

文科数学

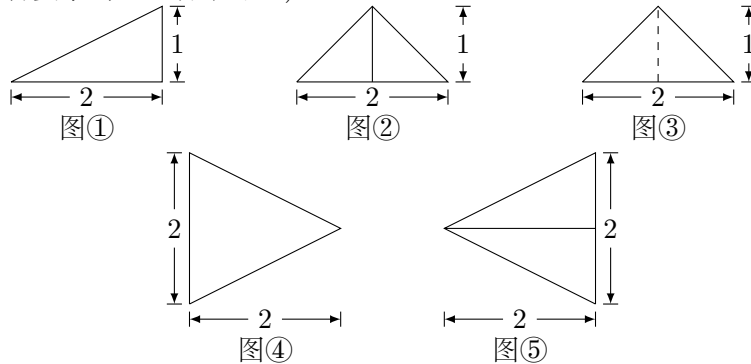
一、选择题

- 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 2\}$, $N = \{3, 4\}$, 则 $\complement_U(M \cup N) =$ ()
(A) $\{5\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{3, 4\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$
- 设 $iz = 4 + 3i$, 则 $z =$ ()
(A) $-3 - 4i$ (B) $-3 + 4i$ (C) $3 - 4i$ (D) $3 + 4i$
- 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 ()
(A) $p \wedge q$ (B) $\neg p \wedge q$ (C) $p \wedge \neg q$ (D) $\neg(p \vee q)$
- 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 ()
(A) 3π 和 $\sqrt{2}$ (B) 3π 和 2 (C) 6π 和 $\sqrt{2}$ (D) 6π 和 2
- 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$, 则 $z = 3x + y$ 的最小值为 ()
(A) 18 (B) 10 (C) 6 (D) 4
- $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 随机取一个数, 则取到的数小于 $\frac{1}{3}$ 的概率为 ()
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$
- 下列函数中最小值为 4 的是 ()
(A) $y = x^2 + 2x + 4$ (B) $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
(C) $y = 2^x + 2^{2-x}$ (D) $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$
- 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 ()
(A) $f(x-1) - 1$ (B) $f(x-1) + 1$
(C) $f(x+1) - 1$ (D) $f(x+1) + 1$
- 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ()
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
- 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值是 ()
(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

- 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 是函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()
(A) $a < b$ (B) $a > b$ (C) $ab < a^2$ (D) $ab > a^2$

二、填空题

- 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 5)$, $\mathbf{b} = (\lambda, 4)$, 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.
- 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的右焦点到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距离为_____.
- 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.
- 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____. (写出符合要求的一组答案即可)



三、解答题

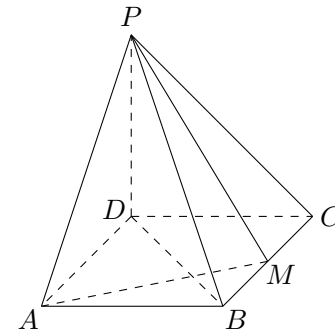
- 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} , 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 .

- 求 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$;
- 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

- 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.
(1) 证明: 平面 $PAM \perp$ 平面 PBD ;
(2) 若 $PD = DC = 1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



- 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$. 已知 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.
(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明 $T_n < \frac{S_n}{2}$.

20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

21. 设函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4, 1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 3|$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.