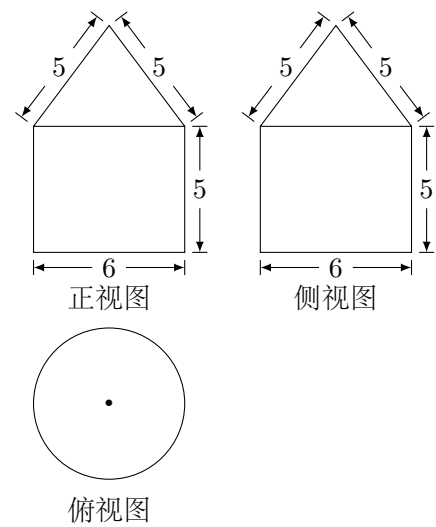


理科数学

一、选择题

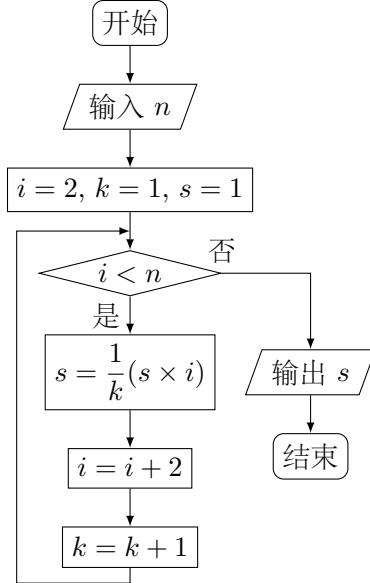
1. 设 i 为虚数单位, 则复数 $\frac{5-6i}{i} =$ ()
(A) $6+5i$ (B) $6-5i$ (C) $-6+5i$ (D) $-6-5i$
2. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 2, 4\}$, 则 $\complement_U M =$ ()
(A) U (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) $\{3, 5, 6\}$ (D) $\{2, 4, 6\}$
3. 若向量 $\overrightarrow{BA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CA} = (4, 7)$, 则 $\overrightarrow{BC} =$ ()
(A) $(-2, -4)$ (B) $(3, 4)$ (C) $(6, 10)$ (D) $(-6, -10)$
4. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()
(A) $y = \ln(x+2)$ (B) $y = -\sqrt{x+1}$ (C) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (D) $y = x + \frac{1}{x}$
5. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2 \\ x+y \geq 1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = 3x+y$ 的最大值为()
(A) 12 (B) 11 (C) 3 (D) -1
6. 某几何体的三视图如图所示, 则它的体积为 ()



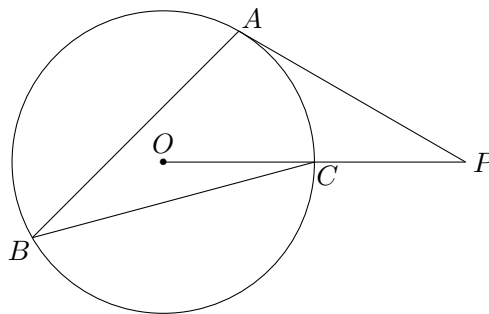
- (A) 12π (B) 45π (C) 57π (D) 81π
7. 从个位数与十位数之和为奇数的两位数中任取一个, 其个位数为 0 的概率是 ()
(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{1}{9}$
8. 对任意两个非零的平面向量 α 和 β , 定义 $\alpha \circ \beta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta}$. 若平面向量 a, b 满足 $|a| \geq |b| > 0$, a 与 b 的夹角 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 且 $a \circ b$ 和 $b \circ a$ 都在集合 $\left\{\frac{n}{2} \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$ 中, 则 $a \circ b =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

二、填空题

9. 不等式 $|x+2| - |x| \leq 1$ 的解集为_____.
10. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)
11. 已知递增的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2^2 - 4$, 则 $a_n =$ _____.
12. 曲线 $y = x^3 - x + 3$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程为_____.
13. 执行如图所示的程序框图, 若输入 n 的值为 8, 则输出 s 的值为_____.



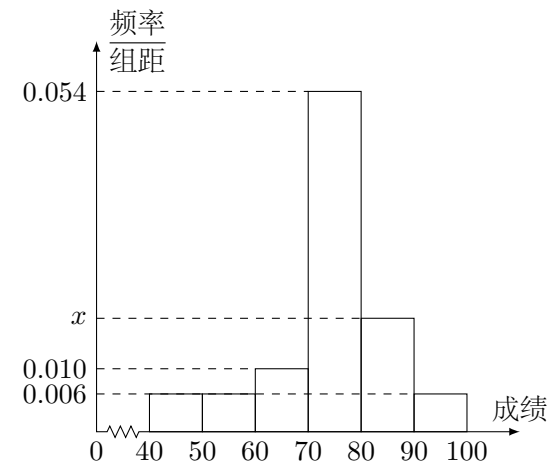
14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 和 C_2 的参数方程分别为 $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数) 和 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则曲线 C_1 和 C_2 的交点坐标为_____.
15. 如图, 圆 O 的半径为 1, A, B, C 是圆周上的三点, 满足 $\angle ABC = 30^\circ$, 过点 A 作圆 O 的切线与 OC 的延长线交于点 P , 则 $PA =$ _____.



三、解答题

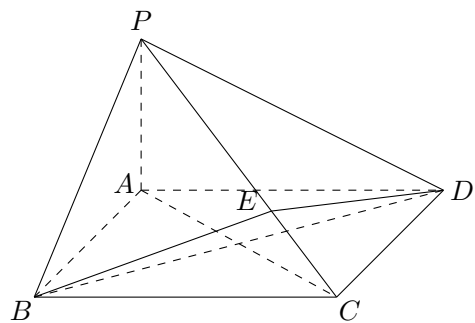
16. 已知函数 $f(x) = 2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ (其中 $\omega > 0$, $x \in \mathbf{R}$) 的最小正周期为 10π .
(1) 求 ω 的值;
(2) 设 $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f\left(5\alpha + \frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{6}{5}$, $f\left(5\beta - \frac{5}{6}\pi\right) = \frac{16}{17}$, 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

17. 某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$.



- (1) 求图中 x 的值;
- (2) 从成绩不低于 80 分的学生中随机选取 2 人, 该 2 人中成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的人数记为 ξ , 求 ξ 的数学期望.

18. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 点 E 在线段 PC 上, $PC \perp$ 平面 BDE .
- (1) 证明: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (2) 若 $PA = 1$, $AD = 2$, 求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \sqrt{\frac{2}{3}}$, 且椭圆 C 上的点到点 $Q(0, 2)$ 的距离的最大值为 3.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 在椭圆 C 上, 是否存在点 $M(m, n)$, 使得直线 $l: mx + ny = 1$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于不同的两点 A, B , 且 $\triangle OAB$ 的面积最大? 若存在, 求出点 M 的坐标及相对应的 $\triangle OAB$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

21. 设 $a < 1$, 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 3(1+a)x + 6a > 0\}$, $D = A \cap B$.
- (1) 求集合 D (用区间表示);
- (2) 求函数 $f(x) = 2x^3 - 3(1+a)x^2 + 6ax$ 在 D 内的极值点.

19. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 成等差数列.
- (1) 求 a_1 的值;
- (2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (3) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}$.