2020 年普通高等学校招生考试（北京卷）

数学试卷

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x\mid 0<x<3\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{-1,0,1\}$ (B) $\{0,1\}$ (C) $\{-1,1,2\}$ (D) $\{1,2\}$

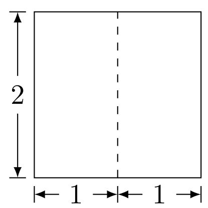
2. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(1,2)$, 则 $\mathrm{i}\cdot z=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $-2+\mathrm{i}$ (C) $1-2\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

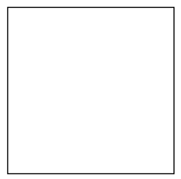
3. 在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 （ ）

(A) -5 (B) 5 (C) -10 (D) 10

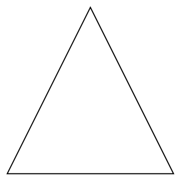
4. 某三棱柱的底面为正三角形, 其三视图如图所示, 该三棱柱的表面积为（ ）



正 (主) 视图



侧 (左) 视图



俯视图

(A) $6+\sqrt{3}$ (B) $6+2\sqrt{3}$ (C) $12+\sqrt{3}$ (D) $12+2\sqrt{3}$

5. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3,4)$, 则其圆心到原点的距离的最小值为（ ）

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

6. 已知函数 $f(x)=2^x-x-1$, 则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 （ ）

(A) $(-1,1)$ (B) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(C) $(0,1)$ (D) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

7. 设抛物线的顶点为 O, 焦点为 F, 准线为 l. P 是抛物线上异于 O 的一点, 过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q, 则线段 FQ 的垂直平分线 （ ）

(A) 经过点 O (B) 经过点 P

(C) 平行于直线 OP (D) 垂直于直线 OP

8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-9$, $a_3=-1$. 记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$, 则数列 $\{T_n\}$ （ ）

(A) 有最大项, 有最小项 (B) 有最大项, 无最小项

(C) 无最大项, 有最小项 (D) 无最大项, 无最小项

9. 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, 则“存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

10. 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日 (π Day). 历史上, 求圆周率 π 的方法有多种, 与中国传统数学中的“割圆术”相似. 数学家阿尔 · 卡西的方法是: 当正整数 n 充分大时, 计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形 (各边均与圆相切的正 $6n$ 边形) 的周长, 将它们的算术平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔 · 卡西的方法, π 的近似值的表达式是（ ）

(A) $3n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$ (B) $6n\left(\sin\dfrac{30^\circ}{n}+\tan\dfrac{30^\circ}{n}\right)$

(C) $3n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$ (D) $6n\left(\sin\dfrac{60^\circ}{n}+\tan\dfrac{60^\circ}{n}\right)$

二、填空题

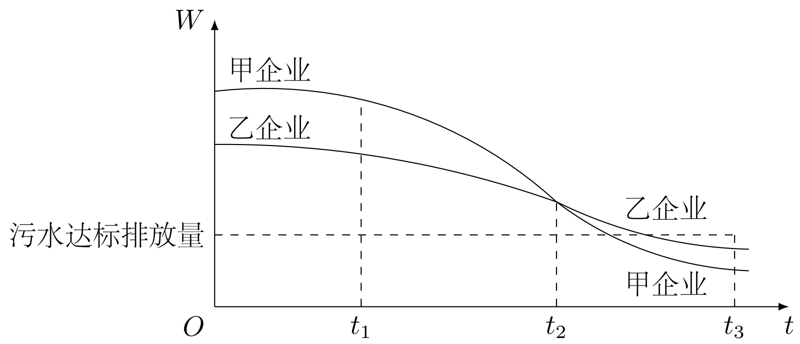
11. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是______.

12. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=1$, 则 C 的右焦点的坐标为______; C 的焦点到其渐近线的距离是______.

13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, 则 $\left|\overrightarrow{PD}\right|=$______; $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$______.

14. 若函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)+\cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为______.

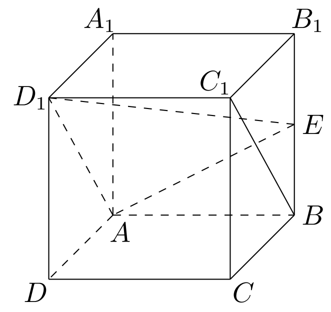
15. 为满足人民对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$, 用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱, 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.



给出下列四个结论:
① 在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
② 在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
③ 在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都已达标;
④ 甲企业在 $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强.
其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BB_1 的中点.
(1) 求证: $BC_1 /\!/$ 平面 AD_1E;
(2) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $a+b=11$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:
(1) a 的值;
(2) $\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.
条件①: $c=7$, $\cos A=-\dfrac{1}{7}$;
条件②: $\cos A=\dfrac{1}{8}$, $\cos B=\dfrac{9}{16}$.

18. 某校为举办甲、乙两项不同活动, 分别设计了相应的活动方案: 方案一、方案二. 为了解该校学生对活动方案是否支持, 对学生进行简单随机抽样, 获得数据如下表:

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

(1) 分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率;

(2) 从该校全体男生中随机抽取 2 人, 全体女生中随机抽取 1 人, 估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率;

(3) 将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0, 假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生, 除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1, 试比较 p_0 与 p_1 的大小. (结论不要求证明)

19. 已知函数 $f(x)=12-x^2$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$, 且 $a=2b$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N, 直线 MA, NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P, Q. 求 $\dfrac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列. 给出两个性质:

① 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i, a_j $(i>j)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m, 使 $\dfrac{a_i^2}{a_j}=a_m$;

② 对于 $\{a_n\}$ 中任意项 a_n $(n\geqslant 3)$, 在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 a_k, a_l $(k>l)$, 使得 $a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}$.

(1) 若 $a_n=n$ $(n=1, 2, \cdots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①, 说明理由;

(2) 若 $a_n=2^{n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$, 判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②, 说明理由;

(3) 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且同时满足性质①和性质②, 证明: $\{a_n\}$ 为等比数列.