2004 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{10}$ 的值是 （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) -32 (D) 32

2. $\tan 15^\circ+\cot 15^\circ$ 的值是 （ ）

(A) 2 (B) $2+\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 命题 p: 若 a、$b\in\mathbf{R}$, 则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充要条件. 命题 q: 函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则 （ ）

(A) “p 或 q”为假 (B) “p 且 q”为真 (C) p 真 q 假 (D) p 假 q 真

4. 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点, 过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 若 $\triangle ABF_2$ 是正三角形, 则这个椭圆的离心率是 （ ）

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

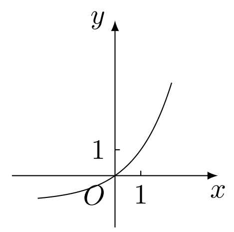
5. 已知 m、n 是不重合的直线, α、β 是不重合的平面, 有下列命题:
① 若 $m\subset\alpha$, $n/\!/\alpha$, 则 $m/\!/n$;
② 若 $m/\!/\alpha$, $m/\!/\beta$, 则 $\alpha/\!/\beta$;
③ 若 $\alpha\cap\beta=n$, $m/\!/n$, 则 $m/\!/\alpha$ 且 $m/\!/\beta$;
④ 若 $m\perp\alpha$, $m\perp\beta$, 则 $\alpha/\!/\beta$.
其中真命题的个数是 （ ）

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

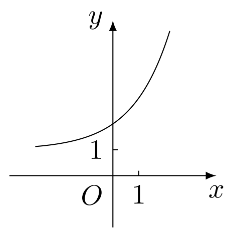
6. 某校高二年级共有六个班级, 现从外地转入 4 名学生, 要安排到该年级的两个班级且每班安排 2 名, 则不同的安排方案种数为 （ ）

(A) $\mathrm{A}_6^2\mathrm{C}_4^2$ (B) $\dfrac{1}{2}\mathrm{A}_6^2\mathrm{C}_4^2$ (C) $\mathrm{A}_6^2\mathrm{A}_4^2$ (D) $2\mathrm{A}_6^2$

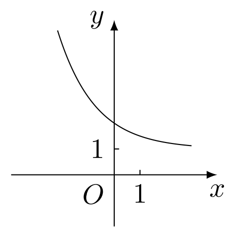
7. 已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$, 则函数 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图象是 （ ）



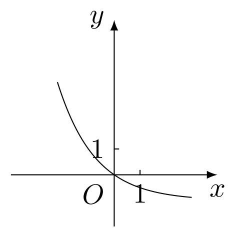
(A)



(B)



(C)



(D)

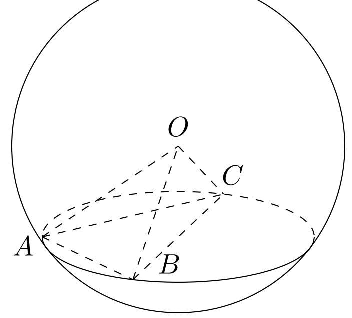
8. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是非零向量且满足 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 若 $(1-2^x)^9$ 展开式的第 3 项为 288, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots\dfrac{1}{x^n}\right)$ 的值是 （ ）

(A) 2 (B) 1 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{2}{5}$

10. 如图, A、B、C 是表面积为 48π 的球面上三点, $AB=2$, $BC=4$, $\angle ABC=60^\circ$, O 为球心, 则直线 OA 与截面 ABC 所成的角是 （ ）



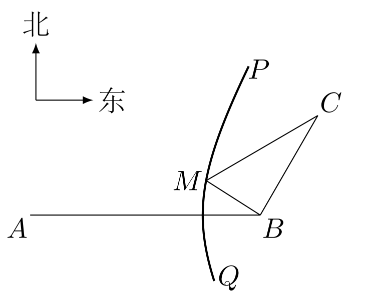
(A) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (B) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(x+2)$, 当 $x\in[3,5]$ 时, $f(x)=2-|x-4|$, 则 （ ）

(A) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$ (B) $f(\sin 1)>f(\cos 1)$

(C) $f\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)<f\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (D) $f(\cos 2)>f(\sin 2)$

12. 如图, B 地在 A 地的正东方向 4 km 处, C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处, 河流的沿岸 PQ (曲线) 上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km. 现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头, 向 B、C 两地转运货物. 经测算, 从 M 到 B、C 两地修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$ 万元/km, 那么修建这两条公路的总费用最低是 （ ）



(A) $(2\sqrt{7}-2)a$ 万元 (B) $5a$ 万元

(C) $(2\sqrt{7}+1)a$ 万元 (D) $(2\sqrt{7}+3)a$ 万元

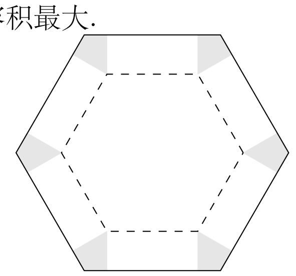
二、填空题

13. 直线 $x+2y=0$ 被曲线 $x^2+y^2-6x-2y-15=0$ 所截得的弦长等于______.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则实数 a 的值为______.

15. 某射手射击 1 次, 击中目标的概率是 0.9. 他连续射击 4 次, 且各次射击是否击中目标相互之间没有影响. 有下列结论:
① 他第 3 次击中目标的概率是 0.9;
② 他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$;
③ 他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$.
其中正确结论的序号是______. (写出所有正确结论的序号)

16. 如图, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器. 当这个正六棱柱容器的底面边长为______时, 其容积最大.



三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 其中向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos x,1)$, $\boldsymbol{b}=(\cos x,\sqrt{3}\sin 2x)$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 若 $f(x)=1-\sqrt{3}$ 且 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$, 求 x;
(2) 若函数 $y=2\sin 2x$ 的图象按向量 $\boldsymbol{c}=(m,n)$ $\left(|m|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 平移后得到函数 $y=f(x)$ 的图象, 求实数 m、n 的值.

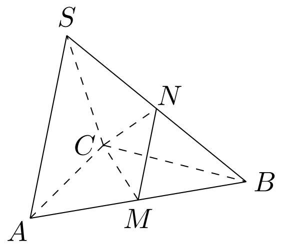
18. 甲、乙两人参加一次英语口语考试, 已知在备选的 10 道试题中, 甲能答对其中的 6 题, 乙能答对其中的 8 题. 规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试, 至少答对 2 题才算合格.
(1) 求甲答对试题数 ξ 的概率分布及数学期望;
(2) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

19. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形, 平面 $SAC\perp$ 平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、SB 的中点.

(1) 证明: $AC\perp SB$;

(2) 求二面角 $N-CM-B$ 的大小;

(3) 求点 B 到平面 CMN 的距离.



20. 某企业 2003 年的纯利润为 500 万元, 因设备老化等原因, 企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造, 预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元, 今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造, 预测在未扣除技术改造资金的情况下, 第 n 年 (今年为第一年) 的利润为 $500\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ 万元 (n 为正整数).

(1) 设从今年起的前 n 年, 若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元, 进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元 (须扣除技术改造资金), 求 A_n、B_n 的表达式;

(2) 依上述预测, 从今年起该企业至少经过多少年, 进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润?

21. 已知 $f(x)=\dfrac{2x-a}{x^2+2}$ ($x\in\mathbf{R}$) 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1) 求实数 a 的值组成的集合 A;

(2) 设关于 x 的方程 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的两个非零实根为 x_1、x_2. 试问: 是否存在实数 m, 使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. 如图, P 是抛物线 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上一点, 直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q.

(1) 若直线 l 与过点 P 的切线垂直, 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程;

(2) 若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S, 与 y 轴交于点 T, 试求 $\dfrac{|ST|}{|SP|}+\dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围.