2007 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $\cos\theta\cdot\tan\theta<0$, 那么角 θ 是 ( )

(A) 第一或第二象限角 (B) 第二或第三象限角

(C) 第三或第四象限角 (D) 第一或第四象限角

2. 函数 $f(x)=3^x$ $(0<x\leqslant 2)$ 的反函数的定义域为 ( )

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(1,9]$ (C) $(0,1)$ (D) $[9,+\infty)$

3. 平面 $\alpha\parallel$ 平面 β 的一个充分条件是 ( )

(A) 存在一条直线 a, $a\parallel\alpha$, $a\parallel\beta$

(B) 存在一条直线 a, $a\subset\alpha$, $a\parallel\beta$

(C) 存在两条平行直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

(D) 存在两条异面直线 a, b, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\parallel\beta$, $b\parallel\alpha$

4. 已知 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, D 为 BC 边中点, 且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, 那么 ( )

(A) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$ (B) $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$ (C) $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$ (D) $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

5. 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照, 要求排成一排, 2 位老人相邻但不排在两端, 不同的排法共有 ( )

(A) 1440 种 (B) 960 种 (C) 720 种 (D) 480 种

6. 若不等式组 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ 2x+y\leqslant 2\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a\end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $a\geqslant\dfrac{4}{3}$ (B) $0<a\leqslant 1$

(C) $1\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}$ (D) $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\dfrac{4}{3}$

7. 如果正数 a, b, c, d 满足 $a+b=cd=4$, 那么 ( )

(A) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(B) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(C) $ab\leqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(D) $ab\geqslant c+d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

8. 对于函数① $f(x)=\lg(|x-2|+1)$, ② $f(x)=(x-2)^2$, ③ $f(x)=\cos(x+2)$, 判断如下三个命题的真假:

命题甲: $f(x+2)$ 是偶函数;

命题乙: $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数, 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数;

命题丙: $f(x+2)-f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是 ( )

(A) ①③ (B) ①② (C) ③ (D) ②

二、填空题

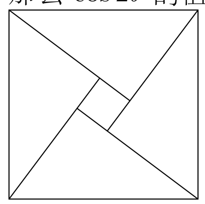
9. $\dfrac{2}{(1+\mathrm{i})^2}=$______.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-10n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, 则此数列的通项公式为______; 数列 $\{na_n\}$ 中数值最小的项是第______项.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$______.

12. 已知集合 $A=\{x||x-a|\leqslant 1\}$, $B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\bigcap B=\varnothing$, 则实数 a 的取值范围是______.

13. 2002 年在北京召开的国际数学家大会, 会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的. 弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形 (如图). 如果小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 那么 $\cos 2\theta$ 的值等于______.



14. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别由下表给出

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为______; 满足 $f[g(x)]>g[f(x)]$ 的 x 的值是______.

三、解答题

15. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+cn$ (c 是常数, $n=1,2,3,\cdots$), 且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列.

(1) 求 c 的值;

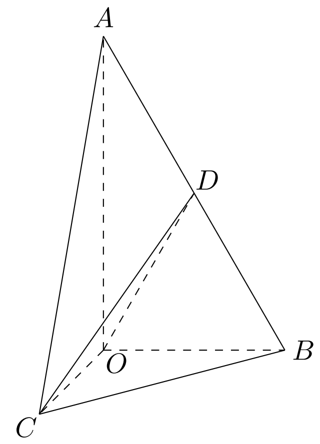
(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

16. 如图, 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\dfrac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$. $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 可以通过 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 以直线 AO 为轴旋转得到, 且二面角 $B-AO-C$ 是直二面角. 动点 D 的斜边 AB 上.

(1) 求证: 平面 $COD\perp$ 平面 AOB;

(2) 当 D 为 AB 的中点时, 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小;

(3) 求 CD 与平面 AOB 所成角的最大值.



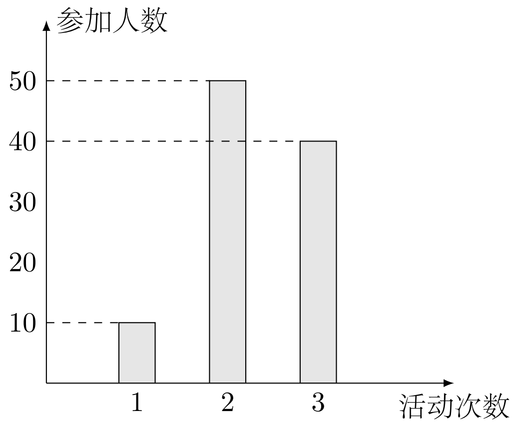
17. 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$, AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$, 点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.

(1) 求 AD 边所在直线的方程;

(2) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程;

(3) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$, 且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切, 求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

18. 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动 (以下简称活动). 该校合唱团共有 100 名学生, 他们参加活动的次数统计如图所示.



(1) 求合唱团学生参加活动的人均次数;

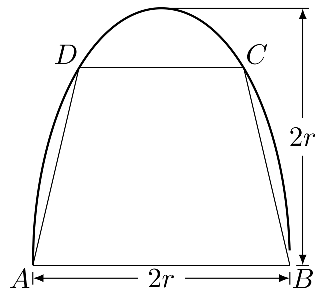
(2) 从合唱团中任意选两名学生, 求他们参加活动次数恰好相等的概率;

(3) 从合唱团中任选两名学生, 用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值, 求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 有一块半椭圆形钢板, 其半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r, 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半椭圆的短轴, 上底 CD 的端点在椭圆上, 记 $CD = 2x$, 梯形面积为 S.

(1) 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;

(2) 求面积 S 的最大值.



20. 已知集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ $(k \geqslant 2)$, 其中 $a_i \in \mathbf{Z}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 由 A 中的元素构成两个相应的集合: $S = \{(a,b)|a \in A, b \in A, a+b \in A\}$; $T = \{(a,b)|a \in A, b \in A, a-b \in A\}$, 其中 (a,b) 是有序数对, 集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n. 若对于任意的 $a \in A$, 总有 $-a \notin A$, 则称集合 A 具有性质 P.

(1) 检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P, 并对其中具有性质 P 的集合, 写出相应的集合 S 和 T;

(2) 对任何具有性质 P 的集合 A, 证明: $n \leqslant \dfrac{k(k-1)}{2}$;

(3) 判断 m 和 n 的大小关系, 并证明你的结论.