2006 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$, 集合 $B=\{3,m^2\}$, 若 $B\subseteq A$, 则实数 $m=$______.

2. 已知圆 $x^2-4x-4+y^2=0$ 的圆心是点 P, 则点 P 到直线 $x-y-1=0$ 的距离是______.

3. 若函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的反函数的图象过点 $(2,-1)$, 则 $a=$______.

4. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_n^3}{n^3+1}=$______.

5. 若复数 z 同时满足 $z-\overline{z}=2\mathrm{i}$, $\overline{z}=\mathrm{i}z$ (i 为虚数单位), 则 $z=$______.

6. 如果 $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$, 且 α 是第四象限的角, 那么 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$______.

7. 已知椭圆中心在原点, 一个焦点为 $F(-2\sqrt{3},0)$, 且长轴长是短轴长的 2 倍, 则该椭圆的标准方程是______.

8. 在极坐标系中, O 是极点, 设点 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(5,-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. 则 $\triangle OAB$ 的面积是______.

9. 两部不同的长篇小说各由第一、二、三、四卷组成, 每卷 1 本, 共 8 本. 将它们任意地排成一排, 左边 4 本恰好都属于同一部小说的概率是______. (结果用分数表示)

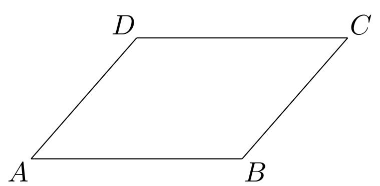
10. 如果一条直线与一个平面垂直, 那么, 称此直线与平面构成一个“正交线面对”. 在一个正方体中, 由两个顶点确定的直线与含有四个顶点的平面构成的“正交线面对”的个数是______.

11. 若曲线 $y^2=|x|+1$ 与直线 $y=kx+b$ 没有公共点, 则 k, b 分别应满足的条件是______.

12. 三个同学对问题”关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在 $[1,12]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围”提出各自的解题思路.
甲说: “只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”.
乙说: “把不等式变形为左边含变量 x 的函数, 右边仅含常数, 求函数的最值”.
丙说: “把不等式两边看成关于 x 的函数, 作出函数图象”.
参考上述解题思路, 你认为他们所讨论的问题的正确结论, 即 a 的取值范围是______.

二、选择题

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 下列结论中错误的是 ( )

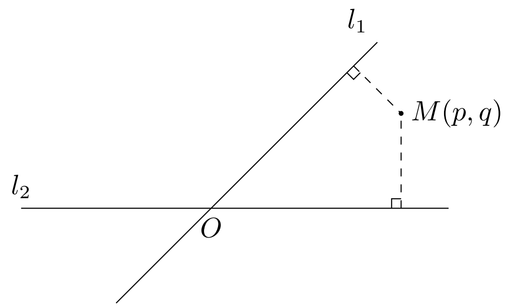


(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$
(C) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ (D) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

14. 若空间中有四个点, 则“这四个点中有三点在同一条直线上”是“这四个点在同一个平面上”的 ( )
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

15. 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M, 则对任意实常数 k, 总有 ( )
(A) $2\in M$, $0\in M$ (B) $2\notin M$, $0\notin M$
(C) $2\in M$, $0\notin M$ (D) $2\notin M$, $0\in M$

16. 如图, 平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O, 对于平面上任意一点 M, 若 p, q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离, 则称有序非负实数对 (p,q) 是点 M 的“距离坐标”. 已知常数 $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, 给出下列命题:
① 若 $p=q=0$, 则“距离坐标”为 $(0,0)$ 的点有且仅有 1 个;
② 若 $pq=0$, 且 $p+q\neq 0$, 则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 2 个;
③ 若 $pq\neq 0$, 则“距离坐标”为 (p,q) 的点有且仅有 4 个.
上述命题中, 正确命题的个数是 ( )

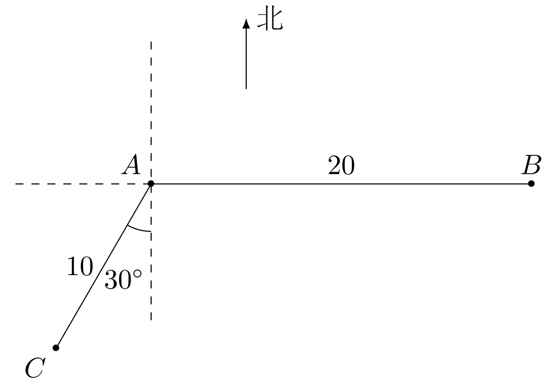


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

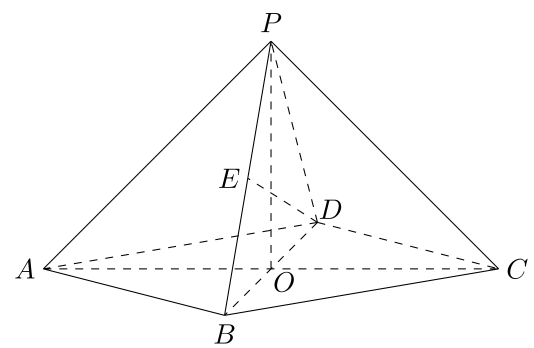
三、解答题

17. 求函数 $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域和最小正周期.

18. 如图, 当甲船位于 A 处时获悉, 在其正东方向相距 20 海里的 B 处有一艘渔船遇险等待营救. 甲船立即前往救援, 同时把消息告知在甲船的南偏西 $30°$, 相距 10 海里 C 处的乙船, 试问乙船应朝北偏东多少度的方向沿直线前往 B 处救援? (角度精确到 $1°$)



19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 2 的菱形. $\angle DAB=60°$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $PO\perp$ 平面 $ABCD$, PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $60°$.
(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积;
(2) 若 E 是 PB 的中点, 求异面直线 DE 与 PA 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A, B 两点.

(1) 求证: "如果直线 l 过点 $T(3,0)$, 那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题;

(2) 写出 (1) 中命题的逆命题, 判断它是真命题还是假命题, 并说明理由.

21. 已知有穷数列 $\{a_n\}$ 共有 $2k$ 项 (整数 $k\geqslant 2$), 首项 $a_1=2$. 设该数列的前 n 项和为 S_n, 且 $a_{n+1}=(a-1)S_n+2$ ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k-1$), 其中常数 $a>1$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $a=2^{\frac{2}{2k-1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{1}{n}\log_2(a_1a_2\cdots a_n)$ ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 2k$), 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 (2) 中的数列 $\{b_n\}$ 满足不等式 $\left|b_1-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_2-\dfrac{3}{2}\right|+\cdots+\left|b_{2k-1}-\dfrac{3}{2}\right|+\left|b_{2k}-\dfrac{3}{2}\right|\leqslant 4$, 求 k 的值.

22. 已知函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 有如下性质: 如果常数 $a>0$, 那么该函数在 $(0,\sqrt{a}]$ 上是减函数, 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上是增函数.

(1) 如果函数 $y=x+\dfrac{2^b}{x}$ $(x>0)$ 的值域为 $[6,+\infty)$, 求 b 的值;

(2) 研究函数 $y=x^2+\dfrac{c}{x^2}$ (常数 $c>0$) 在定义域内的单调性, 并说明理由;

(3) 对函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 和 $y=x^2+\dfrac{a}{x^2}$ (常数 $a>0$) 作出推广, 使它们都是你所推广的函数的特例. 研究推广后的函数的单调性 (只须写出结论, 不必证明), 并求函数 $F(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\right)^n$ (n 是正整数) 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值. (可利用你的研究结论)