

文科数学

一、选择题

1. 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 满足 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 4$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 夹角为 ()
 (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$
2. 设集合 $M = \{x|x^2 - x < 0\}, N = \{x||x| < 2\}$, 则 ()
 (A) $M \cap N = \emptyset$ (B) $M \cap N = M$ (C) $M \cup N = M$ (D) $M \cup N = \mathbf{R}$
3. 已知函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 ()
 (A) $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbf{R})$ (B) $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$
 (C) $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbf{R})$ (D) $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$
4. 双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m =$ ()
 (A) $-\frac{1}{4}$ (B) -4 (C) 4 (D) $\frac{1}{4}$
5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7 = 35$, 则 $a_4 =$ ()
 (A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5
6. 函数 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 ()
 (A) $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$ (B) $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}$
 (C) $\left(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$ (D) $\left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$
7. 从圆 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 外一点 $P(3, 2)$ 向这个圆作两条切线, 则两切线夹角的余弦值为 ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 0
8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c = 2a$, 则 $\cos B =$ ()
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
9. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ()
 (A) 16π (B) 20π (C) 24π (D) 32π
10. 在 $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 ()
 (A) -120 (B) 120 (C) -15 (D) 15
11. 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x + 3y - 8 = 0$ 距离的最小值是 ()
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) 3
12. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ()
 (A) $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$ (B) $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$ (C) $3\sqrt{55} \text{ cm}^2$ (D) 20 cm^2

二、填空题

13. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a =$ _____.
14. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于 _____.
15. 设 $z = 2y - x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases} 2x - y \geqslant -1 \\ 3x + 2y \leqslant 23 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$, 则 z 的最大值为 _____.
16. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有 _____ 种. (用数字作答)
- 三、解答题
17. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3 = 2, a_2 + a_4 = \frac{20}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
18. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C , 求当 A 为何值时, $\cos A + 2 \cos \frac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.
19. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A , 另 2 只服用 B , 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.
 (1) 求一个试验组为甲类组的概率;
 (2) 观察 3 个试验组, 求这 3 个试验组中至少有一个甲类组的概率.

20. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM = MB = MN$.
- (1) 证明: $AC \perp NB$;
 - (2) 若 $\angle ACB = 60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.
21. 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 短轴的一个端点, Q 为椭圆上一个动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.
22. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 都是增函数, 求 a 的取值范围.

