2005 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是______.

3. 若 x, y 满足条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 3 \\ y\leqslant 2x \end{cases}$, 则 $z=3x+4y$ 的最大值是______.

4. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程是______.

5. 函数 $y=\cos 2x+\sin x\cos x$ 的最小正周期 $T=$______.

6. 若 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=$______.

7. 若椭圆长轴长与短轴长之比为 2, 它的一个焦点是 $\left(2\sqrt{15},0\right)$, 则椭圆的标准方程是______.

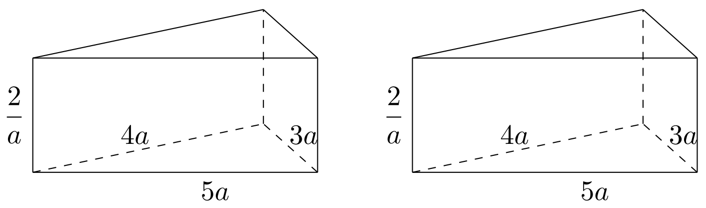
8. 某班有 50 名学生, 其中 15 人选修 A 课程, 另外 35 人选修 B 课程. 从班级中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是______. (结果用分数表示)

9. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是______.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $AC=$______.

11. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是______.

12. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$, $4a$, $5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是______.



二、选择题

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 (　)

(A) 单调递减无最小值　(B) 单调递减有最小值
(C) 单调递增无最大值　(D) 单调递增有最大值

14. 已知集合 $M=\{x\,|\,|x-1|\leqslant 2, x\in\mathbf{R}\}$, $P=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1, x\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 (　)

(A) $\{x|0<x\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}\}$　(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}\}$
(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$　(D) $\{x|-1\leqslant x<0, x\in\mathbf{Z}\}$

15. 条件甲: “$a>1$”是条件乙: “$a>\sqrt{a}$”的 (　)

(A) 既不充分也不必要条件　(B) 充要条件
(C) 充分不必要条件　(D) 必要不充分条件

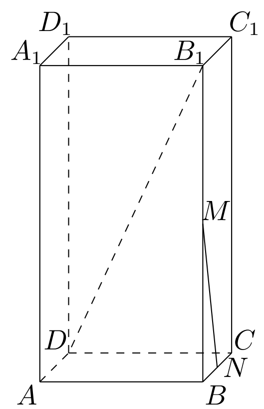
16. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1, 2, 3, \cdots, n!$. 例如: 用 1, 2, 3 可得数阵如图, 由于此数阵中每一列各数之和都是 12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$, 那么, 在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ (　)

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

(A) -3600　(B) 1800　(C) -1080　(D) -720

三、解答题

17. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M、N 分别是 BB_1 和 BC 的中点, $AB=4$, $AD=2$, B_1D 与平面 $ABCD$ 所成角的大小为 60°, 求异面直线 B_1D 与 MN 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 在复数范围内解方程 $|z|^2+(z+\overline{z})\mathrm{i}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$. (i 为虚数单位)

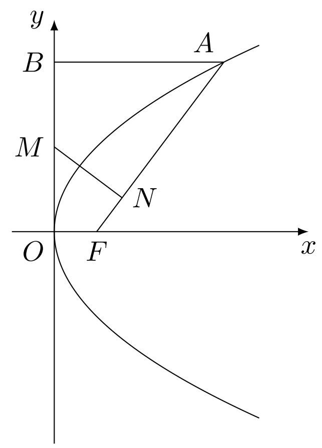
19. 已知函数 $f(x)=kx+b$ 的图象与 x, y 轴分别相交于点 A、B, $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ 分别是与 x, y 轴正半轴同方向的单位向量), 函数 $g(x)=x^2-x-6$.

(1) 求 k, b 的值;

(2) 当 x 满足 $f(x)>g(x)$ 时, 求函数 $\dfrac{g(x)+1}{f(x)}$ 的最小值.

20. 假设某市 2004 年新建住房面积 400 万平方米, 其中有 250 万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米. 那么, 到哪一年底,
(1) 该市历年所建中低价层的累计面积 (以 2004 年为累计的第一年) 将首次不少于 4750 万平方米?
(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

21. 已知抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, A 是抛物线上横坐标为 4、且位于 x 轴上方的点, A 到抛物线准线的距离等于 5. 过 A 作 AB 垂直于 y 轴, 垂足为 B, OB 的中点为 M.
(1) 求抛物线方程;
(2) 过 M 作 $MN\perp FA$, 垂足为 N, 求点 N 的坐标;
(3) 以 M 为圆心, MB 为半径作圆 M, 当 $K(m,0)$ 是 x 轴上一动点时, 讨论直线 AK 与圆 M 的位置关系.



22. 对定义域是 D_f、D_g 的函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数 $h(x)=\begin{cases} f(x)g(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\in D_g \\ f(x), & \text{当 } x\in D_f \text{ 且 } x\notin D_g \\ g(x), & \text{当 } x\notin D_f \text{ 且 } x\in D_g \end{cases}$.
(1) 若函数 $f(x)=-2x+3$, $x\geqslant 1$ $g(x)=x-2$, $x\in\mathbf{R}$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;
(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的最大值;
(3) 若 $g(x)=f(x+\alpha)$, 其中 α 是常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.