2010 年普通高等学校招生考试（四川卷）

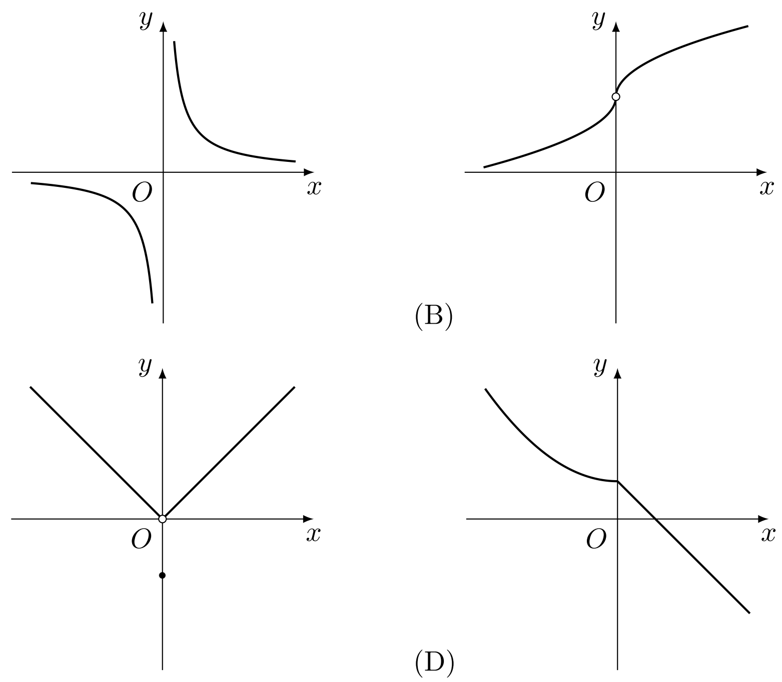
理科数学

一、选择题

1. i 是虚数单位, 计算 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=$ ( )

(A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

2. 下列四个图象所表示的函数, 在点 $x=0$ 处连续的是 ( )



(A) (B) (C) (D)

3. $2\log_5 10+\log_5 0.25=$ ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

4. 函数 $f(x)=x^2+mx+1$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称的充要条件是( )

(A) $m=-2$ (B) $m=2$ (C) $m=-1$ (D) $m=1$

5. 设点 M 是线段 BC 的中点, 点 A 在直线 BC 外, $\overrightarrow{BC}^2=16$, $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$, 则 $\left|\overrightarrow{AM}\right|=$ ( )

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 1

6. 将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向右平行移动 $\dfrac{\pi}{10}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象的函数解析式是 ( )

(A) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{10}\right)$ (B) $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$

(C) $y=\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{10}\right)$ (D) $y=\sin\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{20}\right)$

7. 某加工厂用某原料由甲车间加工出 A 产品, 由乙车间加工出 B 产品. 甲车间加工一箱原料需耗费工时 10 小时可加工出 7 千克 A 产品, 每千克 A 产品获利 40 元. 乙车间加工一箱原料需耗费工时 6 小时可加工出 4 千克 B 产品, 每千克 B 产品获利 50 元. 甲、乙两车间每天共能完成至多 70 箱原料的加工, 每天甲、乙两车间耗费工时总和不得超过 480 小时, 甲、乙两车间每天总获利最大的生产计划为 ( )

(A) 甲车间加工原料 10 箱, 乙车间加工原料 60 箱

(B) 甲车间加工原料 15 箱, 乙车间加工原料 55 箱

(C) 甲车间加工原料 18 箱, 乙车间加工原料 50 箱

(D) 甲车间加工原料 40 箱, 乙车间加工原料 30 箱

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1\neq 0$, 其前 n 项和为 S_n, 且 $S_{n+1}=2S_n+a_1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=$ ( )

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

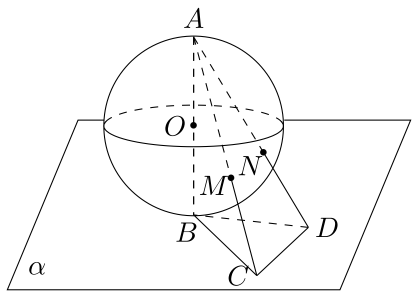
9. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 F, 其右准线与 x 轴的交点为 A, 在椭圆上存在点 P 满足线段 AP 的垂直平分线过点 F, 则椭圆离心率的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\sqrt{2}-1,1\right)$ (D) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$

10. 由 1、2、3、4、5、6 组成没有重复数字且 1、3 都不与 5 相邻的六位偶数的个数是 ( )

(A) 72 (B) 96 (C) 108 (D) 144

11. 半径为 R 的球 O 的直径 AB 垂直于平面 α, 垂足为 B, $\triangle BCD$ 是平面 α 内边长为 R 的正三角形, 线段 AC、AD 分别与球面交于点 M、N, 那么 M、N 两点间的球面距离是 ( )



(A) $R\arccos\dfrac{17}{25}$ (B) $R\arccos\dfrac{18}{25}$ (C) $\dfrac{1}{3}\pi R$ (D) $\dfrac{4}{15}\pi R$

12. 设 $a>b>c>0$, 则 $2a^2+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是( )

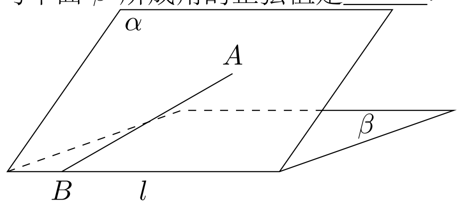
(A) 2 (B) 4 (C) $2\sqrt{5}$ (D) 5

二、填空题

13. $\left(2-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中的第四项是______.

14. 直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A、B 两点, 则 $|AB|=$______.

15. 如图, 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小是 $60°$, $AB\subset\alpha$, $B\in l$, AB 与 l 所成的角为 $30°$, 则 AB 与平面 β 所成角的正弦值是______.



16. 设 S 为复数集 $\mathbf{C}$ 的非空子集. 若对任意 x, $y\in S$, 都有 $x+y$, $x-y$, $xy\in S$, 则称 S 为封闭集. 下列命题:

① 集合 $S=\{a+b\mathrm{i}\mid a, b$ 为整数, i 为虚数单位 $\}$ 为封闭集;

② 若 S 为封闭集, 则一定有 $0\in S$;

③ 封闭集一定是无限集;

④ 若 S 为封闭集, 则满足 $S\subseteq T\subseteq\mathbf{C}$ 的任意集合 T 也是封闭集.

其中真命题是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 某种有奖销售的饮料, 瓶盖内印有"奖励一瓶"或"谢谢购买"字样, 购买一瓶若其瓶盖内印有"奖励一瓶"字样即为中奖, 中奖概率为 $\dfrac{1}{6}$. 甲、乙、丙三位同学每人购买了一瓶该饮料.

(1) 求甲中奖且乙、丙都没有中奖的概率;

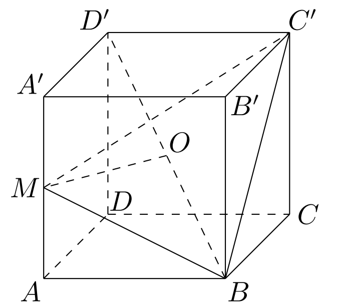
(2) 求中奖人数 ξ 的分布列及数学期望 E_ξ.

18. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱长为 1, 点 M 是棱 AA' 的中点, 点 O 是对角线 BD' 的中点.

(1) 求证: OM 为异面直线 AA' 和 BD' 的公垂线;

(2) 求二面角 $M-BC'-B'$ 的大小;

(3) 求三棱锥 $M-OBC$ 的体积.



19. (1) ① 证明两角和的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}$: $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

② 由 $\mathrm{C}_{(\alpha+\beta)}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}$: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$, 且 $\cos B=\dfrac{3}{5}$, 求 $\cos C$.

20. 已知定点 $A(-1,0)$, $F(2,0)$, 定直线 l: $x=\dfrac{1}{2}$, 不在 x 轴上的动点 P 与点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍. 设点 P 的轨迹为 E, 过点 F 的直线交 E 于 B、C 两点, 直线 AB、AC 分别交 l 于点 M、N.

(1) 求 E 的方程;

(2) 试判断以线段 MN 为直径的圆是否过点 F, 并说明理由.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0$, $a_2=2$, 且对任意 m, $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{2m-1}+a_{2n-1}=2a_{m+n-1}+2(m-n)^2$.

(1) 求 a_3, a_5;

(2) 设 $b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 设 $c_n=(a_{n+1}-a_n)q^{n-1}$ $(q\neq 0,\ n\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22. 设 $f(x)=\dfrac{1+a^x}{1-a^x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(1) 设关于 x 的方程 $\log_a\dfrac{t}{(x^2-1)(7-x)}=g(x)$ 在区间 $[2,6]$ 上有实数解, 求 t 的取值范围;

(2) 当 $a=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时, 证明: $\sum\limits_{k=2}^{n}g(k)>\dfrac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$;

(3) 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 试比较 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-n\right|$ 与 4 的大小, 并说明理由.