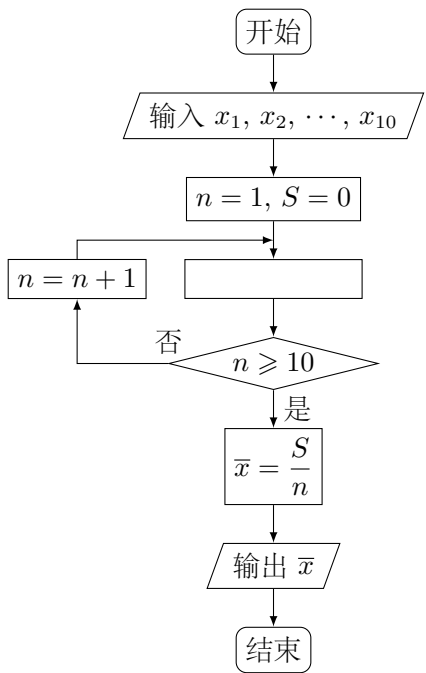


理科数学

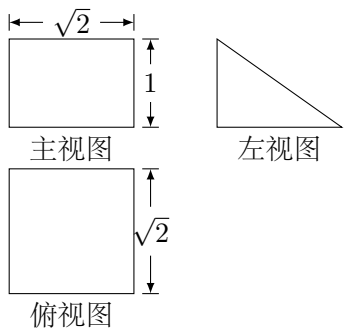
一、选择题

1. 集合 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid x < 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ()
(A) $\{x \mid x > 1\}$ (B) $\{x \mid x \geq 1\}$
(C) $\{x \mid 1 < x \leq 2\}$ (D) $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$
2. 复数 $z = \frac{i}{1+i}$ 在复平面上对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
3. 对于函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x$, 下列选项中正确的是 ()
(A) 对于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是递增的
(B) $f(x)$ 的图象关于原点对称
(C) $f(x)$ 的最小正周期为 2π
(D) $f(x)$ 的最大值为 2
4. $\left(x + \frac{a}{x}\right)^5$ ($x \in \mathbf{R}$) 展开式中 x^3 的系数为 10, 则实数 a 等于 ()
(A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2
5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1 \\ x^2 + ax, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(f(0)) = 4a$, 则实数 a 等于 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 2 (D) 9
6. 如图所示是求样本 x_1, x_2, \dots, x_{10} 平均数 \bar{x} 的程序框图, 图中空白框中应填入的内容为 ()



- (A) $S = S + x_n$ (B) $S = S + \frac{x_n}{n}$ (C) $S = S + n$ (D) $S = S + \frac{1}{n}$

7. 若某空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 ()

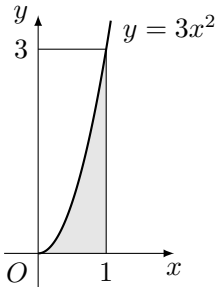


- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 2
8. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线与圆 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ 相切, 则 p 的值为 ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4
9. 对于数列 $\{a_n\}$, “ $a_{n+1} > |a_n|$ ($n = 1, 2, \dots$)”是“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的 ()
(A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
10. 某学校要召开学生代表大会, 规定各班每 10 人推选一名代表, 当各班人数除以 10 的余数大于 6 时再增选一名代表. 那么, 各班可推选代表人数 y 与该班人数 x 之间的函数关系用取整函数 $y = [x]$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数) 可以表示为 ()

- (A) $y = \left[\frac{x}{10}\right]$ (B) $y = \left[\frac{x+3}{10}\right]$ (C) $y = \left[\frac{x+4}{10}\right]$ (D) $y = \left[\frac{x+5}{10}\right]$

二、填空题

11. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, m)$, $\mathbf{c} = (-1, 2)$, 若 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \parallel \mathbf{c}$, 则 $m =$ _____.
12. 观察下列等式: $1^3 + 2^3 = 3^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$, \dots , 根据上述规律, 第五个等式为_____.
13. 从如图所示的长方形区域内任取一个点 $M(x, y)$, 则点 M 取自阴影部分的概率为_____.



14. 铁矿石 A 和 B 的含铁率 a , 冶炼每万吨铁矿石的 CO_2 排放量 b 及每万吨铁矿石的价格 c 如下表:

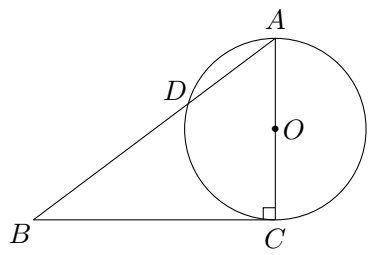
	a	b (万吨)	c (百万元)
A	50%	1	3
B	70%	0.5	6

某冶炼厂至少要生产 1.9 (万吨) 铁, 若要求 CO_2 的排放量不超过 2 (万吨), 则购买铁矿石的最少费用为_____ (百万元).

15. 三选一.

【A】不等式 $|x + 3| - |x - 2| \geq 3$ 的解集为_____.

【B】如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 AC, BC 的长分别为 3 cm, 4 cm, 以 AC 为直径的圆与 AB 交于点 D , 则 $\frac{BD}{DA} =$ _____.

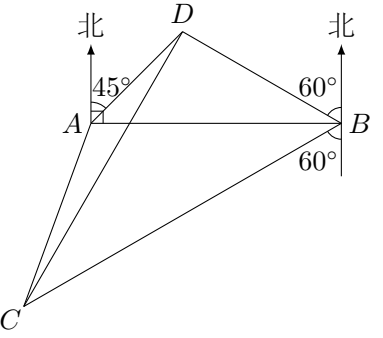


【C】已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = 1$, 则直线 l 与圆 C 的交点的直角坐标为_____.

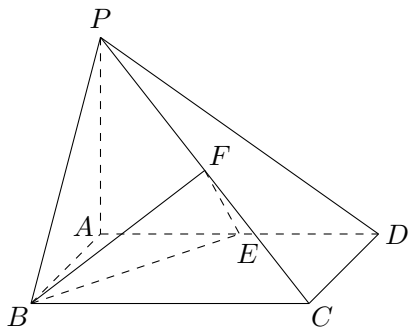
三、解答题

16. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1 = 1$ 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项;
(2) 求数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

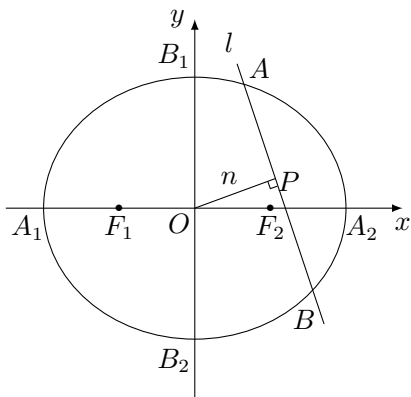
17. 如图, A, B 是海面上位于东西方向相距 $5(3 + \sqrt{3})$ 海里的两个观测点. 现位于 A 点北偏东 45° , B 点北偏西 60° 的 D 点有一艘轮船发出求救信号, 位于 B 点南偏西 60° 且与 B 点相距 $20\sqrt{3}$ 海里的 C 点的救援船立即前往营救, 其航行速度为 30 海里/小时, 该救援船到达 D 点需要多长时间?



18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AP = AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, E, F 分别是 AD, PC 的中点.
- (1) 证明: $PC \perp$ 平面 BEF ;
- (2) 求平面 BEF 与平面 BAP 夹角的大小.



20. 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的顶点为 A_1, A_2, B_1, B_2 , 焦点为 F_1, F_2 , $|A_1B_1| = \sqrt{7}$, $S_{\square A_1B_1A_2B_2} = 2S_{\square B_1F_1B_2F_2}$.
- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 设 n 是过原点的直线, l 是与 n 垂直相交于 P 点、与椭圆相交于 A, B 两点的直线, $|\vec{OP}| = 1$. 是否存在上述直线 l 使 $\vec{AP} \cdot \vec{PB} = 1$ 成立? 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = a \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.
- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 相交, 且在交点处有共同的切线, 求 a 的值和该切线方程;
- (2) 设函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 当 $h(x)$ 存在最小值时, 求其最小值 $\varphi(a)$ 的解析式;
- (3) 对 (2) 中的 $\varphi(a)$ 和任意的 $a > 0, b > 0$, 证明: $\varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\varphi'(a) + \varphi'(b)}{2} \leq \varphi'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$.

19. 为了解学生身高情况, 某校以 10% 的比例对全校 700 名学生按性别进行分层抽样调查, 测得身高情况的统计图如下:
- (1) 估计该校男生的人数;
- (2) 估计该校学生身高在 170 ~ 185 cm 之间的概率;
- (3) 从样本中身高在 165 ~ 180 cm 之间的女生中任选 2 人, 求至少有 1 人身高在 170 ~ 180 cm 之间的概率.

