2003 年普通高等学校招生考试（天津卷）

文科数学

一、选择题

1. 不等式 $\sqrt{4x-x^2}<x$ 的解集是 ( )

(A) $(0,2)$　　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(2,4)$　　(D) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

2. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{24}$　　(B) $-\dfrac{7}{24}$　　(C) $\dfrac{24}{7}$　　(D) $-\dfrac{24}{7}$

3. $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　　(B) $-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$　　(C) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

4. 已知 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $\cos x=\dfrac{4}{5}$, 则 $\tan 2x=$ ( )

(A) $\dfrac{7}{24}$　　(B) $-\dfrac{7}{24}$　　(C) $\dfrac{24}{7}$　　(D) $-\dfrac{24}{7}$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2+a_5=4$, $a_n=33$, 则 n 为 ( )

(A) 48　　(B) 49　　(C) 50　　(D) 51

6. 双曲线虚轴的一个端点为 M, 两个焦点为 F_1, F_2, $\angle F_1MF_2=120^\circ$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0\end{cases}$, 若 $f(x_0)>1$, 则 x_0 的取值范围是( )

(A) $(-1,1)$　　(B) $(-1,+\infty)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$　　(D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的

(A) 外心　　(B) 内心　　(C) 重心　　(D) 垂心

9. 函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$ 的反函数为 ( )

(A) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(0,+\infty)$　　(B) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(0,+\infty)$

(C) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$, $x\in(-\infty,0)$　　(D) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$, $x\in(-\infty,0)$

10. 棱长为 a 的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ( )

(A) $\dfrac{a^3}{3}$　　(B) $\dfrac{a^3}{4}$　　(C) $\dfrac{a^3}{6}$　　(D) $\dfrac{a^3}{12}$

11. 设 $a>0$, $f(x)=ax^2+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 则 P 到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为 ( )

(A) $\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$　　(B) $\left[0,\dfrac{1}{2a}\right]$　　(C) $\left[0,\left|\dfrac{b}{2a}\right|\right]$　　(D) $\left[0,\left|\dfrac{b-1}{2a}\right|\right]$

12. 已知长方形的四个顶点 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 和 $D(0,1)$, 一质点从 AB 的中点 P_0 沿与 AB 的夹角 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1 后, 依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3 和 P_4 (入射角等于反射角), 设 P_4 的坐标为 $(x_4,0)$, 若 $1<x_4<2$, 则 $\tan\theta$ 的取值范围是 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　(B) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$　　(C) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{3}\right)$

13. 一个四面体的所有棱长都为 $\sqrt{2}$, 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

(A) 3π　　(B) 4π　　(C) $3\sqrt{3}\pi$　　(D) 6π

二、填空题

14. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^9$ 的展开式中 x^9 系数是______.

15. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取______, ______, ______辆.

16. 在平面几何里, 有勾股定理:“设 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 互相垂直, 则 $AB^2+AC^2=BC^2$. ”拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出的正确结论是:“设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两互相垂直, 则______. ”

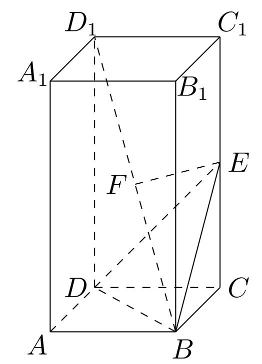
17. 将 3 种作物种植在如图 5 块试验田里, 每块种植一种作物且相邻的试验田不能种植同一作物, 不同的种植方法共有______种. (以数字作答)

三、解答题

18. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $AA_1=2$, E 为 CC_1 中点, F 为 BD_1 中点.

(1) 证明: EF 为 BD_1 与 CC_1 的公垂线;

(2) 求点 D_1 到面 BDE 的距离.



19. 已知抛物线 $C_1: y=x^2+2x$ 和 $C_2: y=-x^2+a$, 如果直线 l 同时是 C_1 和 C_2 的切线, 称 l 是 C_1 和 C_2 的公切线, 公切线上两个切点之间的线段, 称为公切线段.

(1) a 取什么值时, C_1 和 C_2 有且仅有一条公切线? 写出此公切线的方程;

(2) 若 C_1 和 C_2 有两条公切线, 证明相应的两条公切线段互相平分.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 证明: $a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$.

21. 有三种产品, 合格率分别为 0.90, 0.95 和 0.95, 各抽取一件进行检验.
(1) 求恰有一件不合格的概率;
(2) 求至少有两件不合格的概率. (精确到 0.001)

22. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 其图象关于点 $M\left(\dfrac{3\pi}{4},0\right)$ 对称, 且在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数. 求 ω 和 φ 的值.

23. 已知常数 $a>0$, 向量 $\overrightarrow{c}=(0,a)$, $\overrightarrow{i}=(1,0)$. 经过原点 O 以 $\overrightarrow{c}+\lambda\overrightarrow{i}$ 为方向向量的直线与经过定点 $A(0,a)$ 以 $\overrightarrow{i}-2\lambda\overrightarrow{c}$ 为方向向量的直线相交于 P, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$. 试问: 是否存在两个定点 E、F, 使得 $|PE|+|PF|$ 为定值. 若存在, 求出 E、F 的坐标; 若不存在, 说明理由.