2016 年普通高等学校招生考试（山东卷）

理科数学

一、选择题

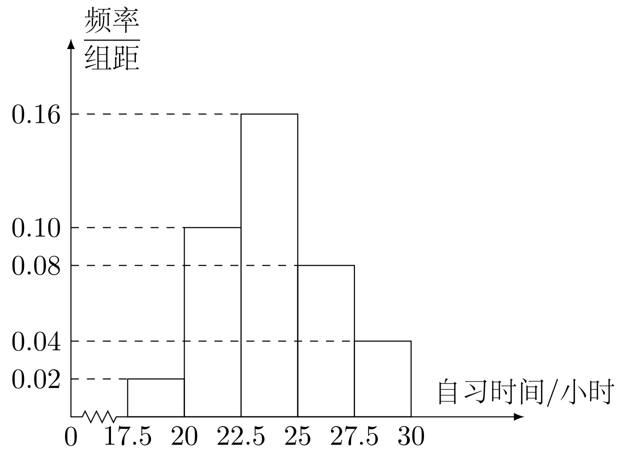
1. 若复数 z 满足 $2z+\bar{z}=3-2\mathrm{i}$ 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$　(B) $1-2\mathrm{i}$　(C) $-1+2\mathrm{i}$　(D) $-1-2\mathrm{i}$

2. 设集合 $A=\{y \mid y=2^x, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x \mid x^2-1<0\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $(-1,1)$　(B) $(0,1)$　(C) $(-1,+\infty)$　(D) $(0,+\infty)$

3. 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间 (单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5,30]$, 样本数据分组为 $[17.5,20)$, $[20,22.5)$, $[22.5,25)$, $[25,27.5)$, $[27.5,30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ( )

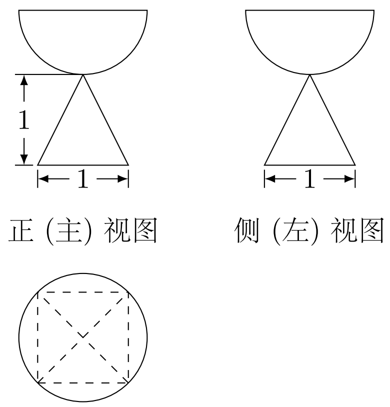


(A) 56　(B) 60　(C) 120　(D) 140

4. 若变量 x, y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\ 2x-3y\leqslant 9\\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则 x^2+y^2 的最大值是 ( )

(A) 4　(B) 9　(C) 10　(D) 12

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体, 其三视图如图所示. 则该几何体的体积为 ( )



正 (主) 视图　侧 (左) 视图

俯视图

(A) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi$　(B) $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　(C) $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　(D) $1+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

6. 已知直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内. 则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面 α 和平面 β 相交”的 ( )

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 函数 $f(x)=\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\frac{\pi}{2}$　(B) π　(C) $\frac{3\pi}{2}$　(D) 2π

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ 满足 $4|\boldsymbol{m}|=3|\boldsymbol{n}|$, $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1}{3}$. 若 $\boldsymbol{n}\perp(t\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})$, 则实数 t 的值为 ( )

(A) 4　(B) -4　(C) $\frac{9}{4}$　(D) $-\frac{9}{4}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<0$ 时, $f(x)=x^3-1$; 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(-x)=-f(x)$; 当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$. 则 $f(6)=$ ( )

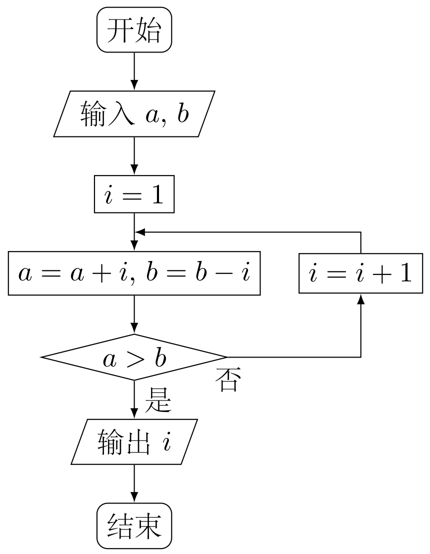
(A) -2　(B) -1　(C) 0　(D) 2

10. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在两点, 使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质. 下列函数中具有 T 性质的是( )

(A) $y=\sin x$　(B) $y=\ln x$　(C) $y=\mathrm{e}^x$　(D) $y=x^3$

二、填空题

11. 执行如图的程序框图, 若输入的 a, b 的值分别为 0 和 9, 则输出的 i 的值为______.



12. 若 $\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80, 则实数 $a=$______.

13. 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$, 若矩形 $ABCD$ 的四个顶点在 E 上, AB, CD 的中点为 E 的两个焦点, 且 $2|AB|=3|BC|$, 则 E 的离心率是______.

14. 在 $[-1,1]$ 上随机地取一个数 k, 则事件“直线 $y=kx$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=9$ 相交”发生的概率为______.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,\ x\leqslant m\\ x^2-2mx+4m,\ x>m\end{cases}$, 其中 $m>0$, 若存在实数 b, 使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根, 则 m 的取值范围是______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $2(\tan A+\tan B)=\frac{\tan A}{\cos B}+\frac{\tan B}{\cos A}$.

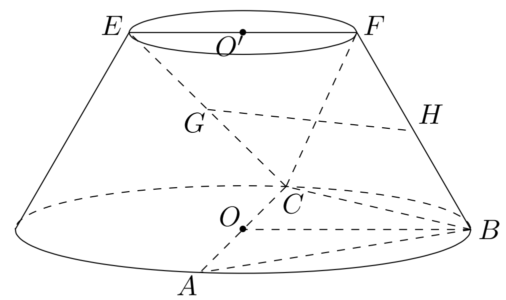
(1) 证明: $a+b=2c$;

(2) 求 $\cos C$ 的最小值.

17. 在如图所示的圆台中, AC 是下底面圆 O 的直径, EF 是上底面圆 O' 的直径, FB 是圆台的一条母线.

(1) 已知 G, H 分别为 EC, FB 的中点, 求证: GH // 平面 ABC;

(2) 已知 $EF=FB=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$, $AB=BC$. 求二面角 $F-BC-A$ 的余弦值.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 甲、乙两人组成"星队"参加猜成语活动, 每轮活动由甲、乙各猜一个成语, 在一轮活动中, 如果两人都猜对, 则"星队"得 3 分; 如果只有一个人猜对, 则"星队"得 1 分; 如果两人都没猜对, 则"星队"得 0 分. 已知甲每轮猜对的概率是 $\dfrac{3}{4}$, 乙每轮猜对的概率是 $\dfrac{2}{3}$; 每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响. 各轮结果亦互不影响. 假设"星队"参加两轮活动, 求:

(1) "星队"至少猜对 3 个成语的概率;

(2) "星队"两轮得分之和为 X 的分布列和数学期望 EX.

20. 已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \dfrac{2x-1}{x^2}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \dfrac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1,2]$ 成立.

21. 平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 抛物线 $E: x^2 = 2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 P 是 E 上的动点, 且位于第一象限, E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A, B, 线段 AB 的中点为 D, 直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M.

① 求证: 点 M 在定直线上;

② 直线 l 与 y 轴交于点 G, 记 $\triangle PFG$ 的面积为 S_1, $\triangle PDM$ 的面积为 S_2, 求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的最大值及取得最大值时点 P 的坐标.