2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）

文科数学

一、填空题

1. 不等式 $\dfrac{x}{2x-1}<0$ 的解为______.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1+a_2+a_3+a_4=30$, 则 $a_2+a_3=$______.

3. 设 $m\in\mathbf{R}$, $m^2+m-2+(m^2-1)\,\mathrm{i}$ 是纯虚数, 其中 i 是虚数单位, 则 $m=$______.

4. 若 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, 则 $x+y=$______.

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c. 若 $a^2+ab+b^2-c^2=0$, 则角 C 的大小是______.

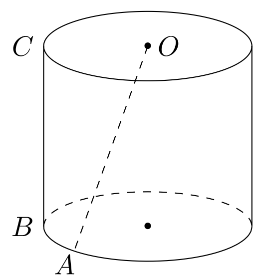
6. 某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的 40%. 在一次考试中, 男、女生平均分数分别为 75、80, 则这次考试该年级学生平均分数为______.

7. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10, 则 $a=$______.

8. 方程 $\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x$ 的实数解为______.

9. 若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(2x-2y)=$______.

10. 已知圆柱 Ω 的母线长为 l, 底面半径为 r, O 是上底面圆心, A、B 是下底面圆周上两个不同的点, BC 是母线, 如图. 若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则 $\dfrac{l}{r}=$______.



11. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的七个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是______. (结果用最简分数表示)

12. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴, 点 C 在 Γ 上, 且 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$, 若 $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为______.

13. 设常数 $a>0$. 若 $9x+\dfrac{a^2}{x}\geqslant a+1$ 对一切正实数 x 成立, 则 a 的取值范围为______.

14. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1. 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$; 以 C 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{c_1}$、$\overrightarrow{c_2}$、$\overrightarrow{c_3}$. 若 $i, j, k, l\in\{1,2,3\}$ 且 $i\neq j$, $k\neq l$, 则 $(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j})\cdot(\overrightarrow{c_k}+\overrightarrow{c_l})$ 的最小值是______.

二、选择题

15. 函数 $f(x)=x^2-1\ (x\geqslant 1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(2)$ 的值是（　）

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $-\sqrt{3}$　　(C) $1+\sqrt{2}$　　(D) $1-\sqrt{2}$

16. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\,|\,(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$, $B=\{x\,|\,x\geqslant a-1\}$. 若 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为（　）

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(2,+\infty)$　　(D) $[2,+\infty)$

17. 钱大姐常说“便宜没好货”, 她这句话的意思是: “不便宜”是“好货”的（　）

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

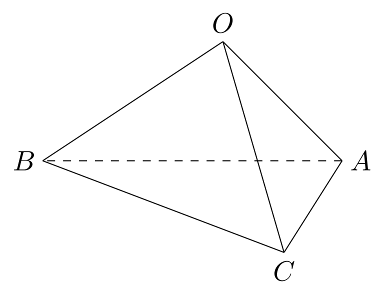
(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

18. 记椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{ny^2}{4n+1}=1$ 围成的区域 (含边界) 为 $\Omega_n\ (n=1,2,\cdots)$, 当点 (x,y) 分别在 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ 上时, $x+y$ 的最大值分别是 $M_1, M_2, \cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$（　）

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) 2　　(D) $2\sqrt{2}$

三、解答题

19. 如图, 正三棱锥 $O-ABC$ 底面边长为 2, 高为 1, 求该三棱锥的体积及表面积.



20. 甲厂以 x 千克/小时的速度运输生产某种产品 (生产条件要求 $1\leqslant x\leqslant 10$), 每一小时可获得利润是 $100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$ 元.

(1) 求证: 生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$ 元;

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求最大利润.

21. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$, 其中常数 $\omega>0$.

(1) 令 $\omega=1$, 判断函数 $F(x)=f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的奇偶性并说明理由;

(2) 令 $\omega=2$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 对任意的 $a\in\mathbf{R}$, 求 $y=g(x)$ 在区间 $[a,a+10\pi]$ 上零点个数的所有可能值.

22. 已知函数 $f(x)=2-|x|$, 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=0$, 求 a_2, a_3, a_4;

(2) 若 $a_1>0$, 且 a_1, a_2, a_3 成等比数列, 求 a_1 的值;

(3) 是否存在 a_1, 使得 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1; 若不存在, 说明理由.

23. 如图, 已知双曲线 $C_1:\frac{x^2}{2}-y^2=1$, 曲线 $C_2:|y|=|x|+1$. P 是平面内一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点, 则称 P 为"C_1-C_2 型点".

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是"C_1-C_2 型点"时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k|>1$, 进而证明原点不是"C_1-C_2 型点";

(3) 求证: 圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内的点都不是"C_1-C_2 型点".