

文科数学

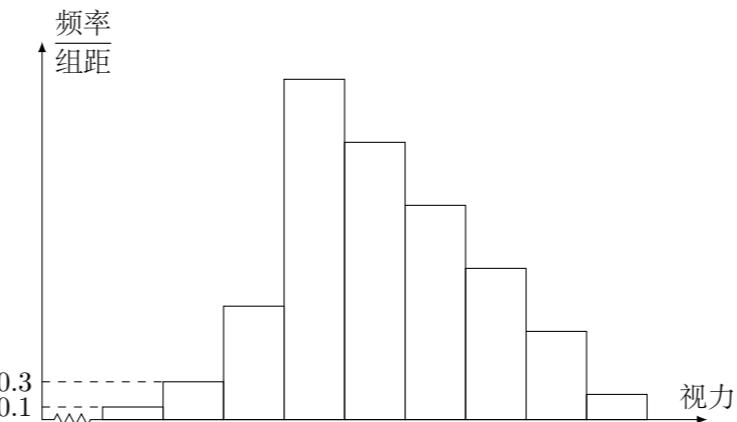
一、选择题

1. 设集合 $I = \{x|x| < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 2\}$, 则 $A \cup (\complement_I B) =$ ()
 (A) {1} (B) {1, 2} (C) {2} (D) {0, 1, 2}
2. 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$, 则 $\cos \alpha =$ ()
 (A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{4}{15}$ (D) $-\frac{3}{5}$
3. $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{12}$ 的展开式中, 含 x 的正整数次幂的项共有 ()
 (A) 4 项 (B) 3 项 (C) 2 项 (D) 1 项
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{\log_2(-x^2 + 4x - 3)}$ 的定义域为 ()
 (A) $(1, 2) \cup (2, 3)$ (B) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 (C) $(1, 3)$ (D) $[1, 3]$
5. 设函数 $f(x) = \sin 3x + |\sin 3x|$, 则 $f(x)$ 为 ()
 (A) 周期函数, 最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$ (B) 周期函数, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$
 (C) 周期函数, 数小正周期为 2π (D) 非周期函数
6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -4)$, $|\vec{c}| = \sqrt{5}$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$, 则 \vec{a} 与 \vec{c} 的夹角为 ()
 (A) 30° (B) 60° (C) 120° (D) 150°
7. 将 9 个 (含甲、乙) 平均分成三组, 甲、乙分在同一组, 则不同分组方法的种数为 ()
 (A) 70 (B) 140 (C) 280 (D) 840
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 设命题 $p: \frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$, 命题 $q: \triangle ABC$ 是等边三角形, 那么命题 p 是命题 q 的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
9. 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 3$, 沿 AC 将矩形 $ABCD$ 折成一个直二面角 $B - AC - D$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 ()
 (A) $\frac{125}{12}\pi$ (B) $\frac{125}{9}\pi$ (C) $\frac{125}{6}\pi$ (D) $\frac{125}{3}\pi$
10. 已知实数 a, b 满足等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^a = \left(\frac{1}{3}\right)^b$, 下列五个关系式:
 ① $0 < b < a$; ② $a < b < 0$; ③ $0 < a < b$; ④ $b < a < 0$; ⑤ $a = b$.
 其中不可能成立的关系式有 ()
 (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

11. 在 $\triangle OAB$ 中, O 为坐标原点, $A(1, \cos \theta)$, $B(\sin \theta, 1)$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $\triangle OAB$ 的面积达到最大值时, $\theta =$ ()

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

12. 为了解某校高三学生的视力情况, 随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况, 得到频率分布直方图. 由于不慎将部分数据丢失, 但知道前 4 组的频数成等比数列, 后 6 组的频数成等差数列, 设最大频率为 a , 视力在 4.6 到 5.0 之间的学生数为 b , 则 a, b 的值分别为 ()



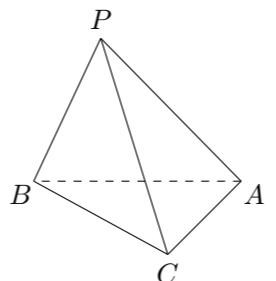
- (A) 0.27, 78 (B) 0.27, 83 (C) 2.7, 78 (D) 2.7, 83

二、填空题

13. 若函数 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 2a^2})$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.

14. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y - 2 \leqslant 0 \\ x + 2y - 4 > 0 \\ 2y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 _____.

15. 如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $PA = PB = PC = BC$, 且 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, 则 PA 与底面 ABC 所成角为 _____.



16. 以下同个关于圆锥曲线的命题中:

- ① 设 A, B 为两个定点, k 为非零常数, $|\overrightarrow{PA}| - |\overrightarrow{PB}| = k$, 则动点 P 的轨迹为双曲线;
 ② 设定圆 C 上一定点 A 作圆的动点弦 AB , O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 则动点 P 的轨迹为椭圆;
 ③ 方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率;
 ④ 双曲线 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{35} = 1$ 有相同的焦点.
 其中真命题的序号为 _____ . (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{ax + b}$ (a, b 为常数), 且方程 $f(x) - x + 12 = 0$ 有两个实根为 $x_1 = 3, x_2 = 4$.

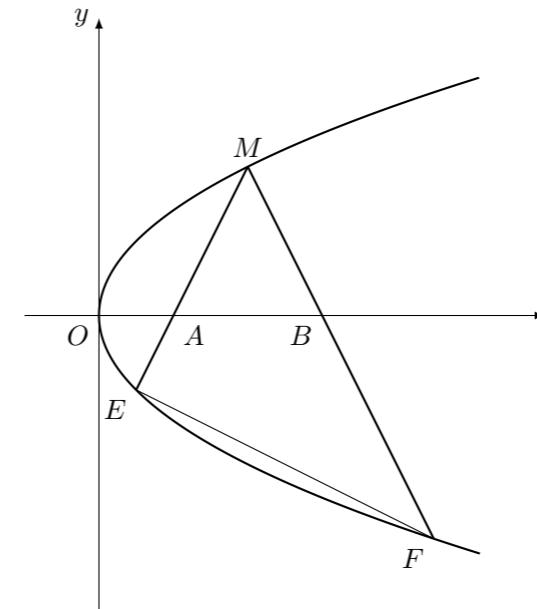
- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
 (2) 设 $k > 1$, 解关于 x 的不等式: $f(x) < \frac{(k+1)x - k}{2-x}$.

19. A 、 B 两位同学各有五张卡片, 现以投掷均匀硬币的形式进行游戏, 当出现正面朝上时 A 赢得 B 一张卡片, 否则 B 赢得 A 一张卡片, 如果某人已赢得所有卡片, 则游戏终止. 求掷硬币的次数不大于 7 次时游戏终止的概率.

21. 如图, M 是抛物线上 $y^2 = x$ 上的一点, 动弦 ME 、 MF 分别交 x 轴于 A 、 B 两点, 且 $MA = MB$.

- (1) 若 M 为定点, 证明: 直线 EF 的斜率为定值;
(2) 若 M 为动点, 且 $\angle EMF = 90^\circ$, 求 $\triangle EMF$ 的重心 G 的轨迹方程.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n - S_{n-2} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($n \geq 3$), 且 $S_1 = 1$, $S_2 = -\frac{3}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.



20. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = AA_1 = 1$, $AB = 2$, 点 E 在棱 AD 上移动.

- (1) 证明: $D_1E \perp A_1D$;
(2) 当 E 为 AB 的中点时, 求点 E 到面 ACD_1 的距离;
(3) AE 等于何值时, 二面角 $D_1 - EC - D$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.

