2010 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{1,3,m\}$, $B=\{3,4\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4\}$, 则 $m=$______.

2. 不等式 $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ 的解集是______.

3. 行列式 $\begin{vmatrix}\cos\dfrac{\pi}{6} & \sin\dfrac{\pi}{6}\\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6}\end{vmatrix}$ 的值是______.

4. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则 $z\cdot\overline{z}+z=$______.

5. 将一个总体为 A、B、C 三层, 其个体数之比为 $5:3:2$. 若用分层抽样方法抽取容量为 100 的样本, 则应从中抽取______个个体.

6. 已知四棱椎 $P-ABCD$ 的底面是边长为 6 的正方形, 侧棱 $PA\perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=8$, 则该四棱椎的体积是______.

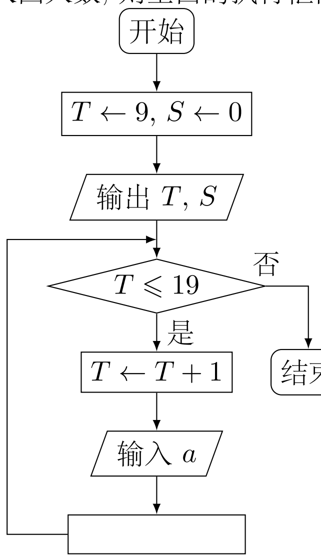
7. 圆 C: $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的圆心到直线 l: $3x+4y+4=0$ 的距离 $d=$______.

8. 动点 P 到点 $F(2,0)$ 的距离与它到直线 $x+2=0$ 的距离相等, 则点 P 的轨迹方程为______.

9. 函数 $f(x)=\log_3(x+3)$ 的反函数的图象与 y 轴的交点坐标是______.

10. 从一副混合后的扑克牌 (52 张) 中随机抽取 2 张, 则“抽出的 2 张均为红桃”的概率为______. (结果用最简分数表示)

11. 2010 年上海世博会园区每天 $9:00$ 开园, $20:00$ 停止入园. 在下边的框图中, S 表示上海世博会官方网站在每个整点报道的入园总人数, a 表示整点报道前 1 个小时内入园人数, 则空白的执行框内应填入______.



12. 在 n 行 n 列矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1\end{pmatrix}$ 中, 记位于第 i 行第 j 列的数为 a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 当 $n=9$ 时, $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{99}=$______.

13. 在平面直角坐标系中, 双曲线 Γ 的中心在原点, 它的一个焦点坐标为 $(\sqrt{5},0)$, $\overrightarrow{e_1}=(2,1)$, $\overrightarrow{e_2}=(2,-1)$ 分别是两条渐近线的方向向量. 任取双曲线 Γ 上的点 P, 若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$, 则 a、b 满足的一个等式是______.

14. 将直线 l_1: $x+y-1=0$, l_2: $nx+y-n=0$, l_3: $x+ny-n=0$ $(n\in\mathbf{N}^*,\ n\geqslant 2)$ 围成的三角形面积记为 S_n, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______.

二、选择题

15. 满足线性约束条件 $\begin{cases}2x+y\leqslant 3\\ x+2y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 的目标函数 $z=x+y$ 的最大值是(　)

(A) 1　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

16. “$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$”是“$\tan x=1$”成立的　(　)

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

17. 若 x_0 是方程 $\lg x+x=2$ 的解, 则 x_0 属于区间　(　)

(A) $(0,1)$　　(B) $(1,1.25)$　　(C) $(1.25,1.75)$　　(D) $(1.75,2)$

18. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角满足 $\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$, 则 $\triangle ABC$　(　)

(A) 一定是锐角三角形

(B) 一定是直角三角形

(C) 一定是钝角三角形

(D) 可能是锐角三角形, 也可能是钝角三角形

三、解答题

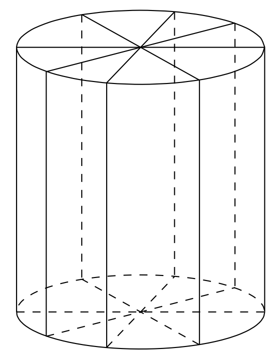
19. 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 化简:

$$\lg\left(\cos x\cdot\tan x+1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)+\lg\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\lg(1+\sin 2x).$$

20. 如图所示, 为了制作一个圆柱形灯笼, 先要制作 4 个全等的矩形骨架, 总计耗用 9.6 米铁丝, 再用 S 平方米塑料片制成圆柱的侧面和下底面 (不安装上底面).

(1) 当圆柱底面半径 r 取何值时, S 取得最大值? 并求出该最大值 (结果精确到 0.01 平方米);

(2) 若要制作一个如图放置的, 底面半径为 0.3 米的灯笼, 请作出用于灯笼的三视图 (作图时, 不需考虑骨架等因素).



21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $S_n = n - 5a_n - 85$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式, 并求出使得 $S_{n+1} > S_n$ 成立的最小正整数 n.

22. 若实数 x、y、m 满足 $|x-m| < |y-m|$, 则称 x 比 y 接近 m.

(1) 若 x^2-1 比 3 接近 0, 求 x 的取值范围;

(2) 对任意两个不相等的正数 a、b, 证明: a^2b+ab^2 比 a^3+b^3 接近 $2ab\sqrt{ab}$;

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域 $D=\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{R}\}$. 任取 $x \in D$, $f(x)$ 等于 $1+\sin x$ 和 $1-\sin x$ 中接近 0 的那个值. 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并指出它的奇偶性、最小正周期、最小值和单调性 (结论不要求证明).

23. 已知椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, $A(0,b)$、$B(0,-b)$ 和 $Q(a,0)$ 为 Γ 的三个顶点.

(1) 若点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\right)$, 求点 M 的坐标;

(2) 设直线 l_1: $y=k_1x+p$ 交椭圆 Γ 于 C、D 两点, 交直线 l_2: $y=k_2x$ 于点 E. 若 $k_1 \cdot k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$, 证明: E 为 CD 的中点;

(3) 设点 P 在椭圆 Γ 内且不在 x 轴上, 如何作过 PQ 中点 F 的直线 l, 使得 l 与椭圆 Γ 两个交点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$? 令 $a=10$, $b=5$, 点 P 的坐标是 $(-8,-1)$. 若椭圆 Γ 上的点 P_1、P_2 满足 $\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{PQ}$, 求点 P_1、P_2 的坐标.