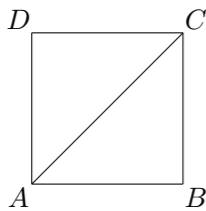


# 数学试卷

## 一、选择题

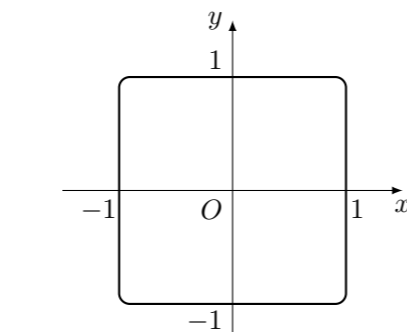
1. 已知  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ , 则  $z_1 + z_2 =$ \_\_\_\_\_.
2. 已知  $A = \{x | 2x \leq 1\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
3. 已知圆  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ , 则该圆的圆心坐标为\_\_\_\_\_.
4. 如图, 正方形  $ABCD$  的边长为 3, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ \_\_\_\_\_.



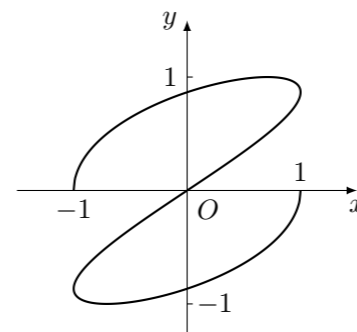
5. 已知  $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ , 则  $f^{-1}(1) =$ \_\_\_\_\_.
6. 已知二项式  $(x + a)^5$  展开式中,  $x^2$  项的系数为 80, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
7. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + 2y - 8 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x - y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
8. 已知无穷等比数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ,  $b_n = a_{2n}$ ,  $a_n$  的各项和为 9, 则数列  $\{b_n\}$  的各项和为\_\_\_\_\_.
9. 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2,  $AB$  为上底面圆的一条直径,  $C$  为下底面圆周上的一个动点, 则  $\triangle ABC$  的面积取值范围为\_\_\_\_\_.
10. 已知花博会会有四个不同的场馆  $A, B, C, D$ . 甲、乙两人每人选 2 个去参观, 则他们的选择中, 恰有个场馆相同的概率为\_\_\_\_\_.
11. 已知抛物线:  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), 若第一象限的  $A, B$  两点在抛物线上, 焦点为  $F$ ,  $|AF| = 2$ ,  $|BF| = 4$ ,  $|AB| = 3$ , 则直线  $AB$  的斜率为\_\_\_\_\_.
12. 已知  $a_i \in \mathbf{N}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), 对任意的  $k \in \mathbf{N}^*$  ( $2 \leq k \leq 8$ ),  $a_k = a_{k-1} + 1$  或  $a_k = a_{k-1} - 1$  有且仅有一个成立, 且  $a_1 = 6$ ,  $a_9 = 9$ , 则  $a_1 + \dots + a_9$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题

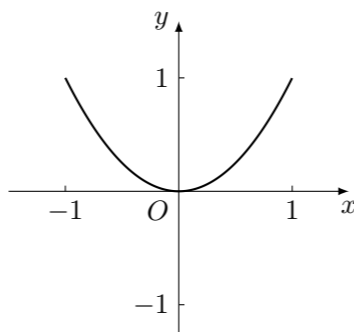
13. 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ( )  
(A)  $y = -3x$  (B)  $y = x$  (C)  $y = \log_3 x$  (D)  $y = 3^x$
14. 已知参数方程  $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ ,  $t \in [-1, 1]$ . 下列选项的图中, 符合该方程的是 ( )



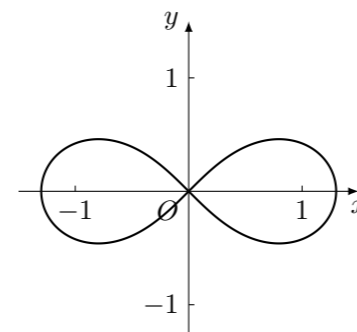
(A)



(B)



(C)

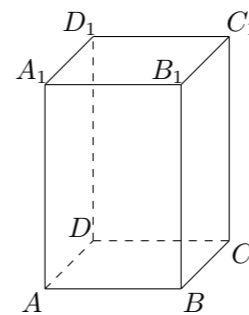


(D)

15. 已知  $f(x) = 3 \sin x + 2$ , 对任意的  $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 都存在  $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 使得  $f(x) = 2f(x + \theta) + 2$  成立, 则下列选项中,  $\theta$  可能的值为 ( )  
(A)  $\frac{3\pi}{5}$  (B)  $\frac{4\pi}{5}$  (C)  $\frac{6\pi}{5}$  (D)  $\frac{7\pi}{5}$
16. 已知  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  同时满足: ①  $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ ; ②  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ; ③  $x_1 y_1 + x_3 y_3 = 2x_2 y_2$ , 则下列选项中恒成立的是 ( )  
(A)  $2x_2 < x_1 + x_3$  (B)  $2x_2 > x_1 + x_3$  (C)  $x_2^2 < x_3 x_3$  (D)  $x_2^2 > x_1 x_3$

## 三、解答题

17. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$  中, 已知  $AB = BC = 2$ ,  $AA_1 = 3$ .  
(1) 若点  $P$  是棱  $A_1 D_1$  上的动点, 求三棱锥  $C - PAD$  的体积;  
(2) 求直线  $AB_1$  与平面  $ACC_1 A_1$  的夹角大小.



18. 已知在  $\triangle ABC$  中,  $A, B, C$  所对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a = 3, b = 2c$ .  
(1) 若  $A = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积;  
(2) 若  $2 \sin B - \sin C = 1$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿, 以后每季度比前一季度增 4%.
- (1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;
- (2) 请问哪一季度的利润首次超过该季度营业额的 18%.
20. 已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,  $F_1, F_2$  是其左右焦点, 直线  $l$  过点  $P(m, 0)$  ( $m \leq -\sqrt{2}$ ), 交椭圆于  $A, B$  两点, 且  $A, B$  在  $x$  轴上方, 点  $A$  在线段  $BP$  上.
- (1) 若  $B$  是上顶点,  $|\overrightarrow{BF}| = |\overrightarrow{PF_1}|$ , 求  $m$  的值;
- (2) 若  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$ , 且原点  $O$  到直线  $l$  的距离为  $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ , 求直线  $l$  的方程;
- (3) 证明: 对于任意  $m < -\sqrt{2}$ , 使  $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$  的直线有且仅有一条.
21. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的函数, 若对任意的  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $x_1 - x_2 \in S$ , 均有  $f(x_2) - f(x_1) \in S$ , 则称  $f(x)$  是在  $S$  关联的.
- (1) 判断和证明  $f(x) = 2x + 1$  是否是在  $[0, +\infty)$  关联? 是否是在  $[0, 1]$  关联?
- (2)  $f(x)$  是在  $\{3\}$  关联, 当  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 解不等式  $2 \leq f(x) \leq 3$ ;
- (3) 证明: “ $f(x)$  是在  $\{1\}$  关联, 并且在  $[0, +\infty)$  关联”当且仅当“ $f(x)$  是在  $[1, 2]$  关联的”.