2008 年普通高等学校招生考试（广东卷）

文科数学

一、选择题

1. 第二十九届夏季奥林匹克运动会将于 2008 年 8 月 8 日在北京举行, 若集合 $A = \{$ 参加北京奥运会比赛的运动员 $\}$, 集合 $B = \{$ 参加北京奥运会比赛的男运动员 $\}$, 集合 $C = \{$ 参加北京奥运会比赛的女运动员 $\}$, 则下列关系正确的是 ( )

(A) $A \subseteq B$ (B) $B \subseteq C$ (C) $A \cap B = C$ (D) $B \cup C = A$

2. 已知 $0 < a < 2$, 复数 $z = a + \mathrm{i}$ (i 是虚数单位), 则 $|z|$ 的取值范围是 ( )

(A) $(1, \sqrt{3})$ (B) $(1, \sqrt{5})$ (C) $(1, 3)$ (D) $(1, 5)$

3. 已知平面向量 $\boldsymbol{a} = (1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, m)$, 且 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, 则 $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} =$ ( )

(A) $(-2, -4)$ (B) $(-3, -6)$ (C) $(-4, -8)$ (D) $(-5, -10)$

4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_2 = 4$, $S_4 = 20$, 则该数列的公差 $d =$ ( )

(A) 7 (B) 6 (C) 3 (D) 2

5. 已知函数 $f(x) = (1 + \cos 2x)\sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 是 ( )

(A) 最小正周期为 π 的奇函数 (B) 最小正周期为 π 的偶函数

(C) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇函数 (D) 最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的偶函数

6. 经过圆 $x^2 + 2x + y^2 = 0$ 的圆心 C, 且与直线 $x + y = 0$ 垂直的直线方程是 ( )

(A) $x - y + 1 = 0$ (B) $x - y - 1 = 0$ (C) $x + y - 1 = 0$ (D) $x + y + 1 = 0$

7. 将正三棱柱截去三个角 (如图 1 所示 A, B, C 分别是 $\triangle GHI$ 三边的中点) 得到几何体如图 2, 则该几何体按图 2 所示方向的侧视图 (或称左视图) 为 ( )

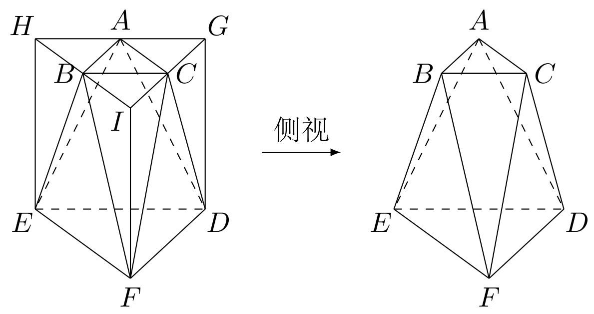
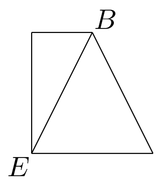
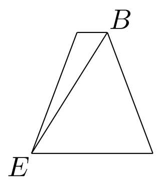
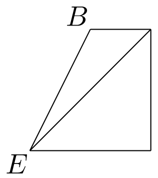
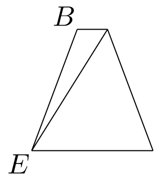


图 1 图 2


(A)


(B)


(C)


(D)

8. 命题"若函数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2 < 0$"的逆否命题是 ( )

(A) 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数

(B) 若 $\log_a 2 \geqslant 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数

(C) 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

(D) 若 $\log_a 2 \geqslant 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

9. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y = \mathrm{e}^x + ax$, $x \in \mathbf{R}$ 有大于零的极值点, 则 ( )

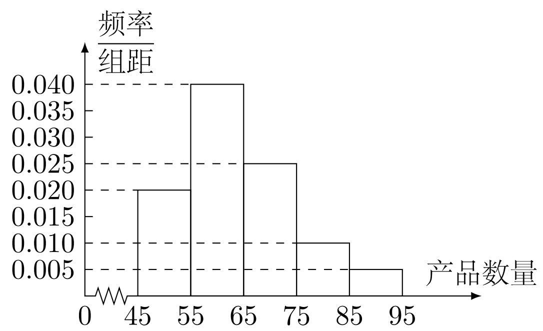
(A) $a < -1$ (B) $a > -1$ (C) $a > -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (D) $a < -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

10. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a - |b| > 0$, 则下列不等式中正确的是 ( )

(A) $b - a > 0$ (B) $a^3 + b^3 < 0$ (C) $b + a > 0$ (D) $a^2 - b^2 < 0$

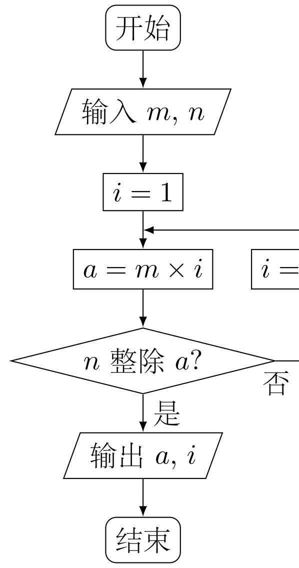
二、填空题

11. 为了调查某厂工人生产某种产品的能力, 随机抽查了 20 位工人某天生产该产品的数量. 产品数量的分组区间为 $[45, 55)$, $[55, 65)$, $[65, 75)$, $[75, 85)$, $[85, 95)$, 由此得到频率分布直方图如图, 则这 20 名工人中一天生产该产品数量在 $[55, 75)$ 的人数是______.



12. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leqslant 40 \\ x + 2y \leqslant 50 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值是______.

13. 阅读如图的程序框图. 若输入 $m = 4$, $n = 3$, 则输出 $a =$______, $i =$______. (注: 框图中的赋值符号"="也可以写成"←"或": =")



14. 已知曲线 C_1, C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta = 3$, $\rho = 4\cos\theta$ $(\rho \geqslant 0, 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2})$, 则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为______.

15. 已知 PA 是圆 O 的切线, 切点为 A, $PA = 2$. AC 是圆 O 的直径, PC 与圆 O 交于点 B, $PB = 1$, 则圆 O 的半径 $R =$______.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = A\sin(x + \varphi)$ $(A > 0, 0 < \varphi < \pi)$, $x \in \mathbf{R}$ 的最大值是 1, 其图象经过点 $M\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 且 $f(\alpha) = \dfrac{3}{5}$, $f(\beta) = \dfrac{12}{13}$, 求 $f(\alpha - \beta)$ 的值.

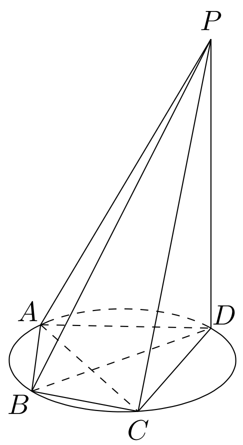
17. 某单位用 2160 万元购得一块空地, 计划在该地块上建造一栋至少 10 层、每层 2000 平方米的楼房. 经测算, 如果将楼房建为 x $(x \geqslant 10)$ 层, 则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$ (单位: 元). 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少, 该楼房应建为多少层?

(注: 平均综合费用 = 平均建筑费用 + 平均购地费用, 平均购地费用 $=\dfrac{\text{购地总费用}}{\text{建筑总面积}}$)

18. 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是半径为 R 的圆的内接四边形, 其中 BD 是圆的直径, $\angle ABD=60^{\circ}$, $\angle BDC=45^{\circ}$. $\triangle ADP \sim \triangle BAD$.

(1) 求线段 PD 的长;

(2) 若 $PC=\sqrt{11}R$, 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.



19. 某初级中学共有学生 2000 名, 各年级男、女生人数如下表:

	一年级	二年级	三年级
女生	373	x	y
男生	377	370	z

已知在全校学生中随机抽取 1 名, 抽到初二年级女生的概率是 0.19 .

(1) 求 x 的值;

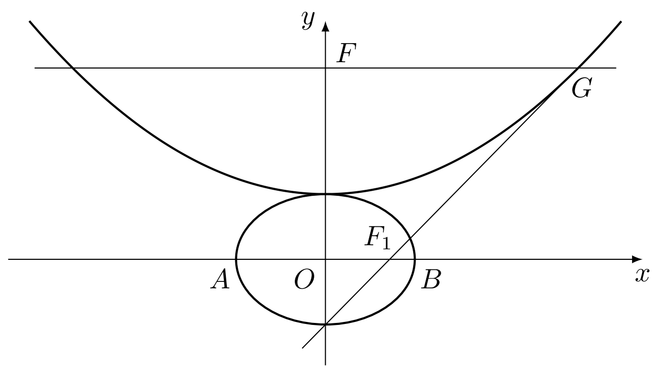
(2) 现用分层抽样的方法在全校抽取 48 名学生, 问应在初三年级抽取多少名?

(3) 已知 $y \geqslant 245$, $z \geqslant 245$, 求初三年级中女生比男生多的概率.

20. 设 $b>0$, 椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$. 如图所示, 过点 $F(0, b+2)$ 作 x 轴的平行线, 与抛物线在第一象限的交点为 G. 已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

(1) 求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(2) 设 A, B 分别是椭圆长轴的左、右端点, 试探究在抛物线上是否存在点 P, 使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形? 若存在, 请指出共有几个这样的点? 并说明理由 (不必具体求出这些点的坐标) .



21. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=\dfrac{1}{3}(a_{n-1}+2a_{n-2})$ $(n=3, 4, \cdots)$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, b_n $(n=2, 3, \cdots)$ 是非零整数, 且对任意的正整数 m 和自然数 k, 都有 $-1 \leqslant b_m+b_{m+1}+\cdots+b_{m+k} \leqslant 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n=na_nb_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.