

2009 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的位置关系是 ()
(A) 相切 (B) 相交但直线不过圆心
(C) 直线过圆心 (D) 相离
2. 已知复数 z 的实部为 -1 , 虚部为 2 , 则 $\frac{5i}{z} =$ ()
(A) $2 - i$ (B) $2 + i$ (C) $-2 - i$ (D) $-2 + i$
3. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数是 ()
(A) 16 (B) 70 (C) 560 (D) 1120
4. 已知 $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 6, \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 2$, 则向量 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 的夹角是 ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
5. 不等式 $|x + 3| - |x - 1| \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()
(A) $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$
(C) $[1, 2]$ (D) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
6. 锅中煮有芝麻馅汤圆 6 个, 花生馅汤圆 5 个, 豆沙馅汤圆 4 个, 这三种汤圆的外部特征完全相同. 从中任意舀取 4 个汤圆, 则每种汤圆都至少取到 1 个的概率为 ()
(A) $\frac{8}{91}$ (B) $\frac{25}{91}$ (C) $\frac{48}{91}$ (D) $\frac{60}{91}$
7. 设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C , 向量 $\boldsymbol{m} = (\sqrt{3} \sin A, \sin B)$, $\boldsymbol{n} = (\cos B, \sqrt{3} \cos A)$, 若 $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 1 + \cos(A + B)$, 则 $C =$ ()
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$
8. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - ax - b\right) = 2$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a - b$ 的值为 ()
(A) -6 (B) -2 (C) 2 (D) 6
9. 已知二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 50° , P 为空间中任意一点, 则过点 P 且与平面 α 和平面 β 所成的角都是 25° 的直线的条数为 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
10. 已知以 $T = 4$ 为周期的函数 $f(x) = \begin{cases} m\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1, 1] \\ 1 - |x - 2|, & x \in (1, 3] \end{cases}$, 其中 $m > 0$. 若方程 $3f(x) = x$ 恰有 5 个实数解, 则 m 的取值范围为 ()
(A) $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{7}\right)$ (C) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{4}{3}, \sqrt{7}\right)$

二、填空题

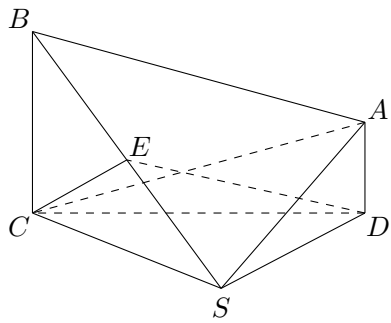
11. 若 $A = \{x \in \mathbf{R} | |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} | 2^x > 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
12. 若 $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + a$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.
13. 将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去当村官, 每个乡镇至少一名, 则不同的分配方案有_____种. (用数字作答)
14. 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, b_n = \left|\frac{a_n + 2}{a_n - 1}\right|, n \in \mathbf{N}^*$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项 $b_n =$ _____.
15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 若双曲线上存在一点 P 使 $\frac{\sin \angle PF_1 F_2}{\sin \angle PF_2 F_1} = \frac{a}{c}$, 则该双曲线的离心率的取值范围为_____.

三、解答题

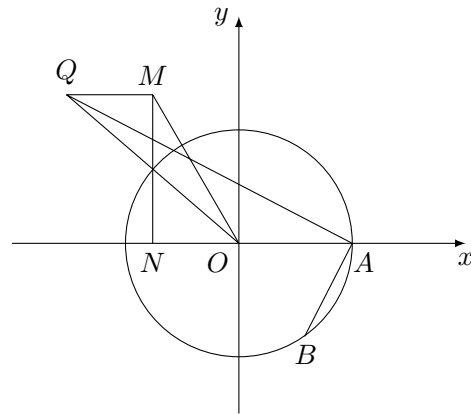
16. 设函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2\frac{\pi}{8}x + 1$.
(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 若函数 $y = g(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 求当 $x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ 时 $y = g(x)$ 的最大值.

17. 某单位为绿化环境, 移栽了甲、乙两种大树各 2 株. 设甲、乙两种大树移栽的成活率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$, 且各株大树是否成活互不影响. 求移栽的 4 株大树中:
(1) 两种大树各成活 1 株的概率;
(2) 成活的株数 ξ 的分布列与期望.
18. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + k (k > 0)$ 在 $x = 0$ 处取得极值, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线垂直于直线 $x + 2y + 1 = 0$.
(1) 求 a, b 的值;
(2) 若函数 $g(x) = \frac{e^x}{f(x)}$, 讨论 $g(x)$ 的单调性.

19. 如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$ 且 $AD \perp CD$; 平面 $CSD \perp$ 平面 $ABCD$, $CS \perp DS$, $CS = 2AD = 2$, E 为 BS 的中点, $CE = \sqrt{2}$, $AS = \sqrt{3}$. 求:
- (1) 点 A 到平面 BCS 的距离;
 - (2) 二面角 $E-CD-A$ 的大小.



20. 已知以原点 O 为中心的椭圆的一条准线方程为 $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, M 是椭圆上的动点.
- (1) 若点 C, D 的坐标分别是 $(0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$, 求 $|MC| \cdot |MD|$ 的最大值;
 - (2) 如图, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, B 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点, N 是点 M 在 x 轴上的射影, 点 Q 满足条件: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. 求线段 QB 的中点 P 的轨迹方程.



21. 设 m 个不全相等的正数 a_1, a_2, \dots, a_m ($m \geq 7$) 依次围成一个圆圈.
- (1) 若 $m = 2009$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_{1005}$ 是公差为 d 的等差数列, 而 $a_1, a_{2009}, a_{2008}, \dots, a_{1006}$ 是公比为 q 的等比数列; 数列 a_1, a_2, \dots, a_m 的前 n 项和 S_n ($n \leq m$) 满足: $S_3 = 15$, $S_{2009} = S_{2007} + 12a_1$, 求通项 a_n ($n \leq m$);
 - (2) 若每个数 a_n ($n \leq m$) 是其左右相邻两数平方的等比中项, 求证: $a_1 + \dots + a_6 + a_7^2 + \dots + a_m^2 > ma_1a_2 \dots a_m$.