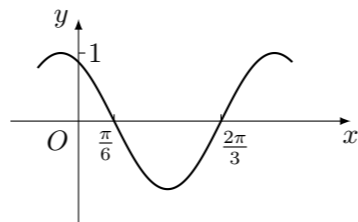
- (A) 20° (B) 40° (C) 50° (D) 90°
5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ()
 (A) 62% (B) 56% (C) 46% (D) 42%
 6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型: $I(t) = e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0 , T 近似满足 $R_0 = 1 + rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0 = 3.28$, $T = 6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 ($\ln 2 \approx 0.69$) ()
 (A) 1.2 天 (B) 1.8 天 (C) 2.5 天 (D) 3.5 天
 7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()
 (A) $(-2, 6)$ (B) $(-6, 2)$ (C) $(-2, 4)$ (D) $(-4, 6)$

8. 若定义在 \mathbf{R} 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()
 (A) $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ (B) $[-3, -1] \cup [0, 1]$
 (C) $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ (D) $[-1, 0] \cup [1, 3]$

二、多选题

9. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ ()
 (A) 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
 (B) 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 \sqrt{n}
 (C) 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
 (D) 若 $m = 0, n > 0$, 则 C 是两条直线

10. 下图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x + \varphi) =$ ()



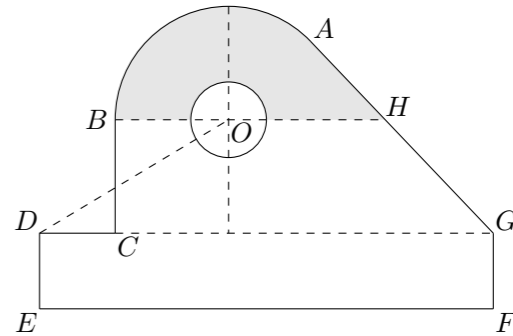
- (A) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (B) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$
 (C) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ (D) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$
11. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 ()
 (A) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ (B) $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
 (C) $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ (D) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 1, 2, \dots , n , 且 $P(X = i) = p_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, 定义 X 的信息熵 $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$. ()
 (A) 若 $n = 1$, 则 $H(X) = 0$
 (B) 若 $n = 2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大
 (C) 若 $p_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大
 (D) 若 $n = 2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 1, 2, \dots , m , 且 $P(Y = j) = p_j + p_{2m+1-j}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), 则 $H(X) \leq H(Y)$

三、填空题

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.
14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF = 12$ cm, $DE = 2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为_____cm².



16. 已知直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2, $\angle BAD = 60^\circ$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为_____.

四、解答题

17. 在① $ac = \sqrt{3}$, ② $c \sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.
 问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$?
18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 = 8$.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0, m]$ ($m \in \mathbf{N}^*$) 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100} .

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO₂ 浓度 (单位: $\mu\text{g}/\text{m}^3$), 得下表:

SO ₂ PM2.5	[0, 50]	(50, 150]	(150, 475]
[0, 35]	32	18	4
(35, 75]	6	8	12
(75, 115]	3	7	10

- (1) 估计事件“该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO₂ 浓度不超过 150”的概率;
- (2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

SO ₂ PM2.5	[0, 150]	(150, 475]
[0, 75]		
(75, 115]		

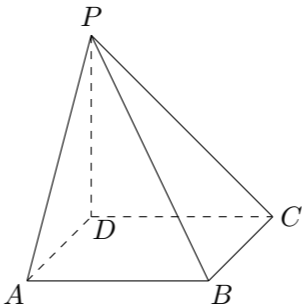
- (3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO₂ 浓度有关?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l .

- (1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;
- (2) 已知 $PD = AD = 1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2, 1)$.

- (1) 求 C 的方程;
- (2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM \perp AN$, $AD \perp MN$, D 垂足. 证明: 存在定点 Q , 使得 $|DQ|$ 为定值.

21. 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

- (1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;
- (2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.