

2001 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

# 理科数学

一、填空题

1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \in (-\infty, 1] \\ \log_{81}x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$ , 则满足  $f(x) = \frac{1}{4}$  的  $x$  值为\_\_\_\_\_.

2. 设数列  $\{a_n\}$  的通项为  $a_n = 2n - 7$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), 则  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{10}| =$ \_\_\_\_\_.

3. 设  $P$  为双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  上一动点,  $O$  为坐标原点,  $M$  为线段  $OP$  的中点, 则点  $M$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

4. 设集合  $A = \{x | 2 \lg x = \lg(8x - 15), x \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \left\{x \left| \cos \frac{x}{2} > 0, x \in \mathbb{R}\right.\right\}$ , 则  $A \cap B$  的元素个数为\_\_\_\_\_个.

5. 抛物线  $x^2 - 4y - 3 = 0$  的焦点坐标为\_\_\_\_\_.

6. 设数列  $\{a_n\}$  是公比  $q > 0$  的等比数列,  $S_n$  是它的前  $n$  项和.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 7$ , 则此数列的首项  $a_1$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

7. 某餐厅供应客饭, 每位顾客可以在餐厅提供的菜肴中任选 2 脍 2 素共 4 种不同的品种. 现在餐厅准备了 5 种不同的荤菜, 若要保证每位顾客有 200 种以上不同的选择, 则餐厅至少还需要准备不同的素菜品种\_\_\_\_\_种. (结果用数值表示)

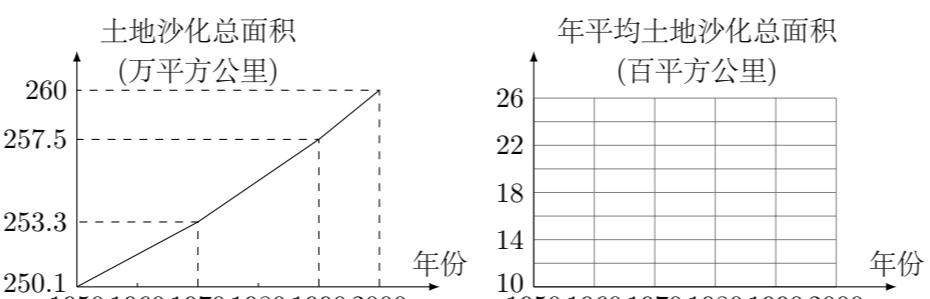
8. 在代数式  $(4x^2 - 2x - 5) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^5$  的展开式中, 常数项为\_\_\_\_\_.

9. 设  $x = \sin \alpha$ ,  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ , 则  $\arccos x$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

10. 直线  $y = 2x - \frac{1}{2}$  与曲线  $\begin{cases} x = \sin \varphi \\ y = \cos 2\varphi \end{cases}$  ( $\varphi$  为参数) 的交点坐标为\_\_\_\_\_.

11. 已知两个圆:  $x^2 + y^2 = 1$  ①与  $x^2 + (y - 3)^2 = 1$  ②, 则由①式减去②式可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线的情况下加以推广, 即要求得到一个更一般的命题, 而已知命题应成为所推广命题的一个特例, 推广的命题为\_\_\_\_\_.

12. 据报道, 我国目前已成为世界上受荒漠化危害最严重的国家之一. 下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况. 由图中的相关信息, 可将上述有关年代中, 我国年平均土地沙化面积在下右图中图示为:



二、选择题

13.  $a = 3$  是直线  $ax + 2y + 3a = 0$  和直线  $3x + (a - 1)y = a - 7$  平行且不重合的 ( )

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

14. 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  为  $AC$  与  $BD$  的交点, 若  $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$ , 则下列向量中与  $\overrightarrow{B_1M}$  相等的向量是 ( )

- (A)  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$  (B)  $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$   
(C)  $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$  (D)  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

15. 已知  $a$ 、 $b$  为两条不同的直线,  $\alpha$ 、 $\beta$  为两个不同的平面, 且  $a \perp \alpha$ ,  $b \perp \beta$ , 则下列命题中的假命题是 ( )

- (A) 若  $a \parallel b$ , 则  $\alpha \parallel \beta$  (B) 若  $\alpha \perp \beta$ , 则  $a \perp b$   
(C) 若  $a$ 、 $b$  相交, 则  $\alpha$ 、 $\beta$  相交 (D) 若  $\alpha$ 、 $\beta$  相交, 则  $a$ 、 $b$  相交

16. 用计算器验算函数  $y = \frac{\lg x}{x}$  ( $x > 1$ ) 的若干个值, 可以猜想下列命题中的真命题只能是 ( )

- (A)  $y = \frac{\lg x}{x}$  在  $(1, +\infty)$  上是单调减函数  
(B)  $y = \frac{\lg x}{x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$  的值域为  $\left(0, \frac{\lg 3}{3}\right]$   
(C)  $y = \frac{\lg x}{x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$  有最小值  
(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

三、解答题

17. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是  $\triangle ABC$  中  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的对边,  $S$  是  $\triangle ABC$  的面积, 若  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $S = 5\sqrt{3}$ , 求  $c$  的长度.

18. 设  $F_1$ 、 $F_2$  为椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的两个焦点,  $P$  为椭圆上的一点. 已知  $P$ 、 $F_1$ 、 $F_2$  是一个直角三角形的三个顶点, 且  $|PF_1| > |PF_2|$ , 求  $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$  的值.

20. 对任意一个非零复数  $z$ , 定义集合  $M_z = \{\omega | \omega = z^{2n-1}, n \in \mathbf{N}\}$ .
- (1) 设  $a$  是方程  $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$  的一个根, 试用列举法表示集合  $M_a$ . 若在  $M_a$  中任取两个数, 求其和为零的概率  $P$ ;
  - (2) 设复数  $\omega \in M_z$ , 求证:  $M \subseteq M_z$ .
21. 用水清洗一堆蔬菜上残留的农药, 对用一定量的水清洗一次的效果作如下假定: 用 1 个单位量的水可洗掉蔬菜上残留农药用量的  $\frac{1}{2}$ , 用水越多洗掉的农药量也越多, 但总还有农药残留在蔬菜上. 设用  $x$  单位量的水清洗一次以后, 蔬菜上残留的农药与本次清洗前残留有农药量之比为函数  $f(x)$ .
- (1) 试规定  $f(0)$  的值, 并解释其实际意义;
  - (2) 试根据假定写出函数  $f(x)$  应该满足的条件和具有的性质;
  - (3) 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 现有  $a$  ( $a > 0$ ) 单位量的水, 可以清洗一次, 也可以把水平均分成 2 份后清洗两次. 试问用哪种方案清洗后蔬菜上的农药量比较少? 说明理由.
22. 对任意函数  $f(x)$ ,  $x \in D$ , 可按图示构造一个数列发生器, 其工作原理如下:
- ① 输入数据  $x_0 \in D$ , 经数列发生器输出  $x_1 = f(x_0)$ ;
  - ② 若  $x_1 \notin D$ , 则数列发生器结束工作; 若  $x_1 \in D$ , 则将  $x_1$  反馈回输入端, 再输出  $x_2 = f(x_1)$ , 并依此规律继续下去. 现定义  $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$ .
- (1) 若输出  $x_0 = \frac{49}{65}$ , 则由数列发生器产生数列  $\{x_n\}$ . 请写出数列  $\{x_n\}$  的所有项;
  - (2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数数列, 试求输出的初始数据  $x_0$  的值;
  - (3) 若输出  $x_0$  时, 产生的无穷数列  $\{x_n\}$  满足: 对任意正整数  $n$  均有  $x_n < x_{n+1}$ , 求  $x_0$  的取值范围.

