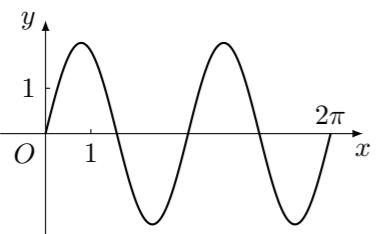


理科数学

一、选择题

1. 已知函数 $y = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 2\pi]$ 的图象如图, 那么 $\omega =$ ()



- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. 已知复数 $z = 1 - i$, 则 $\frac{z^2 - 2z}{z - 1} =$ ()

- (A) $2i$ (B) $-2i$ (C) 2 (D) -2

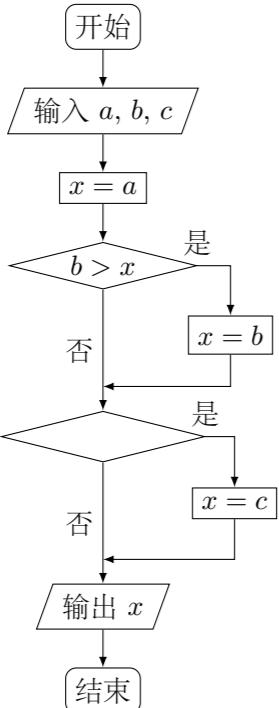
3. 如果等腰三角形的周长是底边长的 5 倍, 那么它的顶角的余弦值为 ()

- (A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{7}{8}$

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$, 前 n 项和为 S_n , 则 $\frac{S_4}{a_2} =$ ()

- (A) 2 (B) 4 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{17}{2}$

5. 下面的程序框图, 如果输入三个实数 a, b, c , 要求输出这三个数中最大的数, 那么在空白的判断框中, 应该填入下面四个选项中的 ()



- (A) $c > x$ (B) $x > c$ (C) $c > b$ (D) $b > c$

6. 已知 $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, 则使得 $(1 - a_i x)^2 < 1$ ($i = 1, 2, 3$) 都成立的 x 取值范围是 ()

- (A) $\left(0, \frac{1}{a_1}\right)$ (B) $\left(0, \frac{2}{a_1}\right)$ (C) $\left(0, \frac{1}{a_3}\right)$ (D) $\left(0, \frac{2}{a_3}\right)$

7. $\frac{3 - \sin 70^\circ}{2 - \cos^2 10^\circ} =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 平面向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线的充要条件是 ()

- (A) \mathbf{a}, \mathbf{b} 方向相同
(B) \mathbf{a}, \mathbf{b} 两向量中至少有一个为零向量
(C) $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$
(D) 存在不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mathbf{0}$

9. 甲、乙、丙 3 位志愿者安排在周一至周五的 5 天中参加某项志愿者活动, 要求每人参加一天且每天至多安排一人, 并要求甲安排在另外两位前面. 不同的安排方法共有 ()

- (A) 20 种 (B) 30 种 (C) 40 种 (D) 60 种

10. 由直线 $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及 x 轴所围图形的面积为 ()

- (A) $\frac{15}{4}$ (B) $\frac{17}{4}$ (C) $\frac{1}{2} \ln 2$ (D) $2 \ln 2$

11. 已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为 ()

- (A) $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ (B) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(1, -2)$

12. 某几何体的一条棱长为 $\sqrt{7}$, 在该几何体的正视图中, 这条棱的投影是长为 $\sqrt{6}$ 的线段, 在该几何体的侧视图与俯视图中, 这条棱的投影分别是长为 a 和 b 的线段, 则 $a + b$ 的最大值为 ()

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{5}$

二、填空题

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 1, 0)$, $|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{29}$ 且 $\lambda > 0$, 则 $\lambda =$ _____.

14. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F . 过点 F 平行双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点 B , 则 $\triangle AFB$ 的面积为 _____.

15. 一个六棱柱的底面是正六边形, 其侧棱垂直底面. 已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上, 且该六棱柱的体积为 $\frac{9}{8}$, 底面周长为 3, 则这个球的体积为 _____.

16. 从甲、乙两品种的棉花中各抽测了 25 根棉花的纤维长度 (单位: mm), 结果如下:

甲品种: 271 273 280 285 285 287 292 294 295 301 303 303 307 308 310 314 319 323 325 325 328 331 334 337 352

乙品种: 284 292 295 304 306 307 312 313 315 315 316 318 318 320 322 322 324 327 329 331 333 336 337 343 356

由以上数据设计了如下茎叶图

| 甲 | 乙 |
|-----------|------------------|
| 3 1 | 27 |
| 7 5 5 0 | 28 4 |
| 5 4 2 | 29 2 5 |
| 8 7 3 3 1 | 30 4 6 7 |
| 9 4 0 | 31 2 3 5 5 6 8 8 |
| 8 5 5 3 | 32 0 2 2 4 7 9 |
| 7 4 1 | 33 1 3 6 7 |
| | 34 3 |
| 2 | 35 6 |

根据以上茎叶图, 对甲、乙两品种棉花的纤维长度作比较, 写出两个统计结论:

- ① _____;
② _____.

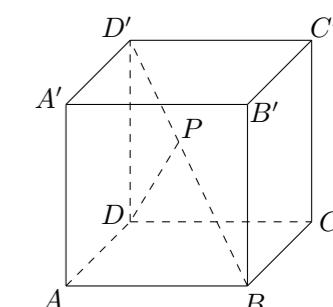
三、解答题

17. 已知 $\{a_n\}$ 是一个等差数列, 且 $a_2 = 1, a_5 = -5$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;
(2) 求 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 的最大值.

18. 如图, 已知点 P 在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的对角线 BD' 上, $\angle PDA = 60^\circ$.

- (1) 求 DP 与 CC' 所成角的大小;
(2) 求 DP 与平面 $AA'D'D$ 所成角的大小.



19. A, B 两个投资项目的利润率分别为随机变量 X_1 和 X_2 . 根据市场分析, X_1 和 X_2 的分布列分别为

| | | |
|-------|-----|-----|
| X_1 | 5% | 10% |
| P | 0.8 | 0.2 |

| | | | |
|-------|-----|-----|-----|
| X_2 | 2% | 8% | 12% |
| P | 0.2 | 0.5 | 0.3 |

- (1) 在 A, B 两个项目上各投资 100 万元, Y_1 和 Y_2 分别表示投资项目 A 和 B 所获得的利润, 求方差 DY_1, DY_2 ;
- (2) 将 x ($0 \leq x \leq 100$) 万元投资 A 项目, $100 - x$ 万元投资 B 项目, $f(x)$ 表示投资 A 项目所得利润的方差与投资 B 项目所得利润的方差的和. 求 $f(x)$ 的最小值, 并指出 x 为何值时, $f(x)$ 取到最小值.
- (注: $D(aX + b) = a^2DX$)

20. 在直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , F_2 也是抛物线 $C_2: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点, 且 $|MF_2| = \frac{5}{3}$.

- (1) 求 C_1 的方程;
- (2) 平面上的点 N 满足 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF_1} + \overrightarrow{MF_2}$, 直线 $l \parallel MN$, 且与 C_1 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, 求直线 l 的方程.

21. 设函数 $f(x) = ax + \frac{1}{x+b}$ ($a, b \in \mathbf{Z}$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = 3$.

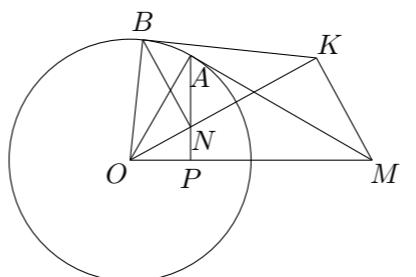
- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 证明: 函数 $y = f(x)$ 的图象是一个中心对称图形, 并求其对称中心;
- (3) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 上任一点的切线与直线 $x = 1$ 和直线 $y = x$ 所围三角形的面积为定值, 并求出此定值.

23. 已知曲线 $C_1: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 曲线 $C_2: \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t - \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).

- (1) 指出 C_1, C_2 各是什么曲线, 并说明 C_1 与 C_2 公共点的个数;
- (2) 若把 C_1, C_2 上各点的纵坐标都压缩为原来的一半, 分别得到曲线 C'_1, C'_2 . 写出 C'_1, C'_2 的参数方程. C'_1 与 C'_2 公共点的个数和 C_1 与 C_2 公共点的个数是否相同? 说明你的理由.

22. 如图, 过圆 O 外一点 M 作它的一条切线, 切点为 A , 过 A 点作直线 AP 垂直直线 OM , 垂足为 P .

- (1) 证明: $OM \cdot OP = OA^2$;
- (2) N 为线段 AP 上一点, 直线 NB 垂直直线 ON , 且交圆 O 于 B 点. 过 B 点的切线交直线 ON 于 K . 证明: $\angle OKM = 90^\circ$.



24. 已知函数 $f(x) = |x - 8| - |x - 4|$.

- (1) 作出函数 $y = f(x)$ 的图象;
- (2) 解不等式 $|x - 8| - |x - 4| > 2$.

