

理科数学

一、选择题

1.  $(1 - i)^2 \cdot i =$  ( )  
(A)  $2 - 2i$  (B)  $2 + 2i$  (C)  $-2$  (D)  $2$
2. 已知函数  $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$ , 若  $f(a) = b$ , 则  $f(-a) =$  ( )  
(A)  $b$  (B)  $-b$  (C)  $\frac{1}{b}$  (D)  $-\frac{1}{b}$
3. 已知  $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{b}$  均为单位向量, 它们的夹角为  $60^\circ$ , 那么  $|\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}| =$  ( )  
(A)  $\sqrt{7}$  (B)  $\sqrt{10}$  (C)  $\sqrt{13}$  (D)  $4$
4. 函数  $y = \sqrt{x-1} + 1$  ( $x \geq 1$ ) 的反函数是 ( )  
(A)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x < 1$ ) (B)  $y = x^2 - 2x + 2$  ( $x \geq 1$ )  
(C)  $y = x^2 - 2x$  ( $x < 1$ ) (D)  $y = x^2 - 2x$  ( $x \geq 1$ )
5.  $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )  
(A)  $14$  (B)  $-14$  (C)  $42$  (D)  $-42$
6. 设  $A$ 、 $B$ 、 $I$  均为非空集合, 且满足  $A \subseteq B \subseteq I$ , 则下列各式中错误的是( )  
(A)  $(\complement_I A) \cup B = I$  (B)  $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$   
(C)  $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$  (D)  $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$
7. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1$ 、 $F_2$ , 过  $F_1$  作垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交, 一个交点为  $P$ , 则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{7}{2}$  (D)  $4$
8. 设抛物线  $y^2 = 8x$  的准线与  $x$  轴交于点  $Q$ , 若过点  $Q$  的直线  $l$  与抛物线有公共点, 则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )  
(A)  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (B)  $[-2, 2]$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[-4, 4]$
9. 为了得到函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 可以将函数  $y = \cos 2x$  的图象  
(A) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (B) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度  
(C) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度 (D) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度
10. 已知正四面体  $ABCD$  的表面积为  $S$ , 其四个面的中心分别为  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ . 设四面体  $EFGH$  的表面积为  $T$ , 则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )  
(A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{4}{9}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$
11. 从数字 1, 2, 3, 4, 5, 中, 随机抽取 3 个数字 (允许重复) 组成一个三位数, 其各位数字之和等于 9 的概率为 ( )  
(A)  $\frac{13}{125}$  (B)  $\frac{16}{125}$  (C)  $\frac{18}{125}$  (D)  $\frac{19}{125}$

12.  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $b^2 + c^2 = 2$ ,  $c^2 + a^2 = 2$ ,  $ab + bc + ca$  的最小值为 ( )  
(A)  $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (C)  $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$  (D)  $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

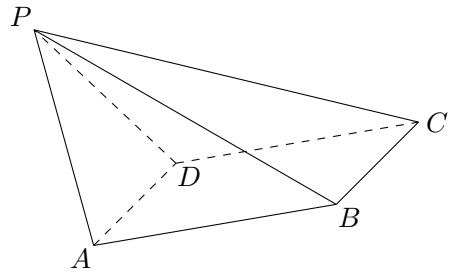
二、填空题

13. 不等式  $|x + 2| \geq |x|$  的解集是\_\_\_\_\_.
14. 由动点  $P$  向圆  $x^2 + y^2 = 1$  引两条切线  $PA$ 、 $PB$ , 切点分别为  $A$ 、 $B$ ,  $\angle APB = 60^\circ$ , 则动点  $P$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.
15. 已知数列  $\{a_n\}$ , 满足  $a_1 = 1$ ,  $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 则  $\{a_n\}$  的通项  $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \text{——}, & n \geq 2 \end{cases}$ .
16. 已知  $a$ 、 $b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面, 则  $a$ 、 $b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是:  
① 两条平行直线;  
② 两条互相垂直的直线;  
③ 同一条直线;  
④ 一条直线及其外一点.  
在上面结论中, 正确结论的编号是\_\_\_\_\_. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

17. 求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.
19. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 求函数  $f(x) = x^2 e^{ax}$  的单调区间.

20. 如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .
- (1) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;
  - (2) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



21. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$  ( $a > 0$ ) 与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点  $A, B$ .
- (1) 求双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围;
  - (2) 设直线  $l$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$ . 求  $a$  的值.
22. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ , 且  $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$ ,  $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$ , 其中  $k = 1, 2, 3, \dots$ .
- (1) 求  $a_3, a_5$ ;
  - (2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.