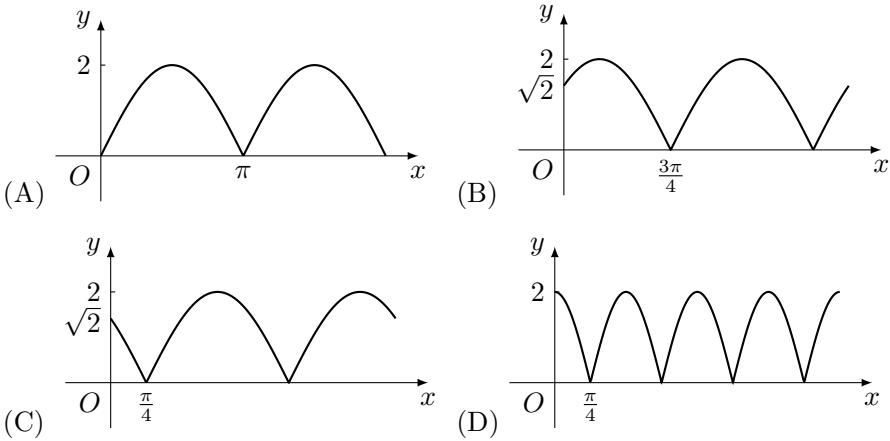
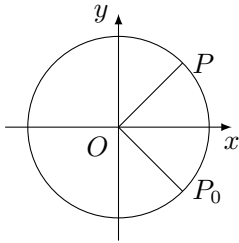


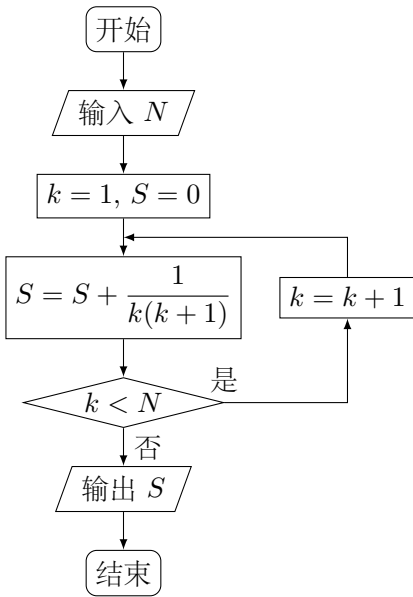
# 理科数学

## 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{x \mid \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )  
(A)  $(0, 2)$  (B)  $[0, 2]$  (C)  $\{0, 2\}$  (D)  $\{0, 1, 2\}$
2. 已知复数  $z = \frac{\sqrt{3} + i}{(1 - \sqrt{3}i)^2}$ ,  $\bar{z}$  是  $z$  的共轭复数, 则  $z \cdot \bar{z} =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 1 (D) 2
3. 曲线  $y = \frac{x}{x+2}$  在点  $(-1, -1)$  处的切线方程为 ( )  
(A)  $y = 2x + 1$  (B)  $y = 2x - 1$  (C)  $y = -2x - 3$  (D)  $y = -2x - 2$
4. 如图, 质点  $P$  在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为  $P_0(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , 角速度为 1, 那么点  $P$  到  $x$  轴的距离  $d$  关于时间  $t$  的函数图象大致为 ( )



5. 已知命题  $p_1$ : 函数  $y = 2^x - 2^{-x}$  在  $\mathbf{R}$  为增函数;  $p_2$ : 函数  $y = 2^x + 2^{-x}$  在  $\mathbf{R}$  为减函数. 则在命题  $q_1: p_1 \vee p_2$ ,  $q_2: p_1 \wedge p_2$ ,  $q_3: (\neg p_1) \vee p_2$  和  $q_4: p_1 \wedge (\neg p_2)$  中, 真命题是 ( )  
(A)  $q_1, q_3$  (B)  $q_2, q_3$  (C)  $q_1, q_4$  (D)  $q_2, q_4$
6. 某种种子每粒发芽的概率都为 0.9, 现播种了 1000 粒, 对于没有发芽的种子, 每粒需再补种 2 粒, 补种的种子数记为  $X$ , 则  $X$  的数学期望为 ( )  
(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400
7. 如果执行如图所示的框图, 输入  $N = 5$ , 则输出的数等于 ( )



- (A)  $\frac{5}{4}$  (B)  $\frac{4}{5}$  (C)  $\frac{6}{5}$  (D)  $\frac{5}{6}$
8. 设偶函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x^3 - 8$  ( $x \geq 0$ ), 则  $\{x \mid f(x-2) > 0\} =$  ( )  
(A)  $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$  (B)  $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$   
(C)  $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$  (D)  $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$
9. 若  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\alpha$  是第三象限的角, 则  $\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} =$  ( )  
(A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C) 2 (D) -2
10. 设三棱柱的侧棱垂直于底面, 所有棱长都为  $a$ , 顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为 ( )  
(A)  $\pi a^2$  (B)  $\frac{7}{3}\pi a^2$  (C)  $\frac{11}{3}\pi a^2$  (D)  $5\pi a^2$
11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$ , 若  $a, b, c$  互不相等, 且  $f(a) = f(b) = f(c)$ , 则  $abc$  的取值范围是 ( )  
(A)  $(1, 10)$  (B)  $(5, 6)$  (C)  $(10, 12)$  (D)  $(20, 24)$
12. 已知双曲线  $E$  的中心为原点,  $F(3, 0)$  是  $E$  的焦点, 过  $F$  的直线  $l$  与  $E$  相交于  $A, B$  两点, 且  $AB$  的中点为  $N(-12, -15)$ , 则  $E$  的方程为 ( )  
(A)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

## 二、填空题

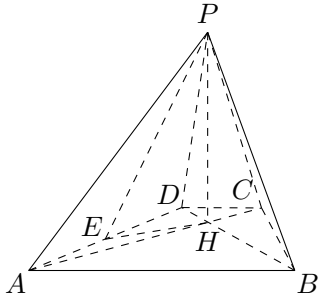
13. 设  $y = f(x)$  为区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 且恒有  $0 \leq f(x) \leq 1$ , 可以用随机模拟方法近似计算积分  $\int_0^1 f(x) dx$ . 先产生两组 (每组  $N$  个) 区间  $[0, 1]$  上的均匀随机数  $x_1, x_2, \dots, x_N$  和  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , 由此得到  $N$  个点  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 再数出其中满足  $y_i \leq f(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 的点数  $N_1$ , 那么由随机模拟方法可得积分  $\int_0^1 f(x) dx$  的近似值为\_\_\_\_\_.
14. 正视图为一个三角形的几何体可以是\_\_\_\_\_. (写出三种)

15. 过点  $A(4, 1)$  的圆  $C$  与直线  $x - y - 1 = 0$  相切于点  $B(2, 1)$ , 则圆  $C$  的方程为\_\_\_\_\_.
16. 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  为边  $BC$  上一点,  $BD = \frac{1}{2}DC$ ,  $\angle ADB = 120^\circ$ ,  $AD = 2$ , 若  $\triangle ADC$  的面积为  $3 - \sqrt{3}$ , 则  $\angle BAC =$ \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

17. 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} - a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$ .  
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 令  $b_n = na_n$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .
18. 如图, 已知四棱锥  $P - ABCD$  的底面为等腰梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $AC \perp BD$ , 垂足为  $H$ ,  $PH$  是四棱锥的高,  $E$  为  $AD$  中点.

- (1) 证明:  $PE \perp BC$ ;  
(2) 若  $\angle APB = \angle ADB = 60^\circ$ , 求直线  $PA$  与平面  $PEH$  所成角的正弦值.



19. 为调查某地区老人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下:

是否需要志愿者 \ 性别	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

- (1) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;  
 (2) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?  
 (3) 根据 (2) 的结论, 能否提供更好的调查方法来估计该地区老年人, 需要志愿者帮助的老年人的比例? 说明理由.

附: 

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

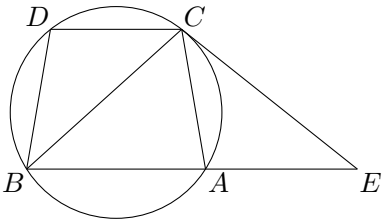
  

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

20. 设  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_1$  且斜率为 1 的直线  $l$  与  $E$  相交于  $A, B$  两点, 且  $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$  成等差数列.  
 (1) 求  $E$  的离心率;  
 (2) 设点  $P(0, -1)$  满足  $|PA| = |PB|$ , 求  $E$  的方程.

21. 设函数  $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$ .  
 (1) 若  $a = 0$ , 求  $f(x)$  的单调区间;  
 (2) 若当  $x \geq 0$  时  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.

22. 如图, 已知圆上的弧  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ , 过  $C$  点的圆的切线与  $BA$  的延长线交于  $E$  点, 证明:  
 (1)  $\angle ACE = \angle BCD$ ;  
 (2)  $BC^2 = BE \cdot CD$ .



23. 已知直线  $C_1: \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 圆  $C_2: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$ .  
 (1) 当  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  时, 求  $C_1$  与  $C_2$  的交点坐标;  
 (2) 过坐标原点  $O$  作  $C_1$  的垂线, 垂足为  $A$ ,  $P$  为  $OA$  的中点, 当  $\alpha$  变化时, 求点  $P$  轨迹的参数方程, 并指出它是什么曲线.

24. 设函数  $f(x) = |2x - 4| + 1$ .  
 (1) 画出函数  $y = f(x)$  的图象;  
 (2) 若不等式  $f(x) \leq ax$  的解集非空, 求  $a$  的取值范围.

