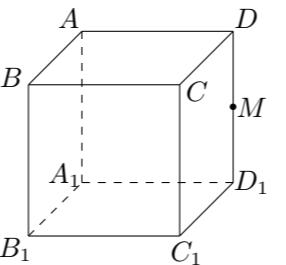


文科数学

一、选择题

1. 对于实数 a, b, c , “ $a > b$ ”是“ $ac^2 > bc^2$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
2. 若集合 $A = \{x \mid |x| \leq 1\}$, $B = \{x \mid x \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ (B) $\{x \mid x \geq 0\}$
 (C) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (D) \emptyset
3. $(1-x)^{10}$ 展开式中 x^3 项的系数为 ()
 (A) -720 (B) 720 (C) 120 (D) -120
4. 若函数 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$ ()
 (A) -1 (B) -2 (C) 2 (D) 0
5. 不等式 $|x-2| > x-2$ 的解集是 ()
 (A) $(-\infty, 2)$ (B) $(-\infty, +\infty)$
 (C) $(2, +\infty)$ (D) $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
6. 函数 $y = \sin^2 x + \sin x - 1$ 的值域为 ()
 (A) $[-1, 1]$ (B) $\left[-\frac{5}{4}, -1\right]$ (C) $\left[-\frac{5}{4}, 1\right]$ (D) $\left[-1, \frac{5}{4}\right]$
7. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $|a_1| = 1$, $a_5 = -8a_2$, $a_5 > a_2$, 则 $a_n =$ ()
 (A) $(-2)^{n-1}$ (B) $-(-2)^{n-1}$ (C) $(-2)^n$ (D) $-(-2)^n$
8. 若函数 $y = \frac{ax}{1+x}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 a 为 ()
 (A) 1 (B) -1 (C) ± 1 (D) 任意实数
9. 有 n 位同学参加某项选拔测试, 每位同学能通过测试的概率都是 p ($0 < p < 1$), 假设每位同学能否通过测试是相互独立的, 则至少有一位同学通过测试的概率为 ()
 (A) $(1-p)^n$ (B) $1-p^n$ (C) p^n (D) $1-(1-p)^n$
10. 直线 $y = kx + 3$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN| \geq 2\sqrt{3}$, 则 k 的取值范围是 ()
 (A) $\left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ (B) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (C) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ (D) $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$
11. 如图, M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点, 给出下列命题:
 ① 过 M 点有且只有一条直线与直线 AB, B_1C_1 都相交;
 ② 过 M 点有且只有一条直线与直线 AB, B_1C_1 都垂直;
 ③ 过 M 点有且只有一个平面与直线 AB, B_1C_1 都相交;
 ④ 过 M 点有且只有一个平面与直线 AB, B_1C_1 都平行.
 其中真命题是 ()

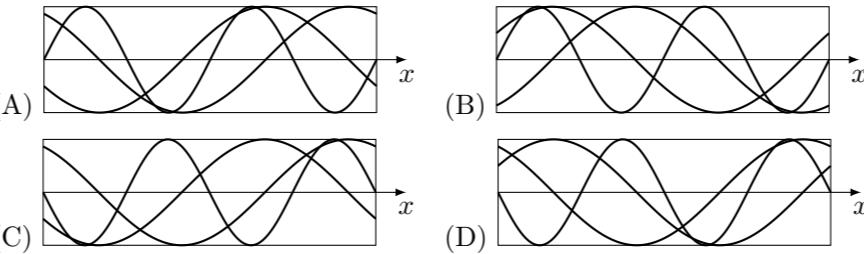


- (A) ②③④ (B) ①③④ (C) ①②④ (D) ①②③

18. 某迷宫有三个通道, 进入迷宫的每个人都要经过一个智能门. 首次到达此门, 系统会随机 (即等可能) 为你打开一个通道. 若是 1 号通道, 则需要 1 小时走出迷宫; 若是 2 号、3 号通道, 则分别需要 2 小时、3 小时返回智能门. 再次到达智能门时, 系统会随机打开一个你未到过的通道, 直至走出迷宫为止.

- (1) 求走出迷宫时恰好用了 1 小时的概率;
 (2) 求走出迷宫的时间超过 3 小时的概率.

12. 四位同学在同一个坐标系中分别选定了一个适当的区间, 各自作出三个函数 $y = \sin 2x$, $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象如下. 结果发现其中有一位同学作出的图象有错误, 那么有错误的图象是 ()



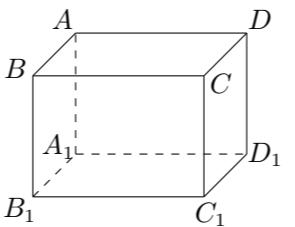
二、填空题

13. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{b}| = 2$, \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 60° , 则 \mathbf{b} 在 \mathbf{a} 上的投影是_____.

14. 将 5 位志愿者分成 3 组, 其中两组各 2 人, 另一组 1 人, 分赴世博会的三个不同场馆服务, 不同的分配方案有_____种. (用数字作答)

15. 点 $A(x_0, y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$ 的右支上, 若点 A 到右焦点的距离等于 $2x_0$, 则 $x_0 =$ _____.

16. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点均在同一个球面上, $AB = AA_1 = 1$, $BC = \sqrt{2}$, 则 A, B 两点间的球面距离为_____.



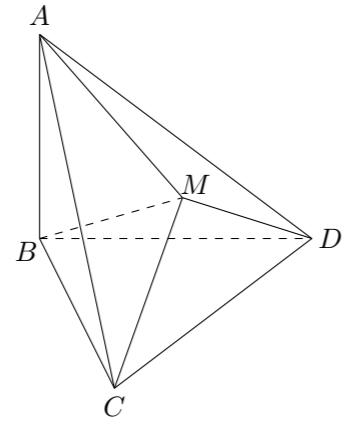
19. 已知函数 $f(x) = (1 + \cot x) \sin^2 x - 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- (1) 若 $\tan \alpha = 2$, 求 $f(\alpha)$;
 (2) 若 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的取值范围.

三、解答题

17. 设函数 $f(x) = 6x^3 + 3(a+2)x^2 + 2ax$.
 (1) 若 $f(x)$ 的两个极值点为 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 = 1$, 求实数 a 的值;
 (2) 是否存在实数 a , 使得 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调函数? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

20. 如图, $\triangle BCD$ 与 $\triangle MCD$ 都是边长为 2 的正三角形, 平面 $MCD \perp$ 平面 BCD , $AB \perp$ 平面 BCD , $AB = 2\sqrt{3}$.
 (1) 求直线 AM 与平面 BCD 所成的角的大小;
 (2) 求平面 ACM 与平面 BCD 所成二面角的正弦值.



21. 如图, 已知抛物线 $C_1: x^2 + by = b^2$ 经过椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点.
 (1) 求椭圆 C_2 的离心率;
 (2) 设 $Q(3, b)$, 又 M, N 为 C_1 与 C_2 不在 y 轴上的两个交点, 若 $\triangle QMN$ 的重心在抛物线 C_1 上, 求 C_1 和 C_2 的方程.
22. 正实数数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 5$, 且 $\{a_n^2\}$ 成等差数列.
 (1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多项为无理数;
 (2) 当 n 为何值时, a_n 为整数, 并求出使 $a_n < 200$ 的所有整数项的和.

