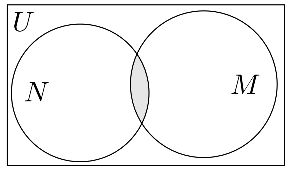
2009 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $M=\{x|-2\leqslant x-1\leqslant 2\}$ 和 $N=\{x|x=2k-1,k=1,2,\cdots\}$ 的关系的韦恩 (Venn) 图如图所示, 则阴影部分所示的集合的元素共有 ( )



(A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 无穷个

2. 设 z 是复数, $\alpha(z)$ 表示满足 $z^n=1$ 的最小正整数 n, 则对虚数单位 i, $\alpha(\mathrm{i})=$ ( )

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2

3. 若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=a^x$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$ 的反函数, 其图象经过点 $(\sqrt{a},a)$, 则 $f(x)=$ ( )

(A) $\log_2 x$ (B) $\log_{\frac{1}{2}} x$ (C) $\dfrac{1}{2^x}$ (D) x^2

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$, 且 $a_5\cdot a_{2n-5}=2^{2n}$ $(n\geqslant 3)$, 则当 $n\geqslant 1$ 时, $\log_2 a_1+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{2n-1}=$ ( )

(A) $n(2n-1)$ (B) $(n+1)^2$ (C) n^2 (D) $(n-1)^2$

5. 给定下列四个命题:
① 若一个平面内的两条直线与另一个平面都平行, 那么这两个平面相互平行;
② 若一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面相互垂直;
③ 垂直于同一直线的两条直线相互平行;
④ 若两个平面垂直, 那么一个平面内与它们的交线不垂直的直线与另一个平面也不垂直.
其中, 为真命题的是 ( )

(A) ①和② (B) ②和③ (C) ③和④ (D) ②和④

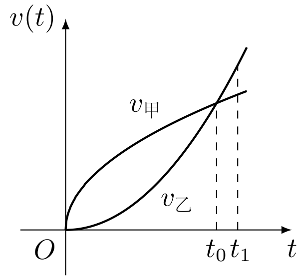
6. 一质点受到平面上的三个力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ (单位: 牛顿) 的作用而处于平衡状态. 已知 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 成 $60°$ 角, 且 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ 的大小分别为 2 和 4, 则 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小为 ( )

(A) 6 (B) 2 (C) $2\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{7}$

7. 2010 年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作, 若其中小张和小赵只能从事前两项工作, 其余三人均能从事这四项工作, 则不同的选派方案共有 ( )

(A) 36 种 (B) 12 种 (C) 18 种 (D) 48 种

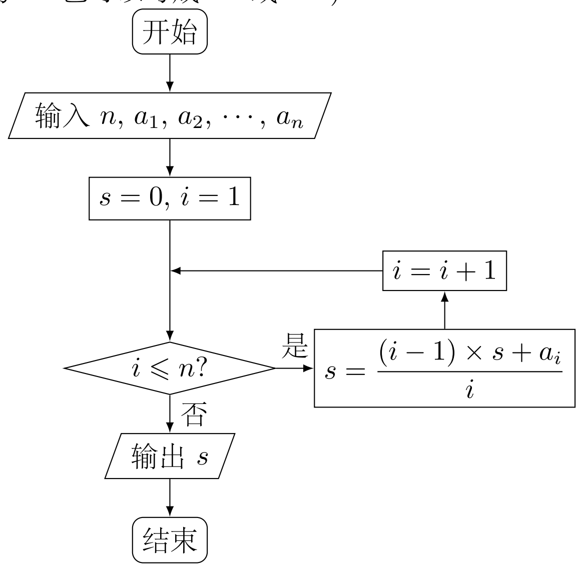
8. 已知甲、乙两车由同一起点同时出发, 并沿同一路线 (假定为直线) 行驶. 甲车、乙车的速度曲线分别为 $v_{甲}$ 和 $v_{乙}$ (如图所示). 那么对于图中给定的 t_0 和 t_1, 下列判断中一定正确的是 ( )



(A) 在 t_1 时刻, 甲车在乙车前面 (B) t_1 时刻后, 甲车在乙车后面
(C) 在 t_0 时刻, 两车的位置相同 (D) t_0 时刻后, 乙车在甲车前面

二、填空题

9. 随机抽取某产品 n 件, 测得其长度分别为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 则如图所示的程序框图输出的 $s=$______, s 表示的样本的数字特征是______. (注: 框图中的赋值符号"="也可以写成"←"或":=")



10. 若平面向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 x 轴, $\boldsymbol{b}=(2,-1)$, 则 $\boldsymbol{a}=$______.

11. 已知椭圆 G 的中心在坐标原点, 长轴在 x 轴上, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 且 G 上一点到 G 的两个焦点的距离之和为 12, 则椭圆 G 的方程为______.

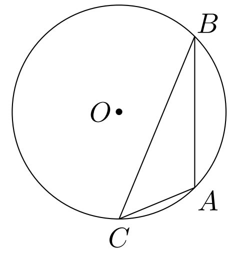
12. 已知离散型随机变量 X 的分布列如下表. 若 $EX=0$, $DX=1$, 则 $a=$______, $b=$______.

X	-1	0	1	2
P	a	b	c	$\frac{1}{12}$

13. 若直线 l_1: $\begin{cases}x=1-2t\\ y=2+kt\end{cases}$ (t 为参数) 与直线 l_2: $\begin{cases}x=s\\ y=1-2s\end{cases}$ (s 为参数) 垂直, 则 $k=$______.

14. 不等式 $\dfrac{|x+1|}{|x+2|}\geqslant 1$ 的实数解为______.

15. 如图, 点 A, B, C 是圆 O 上的点, 且 $AB=4$, $\angle ACB=45°$, 则圆 O 的面积等于______.



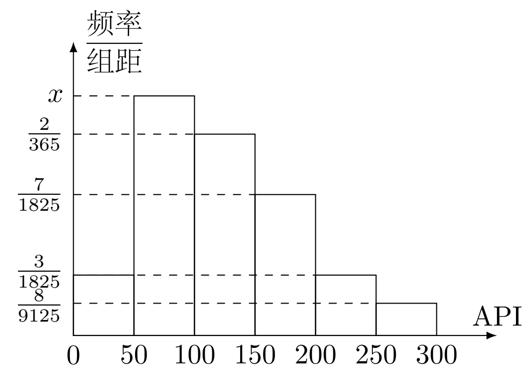
三、解答题

16. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin\theta,-2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,\cos\theta)$ 互相垂直, 其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(1) 求 $\sin\theta\cos\theta$ 的值;
(2) 若 $\sin(\theta-\varphi)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, 求 $\cos\varphi$ 的值.

17. 根据空气质量指数 API (为整数) 的不同, 可将空气质量分级如下表: 对某城市一年 (365 天) 的空气质量进行监测, 获得 API 数据按照区间 $[0,50]$, $(50,100]$, $(100,150]$, $(150,200]$, $(200,250]$, $(250,300]$ 进行分组, 得到频率分布直方图如图.

API	$0\sim 50$	$51\sim 100$	$101\sim 150$	$151\sim 200$	$201\sim 250$	$251\sim 300$	>300
级别	I	II	III_1	III_2	IV_1	IV_2	V
状况	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中重度污染	重度污染

(1) 求直方图中 x 的值;
(2) 计算一年中空气质量分别为良和轻微污染的天数;
(3) 求该城市某一周至少有 2 天的空气质量为良或轻微污染的概率.
(结果用分数表示. 已知 $5^7=78125$, $2^7=128$, $\dfrac{3}{1825}+\dfrac{2}{365}+\dfrac{7}{1825}+\dfrac{3}{1825}+\dfrac{8}{9125}=\dfrac{123}{9125}$, $365=73\times 5$)

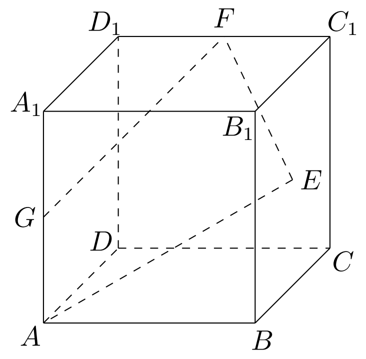


18. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 E 是正方形 BCC_1B_1 的中心, 点 F、G 分别是棱 C_1D_1, AA_1 的中点. 设点 E_1, G_1 分别是点 E、G 在平面 DCC_1D_1 内的正投影.

(1) 求以 E 为顶点, 以四边形 $FGAE$ 在平面 DCC_1D_1 内的正投影为底面边界的棱锥的体积;

(2) 证明: 直线 $FG_1 \perp FEE_1$;

(3) 求异面直线 E_1G_1 与 EA 所成角的正弦值.



19. 已知曲线 C: $y=x^2$ 与直线 l: $x-y+2=0$ 交于两点 $A(x_A,y_A)$ 和 $B(x_B,y_B)$, 且 $x_A<x_B$. 记曲线 C 在点 A 和点 B 之间那一段 L 与线段 AB 所围成的平面区域 (含边界) 为 D. 设点 $P(s,t)$ 是 L 上的任一点, 且点 P 与点 A 和点 B 均不重合.

(1) 若点 Q 是线段 AB 的中点, 试求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程;

(2) 若曲线 G: $x^2-2ax+y^2-4y+a^2+\dfrac{51}{25}=0$ 与 D 有公共点, 试求 a 的最小值.

20. 已知二次函数 $y=g(x)$ 的导函数的图象与直线 $y=2x$ 平行, 且 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $m-1$ $(m\neq 0)$. 设 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$, 求 m 的值;

(2) k $(k\in\mathbf{R})$ 如何取值时, 函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点, 并求出零点.

21. 已知曲线 C_n: $x^2-2nx+y^2=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 从点 $P(-1,0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 k_n $(k_n>0)$ 的切线 l_n, 切点为 $P_n(x_n,y_n)$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\dfrac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\dfrac{x_n}{y_n}$.