2013 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 z 在复平面内对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 已知集合 $A=\{1,a\}$, $B=\{1,2,3\}$, 则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

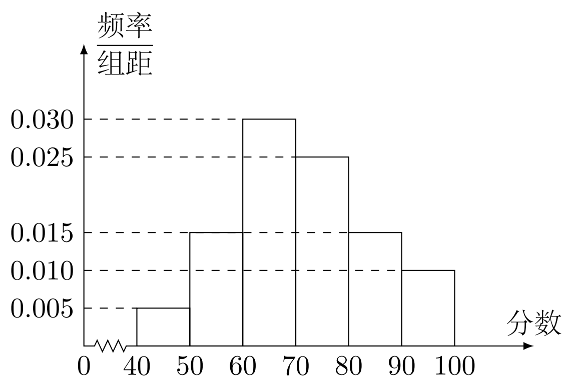
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到渐近线的距离等于 ( )

(A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

4. 某校从高一年级学生中随机抽取部分学生, 将他们的模块测试成绩分成 6 组: $[40,50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100)$ 加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图. 已知高一年级共有学生 600 名, 据此估计, 该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为 ( )



(A) 588 (B) 480 (C) 450 (D) 120

5. 满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$, 且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序数对 (a,b) 的个数为 ( )

(A) 14 (B) 13 (C) 12 (D) 10

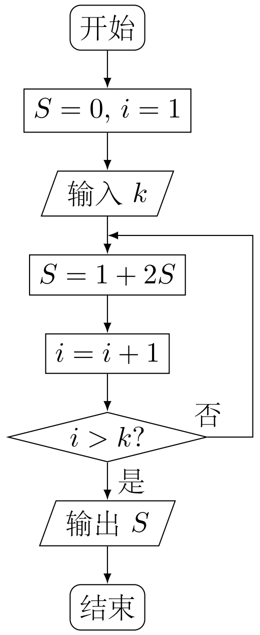
6. 阅读如图所示的程序框图, 若输入的 $k=10$, 则该算法的功能是 ( )

(A) 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 10 项和

(B) 计算数列 $\{2^{n-1}\}$ 的前 9 项和

(C) 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 10 项和

(D) 计算数列 $\{2^n-1\}$ 的前 9 项和



7. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AC}=(1,2)$, $\overrightarrow{BD}=(-4,2)$, 则该四边形的面积为 ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 5 (D) 10

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, x_0 ($x_0\neq 0$) 是 $f(x)$ 的极大值点, 以下结论一定正确的是 ( )

(A) $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\leqslant f(x_0)$ (B) $-x_0$ 是 $f(-x)$ 的极小值点

(C) $-x_0$ 是 $-f(x)$ 的极小值点 (D) $-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 记 $b_n=a_{m(n-1)+1}+a_{m(n-1)+2}+\cdots+a_{m(n-1)+m}$, $c_n=a_{m(n-1)+1}\cdot a_{m(n-1)+2}\cdot\cdots\cdot a_{m(n-1)+m}$, ($m$, $n\in\mathbf{N}^*$), 则以下结论一定正确的是 ( )

(A) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 公差为 q^m

(B) 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{2m}

(C) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^2}

(D) 数列 $\{c_n\}$ 为等比数列, 公比为 q^{m^m}

10. 设 S,T 是 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集, 如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足:

① $T=\{f(x)\mid x\in S\}$;

② 对任意 $x_1,x_2\in S$, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$;

那么称这两个集合“保序同构”, 以下集合对不是“保序同构”的是 ( )

(A) $A=\mathbf{N}^*$, $B=\mathbf{N}$

(B) $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid x=-8$ 或 $0<x\leqslant 10\}$

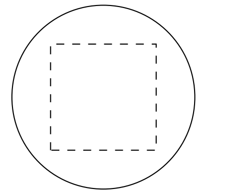
(C) $A=\{x\mid 0<x<1\}$, $B=\mathbf{R}$

(D) $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$

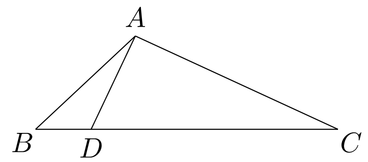
二、填空题

11. 利用计算机产生 $0\sim 1$ 之间的均匀随机数 a, 则事件“$3a-1>0$”发生的概率为______.

12. 已知某一多面体内接于球构成一个简单组合体, 如果该组合体的正视图、侧视图、俯视图均如图所示, 且图中的四边形是边长为 2 的正方形, 则该球的表面积是______.



13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 在 BC 边上, $AD\perp AC$, $\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $AB=3\sqrt{2}$, $AD=3$, 则 BD 的长为______.



14. 椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2, 焦距为 $2c$, 若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$ 与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于______.

15. 当 $x\in\mathbf{R}$, $|x|<1$ 时, 有如下表达式:

$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}$.

两边同时积分得:

$\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x+\cdots=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x$,

从而得到如下等式:

$1\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+\cdots=\ln 2$.

请根据以上材料所蕴含的数学思想方法, 计算:

$\mathrm{C}_n^0\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{C}_n^1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\mathrm{C}_n^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=$______.

三、解答题

16. 某联欢晚会举行抽奖活动, 举办方设置了甲、乙两种抽奖方案, 方案甲的中奖率为 $\dfrac{2}{3}$, 中奖可以获得 2 分; 方案乙的中奖率为 $\dfrac{2}{5}$, 中奖可以获得 3 分; 未中奖则不得分. 每人有且只有一次抽奖机会, 每次抽奖中奖与否互不影响, 晚会结束后凭分数兑换奖品.

(1) 若小明选择方案甲抽奖, 小红选择方案乙抽奖, 记他们的累计得分为 X, 求 $X\leqslant 3$ 的概率;

(2) 若小明、小红两人都选择方案甲或都选择方案乙进行抽奖, 问: 他们选择何种方案抽奖, 累计得分的数学期望较大?

17. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

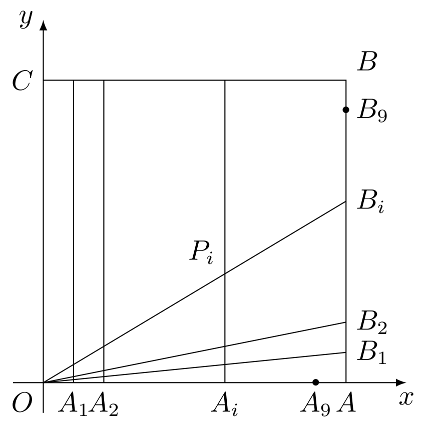
(1) 当 $a=2$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的极值.

18. 如图, 在正方形 $OABC$ 中, O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(10,0)$, 点 C 的坐标为 $(0,10)$. 分别将线段 OA 和 AB 十等分, 分点分别记为 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_9$, 连接 OB_i, 过 A_i 作 x 轴的垂线与 OB_i 交于点 P_i $(i\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant i\leqslant 9)$.

(1) 求证: 点 P_i $(i\in\mathbf{N}^*,\ 1\leqslant i\leqslant 9)$ 都在同一条抛物线上, 并求该抛物线 E 的方程;

(2) 过点 C 作直线 l 与抛物线 E 交于不同的两点 M, N, 若 $\triangle OCM$ 与 $\triangle OCN$ 的面积之比为 $4:1$, 求直线 l 的方程.

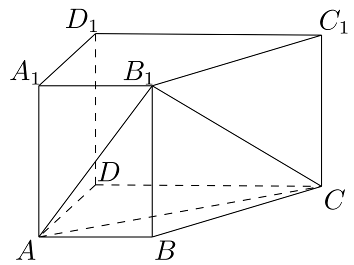


19. 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\,/\!/\,DC$, $AA_1=1$, $AB=3k$, $AD=4k$, $BC=5k$, $DC=6k$ $(k>0)$.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1;

(2) 若直线 AA_1 与平面 AB_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{6}{7}$, 求 k 的值;

(3) 现将与四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 形状和大小完全相同的两个四棱柱拼成一个新的四棱柱, 规定: 若拼成的新四棱柱形状和大小完全相同, 则视为同一种拼接方案, 问: 共有几种不同的拼接方案? 在这些拼接成的新四棱柱中, 记其中最小的表面积为 $f(k)$, 写出 $f(k)$ 的解析式. (直接写出答案, 不必说明理由)



20. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的周期为 π, 图象的一个对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$, 将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将得到的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象.

(1) 求函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式;

(2) 是否存在 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 使得 $f(x_0)$, $g(x_0)$, $f(x_0)g(x_0)$ 按照某种顺序成等差数列? 若存在, 请确定 x_0 的个数, 若不存在, 说明理由;

(3) 求实数 a 与正整数 n, 使得 $F(x)=f(x)+ag(x)$ 在 $(0,n\pi)$ 内恰有 2013 个零点.

21. 三选二.

【A】已知直线 $l: ax+y=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 对应的变换作用下变为直线 $l': x+by=1$.

(1) 求实数 a, b 的值;

(2) 若点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 l 上, 且 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$, 求点 P 的坐标.

【B】在平面直角坐标系中, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系. 已知点 A 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=a$, 且点 A 在直线 l 上.

(1) 求 a 的值及直线 l 的直角坐标方程;

(2) 圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数), 试判断直线 l 与圆 C 的位置关系.

【C】设不等式 $|x-2|<a$ $(a\in\mathbf{N}^*)$ 的解集为 A, 且 $\dfrac{3}{2}\in A$, $\dfrac{1}{2}\notin A$.

(1) 求 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$ 的最小值.