

2004 年普通高等学校招生考试（辽宁卷）

数学试卷

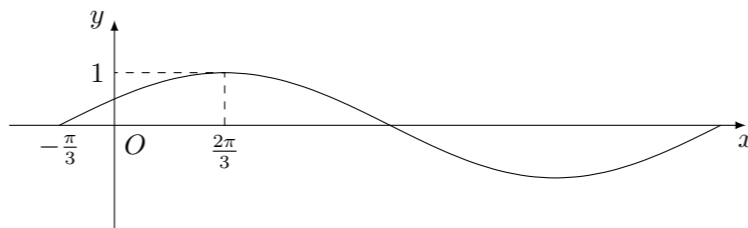
一、选择题

- 若 $\cos \theta > 0$, $\sin 2\theta < 0$, 则角 θ 的终边所在象限是 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 对于 $0 < a < 1$, 给出下列四个不等式: ① $\log_a(1+a) < \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ② $\log_a(1+a) > \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ③ $a^{1+a} < a^{1+\frac{1}{a}}$; ④ $a^{1+a} > a^{1+\frac{1}{a}}$. 其中成立的是 ()
(A) ①与③ (B) ①与④ (C) ②与③ (D) ②与④
- 已知 α 、 β 是不同的两个平面, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, 命题 p : a 与 b 无公共点; 命题 q : $\alpha \parallel \beta$. 则 p 是 q 的 ()
(A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件
- 设复数 z 满足 $\frac{1-z}{1+z} = i$, 则 $|1+z| =$ ()
(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
- 甲、乙两人独立地解同一问题, 甲解决这个问题的概率是 p_1 , 乙解决这个问题的概率是 p_2 , 那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是 ()
(A) p_1p_2 (B) $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$
(C) $1-p_1p_2$ (D) $1-(1-p_1)(1-p_2)$
- 已知点 $A(-2,0)$ 、 $B(3,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2$, 则点 P 的轨迹是 ()
(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线
- 已知函数 $f(x) = \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$, 则下列命题正确的是 ()
(A) $f(x)$ 是周期为 1 的奇函数
(B) $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数
(C) $f(x)$ 是周期为 1 的非奇非偶函数
(D) $f(x)$ 是周期为 2 的非奇非偶函数
- 已知随机变量 ξ 的概率分布如下:

| | | | | | | | | | | |
|-------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|
| ξ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| P | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3^2}$ | $\frac{2}{3^3}$ | $\frac{2}{3^4}$ | $\frac{2}{3^5}$ | $\frac{2}{3^6}$ | $\frac{2}{3^7}$ | $\frac{2}{3^8}$ | $\frac{2}{3^9}$ | m |

- 则 $P(\xi = 10) =$ ()
(A) $\frac{2}{3^9}$ (B) $\frac{2}{3^{10}}$ (C) $\frac{1}{3^9}$ (D) $\frac{1}{3^{10}}$

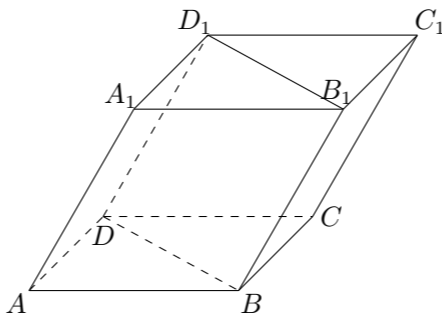
- 已知点 $F_1(-\sqrt{2},0)$ 、 $F_2(\sqrt{2},0)$, 动点 P 满足 $|PF_2| - |PF_1| = 2$. 当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时, 点 P 到坐标原点的距离是 ()
(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2
- 设 A 、 B 、 C 、 D 是球面上的四个点, 且在同一平面内, $AB = BC = CD = DA = 3$, 球心到该平面的距离是球半径的一半, 则球的体积是 ()
(A) $8\sqrt{6}\pi$ (B) $64\sqrt{6}\pi$ (C) $24\sqrt{2}\pi$ (D) $72\sqrt{2}\pi$
- 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 (部分) 如图所示, 则 ω 和 φ 的取值是



- (A) $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$ (B) $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{3}$
(C) $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$ (D) $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$
- 有两排座位, 前排 11 个座位, 后排 12 个座位, 现安排 2 人就座, 规定前排中间的 3 个座位不能坐, 并且这 2 人不左右相邻, 那么不同排法的种数是 ()
(A) 234 (B) 346 (C) 350 (D) 363

二、填空题

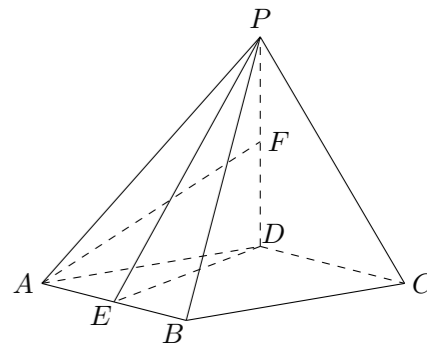
- 若经过点 $P(-1,0)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 相切, 则此直线在 y 轴上的截距是_____.
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi) \cos x}{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}} =$ _____.
- 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱与底面边长均为 $2a$, 且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ$, 则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是_____.



- 口袋内装有 10 个相同的球, 其中 5 个球标有数字 0, 5 个球标有数字 1, 若从袋中摸出 5 个球, 那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是_____. (以数值作答)

三、解答题

- 已知四棱锥 $P - ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = AD$, 点 E 为 AB 中点, 点 F 为 PD 中点.
(1) 证明: 平面 $PED \perp$ 平面 PAB ;
(2) 求二面角 $P - AB - F$ 的平面角的余弦值.



- 设全集 $U = \mathbf{R}$.
(1) 解关于 x 的不等式 $|x - 1| + a - 1 > 0$ ($a \in \mathbf{R}$);
(2) 记 A 为 (1) 中不等式的解集, 集合 $B = \left\{x \mid \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\right\}$, 若 $(\complement_U A) \cap B$ 恰有 3 个元素, 求 a 的取值范围.

19. 设椭圆方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $M(0,1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A 、 B , O 是坐标原点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 点 N 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 当 l 绕点 M 旋转时, 求:
(1) 动点 P 的轨迹方程;
(2) $|\overrightarrow{NP}|$ 的最小值与最大值.

20. 甲方是一农场, 乙方是一工厂. 由于乙方生产须占用甲方的资源, 因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入, 在乙方不赔付甲方的情况下, 乙方的年利润 x (元) 与年产量 t (吨) 满足函数关系 $x = 2000\sqrt{t}$. 若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元 (以下称 s 为赔付价格).
(1) 将乙方的年利润 w (元) 表示为年产量 t (吨) 的函数, 并求出乙方获得最大利润的年产量;
(2) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$ (元), 在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下, 甲方要在索赔中获得最大净收入, 应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?

21. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$, 又当 $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{8}$.
(1) 求 a 的值;
(2) 设 $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$. 证明 $a_n < \frac{1}{n+1}$.

22. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ ($a > 0$).
(1) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;
(2) 假设对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$, 不等式 $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.