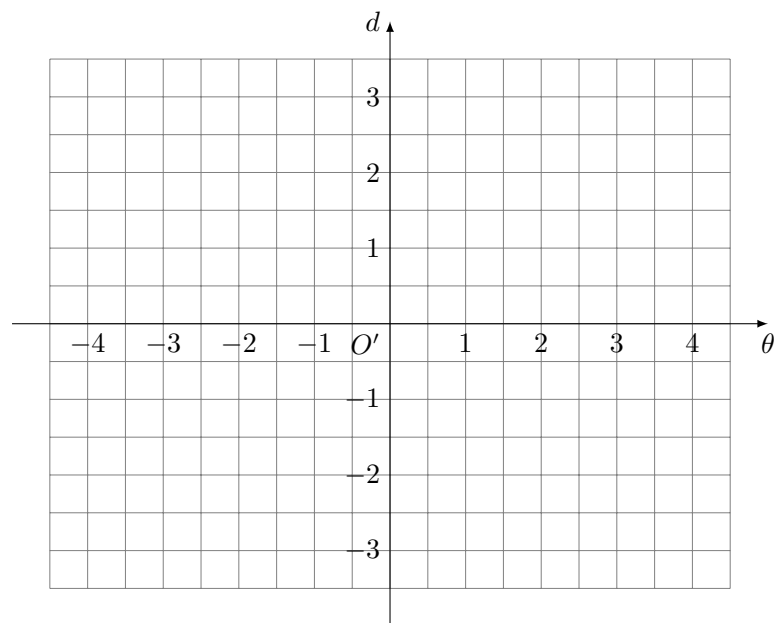


理科数学

一、填空题

- 函数 $f(x) = \frac{\lg(4-x)}{x-3}$ 的定义域是_____.
- 若直线 $l_1: 2x + my + 1 = 0$ 与直线 $l_2: y = 3x - 1$ 平行, 则 $m =$ _____.
- 函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 方程 $9^x - 6 \cdot 3^x - 7 = 0$ 的解是_____.
- 若 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + 4y = 1$, 则 $x \cdot y$ 的最大值是_____.
- 函数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期 $T =$ _____.
- 在五个数字 1, 2, 3, 4, 5 中, 若随机取出三个数字, 则剩下两个数字都是奇数的概率是_____. (结果用数值表示)
- 以双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 的中心为焦点, 且以该双曲线的左焦点为顶点的抛物线方程是_____.
- 对于非零实数 a, b , 以下四个命题都成立: ① $a + \frac{1}{a} \neq 0$; ② $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; ③ 若 $|a| = |b|$, 则 $a = \pm b$; ④ 若 $a^2 = ab$, 则 $a = b$. 那么, 对于非零复数 a, b , 仍然成立的命题的所有序号是_____.
- 在平面上, 两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α, β 是两个相交平面, 空间两条直线 l_1, l_2 在 α 上的射影是直线 s_1, s_2 , l_1, l_2 在 β 上的射影是直线 t_1, t_2 . 用 s_1 与 s_2, t_1 与 t_2 的位置关系, 写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件: _____.
- 已知 P 为圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上任意一点 (原点 O 除外), 直线 OP 的倾斜角为 θ 弧度, 记 $d = |OP|$. 在右侧的坐标系中, 画出以 (θ, d) 为坐标的点的轨迹的大致图形为

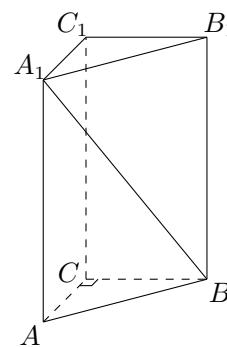


二、选择题

- 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $2 + ai, b + i$ (i 是虚数单位) 是实系数一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根, 那么 p, q 的值分别是 ()
(A) $p = -4, q = 5$ (B) $p = -4, q = 3$
(C) $p = 4, q = 5$ (D) $p = 4, q = 3$
- 设 a, b 是非零实数, 若 $a < b$, 则下列不等式成立的是 ()
(A) $a^2 < b^2$ (B) $ab^2 < a^2b$ (C) $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ (D) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$
- 直角坐标系 xOy 中, \vec{i}, \vec{j} 分别是与 x, y 轴正方向同向的单位向量. 在直角三角形 ABC 中, 若 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}, \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + k\vec{j}$, 则 k 的可能值个数是 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数, 且 $f(x)$ 满足: “当 $f(k) \geq k^2$ 成立时, 总可推出 $f(k+1) \geq (k+1)^2$ 成立”. 那么, 下列命题总成立的是 ()
(A) 若 $f(3) \geq 9$ 成立, 则当 $k \geq 1$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立
(B) 若 $f(5) \geq 25$ 成立, 则当 $k \leq 5$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立
(C) 若 $f(7) < 49$ 成立, 则当 $k \geq 8$ 时, 均有 $f(k) < k^2$ 成立
(D) 若 $f(4) = 25$ 成立, 则当 $k \geq 4$ 时, 均有 $f(k) \geq k^2$ 成立

三、解答题

- 如图, 在体积为 1 的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 1$, 求直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角. (结果用反三角函数值表示)



- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边. 若 $a = 2, C = \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .
- 近年来, 太阳能技术运用的步伐日益加快. 2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦, 年生产量的增长率为 34 %. 以后四年中, 年生产量的增长率逐年递增 2 % (如, 2003 年的年生产量的增长率为 36 %).
(1) 求 2006 年全球太阳电池的年生产量 (结果精确到 0.1 兆瓦);
(2) 目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量, 2006 年的实际安装量为 1420 兆瓦. 假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在 42 %, 到 2010 年, 要使年安装量与年生产量基本持平 (即年安装量不少于年生产量的 95 %), 这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少 (结果精确到 0.1 %)?

19. 已知函数 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$, 常数 $a \in \mathbf{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上为增函数, 求 a 的取值范围.

20. 如果有穷数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ (n 为正整数) 满足条件 $a_1 = a_n, a_2 = a_{n-1}, \dots, a_n = a_1$, 即 $a_i = a_{n-i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 我们称其为“对称数列”. 例如, 由组合数组成的数列 $C_m^0, C_m^1, \dots, C_m^m$ 就是“对称数列”.

(1) 设 $\{b_n\}$ 是项数为 7 的“对称数列”, 其中 b_1, b_2, b_3, b_4 是等差数列, 且 $b_1 = 2, b_4 = 11$. 依次写出 $\{b_n\}$ 的每一项;

(2) 设 $\{c_n\}$ 是项数为 $2k-1$ (正整数 $k > 1$) 的“对称数列”, 其中 $c_k, c_{k+1}, \dots, c_{2k-1}$ 是首项为 50, 公差为 -4 的等差数列. 记 $\{c_n\}$ 各项的和为 S_{2k-1} . 当 k 为何值时, S_{2k-1} 取得最大值? 并求出 S_{2k-1} 的最大值;

(3) 对于确定的正整数 $m > 1$, 写出所有项数不超过 $2m$ 的“对称数列”, 使得 $1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}$ 依次是该数列中连续的项; 当 $m > 1500$ 时, 求其中一个“对称数列”前 2008 项的和 S_{2008} .

21. 我们把由半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq 0$) 与半椭圆 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1$ ($x \leq 0$) 合成的曲线称作“果圆”, 其中 $a^2 = b^2 + c^2, a > 0, b > c > 0$. 如图, 设点 F_0, F_1, F_2 是相应椭圆的焦点, A_1, A_2 和 B_1, B_2 分别是“果圆”与 x, y 轴的交点.

(1) 若 $\triangle F_0 F_1 F_2$ 是边长为 1 的等边三角形, 求“果圆”的方程;

(2) 当时 $|A_1 A_2| > |B_1 B_2|$ 时, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围;

(3) 连接“果圆”上任意两点的线段称为“果圆”的弦. 试研究: 是否存在实数 k , 使斜率为 k 的“果圆”平行弦的中点轨迹总是落在某个椭圆上? 若存在, 求出所有可能的 k 值; 若不存在, 说明理由.

