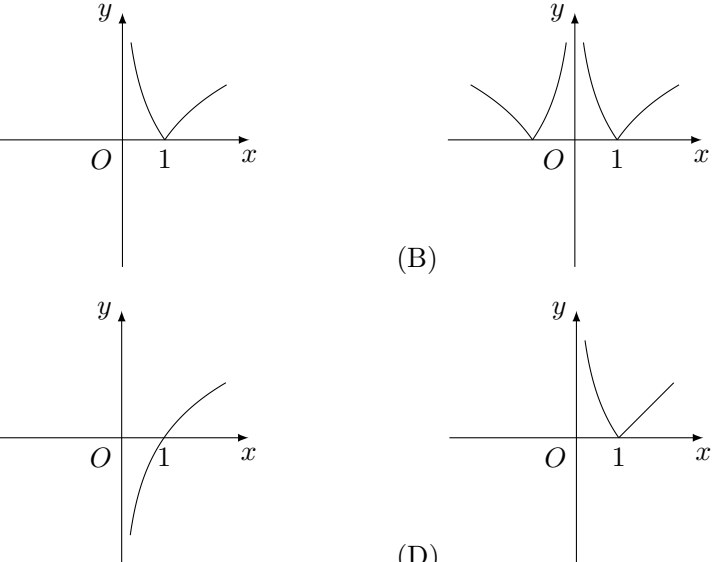


理科数学

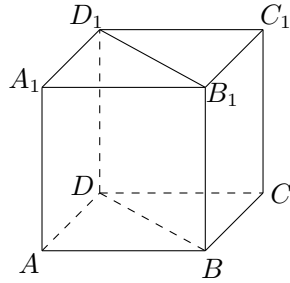
一、选择题

- $i - 2$ 的共轭复数是 ()
(A) $2 + i$ (B) $2 - i$ (C) $-2 + i$ (D) $-2 - i$
- 函数 $y = |\log_2 x|$ 的图象是 ()

- 有如下三个命题:
 ① 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线;
 ② 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线;
 ③ 过平面 α 的一条斜线有一个平面与平面 α 垂直.
 其中正确命题的个数为 ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 如果函数 $f(x) = \sin(\pi x + \theta)$ ($0 < \theta < 2\pi$) 的最小正周期是 T , 且当 $x = 2$ 时取得最大值, 那么 ()
(A) $T = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$ (B) $T = 1, \theta = \pi$
(C) $T = 2, \theta = \pi$ (D) $T = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$
- 设 $abc \neq 0$, “ $ac > 0$ ”是“曲线 $ax^2 + by^2 = c$ 为椭圆”的 ()
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件
- 已知双曲线的两个焦点为 $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$, P 是此双曲线上的一点, 且 $PF_1 \perp PF_2, |PF_1| \cdot |PF_2| = 2$, 则该双曲线的方程是 ()
(A) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (D) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2 \sin A \cos B = \sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 ()
(A) 直角三角形 (B) 等腰三角形
(C) 等腰直角三角形 (D) 正三角形

- 若不等式 $(-1)^n a < 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
(A) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ (C) $\left[-3, \frac{3}{2}\right)$ (D) $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$

二、填空题

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{2n^2 - 3} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知 $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin \theta$ 的值为_____, $\cos 2\theta$ 的值为_____.
- 若圆 $x^2 + y^2 + mx - \frac{1}{4} = 0$ 与直线 $y = -1$ 相切, 且其圆心在 y 轴的左侧, 则 m 的值为_____.
- 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a , 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为_____.

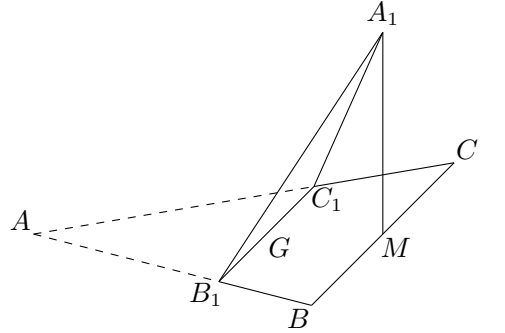


- 从 $-1, 0, 1, 2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的系数, 可组成不同的二次函数共有_____个, 其中不同的偶函数共有_____个. (用数字作答)
- 若关于 x 的不等式 $x^2 - ax - a > 0$ 的解集为 $(-\infty, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____; 若关于 x 的不等式 $x^2 - ax - a \leq -3$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

- 设函数 $f(x) = \lg(2x - 3)$ 的定义域为集合 M , 函数 $g(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N . 求:
(1) 集合 M, N ;
(2) 集合 $M \cap N, M \cup N$.

- 如图, 正三角形 ABC 的边长为 3, 过其中心 G 作 BC 边的平行线, 分别交 AB, AC 于 B_1, C_1 . 将 $\triangle AB_1C_1$ 沿 B_1C_1 折起到 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置, 使点 A_1 在平面 BB_1C_1C 上的射影恰是线段 BC 的中点 M . 求:
(1) 二面角 $A_1 - B_1C_1 - M$ 的大小;
(2) 异面直线 A_1B_1 与 CC_1 所成角的大小. (用反三角函数表示)



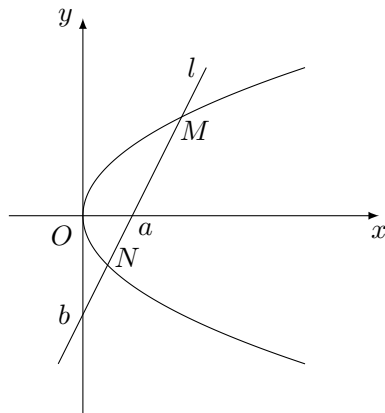
- 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 = 2, a_3 = 18$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1 = 2, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = a_1 + a_2 + a_3 > 20$.
(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式;
(3) 设 $P_n = b_1 + b_4 + b_7 + \dots + b_{3n-2}, Q_n = b_{10} + b_{12} + b_{14} + \dots + b_{2n+8}$, 其中 $n = 1, 2, \dots$, 试比较 P_n 与 Q_n 的大小, 并证明你的结论.

18. 如图, O 为坐标原点, 直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b , 且交抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 于 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 证明: $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{b}$;

(3) 当 $a = 2p$ 时, 求 $\angle MON$ 的大小.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为:

$$y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} \quad (v > 0).$$

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 其中 $a_0 = 0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$, $x_n = \frac{n}{5}$, $y_n = \frac{1}{T}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$, 作函数 $y = f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots, 5$) 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 k_n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;

(3) 证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < x$;

(4) 求由函数 $y = x$ 与 $y = f(x)$ 的图象所围成图形的面积. (用 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 表示)