2016 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

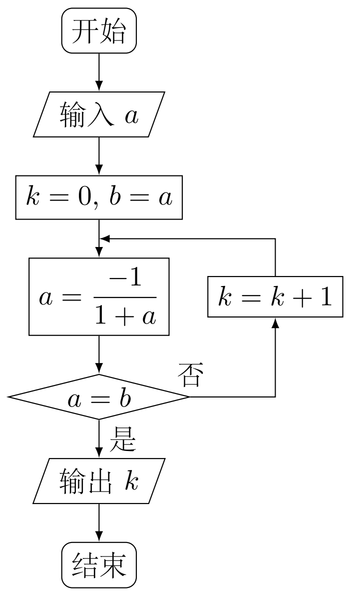
1. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<2\}$, $B=\{-1,0,1,2,3\}$, 则 $A\cap B=$ （ ）

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{0,1,2\}$　(C) $\{-1,0,1\}$　(D) $\{-1,0,1,2\}$

2. 若 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0\\ x+y\leqslant 3\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 $2x+y$ 的最大值为 （ ）

(A) 0　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 a 值为 1, 则输出的 k 值为 （ ）



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

4. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是向量, 则“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

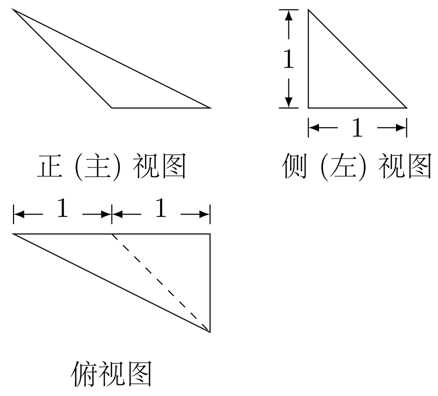
(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$, 且 $x>y>0$, 则 （ ）

(A) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}>0$　(B) $\sin x-\sin y>0$

(C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^y<0$　(D) $\ln x+\ln y>0$

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 （ ）



(A) $\dfrac{1}{6}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) 1

7. 将函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 图象上的点 $P\left(\dfrac{\pi}{4},t\right)$ 向左平移 s $(s>0)$ 个单位长度得到点 P'. 若 P' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上, 则 （ ）

(A) $t=\dfrac{1}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$　(B) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{6}$

(C) $t=\dfrac{1}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$　(D) $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, s 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$

8. 袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个球放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则 （ ）

(A) 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球　(B) 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

(C) 乙盒中红球不多于丙盒中红球　(D) 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

二、填空题

9. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若复数 $(1+\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点位于实轴上, 则 $a=$______.

10. 在 $(1-2x)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为______. (用数字作答)

11. 在极坐标系中, 直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1=6$, $a_3+a_5=0$, 则 $S_6=$______.

13. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA, OC 所在的直线, 点 B 为该双曲线的焦点, 若正方形 $OABC$ 的边长为 2, 则 $a=$______.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,\ x\leqslant a\\ -2x,\ x>a\end{cases}$.

① 若 $a=0$, 则 $f(x)$ 的最大值为______;

② 若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小;

(2) 求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

16. A, B, C 三个班共有 100 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间, 数据如表 (单位: 小时):

A 班	6	6.5	7	7.5	8			
B 班	6	7	8	9	10	11	12	
C 班	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

(1) 试估计 C 班的学生人数;

(2) 从 A 班和 C 班抽出的学生中, 各随机选取一个人, A 班选出的人记为甲, C 班选出的人记为乙. 假设所有学生的锻炼时间相对独立, 求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;

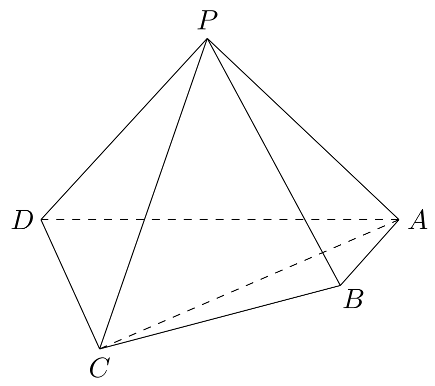
(3) 再从 A, B, C 三班中各随机抽取一名学生, 他们该周锻炼时间分别是 7, 9, 8.25 (单位: 小时), 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为 μ_1, 表格中数据的平均数记为 μ_0, 试判断 μ_0 和 μ_1 的大小. (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $PA\perp PD$, $PA=PD$, $AB\perp AD$, $AB=1$, $AD=2$, $AC=CD=\sqrt{5}$.

(1) 求证: $PD\perp$ 平面 PAB;

(2) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值;

(3) 在棱 PA 上是否存在点 M, 使得 $BM\parallel$ 平面 PCD? 若存在, 求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



18. 设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $A(a,0)$, $B(0,b)$, $O(0,0)$, $\triangle OAB$ 的面积为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是椭圆 C 上一点, 直线 PA 与 y 轴交于点 M, 直线 PB 与 x 轴交于点 N. 求证: $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

20. 设数列 A: $a_1, a_2, \cdots, a_N\ (N\geqslant 2)$. 如果对小于 $n\ (2\leqslant n\leqslant N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$, 则称 n 是数列 A 的一个"G 时刻". 记 $G(A)$ 是数列 A 的所有"G 时刻"组成的集合.

(1) 对数列 A: $-2, 2, -1, 1, 3$, 写出 $G(A)$ 的所有元素;

(2) 证明: 若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$, 则 $G(A)\neq\varnothing$;

(3) 证明: 若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leqslant 1\ (n=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$, 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 a_N-a_1.