

文科数学

一、选择题

1. 设全集 $U = \{x \in \mathbf{N}^* | x < 6\}$, 集合 $A = \{1, 3\}$, $B = \{3, 5\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$ ()
(A) $\{1, 4\}$ (B) $\{1, 5\}$ (C) $\{2, 4\}$ (D) $\{2, 5\}$
2. 不等式 $\frac{x-3}{x+2} < 0$ 的解集为 ()
(A) $\{x | -2 < x < 3\}$ (B) $\{x | x < -2\}$
(C) $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ (D) $\{x | x > 3\}$
3. 已知 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos(\pi - 2\alpha) =$ ()
(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
4. 函数 $y = 1 + \ln(x - 1)$ ($x > 1$) 的反函数是 ()
(A) $y = e^{x+1} - 1$ ($x > 0$) (B) $y = e^{x-1} + 1$ ($x > 0$)
(C) $y = e^{x+1} - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) (D) $y = e^{x-1} + 1$ ($x \in \mathbf{R}$)
5. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq x \\ 3x + 2y \leq 5 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
6. 如果等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_4 + a_5 = 12$, 那么 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 =$ ()
(A) 14 (B) 21 (C) 28 (D) 35
7. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 在点 $(0, b)$ 处的切线方程是 $x - y + 1 = 0$, 则()
(A) $a = 1, b = 1$ (B) $a = -1, b = 1$
(C) $a = 1, b = -1$ (D) $a = -1, b = -1$
8. 在三棱锥 $S - ABC$ 中, 底面 ABC 为边长等于 2 的等边三角形, SA 垂直于底面 ABC , $SA = 3$, 那么直线 AB 与平面 SBC 所成角的正弦值为()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$
9. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中, 若每个信封放 2 张, 其中标号为 1, 2 的卡片放入同一信封, 则不同的放法共有 ()
(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 36 种 (D) 54 种
10. $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, CD 平分 $\angle ACB$. 若 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 则 $\overrightarrow{CD} =$ ()
(A) $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ (B) $\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$ (C) $\frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{4}{5}\mathbf{b}$ (D) $\frac{4}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$

11. 与正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的三条棱 AB 、 CC_1 、 A_1D_1 所在直线的距离相等的点 ()
(A) 有且只有 1 个 (B) 有且只有 2 个
(C) 有且只有 3 个 (D) 有无数个
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过右焦点 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线与 C 相交于 A 、 B 两点. 若 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 则 $k =$ ()
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

二、填空题

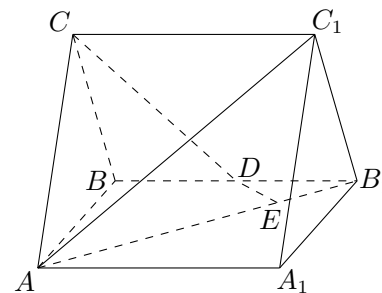
13. 已知 α 是第二象限的角, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\cos \alpha =$ _____.
14. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是_____.
15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线为 l , 过 $M(1, 0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 l 相交于点 A , 与 C 的一个交点为 B . 若 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, 则 $p =$ _____.
16. 已知球 O 的半径为 4, 圆 M 与圆 N 为该球的两个小圆, AB 为圆 M 与圆 N 的公共弦, $AB = 4$. 若 $OM = ON = 3$, 则两圆圆心的距离 $MN =$ _____.

三、解答题

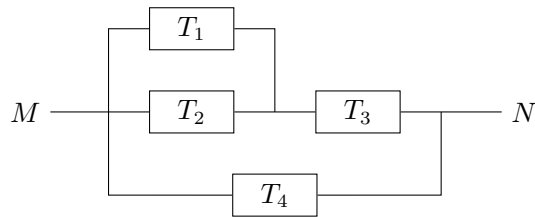
17. $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上的一点, $BD = 33$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $\cos \angle ADC = \frac{3}{5}$, 求 AD .

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_1 + a_2 = 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$, $a_3 + a_4 + a_5 = 64\left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}\right)$.
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 设 $b_n = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = BC$, $AA_1 = AB$, D 为 BB_1 的中点, E 为 AB_1 上的一点, $AE = 3EB_1$.
(1) 证明: DE 为异面直线 AB_1 与 CD 的公垂线;
(2) 设异面直线 AB_1 与 CD 的夹角为 45° , 求二面角 $A_1 - AC_1 - B_1$ 的大小.



20. 如图, 由 M 到 N 的电路中有 4 个组件, 分别标为 T_1, T_2, T_3, T_4 , 电流能通过 T_1, T_2, T_3 的概率都是 p , 电流能通过 T_4 的概率是 0.9. 电流能否通过各组件相互独立. 已知 T_1, T_2, T_3 中至少有一个能通过电流的概率为 0.999.
- (1) 求 p ;
 - (2) 求电流能在 M 与 N 之间通过的概率.



21. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3x + 1$.
- (1) 设 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 设 $f(x)$ 在区间 $(2, 3)$ 中至少有一个极值点, 求 a 的取值范围.

22. 已知斜率为 1 的直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 相交于 B, D 两点, 且 BD 的中点为 $M(1, 3)$.
- (1) 求 C 的离心率;
 - (2) 设 C 的右顶点为 A , 右焦点为 F , $|DF| \cdot |BF| = 17$, 证明: 过 A, B, D 三点的圆与 x 轴相切.