2008 年普通高等学校招生考试（重庆卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $1+\dfrac{2}{\mathrm{i}^3}=$ （ ）

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) -1 (D) 3

2. 设 m, n 是整数, 则“m, n 均为偶数”是“$m+n$ 是偶数”的 （ ）

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 圆 O_1: $x^2+y^2-2x=0$ 和圆 O_2: $x^2+y^2-4y=0$ 的位置关系是 （ ）

(A) 相离 (B) 相交 (C) 外切 (D) 内切

4. 已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3,\sigma^2)$, 则 $P(\xi<3)=$ （ ）

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 x_1, $x_2\in\mathbf{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$, 则下列说法一定正确的是 （ ）

(A) $f(x)$ 为奇函数 (B) $f(x)$ 为偶函数

(C) $f(x)+1$ 为奇函数 (D) $f(x)+1$ 为偶函数

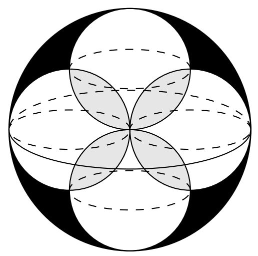
7. 若过两点 $P_1(-1,2)$, $P_2(5,6)$ 的直线与 x 轴相交于点 P, 则点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比 λ 的值为 （ ）

(A) $-\dfrac{1}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{5}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$ 的一条渐近线为 $y=kx$ $(k>0)$, 离心率 $e=\sqrt{5}k$, 则双曲线方程为 （ ）

(A) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4a^2}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{5a^2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{5b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

9. 如图, 体积为 V 的大球内有 4 个小球, 每个小球的球面过大球球心且与大球球面有且只有一个交点, 4 个小球的球心是以大球球心为中心的正方形的 4 个顶点. V_1 为小球相交部分 (图中阴影部分) 的体积, V_2 为大球内、小球外的图中黑色部分的体积, 则下列关系中正确的是 （ ）



(A) $V_1>\dfrac{V}{2}$ (B) $V_2<\dfrac{V}{2}$ (C) $V_1>V_2$ (D) $V_1<V_2$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}$ 的值域是 （ ）

(A) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right]$ (B) $[-1,0]$ (C) $[-\sqrt{2},0]$ (D) $[-\sqrt{3},0]$

二、填空题

11. 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{2,4\}$, $B=\{3,4,5\}$, $C=\{3,4\}$, 则 $(A\cup B)\cap(\complement_U C)=$______.

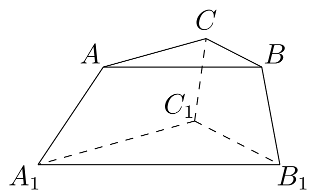
12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (当x\neq 0时)\\ a & (当x=0时)\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+1}{a^2n^2+n}=$______.

13. 已知 $a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{4}{9}$ $(a>0)$, 则 $\log_{\frac{2}{3}}a=$______.

14. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{12}=-8$, $S_9=-9$, 则 $S_{16}=$______.

15. 直线 l 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ $(a<3)$ 相交于两点 A, B, 弦 AB 的中点为 $(0,1)$, 则直线 l 的方程为______.

16. 某人有 4 种颜色的灯泡 (每种颜色的灯泡足够多) , 要在如图所示的 6 个点 A、B、C、A_1、B_1、C_1 上各装一个灯泡, 要求同一条线段两端的灯泡不同色, 则每种颜色的灯泡都至少用一个的安装方法共有______种. (用数字作答)



三、解答题

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $A=60^\circ$, $c=3b$. 求:

(1) $\dfrac{a}{c}$ 的值;

(2) $\cot B+\cot C$ 的值.

18. 甲、乙、丙三人按下面的规则进行乒乓球比赛: 第一局由甲、乙参加而丙轮空, 以后每一局由前一局的获胜者与轮空者进行比赛, 而前一局的失败者轮空. 比赛按这种规则一直进行到其中一人连胜两局或打满 6 局时停止. 设在每局中参赛者胜负的概率均为 $\dfrac{1}{2}$, 且各局胜负相互独立. 求:

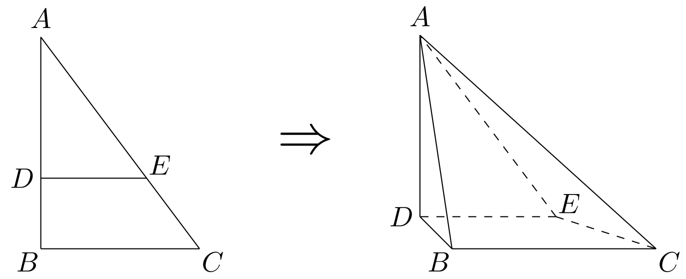
(1) 打满 3 局比赛还未停止的概率;

(2) 比赛停止时已打局数 ξ 的分别列与期望 $E\xi$.

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $B=90^\circ$, $AC=\dfrac{15}{2}$, D、E 两点分别在 AB、AC 上, 使 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}=2$, $DE=3$. 现将 $\triangle ABC$ 沿 DE 折成直二角角, 求:

(1) 异面直线 AD 与 BC 的距离;

(2) 二面角 $A-EC-B$ 的大小 (用反三角函数表示) .



20. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, 曲线 $y=f(x)$ 通过点 $(0,2a+3)$, 且在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线垂直于 y 轴.

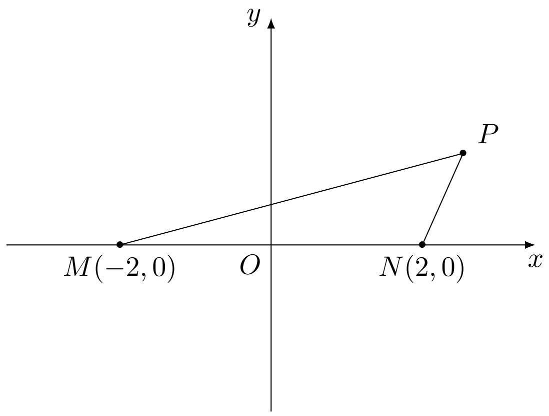
(1) 用 a 分别表示 b 和 c;

(2) 当 bc 取得最小值时, 求函数 $g(x)=-f(x)\mathrm{e}^{-x}$ 的单调区间.

21. 如图, $M(-2,0)$ 和 $N(2,0)$ 是平面上的两点, 动点 P 满足: $|PM|+|PN|=6$.

(1) 求点 P 的轨迹方程;

(2) 若 $|PM|\cdot|PN|=\dfrac{2}{1-\cos MPN}$, 求点 P 的坐标.



22. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_n=a_{n+1}^{\frac{3}{2}}a_{n+2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $a_2=\dfrac{1}{4}$, 求 a_3, a_4, 并猜想 a_{2008} 的值 (不需证明);

(2) 记 $b_n=a_1a_2\cdots a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 若 $b_n\geqslant 2\sqrt{2}$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立, 求 a_2 的值及数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.