

理科数学

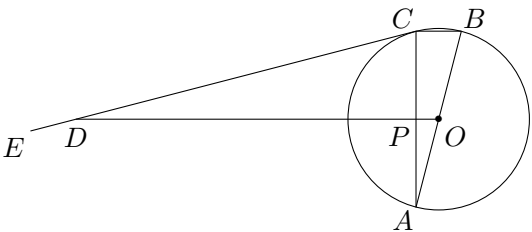
一、选择题

1. 若集合 $M = \{x \mid (x + 4)(x + 1) = 0\}$, $N = \{x \mid (x - 4)(x - 1) = 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
(A) $\{1, 4\}$ (B) $\{-1, -4\}$ (C) $\{0\}$ (D) \varnothing
2. 若复数 $z = i(3 - 2i)$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$ ()
(A) $2 - 3i$ (B) $2 + 3i$ (C) $3 + 2i$ (D) $3 - 2i$
3. 下列函数中, 既不是奇函数, 也不是偶函数的是 ()
(A) $y = \sqrt{1 + x^2}$ (B) $y = x + \frac{1}{x}$ (C) $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ (D) $y = x + e^x$
4. 袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球, 其中有 10 个白球, 5 个红球. 从袋中任取 2 个球, 所取的 2 个球中恰有 1 个白球, 1 个红球的概率为()
(A) $\frac{5}{21}$ (B) $\frac{10}{21}$ (C) $\frac{11}{21}$ (D) 1
5. 平行于直线 $2x + y + 1 = 0$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线的方程是()
(A) $2x + y + 5 = 0$ 或 $2x + y - 5 = 0$
(B) $2x + y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x + y - \sqrt{5} = 0$
(C) $2x - y + 5 = 0$ 或 $2x - y - 5 = 0$
(D) $2x - y + \sqrt{5} = 0$ 或 $2x - y - \sqrt{5} = 0$
6. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x + 5y \geq 8 \\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最小值为 ()
(A) 4 (B) $\frac{23}{5}$ (C) 6 (D) $\frac{31}{5}$
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{5}{4}$, 且其右焦点为 $F_2(5, 0)$, 则双曲线 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ (C) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$
8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等, 则正整数 n 的取值 ()
(A) 至多等于 3 (B) 至多等于 4 (C) 等于 5 (D) 大于 5

二、填空题

9. 在 $(\sqrt{x} - 1)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____.
10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25$, 则 $a_2 + a_8 =$ _____.
11. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$, 则 $b =$ _____.
12. 某高三毕业班有 40 人, 同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言, 那么全班共写了_____条毕业留言. (用数字作答)

13. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 若 $E(X) = 30$, $D(X) = 20$, 则 $p =$ _____.
14. 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, 点 A 的极坐标为 $A\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$, 则点 A 到直线 l 的距离为_____.
15. 如图, 已知 AB 是圆 O 的直径, $AB = 4$, EC 是圆 O 的切线, 切点为 C , $BC = 1$. 过圆心 O 作 BC 的平行线, 分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P , 则 $OD =$ _____.



三、解答题

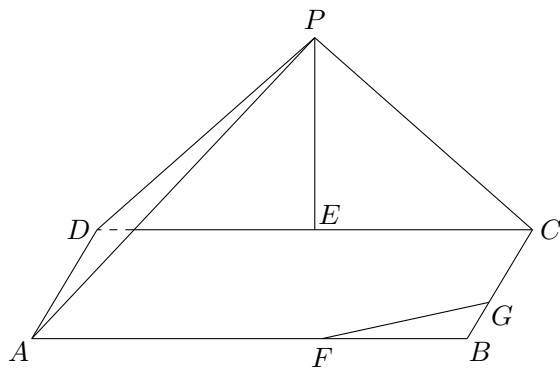
16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知向量 $\boldsymbol{m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\boldsymbol{n} = (\sin x, \cos x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
(1) 若 $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{n}$, 求 $\tan x$ 的值;
(2) 若 \boldsymbol{m} 与 \boldsymbol{n} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 x 的值.

17. 某工厂 36 名工人的年龄数据如下表.

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

- (1) 用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本, 且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44, 列出样本的年龄数据;
- (2) 计算 (1) 中样本的均值 \bar{x} 和方差 s^2 ;
- (3) 36 名工人中年龄在 $\bar{x} - s$ 与 $\bar{x} + s$ 之间有多少人? 所占的百分比是多少 (精确到 0.01%)?

18. 如图, 三角形 PDC 所在的平面与长方形 $ABCD$ 所在的平面垂直, $PD = PC = 4$, $AB = 6$, $BC = 3$. 点 E 是 CD 边的中点, 点 F, G 分别在线段 AB, BC 上, 且 $AF = 2FB$, $CG = 2GB$.
- (1) 证明: $PE \perp FG$;
 - (2) 求二面角 $P-AD-C$ 的正切值;
 - (3) 求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



20. 已知过原点的动直线 l 与圆 $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 相交于不同的两点 A, B .
- (1) 求圆 C_1 的圆心坐标;
 - (2) 求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程;
 - (3) 是否存在实数 k , 使得直线 $L: y = k(x - 4)$ 与曲线 C 只有一个交点? 若存在, 求出 k 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

21. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求 a_3 的值;
 - (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;
 - (3) 令 $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)a_n$ ($n \geq 2$), 证明: 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n < 2 + 2\ln n$.

19. 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = (1 + x^2)e^x - a$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上仅有一个零点;
 - (3) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行, 且在点 $M(m, n)$ 处的切线与直线 OP 平行 (O 是坐标原点), 证明: $m \leq \sqrt[3]{a - \frac{2}{e}} - 1$.