

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{x \mid 3 - 2x > 0\}$, 则 ()

(A) $A \cap B = \left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}$ (B) $A \cap B = \emptyset$

(C) $A \cup B = \left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}$ (D) $A \cup B = \mathbf{R}$

2. 为评估一种农作物的种植效果, 选了 n 块地作试验田, 这 n 块地的亩产量 (单位: kg) 分别是 x_1, x_2, \dots, x_n , 下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是 ()

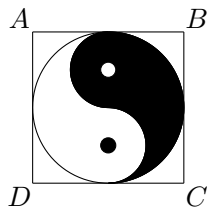
(A) x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数 (B) x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差

(C) x_1, x_2, \dots, x_n 的最大值 (D) x_1, x_2, \dots, x_n 的中位数

3. 下列各式的运算结果为纯虚数的是 ()

(A) $i(1+i)^2$ (B) $i^2(1-i)$ (C) $(1+i)^2$ (D) $i(1+i)$

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图, 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是 ()

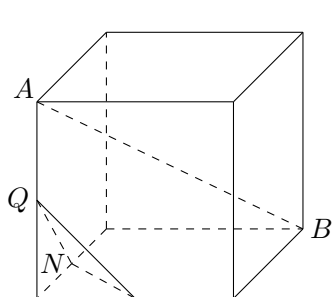


(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\pi}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

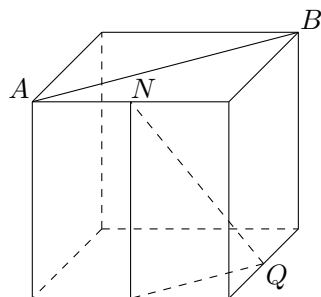
5. 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点, P 是 C 上一点, 且 PF 与 x 轴垂直, 点 A 的坐标是 $(1, 3)$. 则 $\triangle APF$ 的面积为 ()

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

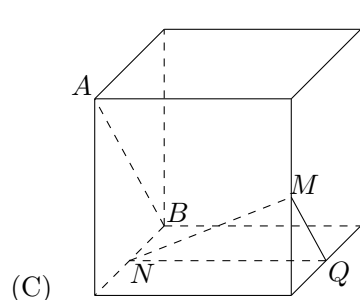
6. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是 ()



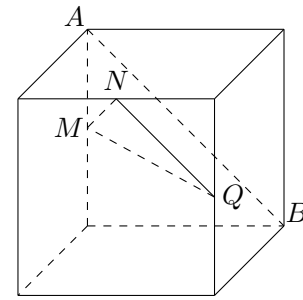
(A)



(B)



(C)

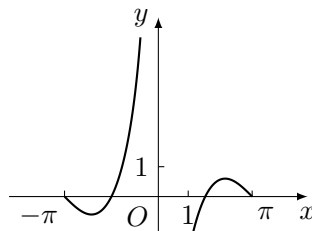


(D)

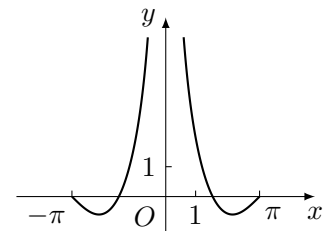
7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 3y \leq 3 \\ x - y \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为 ()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

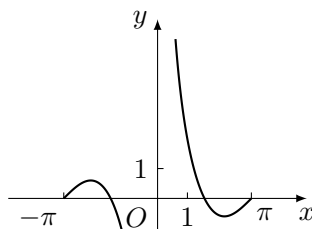
8. 函数 $y = \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$ 的部分图象大致为 ()



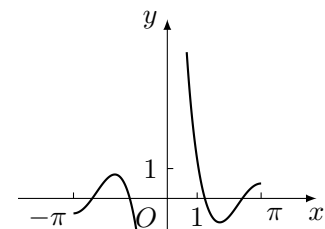
(A)



(B)



(C)



(D)

9. 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(2 - x)$, 则 ()

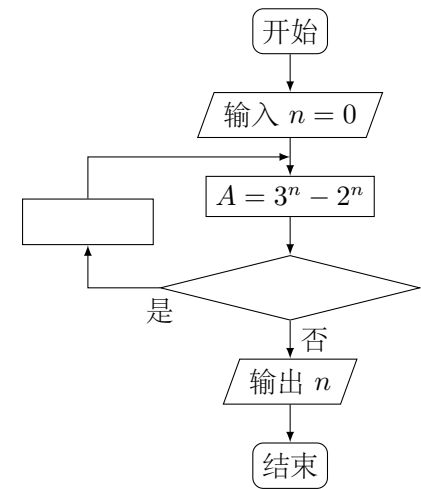
(A) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增

(B) $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减

(C) $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称

(D) $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

10. 如图程序框图是为了求出满足 $3^n - 2^n > 1000$ 的最小偶数 n , 那么在 \diamond 和 \square 两个空白框中, 可以分别填入 ()



(A) $A > 1000$ 和 $n = n + 1$

(B) $A > 1000$ 和 $n = n + 2$

(C) $A \leq 1000$ 和 $n = n + 1$

(D) $A \leq 1000$ 和 $n = n + 2$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$, $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 则 $C =$ ()

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$

12. 设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{m} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB = 120^\circ$, 则 m 的取值范围是 ()

(A) $(0, 1] \cup [9, +\infty)$ (B) $(0, \sqrt{3}] \cup [9, +\infty)$

(C) $(0, 1] \cup [4, +\infty)$ (D) $(0, \sqrt{3}] \cup [4, +\infty)$

二、填空题

13. 已知向量 $a = (-1, 2)$, $b = (m, 1)$, 若向量 $a + b$ 与 a 垂直, 则 $m =$ _____.

14. 曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为_____.

15. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$ _____.

16. 已知三棱锥 $S - ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径, 若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB , $SA = AC$, $SB = BC$, 三棱锥 $S - ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为_____.

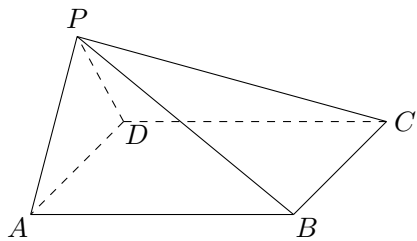
三、解答题

17. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2 = 2$, $S_3 = -6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n , 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否能成等差数列.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.
- (1) 证明: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;
- (2) 若 $PA = PD = AB = DC$, $\angle APD = 90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.



19. 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 下面是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸:

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得

$$\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97, s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2 \right)} \approx$$

0.212, $\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (i - 8.5)^2} \approx 18.439$, $\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})(i - 8.5) = -2.78$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i = 1, 2, \dots, 16$.

- (1) 求 (x_i, i) ($i = 1, 2, \dots, 16$) 的相关系数 r , 并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小; (若 $|r| < 0.25$, 则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小)
- (2) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

① 从这一天抽检的结果看, 是否需对当天的生产过程进行检查?

② 在 $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ 之外的数据称为离群值, 试剔除离群值, 估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值与标准差. (精确到 0.01)

附: 样本 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) 的相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \sqrt{0.008} \approx 0.09$.

20. 设 A, B 为曲线 $C: y = \frac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.
- (1) 求直线 AB 的斜率;
- (2) 设 M 为曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, 且 $AM \perp BM$, 求直线 AB 的方程.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = a + 4t \\ y = 1 - t \end{cases}$ (t 为参数).

- (1) 若 $a = -1$, 求 C 与 l 的交点坐标;
- (2) 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a .

21. 已知函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

23. 已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4$, $g(x) = |x + 1| + |x - 1|$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集;
- (2) 若不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$, 求 a 的取值范围.