2013 年普通高等学校招生考试（湖北卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数对应的点位于( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqslant 1\right\}$, $B=\{x\mid x^2-6x+8\leqslant 0\}$, 则 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=$ ( )

(A) $\{x\mid x\leqslant 0\}$ (B) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$

(C) $\{x\mid 0\leqslant x<2$ 或 $x>4\}$ (D) $\{x\mid 0<x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 4\}$

3. 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”, q 是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 ( )

(A) $(\neg p)\vee(\neg q)$ (B) $p\vee(\neg q)$ (C) $(\neg p)\wedge(\neg q)$ (D) $p\vee q$

4. 将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象向左平移 m $(m>0)$ 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{12}$ (B) $\dfrac{\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

5. 已知 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$, 则双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1$ 与 $C_2:\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}-\dfrac{x^2}{\sin^2\theta\tan^2\theta}=1$ 的 ( )

(A) 实轴长相等 (B) 虚轴长相等 (C) 焦距相等 (D) 离心率相等

6. 已知点 $A(-1,1)$, $B(1,2)$, $C(-2,-1)$, $D(3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 方向上的投影为 ( )

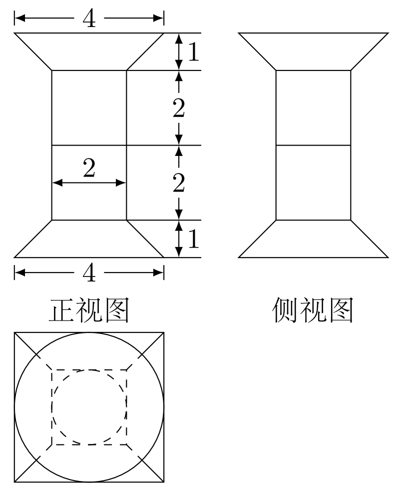
(A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ (C) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

7. 一辆汽车在高速公路上行驶, 由于遇到紧急情况而刹车, 以速度 $v(t)=7-3t+\dfrac{25}{1+t}$ (t 的单位: s, v 的单位: m/s) 行驶至停止, 在此期间汽车继续行驶的距离 (单位: m) 是 ( )

(A) $1+25\ln 5$ (B) $8+25\ln\dfrac{11}{3}$

(C) $4+25\ln 5$ (D) $4+50\ln 2$

8. 一个几何体的三视图如图所示, 该几何体从上到下由四个简单几何体组成, 其体积分别记为 V_1, V_2, V_3, V_4, 上面两个简单几何体均为旋转体, 下面两个简单几何体均为多面体, 则有 ( )



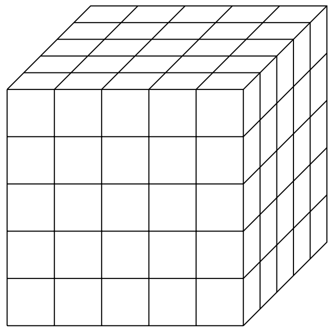
正视图　侧视图

俯视图

(A) $V_1<V_2<V_4<V_3$ (B) $V_1<V_3<V_2<V_4$

(C) $V_2<V_1<V_3<V_4$ (D) $V_2<V_3<V_1<V_4$

9. 如图, 将一个各面都涂了油漆的正方体, 切割为 125 个同样大小的小正方体, 经过搅拌后, 从中随机取一个小正方体, 记它的涂漆面数为 X, 则 X 的均值 $E(X)=$ ( )



(A) $\dfrac{126}{125}$ (B) $\dfrac{6}{5}$ (C) $\dfrac{168}{125}$ (D) $\dfrac{7}{5}$

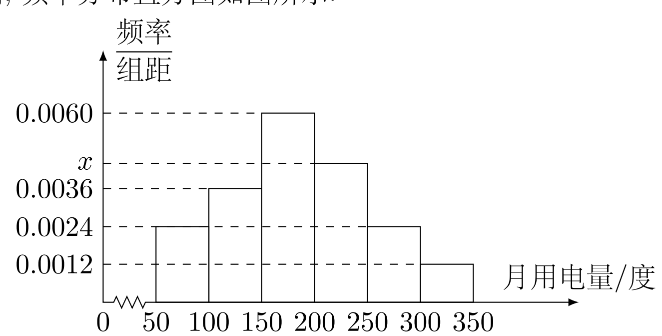
10. 已知 a 为常数, 函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$, 则 ( )

(A) $f(x_1)>0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$ (B) $f(x_1)<0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$

(C) $f(x_1)>0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$ (D) $f(x_1)<0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$

二、填空题

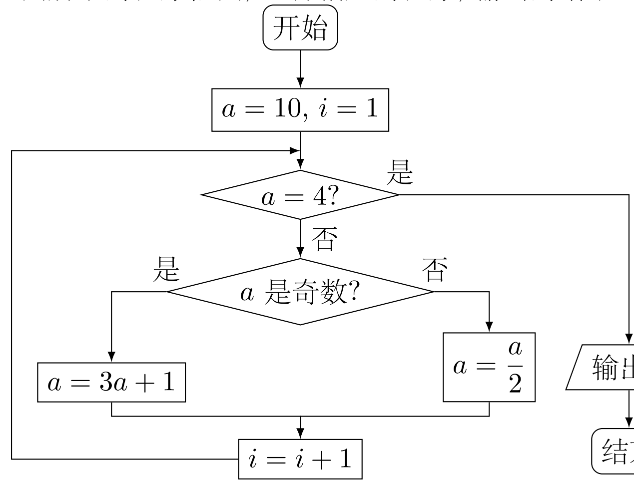
11. 从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查, 发现其用电量都在 50 至 350 度之间, 频率分布直方图如图所示.



(1) 直方图中 x 的值为______;

(2) 在这些用户中, 用电量落在区间 $[100,250)$ 内的户数为______.

12. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果 $i=$______.



13. 设 x, y, $z\in\mathbf{R}$, 且满足: $x^2+y^2+z^2=1$, $x+2y+3z=\sqrt{14}$, 则 $x+y+z=$______.

14. 古希腊毕达哥拉斯学派的数学家研究过各种多边形数, 如三角形数 1, 3, 6, 10, $\cdots$, 第 n 个三角形数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$. 记第 n 个 k 边形数为 $N(n,k)$ $(k\geqslant 3)$, 以下列出了部分 k 边形数中第 n 个数的表达式:

三角形数 $N(n,3)=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$,

正方形数 $N(n,4)=n^2$,

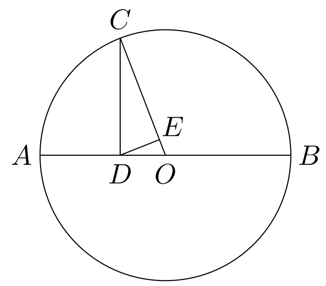
五边形数 $N(n,5)=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$,

六边形数 $N(n,6)=2n^2-n$,

$\cdots\cdots$

可以推测 $N(n,k)$ 的表达式, 由此计算 $N(10,24)=$______.

15. 如图, 圆 O 上一点 C 在直径 AB 上的射影为 D, 点 D 在半径 OC 上的射影为 E, 若 $AB=3AD$, 则 $\dfrac{CE}{EO}$ 的值为______.



16. 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=b\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数, $a>b>0$), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 直线 l 与圆 O 的极坐标方程分别为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}m$ (m 为非零常数) 与 $\rho=b$, 若直线 l 经过椭圆 C 的焦点, 且与圆 O 相切, 则椭圆 C 的离心率为______.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c, 已知 $\cos 2A - 3\cos(B+C) = 1$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

18. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足: $|a_2 - a_3| = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

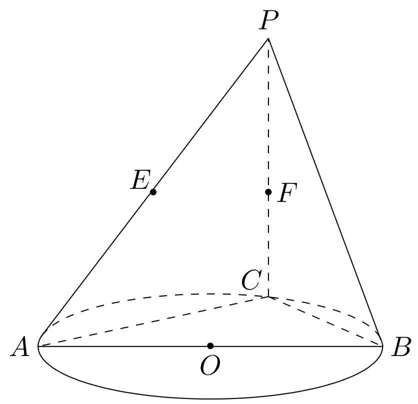
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在正整数 m, 使得 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_m} \geqslant 1$? 若存在, 求 m 的最小值; 若不存在, 说明理由.

19. 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A, B 的点, 直线 $PC \perp$ 平面 ABC, E, F 分别是 PA, PC 的中点.

(1) 记平面 BEF 与平面 ABC 的交线为 l, 试判断直线 l 与平面 PAC 的位置关系, 并加以证明;

(2) 设 (1) 中的直线 l 与圆 O 的另一个交点为 D, 且点 Q 满足 $\overrightarrow{DQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CP}$, 记直线 PQ 与平面 ABC 所成的角为 θ, 异面直线 PQ 与 EF 所成的角为 α, 二面角 $E - l - C$ 的大小为 β, 求证: $\sin\theta = \sin\alpha \sin\beta$.



20. 假设每天从甲地去乙地的旅客人数 X 是服从正态分布 $N\left(800, 50^2\right)$ 的随机变量, 记一天中从甲地去乙地的旅客人数不超过 900 的概率为 P_0.

(1) 求 P_0 的值;

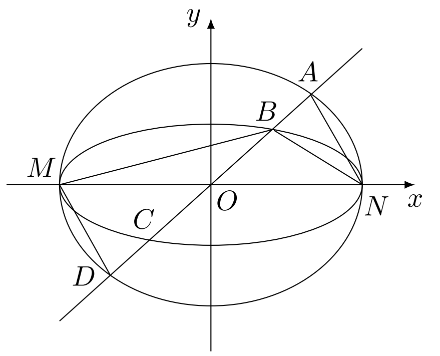
(参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 $P(\mu - \sigma < X \leqslant \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0.9544$, $P(\mu - 3\sigma < X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0.9974$)

(2) 某客运公司用 A, B 两种型号的车辆承担甲、乙两地间的长途客运业务, 每车每天往返一次, A, B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 从甲地去乙地的营运成本分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆. 公司拟组建一个不超过 21 辆车的客运车队, 并要求 B 型车不多于 A 型车 7 辆. 若每天要以不小于 p_0 的概率运完从甲地去乙地的旅客, 且使公司从甲地去乙地的营运成本最小, 那么应配备 A 型车、B 型车各多少辆?

21. 如图, 已知椭圆 C_1 与 C_2 的中心在坐标原点 O, 长轴均为 MN 且在 x 轴上, 短轴长分别为 $2m$, $2n$ $(m > n)$, 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1, C_2 的四个交点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D, 记 $\lambda = \dfrac{m}{n}$, $\triangle BDM$ 和 $\triangle ABN$ 的面积分别为 S_1 和 S_2.

(1) 当直线 l 与 y 轴重合时, 若 $S_1 = \lambda S_2$, 求 λ 的值;

(2) 当 λ 变化时, 是否存在与坐标轴不重合的直线 l, 使得 $S_1 = \lambda S_2$? 并说明理由.



22. 设 n 为正整数, r 为正有理数.

(1) 求函数 $f(x) = (1+x)^{r+1} - (r+1)x - 1\,(x > -1)$ 的最小值;

(2) 证明: $\dfrac{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}}{r+1} < n^r < \dfrac{(n+1)^{r+1} - n^{r+1}}{r+1}$;

(3) 设 $x \in \mathbf{R}$, 记 $\lceil x \rceil$ 为不小于 x 的最小整数, 例如 $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\left\lceil -\dfrac{3}{2} \right\rceil = -1$. 令 $S = \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{82} + \sqrt[3]{83} + \cdots + \sqrt[3]{125}$, 求 $\lceil S \rceil$ 的值.

(参考数据: $80^{\frac{4}{3}} \approx 344.7$, $81^{\frac{4}{3}} \approx 350.5$, $124^{\frac{4}{3}} \approx 618.3$, $126^{\frac{4}{3}} \approx 631.7$)