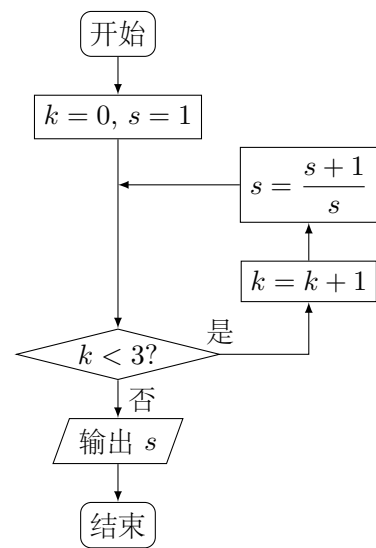


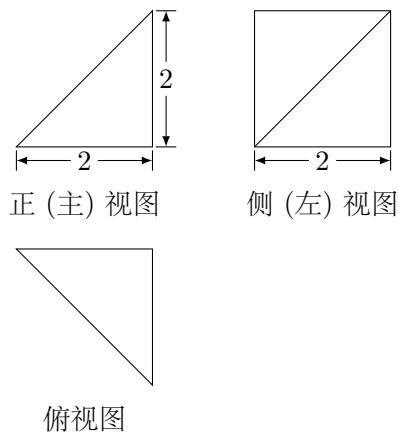
# 理科数学

## 一、选择题

- 若集合  $A = \{x \mid -2 < x < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
 (A)  $\{x \mid -2 < x < -1\}$  (B)  $\{x \mid -2 < x < 3\}$   
 (C)  $\{x \mid -1 < x < 1\}$  (D)  $\{x \mid 1 < x < 3\}$
- 若复数  $(1 - i)(a + i)$  在复平面内对应的点在第二象限, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(-\infty, -1)$  (C)  $(1, +\infty)$  (D)  $(-1, +\infty)$
- 执行如图所示的程序框图, 输出的  $S$  值为 ( )



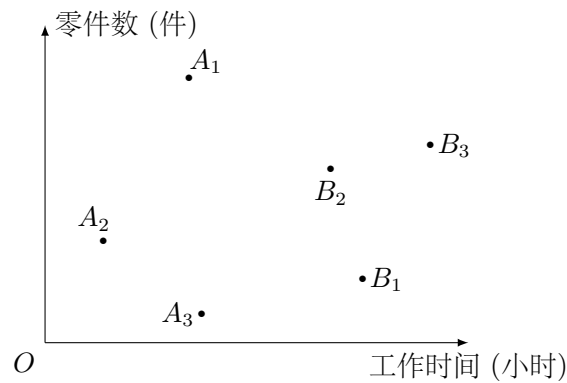
- (A) 2 (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\frac{5}{3}$  (D)  $\frac{8}{5}$
- 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x + y \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$ , 则  $x + 2y$  的最大值为 ( )  
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9
- 已知函数  $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , 则  $f(x)$  ( )  
 (A) 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是增函数 (B) 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是增函数  
 (C) 是奇函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是减函数 (D) 是偶函数, 且在  $\mathbf{R}$  上是减函数
- 设  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  为非零向量, 则“存在负数  $\lambda$ , 使得  $\mathbf{m} = \lambda \mathbf{n}$ ”是“ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} < 0$ ”的 ( )  
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为 ( )



- (A)  $3\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C)  $2\sqrt{2}$  (D) 2
- 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限  $M$  约为  $3^{361}$ , 而可观测宇宙中普通物质的原子总数  $N$  约为  $10^{80}$ , 则下列各数中与  $\frac{M}{N}$  最接近的是 ( )  
 (参考数据:  $\lg 3 \approx 0.48$ )  
 (A)  $10^{33}$  (B)  $10^{53}$  (C)  $10^{73}$  (D)  $10^{93}$

## 二、填空题

- 若双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$  的离心率为  $\sqrt{3}$ , 则实数  $m =$ \_\_\_\_\_.
- 若等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = b_1 = -1$ ,  $a_4 = b_4 = 8$ , 则  $\frac{a_2}{b_2} =$ \_\_\_\_\_.
- 在极坐标系中, 点  $A$  在圆  $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$  上, 点  $P$  的坐标为  $(1, 0)$ , 则  $|AP|$  的最小值为\_\_\_\_\_.
- 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 角  $\alpha$  与角  $\beta$  均以  $Ox$  为始边, 它们的终边关于  $y$  轴对称, 若  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos(\alpha - \beta) =$ \_\_\_\_\_.
- 能够说明“设  $a, b, c$  是任意实数. 若  $a > b > c$ , 则  $a + b > c$ ”是假命题的一组整数  $a, b, c$  的值依次为\_\_\_\_\_.
- 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中  $A_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点  $B_i$  的横、纵坐标分别为第  $i$  名工人下午的工作时间和加工的零件数,  $i = 1, 2, 3$ .

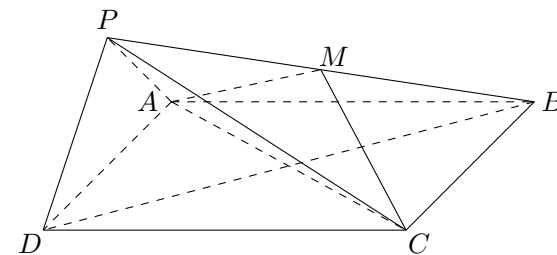


- 记  $Q_i$  为第  $i$  名工人在这一天中加工的零件总数, 则  $Q_1, Q_2, Q_3$  中最大的是\_\_\_\_\_;
- 记  $p_i$  为第  $i$  名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则  $p_1, p_2, p_3$  中最大的是\_\_\_\_\_.

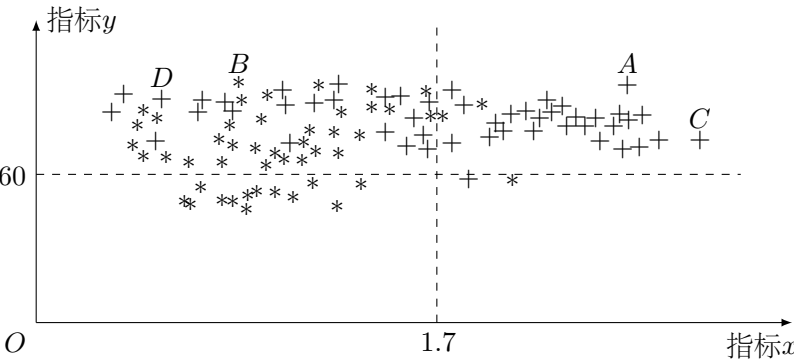
## 三、解答题

- 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $c = \frac{3}{7}a$ .  
 (1) 求  $\sin C$  的值;  
 (2) 若  $a = 7$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

- 如图, 在四棱锥  $P - ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 点  $M$  在线段  $PB$  上,  $PD \parallel$  平面  $MAC$ ,  $PA = PD = \sqrt{6}$ ,  $AB = 4$ .  
 (1) 求证:  $M$  为  $PB$  的中点;  
 (2) 求二面角  $B - PD - A$  的大小;  
 (3) 求直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值.



17. 为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另一组不服药. 一段时间后, 记录了两组患者的生理指标  $x$  和  $y$  的数据, 并制成如图, 其中“\*”表示服药者, “+”表示未服药者.



- (1) 从服药的 50 名患者中随机选出一人, 求此人指标  $y$  的值小于 60 的概率;
- (2) 从图中  $A, B, C, D$  四人中随机选出两人, 记  $\xi$  为选出的两人中指标  $x$  的值大于 1.7 的人数, 求  $\xi$  的分布列和数学期望  $E(\xi)$ ;
- (3) 试判断这 100 名患者中服药者指标  $y$  数据的方差与未服药者指标  $y$  数据的方差的大小. (只需写出结论)

18. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  过点  $P(1, 1)$ . 过点  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  作直线  $l$  与抛物线  $C$  交于不同的两点  $M, N$ , 过点  $M$  作  $x$  轴的垂线分别与直线  $OP, ON$  交于点  $A, B$ , 其中  $O$  为原点.
- (1) 求抛物线  $C$  的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;
- (2) 求证:  $A$  为线段  $BM$  的中点.

19. 已知函数  $f(x) = e^x \cos x - x$ .
- (1) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;
- (2) 求函数  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值和最小值.

20. 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是两个等差数列, 记  $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), 其中  $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  表示  $x_1, x_2, \dots, x_s$  这  $s$  个数中最大的数.
- (1) 若  $a_n = n, b_n = 2n - 1$ , 求  $c_1, c_2, c_3$  的值, 并证明  $\{c_n\}$  是等差数列;
- (2) 证明: 或者对任意正数  $M$ , 存在正整数  $m$ , 当  $n \geq m$  时,  $\frac{c_n}{n} > M$ ; 或者存在正整数  $m$ , 使得  $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$  是等差数列.