

# 理科数学

## 一、填空题

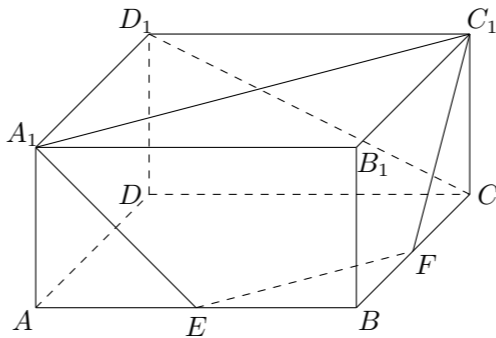
1. 设全集  $U = \mathbf{R}$ . 若集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$ , 则  $A \cap \complement_U B =$ \_\_\_\_\_.
2. 若复数  $z$  满足  $3z + \bar{z} = 1 + i$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z =$ \_\_\_\_\_.
3. 若线性方程组的增广矩阵为  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \end{pmatrix}$ 、解为  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ , 则  $c_1 - c_2 =$ \_\_\_\_\_.
4. 若正三棱柱的所有棱长均为  $a$ , 且其体积为  $16\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
5. 抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 上的动点  $Q$  到焦点的距离的最小值为 1, 则  $p =$ \_\_\_\_\_.
6. 若圆锥的侧面积与过轴的截面面积之比为  $2\pi$ , 则其母线与轴的夹角的大小为\_\_\_\_\_.
7. 方程  $\log_2(9^{x-1} - 5) = \log_2(3^{x-1} - 2) + 2$  的解为\_\_\_\_\_.
8. 在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中, 选取 5 人参加义务献血, 要求男、女教师都有, 则不同的选取方式的种数为\_\_\_\_\_.(结果用数值表示)
9. 已知点  $P$  和  $Q$  的横坐标相同,  $P$  的纵坐标是  $Q$  的纵坐标的 2 倍,  $P$  和  $Q$  的轨迹分别为双曲线  $C_1$  和  $C_2$ . 若  $C_1$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ , 则  $C_2$  的渐近线方程为\_\_\_\_\_.
10. 设  $f^{-1}(x)$  为  $f(x) = 2^{x-2} + \frac{x}{2}$ ,  $x \in [0, 2]$  的反函数, 则  $y = f(x) + f^{-1}(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.
11. 在  $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2015}}\right)^{10}$  的展开式中,  $x^2$  项的系数为\_\_\_\_\_. (结果用数值表示)
12. 赌博有陷阱. 某种赌博每局的规则是: 赌客先在标记有 1, 2, 3, 4, 5 的卡片中随机摸取一张, 将卡片上的数字作为其赌金 (单位: 元); 随后放回该卡片, 再随机摸取两张, 将这两张卡片上数字之差的绝对值的 1.4 倍作为其奖金 (单位: 元). 若随机变量  $\xi_1$  和  $\xi_2$  分别表示赌客在一局赌博中的赌金和奖金, 则  $E\xi_1 - E\xi_2 =$ \_\_\_\_\_(元).
13. 已知函数  $f(x) = \sin x$ . 若存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$  满足  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_m \leq 6\pi$ . 且  $|f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)| = 12$  ( $m \geq 2, m \in \mathbf{N}^*$ ), 则  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.
14. 在锐角三角形  $ABC$  中,  $\tan A = \frac{1}{2}$ ,  $D$  为边  $BC$  上的点,  $\triangle ABD$  与  $\triangle ACD$  的面积分别为 2 和 4. 过  $D$  作  $DE \perp AB$  于  $E$ ,  $DF \perp AC$  于  $F$ , 则  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} =$ \_\_\_\_\_.

## 二、选择题

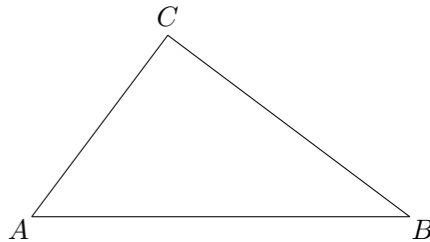
15. 设  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ , 则“ $z_1, z_2$  中至少有一个数是虚数”是“ $z_1 - z_2$  是虚数”的( )  
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
16. 已知点  $A$  的坐标为  $(4\sqrt{3}, 1)$ , 将  $OA$  绕坐标原点  $O$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$  至  $OB$ , 则点  $B$  的纵坐标为 ( )  
(A)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  (C)  $\frac{11}{2}$  (D)  $\frac{13}{2}$
17. 记方程①:  $x^2 + a_1x + 1 = 0$ , 方程②:  $x^2 + a_2x + 2 = 0$ , 方程③:  $x^2 + a_3x + 4 = 0$ , 其中  $a_1, a_2, a_3$  是正实数. 当  $a_1, a_2, a_3$  成等比数列时, 下列选项中, 能推出方程③无实根的是 ( )  
(A) 方程①有实根, 且②有实根 (B) 方程①有实根, 且②无实根  
(C) 方程①无实根, 且②有实根 (D) 方程①无实根, 且②无实根
18. 设  $P_n(x_n, y_n)$  是直线  $2x - y = \frac{n}{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 与圆  $x^2 + y^2 = 2$  在第一象限的交点, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - 1}{x_n - 1} =$  ( )  
(A)  $-1$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2

## 三、解答题

19. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 = 1$ ,  $AB = AD = 2$ ,  $E, F$  分别是棱  $AB, BC$  的中点. 证明  $A_1, C_1, F, E$  四点共面, 并求直线  $CD_1$  与平面  $A_1C_1FE$  所成角的正弦值.



20. 如图,  $A, B, C$  三地有直道相通,  $AB = 5$  千米,  $AC = 3$  千米,  $BC = 4$  千米. 现甲、乙两警员同时从  $A$  地出发匀速前往  $B$  地, 过  $t$  小时, 他们之间的距离为  $f(t)$  (单位: 千米). 甲的路线是  $AB$ , 速度为 5 千米/小时, 乙的路线是  $ACB$ , 速度为 8 千米/小时. 乙到达  $B$  地后在原地等待. 设  $t = t_1$  时, 乙到达  $C$  地.  
(1) 求  $t_1$  与  $f(t_1)$  的值;  
(2) 已知警员的对讲机的有效通话距离是 3 千米. 当  $t_1 \leq t \leq 1$  时, 求  $f(t)$  的表达式, 并判断  $f(t)$  在  $[t_1, 1]$  上的最大值是否超过 3? 说明理由.



21. 已知椭圆  $x^2 + 2y^2 = 1$ , 过原点的两条直线  $l_1$  和  $l_2$  分别与椭圆交于点  $A, B$  和  $C, D$ . 记得到的平行四边形  $ACBD$  的面积为  $S$ .
- (1) 设  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ . 用  $A, C$  的坐标表示点  $C$  到直线  $l_1$  的距离, 并证明  $S = 2|x_1y_2 - x_2y_1|$ ;
- (2) 设  $l_1$  与  $l_2$  的斜率之积为  $-\frac{1}{2}$ , 求面积  $S$  的值.
22. 已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n), n \in \mathbf{N}^*$ .
- (1) 若  $b_n = 3n + 5$ , 且  $a_1 = 1$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 设  $\{a_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项, 即  $a_{n_0} \geq a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ . 求证:  $\{b_n\}$  的第  $n_0$  项是最大项;
- (3) 设  $a_1 = \lambda < 0, b_n = \lambda^n (n \in \mathbf{N}^*)$ . 求  $\lambda$  的取值范围, 使得  $\{a_n\}$  有最大值  $M$  与最小值  $m$ , 且  $\frac{M}{m} \in (-2, 2)$ .
23. 对于定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $g(x)$ , 若存在正常数  $T$ , 使得  $\cos g(x)$  是以  $T$  为周期的函数, 则称  $g(x)$  为余弦周期函数, 且称  $T$  为其余弦周期. 已知  $f(x)$  是以  $T$  为余弦周期的余弦周期函数, 其值域为  $\mathbf{R}$ . 设  $f(x)$  单调递增,  $f(0) = 0, f(T) = 4\pi$ .
- (1) 验证  $h(x) = x + \sin \frac{x}{3}$  是以  $6\pi$  为余弦周期的余弦周期函数;
- (2) 设  $a < b$ , 证明对任意  $c \in [f(a), f(b)]$ , 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = c$ ;
- (3) 证明: “ $u_0$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[0, T]$  上的解”的充要条件是“ $u_0 + T$  为方程  $\cos f(x) = 1$  在  $[T, 2T]$  上的解”, 并证明对任意  $x \in [0, T]$  都有  $f(x + T) = f(x) + f(T)$ .