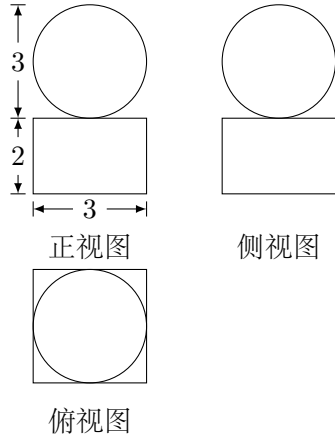


理科数学

一、选择题

1. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+i)i = b+i$, 则 ()
- (A) $a = 1, b = 1$ (B) $a = -1, b = 1$
- (C) $a = -1, b = -1$ (D) $a = 1, b = -1$
2. 设 $M = \{1, 2\}$, $N = \{a^2\}$, 则“ $a = 1$ ”是“ $N \subseteq M$ ”的 ()
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
3. 如图是某几何体的三视图, 则该几何体的体积为 ()



- (A) $\frac{9}{2}\pi + 12$ (B) $\frac{9}{2}\pi + 18$ (C) $9\pi + 42$ (D) $36\pi + 18$
4. 通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动, 得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,
 $K^2 = \frac{110 \times (40 \times 30 - 20 \times 20)^2}{60 \times 50 \times 60 \times 50} \approx 7.8$.

附表:

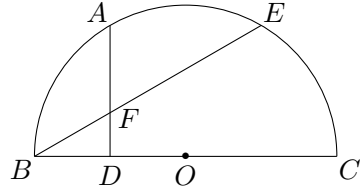
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

- 参照附表, 得到的正确结论是 ()
- (A) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别有关”
- (B) 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“爱好该项运动与性别无关”
- (C) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”
- (D) 有 99% 以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

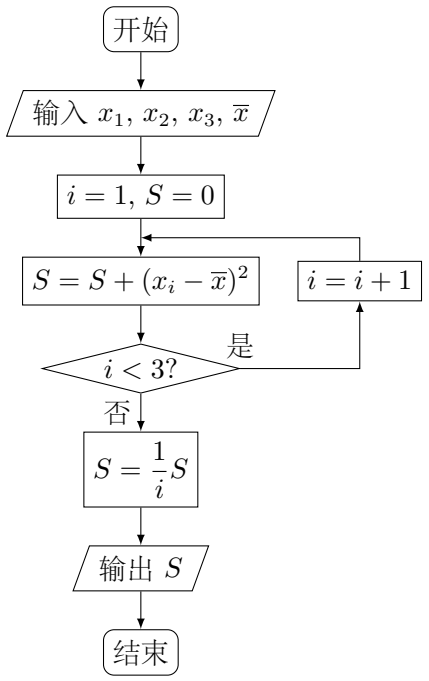
5. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($a > 0$) 的渐近线方程为 $3x \pm 2y = 0$, 则 a 的值为 ()
- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
6. 由直线 $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$ 与曲线 $y = \cos x$ 所围成的封闭图形的面积为 ()
- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$
7. 设 $m > 1$, 在约束条件 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq mx \\ x + y \leq 1 \end{cases}$ 下, 目标函数 $z = x + my$ 的最大值小于 2, 则 m 的取值范围为 ()
- (A) $(1, 1 + \sqrt{2})$ (B) $(1 + \sqrt{2}, +\infty)$
- (C) $(1, 3)$ (D) $(3, +\infty)$
8. 设直线 $x = t$ 与函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$ 的图象分别交于点 M, N , 则当 $|MN|$ 达到最小时 t 的值为 ()
- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

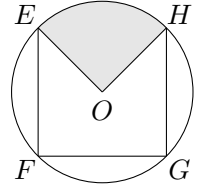
9. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 在极坐标系 (与直角坐标系 xOy 取相同的长度单位, 且以原点 O 为极点, 以 x 轴正半轴为极轴) 中, 曲线 C_2 的方程为 $\rho(\cos \theta - \sin \theta) + 1 = 0$, 则 C_1 与 C_2 的交点个数为_____.
10. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 且 $xy \neq 0$, 则 $\left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + 4y^2\right)$ 的最小值为_____.
11. 如图, A, E 是半圆周上的两个三等分点, 直径 $BC = 4$, $AD \perp BC$, 垂足为 D , BE 与 AD 相交于点 F , 则 AF 的长为_____.



12. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的前 n 项和, 且 $a_1 = 1$, $a_4 = 7$, 则 $S_5 =$ _____.
13. 若执行如图所示的框图, 输入 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $\bar{x} = 2$, 则输出的数等于_____.



14. 在边长为 1 的正三角形 ABC 中, 设 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$ _____.
15. 如图所示, $EFGH$ 是以 O 为圆心, 半径为 1 的圆的内接正方形, 将一颗豆子随机地扔到该圆内, 用 A 表示事件“豆子落在正方形 $EFGH$ 内”, B 表示事件“豆子落在扇形 OHE (阴影部分) 内”, 则 (1) $P(A) =$ _____; (2) $P(B|A) =$ _____.



16. 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 将 n 表示为 $n = a_0 \times 2^k + a_1 \times 2^{k-1} + a_2 \times 2^{k-2} + \dots + a_{k-1} \times 2^1 + a_k \times 2^0$. 当 $i = 0$ 时, $a_i = 1$, 当 $1 \leq i \leq k$ 时, a_i 为 0 或 1. 记 $I(n)$ 为上述表示中 a_i 为 0 的个数 (例如: $1 = 1 \times 2^0$, $4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, 则 $I(1) = 0$, $I(4) = 2$), 则 (1) $I(12) =$ _____; (2) $\sum_{n=1}^{127} 2^{I(n)} =$ _____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $c \sin A = a \cos C$.
- (1) 求角 C 的大小;
- (2) 求 $\sqrt{3} \sin A - \cos\left(B + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最大值, 并求取得最大值时角 A, B 的大小.

18. 某商店试销某种商品 20 天, 获得如下数据:

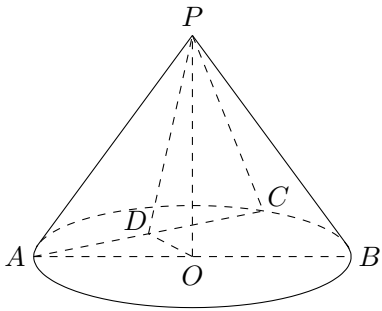
日销售量 (件)	0	1	2	3
频数	1	5	9	5

试销结束后 (假设该商品的日销售量的分布规律不变), 设某天开始营业时有该商品 3 件, 当天营业结束后检查存货, 若发现存货少于 2 件, 则当天进货补充至 3 件, 否则不进货, 将频率视为概率.

- 求当天商品不进货的概率;
- 记 X 为第二天开始营业时该商品的件数, 求 X 的分布列和数学期望.

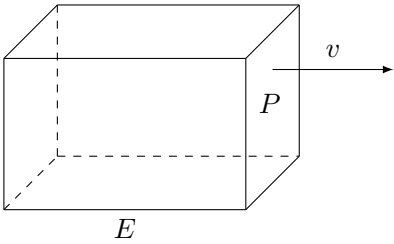
19. 如图, 在圆锥 PO 中, 已知 $PO = \sqrt{2}$, $\odot O$ 的直径 $AB = 2$, C 是 \widehat{AB} 的中点, D 为 AC 的中点.

- 证明: 平面 $POD \perp$ 平面 PAC ;
- 求二面角 $B - PA - C$ 的余弦值.



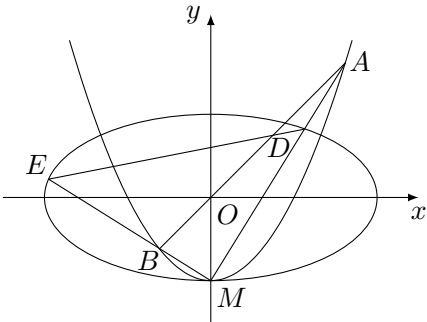
20. 如图, 长方体物体 E 在雨中沿面 P (面积为 S) 的垂直方向作匀速移动, 速度为 v ($v > 0$), 雨速沿 E 移动方向的分速度为 c ($c \in \mathbf{R}$). E 移动时单位时间内的淋雨量包括两部分: ① P 或 P 的平行面 (只有一个面淋雨) 的淋雨量, 假设其值与 $|v - c| \times S$ 成正比, 比例系数为 $\frac{1}{10}$; ② 其它面的淋雨量之和, 其值为 $\frac{1}{2}$, 记 y 为 E 移动过程中的总淋雨量, 当移动距离 $d = 100$, 面积 $S = \frac{3}{2}$ 时.

- 写出 y 的表达式;
- 设 $0 < v \leq 10$, $0 < c \leq 5$, 试根据 c 的不同取值范围, 确定移动速度 v , 使总淋雨量 y 最少.



21. 如图, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, x 轴被曲线 $C_2: y = x^2 - b$ 截得的线段长等于 C_1 的长半轴长.

- 求 C_1, C_2 的方程;
- 设 C_2 与 y 轴的交点为 M , 过坐标原点 O 的直线 l 与 C_2 相交于点 A, B , 直线 MA, MB 分别与 C_1 相交与点 D, E .
 - 证明: $MD \perp ME$;
 - 记 $\triangle MAB, \triangle MDE$ 的面积分别是 S_1, S_2 . 问: 是否存在直线 l , 使得 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{17}{32}$? 请说明理由.



22. 已知函数 $f(x) = x^3, g(x) = x + \sqrt{x}$.

- 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的零点个数, 并说明理由;
- 设数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 满足 $a_1 = a$ ($a > 0$), $f(a_{n+1}) = g(a_n)$, 证明: 存在常数 M , 使得对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n \leq M$.