

2013 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

文科数学

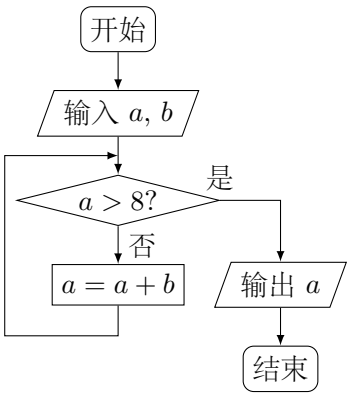
一、选择题

1. 复数  $z = \text{i} \cdot (1 + \text{i})$  ( $\text{i}$  为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ( )  
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. “ $1 < x < 2$ ”是“ $x < 2$ ”成立的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品, 数量分别为 120 件, 80 件, 60 件. 为了解它们的产品质量是否存在显著差异, 用分层抽样方法抽取了一个容量为  $n$  的样本进行调查, 其中从丙车间的产品中抽取了 3 件, 则  $n =$  ( )  
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13
4. 已知  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数, 且  $f(-1)+g(1) = 2$ ,  $f(1)+g(-1) = 4$ , 则  $g(1)$  等于 ( )  
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
5. 在锐角  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B$  所对的边长分别为  $a, b$ . 若  $2a \sin B = \sqrt{3}b$ , 则角  $A$  等于 ( )  
(A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{4}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D)  $\frac{\pi}{12}$
6. 函数  $f(x) = \ln x$  的图象与函数  $g(x) = x^2 - 4x + 4$  的图象的交点个数为 ( )  
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
7. 已知正方体的棱长为 1, 其俯视图是一个面积为 1 的正方形, 侧视图是一个面积为  $\sqrt{2}$  的矩形, 则该正方体的正视图的面积等于 ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B) 1 (C)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$  (D)  $\sqrt{2}$
8. 已知  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$  是单位向量,  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ . 若向量  $\boldsymbol{c}$  满足  $|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = 1$ , 则  $|\boldsymbol{c}|$  的最大值为 ( )  
(A)  $\sqrt{2} - 1$  (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{2} + 1$  (D)  $\sqrt{2} + 2$
9. 已知事件“在矩形  $ABCD$  的边  $CD$  上随机取一点  $P$ , 使  $\triangle APB$  的最大边是  $AB$ ”发生的概率为  $\frac{1}{2}$ , 则  $\frac{AD}{AB} =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (D)  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

二、填空题

10. 已知集合  $U = \{2, 3, 6, 8\}$ ,  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{2, 6, 8\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B =$ \_\_\_\_\_.

11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若直线  $l_1: \begin{cases} x = 2s + 1 \\ y = s \end{cases}$  ( $s$  为参数) 和直线  $l_2: \begin{cases} x = at \\ y = 2t - 1 \end{cases}$  ( $t$  为参数) 平行, 则常数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
12. 执行如图所示的程序框图, 如果输入  $a = 1, b = 2$ , 则输出的  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

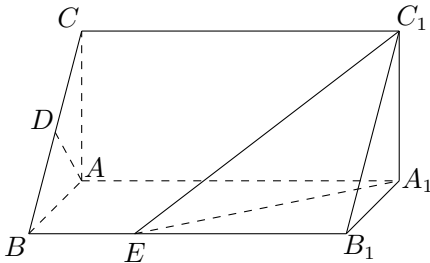


13. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ , 则  $x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 设  $F_1, F_2$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的两个焦点. 若在  $C$  上存在一点  $P$ , 使  $PF_1 \perp PF_2$ , 且  $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
15. 对于  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$  的子集  $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ , 定义  $X$  的“特征数列”为  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ , 其中  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$ , 其余项均为 0, 例如: 子集  $\{a_2, a_3\}$  的“特征数列”为 0, 1, 1, 0, 0,  $\dots, 0$ .  
(1) 子集  $\{a_1, a_3, a_5\}$  的“特征数列”的前 3 项和等于\_\_\_\_\_.  
(2) 若  $E$  的子集  $P$  的“特征数列” $p_1, p_2, \dots, p_{100}$  满足  $p_1 = 1, p_i + p_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq 99$ ;  $E$  的子集  $Q$  的“特征数列” $q_1, q_2, \dots, q_{100}$  满足  $q_1 = 1, q_j + q_{j+1} + q_{j+2} = 1, 1 \leq j \leq 98$ , 则  $P \cap Q$  的元素个数为\_\_\_\_\_.

三、解答题

16. 已知函数  $f(x) = \cos x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .  
(1) 求  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  的值;  
(2) 求使  $f(x) < \frac{1}{4}$  成立的  $x$  的取值集合.

17. 如图, 在直棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = \sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 3$ ,  $D$  是  $BC$  的中点, 点  $E$  在棱  $BB_1$  上运动.  
(1) 证明:  $AD \perp C_1E$ ;  
(2) 当异面直线  $AC, C_1E$  所成的角为  $60^\circ$  时, 求三棱锥  $C_1 - A_1B_1E$  的体积.



18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年的种植经验, 一株该种作物的年收获量  $Y$  (单位: kg) 与它的“相近”作物株数  $X$  之间的关系如下表所示:

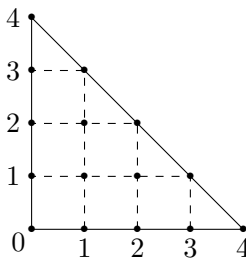
$X$	1	2	3	4
$Y$	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

- (1) 完成下表, 并求所种作物的平均年收获量;

$Y$	51	48	45	42
频数		4		

- (2) 在所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量至少为 48 kg 的概率.



19. 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_1 \neq 0$ ,  $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .  
(1) 求  $a_1, a_2$ , 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 求数列  $\{na_n\}$  的前  $n$  项和.

20. 已知  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$  的左、右焦点,  $F_1, F_2$  关于直线  $x + y - 2 = 0$  的对称点是圆  $C$  的一条直径的两个端点.  
(1) 求圆  $C$  的方程;  
(2) 设过点  $F_2$  的直线  $l$  被椭圆  $E$  和圆  $C$  所截得的弦长分别为  $a, b$ . 当  $ab$  最大时, 求直线  $l$  的方程.

21. 已知函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}e^x$ .  
(1) 求  $f(x)$  的单调区间;  
(2) 证明: 当  $f(x_1) = f(x_2)$  ( $x_1 \neq x_2$ ) 时,  $x_1 + x_2 < 0$ .