2020 年普通高等学校招生考试 (上海卷)

# 数学试卷

## 一、选择题

1. 若集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,4,5\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$______.

3. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z|=$______.

4. 函数 $f(x)=x^3$ 的反函数为______.

5. 若实数 $x$, $y$ 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x+2y-3\leqslant 0\\ y\geqslant 0\end{cases}$, 则 $z=y-2x$ 的最大值为______.

6. 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$, 若行列式 $\begin{vmatrix}1&a&b\\2&c&d\\3&0&0\end{vmatrix}=6$, 则行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=$______.

7. 设 $a$, $b\in\mathbf{R}$, 若 1, 2, $a$, $b$ 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则 $ab=$______.

8. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 $n$ 项和为 $S_n$, 若 $a_1+a_{10}=a_9$, 则 $\dfrac{S_9}{a_{10}}=$______.

9. 从 6 人中选出 4 人去值班, 每人值班一天, 若第一天安排 1 人, 第二天安排 1 人, 第三天安排 2 人, 则不同安排方法的种数为______. (结果用数值表示)

10. 已知椭圆 $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 $F$, 点 $P$ 位于第二象限且在 $\Gamma$ 上, 联结 $PF$ 并延长, 交 $\Gamma$ 于点 $Q(x_A,y_Q)$, 点 $Q'(x_{Q'},y_{Q'})$ 也在 $\Gamma$ 上, 且 $y_Q+y_{Q'}=0$. 若 $FQ'\perp FP$, 则直线 $PQ$ 的方程为______.

11. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 既满足"对任意 $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 $x_0^2$ 或 $x_0$"又满足"关于 $x$ 的方程 $f(x)=a$ 无实数解", 则 $a$ 取值范围是______.

12. 已知 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_k$ 是平面内两两互不相等的向量, 若 $|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|=1$, 且 $|\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_j|\in\{1,2\}$ (其中 $i=1,2$, $j=1,2,\cdots,k$), 则 $k$ 最大值为______.

## 二、选择题

13. 若 $a,b\in\mathbf{R}$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ( )

(A) $a^2+b^2\leqslant 2ab$  (B) $a^2+b^2\geqslant -2ab$

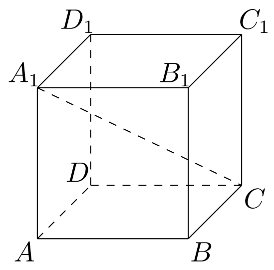
(C) $a+b\geqslant 2\sqrt{|ab|}$  (D) $a+b\geqslant -2\sqrt{|ab|}$

14. 直线 $3x+4y+1=0$ 的一个参数方程可以为 ( )

(A) $\begin{cases}x=1+3t\\ y=-1+4t\end{cases}$ ($t$ 为参数)  (B) $\begin{cases}x=1-3t\\ y=-1+4t\end{cases}$ ($t$ 为参数)

(C) $\begin{cases}x=1-4t\\ y=-1-3t\end{cases}$ ($t$ 为参数)  (D) $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-1-3t\end{cases}$ ($t$ 为参数)

15. 在如图所示的棱长为 10 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 一条平行于 $A_1C$ 的直线与正方体的表面交于 $P$, $Q$ 两点, 其中 $P$ 在侧面 $ADD_1A_1$ 上, 且到 $A_1D_1$ 的距离为 3, 到 $AA_1$ 的距离为 2, 则点 $Q$ 所在的面是 ( )




(A) $ABCD$  (B) $ABB_1A_1$  (C) $BCC_1B_1$  (D) $CDD_1C_1$

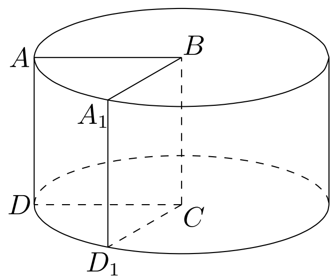
16. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, 考察以下性质:
$p$: 存在非零实数 $a$, 使得 $f(x+a)<f(x)+f(a)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;
$q_1$: $y=f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)$ 恒大于 0;
$q_2$: $y=f(x)$ 单调递增, 且存在 $x_0<0$, 使得 $f(x_0)=0$.
关于上述性质, 以下判断正确的是 ( )

(A) $q_1$, $q_2$ 都是 $p$ 的充分条件  (B) $q_1$, $q_2$ 中仅 $q_1$ 是 $p$ 的充分条件

(C) $q_1$, $q_2$ 中仅 $q_2$ 是 $p$ 的充分条件  (D) $q_1$, $q_2$ 都不是 $p$ 的充分条件

## 三、解答题

17. 如图所示, 边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕 $BC$ 边旋转后形成一个圆柱.
(1) 求该圆柱表面积 $S$;
(2) 正方形 $ABCD$ 绕 $BC$ 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 $A_1BCD_1$, 求 $AD_1$ 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)




18. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x$ $(\omega>0)$.
(1) 若函数 $y=f(x)$ 的周期为 $4\pi$, 求 $\omega$ 及此时 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的解集;
(2) 若 $\omega=1$, 设 $g(x)=f^2(x)+\sqrt{3}f(-x)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 求函数 $y=g(x)$ 值域.

19. 在研究某市交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数量除以时间, 车辆密度是指该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度. 现定义交通流量为 $v=\dfrac{q}{x}$, 其中 $x$ 为道路密度, $q$ 为车辆密度. 据调查某路段的交通流量有如下规律: $v=\begin{cases}100-135\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{80}{x}},\ 0<x<40\\ -k(x-40)+85,\ 40\leqslant x\leqslant 80\end{cases}$, (其中 $k>0$).

(1) 当交通流量大于 95 时, 求道路密度 $x$ 的取值范围;

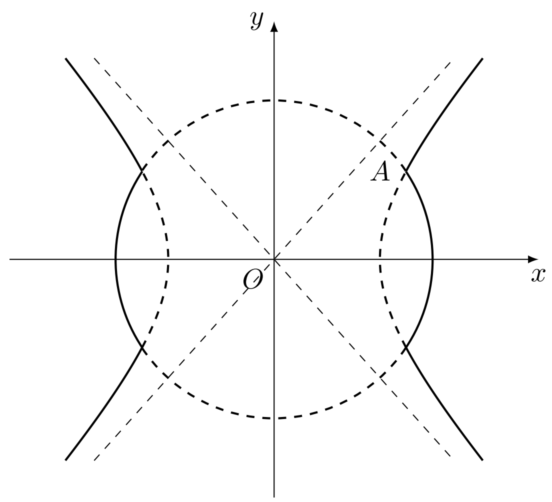
(2) 若道路密度 $x=80$ 时, 测得交通流量 $v=50$, 求车辆密度 $q$ 的最大值.

20. 设 $b>0$. 如图所示, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, $A(x_A,y_A)$ 是双曲线 $C_1$: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 $C_2$: $x^2+y^2=4+b^2$ 在第一象限内的交点, 曲线 $\Gamma$ 由 $C_1$ 中满足 $|x|\geqslant|x_A|$ 的部分和 $C_2$ 中满足 $|x|\geqslant|x_A|$ 的部分构成.

(1) 若 $x_A=\sqrt{6}$, 求 $b$ 的值;

(2) 若 $b=\sqrt{5}$, $F_1$, $F_2$ 分别为 $\Gamma$ 与 $x$ 轴的左、右两个交点, 第一象限内的点 $P$ 也在 $\Gamma$ 上, 且 $|PF_1|=8$, 求 $\angle F_1PF_2$ 的大小;

(3) 过点 $S\left(0,\dfrac{b^2}{2}+2\right)$ 作斜率为 $-\dfrac{b}{2}$ 的直线 $l$. 若 $l$ 与 $\Gamma$ 恰有两个不同的公共点, 记为 $M$、$N$, 用 $b$ 表示 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$, 并求当 $b$ 变化时, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的取值范围.




21. 对于至少有三项的有穷实数数列 $\{a_n\}$, 若 $|a_2-a_1|\leqslant|a_3-a_1|\leqslant\cdots\leqslant|a_m-a_1|$ (其中 $m$ 为 $\{a_n\}$ 的项数), 则称具有性质 $P$.

(1) 分别判断数列 3, 2, 5, 1 与数列 4, 3, 2, 5, 1 是否具有性质 $P$, 并说明理由;

(2) 已知首项为 1, 公比为 $q$, 项数为 10 的等比数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P$, 求 $q$ 的取值范围;

(3) 给定正整数 $m\geqslant4$. 设数列 $\{a_n\}$ 是 1, 2, $\cdots$, $m$ 的一个排列, 项数为 $m-1$ 的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=a_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,m-1)$, 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都具有性质 $P$, 求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$.