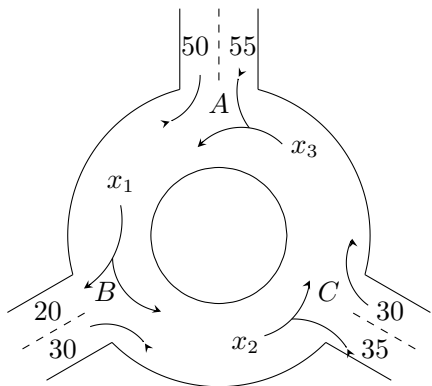


理科数学

一、选择题

- 在复平面内, 复数 $\frac{1+i}{i}$ 对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 若 \vec{a} 与 $\vec{b} - \vec{c}$ 都是非零向量, 则“ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ”是“ $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ ”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 在 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字组成的没有重复数字的三位数中, 各位数字之和为奇数的共有 ()
(A) 36 个 (B) 24 个 (C) 18 个 (D) 6 个
- 平面 α 的斜线 AB 交 α 于点 B , 过定点 A 的动直线 l 与 AB 垂直, 且交 α 于点 C , 则动点 C 的轨迹是 ()
(A) 一条直线 (B) 一个圆 (C) 一个椭圆 (D) 双曲线的一支
- 已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ \log_a x, & x \geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 那么 a 的取值范围是 ()
(A) $(0, 1)$ (B) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ (C) $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ (D) $\left[\frac{1}{7}, 1\right)$
- 在下列四个函数中, 满足性质: “对于区间 $(1, 2)$ 上的任意 x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$), $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_2 - x_1|$ 恒成立”的只有 ()
(A) $f(x) = \frac{1}{x}$ (B) $f(x) = |x|$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = x^2$
- 设 $f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \dots + 2^{3n+10}$ ($n \in \mathbf{N}$), 则 $f(n)$ 等于 ()
(A) $\frac{2}{7}(8^n - 1)$ (B) $\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)$ (C) $\frac{2}{7}(8^{n+3} - 1)$ (D) $\frac{2}{7}(8^{n+4} - 1)$
- 如图为某三岔路口交通环岛的简化模型, 在某高峰时段, 单位时间进出路口 A, B, C 的机动车辆数如图所示, 图中 x_1, x_2, x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ 的机动车辆数 (假设: 单位时间内, 在上述路段中, 同一路段上驶入与驶出的车辆数相等), 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ()



- (A) $x_1 > x_2 > x_3$ (B) $x_1 > x_3 > x_2$ (C) $x_2 > x_3 > x_1$ (D) $x_3 > x_2 > x_1$

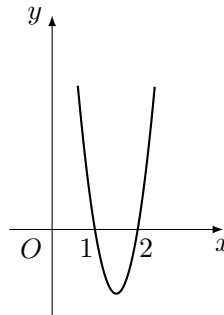
二、填空题

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ 的值等于_____.
- 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^2 的系数为_____. (用数字作答)
- 若三点 $A(2, 2), B(a, 0), C(0, b)$ ($ab \neq 0$) 共线, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值等于_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$, 则 $\angle B$ 的大小是_____.
- 已知点 $P(x, y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ y \geq x \\ x \geq 1 \end{cases}$, 点 O 为坐标原点, 那么 $|PO|$ 的最小值等于_____, 最大值等于_____.
- 已知 A, B, C 三点在球心为 O , 半径为 R 的球面上, $AC \perp BC$, 且 $AB = R$, 那么 A, B 两点的球面距离为_____, 球心到平面 ABC 的距离为_____.

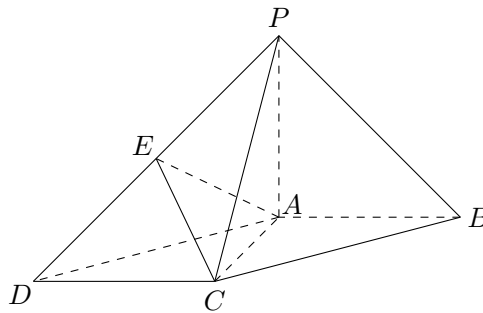
三、解答题

- 已知函数 $f(x) = \frac{1 - \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$.
(1) 求 $f(x)$ 的定义域;
(2) 设 α 是第四象限的角, 且 $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

- 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1, 0), (2, 0)$, 如图所示, 求:
(1) x_0 的值;
(2) a, b, c 的值.



- 如图, 在底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \perp AC$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = AB$, 点 E 是 PD 的中点.
(1) 求证: $AC \perp PB$;
(2) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEC ;
(3) 求二面角 $E-AC-B$ 的大小.



18. 某公司招聘员工, 指定三门考试课程, 有两种考试方案.

方案一: 考试三门课程, 至少有两门及格为考试通过;

方案二: 在三门课程中, 随机选取两门, 这两门都及格为考试通过.

假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 a, b, c , 且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

(1) 分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率;

(2) 试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小. (说明理由)

19. 已知点 $M(-2, 0), N(2, 0)$, 动点 P 满足条件 $|PM| - |PN| = 2\sqrt{2}$. 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 若 A, B 是 W 上的不同两点, O 是坐标原点, 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最小值.

20. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 a_1, a_2 是正整数, 且 $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|, n = 3, 4, 5, \dots$, 则称 $\{a_n\}$ 为“绝对差数列”.

(1) 举出一个前五项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前十项);

(2) 若“绝对差数列” $\{a_n\}$ 中, $a_{20} = 3, a_{21} = 0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$, 分别判断当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 与 b_n 的极限是否存在, 如果存在, 求出其极限值;

(3) 证明: 任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.