

数学试卷

一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ()
(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$ (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$
2. 函数 $y = x^{1-x} + 3$ ($x \in \mathbf{R}$) 的反函数的解析表达式为 ()
(A) $y = \log_2 \frac{2}{x-3}$ (B) $y = \log_2 \frac{x-3}{2}$
(C) $y = \log_2 \frac{3-x}{2}$ (D) $y = \log_2 \frac{2}{3-x}$
3. 在各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 3$, 前三项和为 21, 则 $a_3 + a_4 + a_5 =$ ()
(A) 33 (B) 72 (C) 84 (D) 189
4. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 若 $AB = 2$, $AA_1 = 1$, 则点 A 到平面 A_1BC 的距离为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$
5. $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()
(A) $4\sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ (B) $4\sqrt{3} \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
(C) $6 \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ (D) $6 \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
6. 抛物线 $y = 4x^2$ 上的一点 M 到焦点的距离为 1, 则点 M 的纵坐标是 ()
(A) $\frac{17}{16}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) 0
7. 在一次歌手大奖赛上, 七位评委为歌手打出的分数如下: 9.4, 8.4, 9.4, 9.9, 9.6, 9.4, 9.7. 去掉一个最高分和一个最低分后, 所剩数据的平均值和方差分别为 ()
(A) 9.4, 0.484 (B) 9.4, 0.016 (C) 9.5, 0.04 (D) 9.5, 0.016
8. 设 α, β, γ 为两两不重合的平面, l, m, n 为两两不重合的直线, 给出下列四个命题:
① 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
② 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
③ 若 $\alpha \parallel \beta, l \subset \alpha$, 则 $l \parallel \beta$;
④ 若 $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n, l \parallel \gamma$, 则 $m \parallel n$.
其中真命题的个数是 ()
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
9. 设 $k = 1, 2, 3, 4, 5$, 则 $(x + 2)^5$ 的展开式中 x^k 的系数不可能是 ()
(A) 10 (B) 40 (C) 50 (D) 80
10. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) =$ ()
(A) $-\frac{7}{9}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{7}{9}$

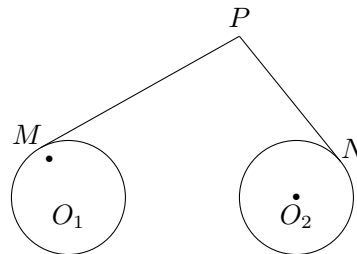
11. 点 $P(-3, 1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左准线上. 过点 P 且方向为 $\mathbf{a} = (2, -5)$ 的光线, 经直线 $y = -2$ 反射后通过椭圆的左焦点, 则这个椭圆的离心率为 ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
12. 四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品, 有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是危险的, 没有公共顶点的两条棱多代表的化工产品放在同一仓库是安全的, 现打算用编号为①、②、③、④的 4 个仓库存放这 8 种化工产品, 那么安全存放的不同方法种数为 ()
(A) 96 (B) 48 (C) 24 (D) 0

二、填空题

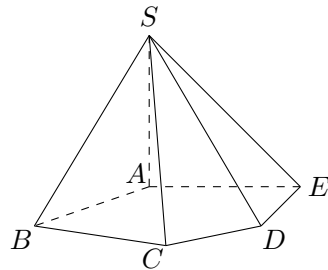
13. 命题“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为_____.
14. 曲线 $y = x^3 + x + 1$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线方程是_____.
15. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x^2 - 3x)}$ 的定义域为_____.
16. 若 $3^a = 0.618, a \in [k, k + 1), k \in \mathbf{Z}$, 则 $k =$ _____.
17. 已知 a, b 为常数, 若 $f(x) = x^2 + 4x + 3, f(ax + b) = x^2 + 10x + 24$, 则 $5a - b =$ _____.
18. 在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的一个动点, 若 $AM = 2$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的最小值是_____.

三、解答题

19. 如图, 圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1, $O_1O_2 = 4$, 过动点 P 分别作圆 O_1 、圆 O_2 的切线 PM 、 PN (M 、 N 分别为切点), 使得 $PM = \sqrt{2}PN$. 试建立适当的坐标系, 并求动点 P 的轨迹方程.



21. 如图, 在五棱锥 $S-ABCDE$ 中, $SA \perp$ 底面 $ABCDE$, $SA = AB = AE = 2$, $BC = DE = \sqrt{3}$, $\angle BAE = \angle BCD = \angle CDE = 120^\circ$.
- (1) 求异面直线 CD 与 SB 所成的角; (用反三角函数值表示)
 - (2) 证明: $BC \perp$ 平面 SAB ;
 - (3) 用反三角函数值表示二面角 $B-SC-D$ 的大小. (本小问不必写出解答过程)



22. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x^2|x - a|$.
- (1) 当 $a = 2$ 时, 求 $f(x) = x$ 使成立的 x 的集合;
 - (2) 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最小值.

23. 设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_3 = 11$, 且 $(5n - 8)S_{n+1} - (5n + 2)S_n = An + B$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 其中 A, B 为常数.
- (1) 求 A 与 B 的值;
 - (2) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列;
 - (3) 证明不等式 $\sqrt{5a_{mn}} - \sqrt{a_m a_n} > 1$ 对任何正整数 m, n 都成立.