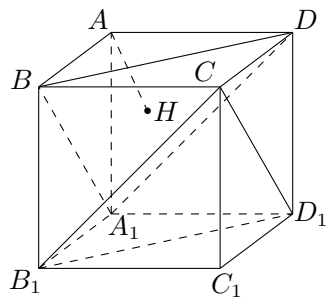


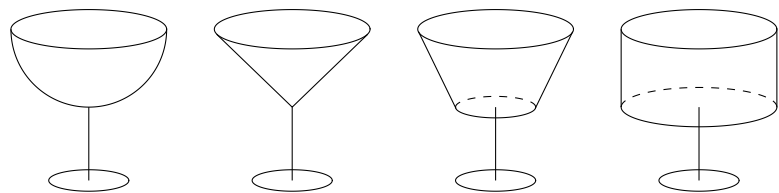
# 理科数学

## 一、选择题

- 化简  $\frac{2+4i}{(1+i)^2}$  的结果是 ( )  
(A)  $2+i$  (B)  $-2+i$  (C)  $2-i$  (D)  $-2-i$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$  ( )  
(A) 等于 0 (B) 等于 1 (C) 等于 3 (D) 不存在
- 若  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 3$ , 则  $\cot \alpha$  等于 ( )  
(A)  $-2$  (B)  $-\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D)  $2$
- 已知  $\left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$  展开式中, 各项系数的和与其各项二项式系数的和之比为 64, 则  $n$  等于 ( )  
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
- 若  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 则下列命题中正确的是 ( )  
(A)  $\sin x < \frac{3}{\pi}x$  (B)  $\sin x > \frac{3}{\pi}x$  (C)  $\sin x < \frac{4}{\pi^2}x^2$  (D)  $\sin x > \frac{4}{\pi^2}x^2$
- 若集合  $M = \{0, 1, 2\}$ ,  $N = \{(x, y) | x - 2y + 1 \geq 0 \text{ 且 } x - 2y - 1 \leq 0, x, y \in M\}$ , 则  $N$  中元素的个数为 ( )  
(A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 2
- 如图, 正方体  $AC_1$  的棱长为 1, 过点  $A$  作平面  $A_1BD$  的垂线, 垂足为点  $H$ . 则以下命题中, 错误的是 ( )



- (A) 点  $H$  是  $\triangle A_1BD$  的垂心 (B)  $AH$  垂直平面  $CB_1D_1$   
(C)  $AH$  的延长线经过点  $C_1$  (D) 直线  $AH$  和  $BB_1$  所成的角为  $45^\circ$
- 四位好朋友在一次聚会上, 他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯, 如图所示, 盛满酒后他们约定: 先各自饮杯中酒的一半. 设剩余酒的高度从左到右依次为  $h_1, h_2, h_3, h_4$ , 则它们的大小关系正确的是 ( )

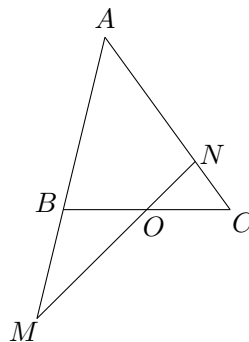


- (A)  $h_2 > h_1 > h_4$  (B)  $h_1 > h_2 > h_3$  (C)  $h_3 > h_2 > h_4$  (D)  $h_2 > h_4 > h_1$

- 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $e = \frac{1}{2}$ , 右焦点为  $F(c, 0)$ , 方程  $ax^2 + bx - c = 0$  的两个实根分别为  $x_1$  和  $x_2$ , 则点  $P(x_1, x_2)$  ( )  
(A) 必在圆  $x^2 + y^2 = 2$  内 (B) 必在圆  $x^2 + y^2 = 2$  上  
(C) 必在圆  $x^2 + y^2 = 2$  外 (D) 以上三种情形都有可能
- 将一个骰子连续抛掷三次, 它落地时向上的点数依次成等差数列的概率为 ( )  
(A)  $\frac{1}{9}$  (B)  $\frac{1}{12}$  (C)  $\frac{1}{15}$  (D)  $\frac{1}{18}$
- 设函数  $f(x)$  是  $\mathbf{R}$  上以 5 为周期的可导偶函数, 则曲线  $y = f(x)$  在  $x = 5$  处的切线的斜率为 ( )  
(A)  $-\frac{1}{5}$  (B) 0 (C)  $\frac{1}{5}$  (D) 5
- 设  $p: f(x) = e^x + \ln x + 2x^2 + mx + 1$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增,  $q: m \geq -5$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )  
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

## 二、填空题

- 设函数  $y = 4 + \log_2(x - 1)$  ( $x \geq 3$ ), 则其反函数的定义域为\_\_\_\_\_.
- 已知数列  $\{a_n\}$  对于任意  $p, q \in \mathbf{N}^*$ , 有  $a_p + a_q = a_{p+q}$ , 若  $a_1 = \frac{1}{9}$ , 则  $a_{36} =$ \_\_\_\_\_.
- 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $O$  是  $BC$  的中点, 过点  $O$  的直线分别交直线  $AB$ 、 $AC$  于不同的两点  $M$ 、 $N$ , 若  $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$ , 则  $m + n$  的值为\_\_\_\_\_.

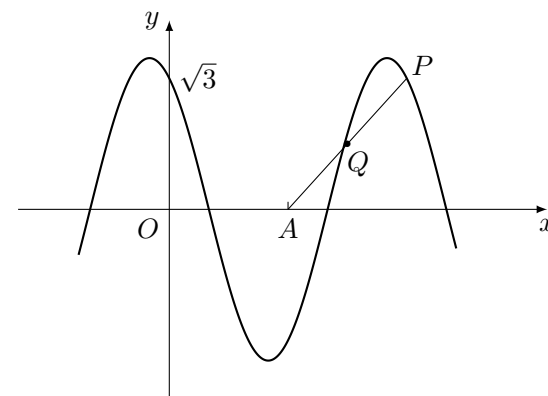


- 设有一组圆  $C_1: (x - k + 1)^2 + (y - 3k)^2 = 2k^4$  ( $k \in \mathbf{N}^*$ ). 下面四个命题:  
A. 存在一条定直线与所有的圆均相切;  
B. 存在一条定直线与所有的圆均相交;  
C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交;  
D. 所有的圆均不经过原点.  
其中真命题的代号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的代号)

## 三、解答题

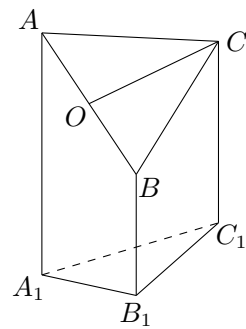
- 已知函数  $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & 0 < x < c \\ 2^{-\frac{x}{c^2}} + k, & c \leq x < 1 \end{cases}$  在区间  $(0, 1)$  内连续, 且  $f(c^2) = \frac{9}{8}$ .  
(1) 求实数  $k$  和  $c$  的值;  
(2) 解不等式  $f(x) > \frac{\sqrt{2}}{8} + 1$ .

- 如图, 函数  $y = 2\cos(\omega x + \theta)$  ( $x \in \mathbf{R}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的图象与  $y$  轴交于点  $(0, \sqrt{3})$ , 且在该点处切线的斜率为  $-2$ .  
(1) 求  $\theta$  和  $\omega$  的值;  
(2) 已知点  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , 点  $P$  是该函数图象上的一点, 点  $Q(x_0, y_0)$  是  $PA$  的中点, 当  $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  时, 求  $x_0$  的值.

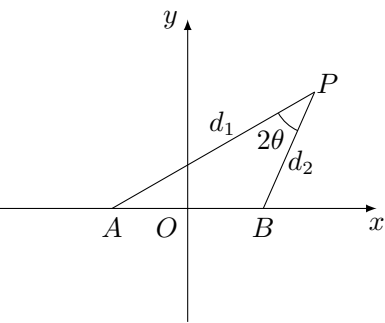


19. 某陶瓷厂准备烧制甲、乙、丙三件不同的工艺品,制作过程中必须先后经过两次烧制,当第一次烧制合格后可进入第二次烧制,两次烧制过程相互独立. 根据该厂现有的技术水平,经过第一次烧制后,甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.5, 0.6, 0.4. 经过第二次烧制后,甲、乙、丙三件产品合格的概率依次为 0.6, 0.5, 0.75.
- (1) 求第一次烧制后恰有一件产品合格的概率;
  - (2) 经过前后两次烧制后,合格工艺品的个数为  $\xi$ , 求随机变量  $\xi$  的期望.

20. 如图是一个直三棱柱 (以  $A_1B_1C_1$  为底面) 被一平面所截得到的几何体, 截面为  $ABC$ . 已知  $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$ ,  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ,  $AA_1 = 4$ ,  $BB_1 = 2$ ,  $CC_1 = 3$ .
- (1) 设点  $O$  是  $AB$  的中点, 证明:  $OC \parallel$  平面  $A_1B_1C_1$ ;
  - (2) 求二面角  $B - AC - A_1$  的大小;
  - (3) 求此几何体的体积.



21. 设动点  $P$  到点  $A(-1,0)$  和  $B(1,0)$  的距离分别为  $d_1$  和  $d_2$ ,  $\angle APB = 2\theta$ . 且存在常数  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), 使得  $d_1 d_2 \sin^2 \theta = \lambda$ .
- (1) 证明: 动点  $P$  的轨迹  $C$  为双曲线, 并求出  $C$  的方程;
  - (2) 过点  $B$  作直线交双曲线  $C$  的右支于  $M$ 、 $N$  两点, 试确定  $\lambda$  的范围, 使  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ , 其中点  $O$  为坐标原点.



22. 设正整数数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_2 = 4$ , 且对于任何  $n \in \mathbf{N}^*$ , 有  $2 + \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} < 2 + \frac{1}{a_n}$ .
- (1) 求  $a_1, a_3$ ;
  - (2) 求数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$ .