2009 年普通高等学校招生考试（北京卷）

理科数学

一、选择题

1. 在复平面内, 复数 $z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$ 对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 不共线, $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ $(k\in\mathbf{R})$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{c}\parallel\boldsymbol{d}$, 那么 ( )

(A) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向 (B) $k=1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

(C) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 同向 (D) $k=-1$ 且 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 反向

3. 为了得到函数 $y=\lg\dfrac{x+3}{10}$ 的图象, 只需把函数 $y=\lg x$ 的图象上所有的点 ( )

(A) 向左平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(B) 向右平移 3 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

(C) 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

(D) 向右平移 3 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度

4. 若正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1, AB_1 与底面 $ABCD$ 成 60° 角, 则 A_1C_1 到底面 $ABCD$ 的距离为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

5. “$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$”是“$\cos 2\alpha=\dfrac{1}{2}$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 若 $\left(1+\sqrt{2}\right)^5=a+b\sqrt{2}$ (a, b 为有理数), 则 $a+b=$ ( )

(A) 45 (B) 55 (C) 70 (D) 80

7. 用 0 到 9 这 10 个数字, 可以组成没有重复数字的三位偶数的个数为( )

(A) 324 (B) 328 (C) 360 (D) 648

8. 点 P 在直线 l: $y=x-1$ 上, 若存在过 P 的直线交抛物线 $y=x^2$ 于 A, B 两点, 且 $|PA=|AB|$, 则称点 P 为“$\mathscr{A}$ 点”, 那么下列结论中正确的是( )

(A) 直线 l 上的所有点都是“$\mathscr{A}$ 点”

(B) 直线 l 上仅有有限个点是“$\mathscr{A}$ 点”

(C) 直线 l 上的所有点都不是“$\mathscr{A}$ 点”

(D) 直线 l 上有无穷多个点 (但不是所有的点) 是“$\mathscr{A}$ 点”

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-1}=$______.

10. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x\leqslant 4\\ y\leqslant 5\end{cases}$, 则 $s=y-x$ 的最小值为______.

11. 设 $f(x)$ 是偶函数. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 1, 则该曲线在 $(-1,f(-1))$ 处的切线的斜率为______.

12. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1, F_2, 点 P 在椭圆上. 若 $|PF_1|=4$, 则 $|PF_2|=$______; $\angle F_1PF_2$ 的大小为______.

13. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ x<0\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x,\ x\geqslant 0\end{cases}$, 则不等式 $|f(x)|\geqslant\dfrac{1}{3}$ 的解集为______.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{4n-3}=1$, $a_{4n-1}=0$, $a_{2n}=a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $a_{2009}=$______; $a_{2014}=$______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $B=\dfrac{\pi}{3}$, $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $b=\sqrt{3}$.

(1) 求 $\sin C$ 的值;

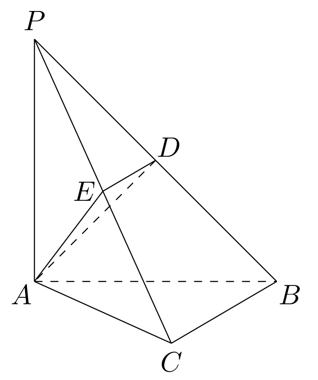
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 底面 ABC, $PA=AB$, $\angle ABC=60^\circ$, $\angle BCA=90^\circ$, 点 D, E 分别在棱 PB, PC 上, 且 $DE\parallel BC$.

(1) 求证: $BC\perp$ 平面 PAC;

(2) 当 D 为 PB 的中点时, 求 AD 与平面 PAC 所成的角的大小;

(3) 是否存在点 E 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角? 并说明理由.



17. 某学生在上学路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是 $\dfrac{1}{3}$, 遇到红灯时停留的时间都是 2 min.

(1) 求这名学生在上学路上到第三个路口时首次遇到红灯的概率;

(2) 求这名学生在上学路上因遇到红灯停留的总时间 ξ 的分布列及期望.

18. 设函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{kx}$ $(k\neq 0)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递增, 求 k 的取值范围.

19. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 右准线方程为 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 设直线 l 是圆 O: $x^2+y^2=2$ 上动点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq 0)$ 处的切线, l 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B, 证明 $\angle AOB$ 的大小为定值.

20. 已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ $(1\leqslant a_1<a_2<\cdots a_n,\ n\geqslant 2)$ 具有性质 P: 对任意的 i, j $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$, a_ia_j 与 $\dfrac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.

(1) 分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P, 并说明理由;

(2) 证明: $a_1=1$, 且 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$;

(3) 证明: 当 $n=5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.