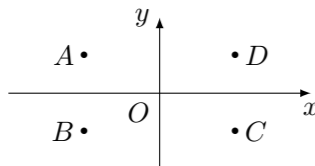


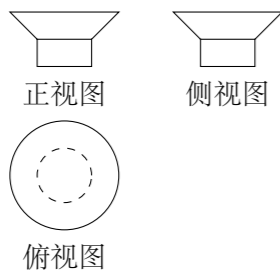
理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A = \{x \mid x + 2 = 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
(A) $\{-2\}$ (B) $\{2\}$ (C) $\{-2, 2\}$ (D) \emptyset
2. 如图, 在复平面内, 点 A 表示复数 z , 则图中表示 z 的共轭复数的点是()



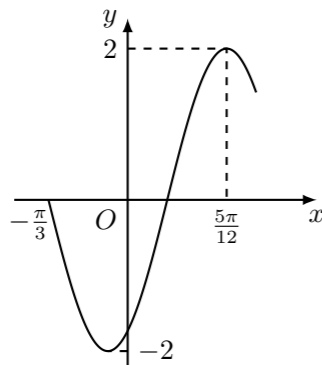
- (A) A (B) B (C) C (D) D
3. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的直观图可以是 ()



- (A) (B) (C) (D)
4. 设 $x \in \mathbf{Z}$, 集合 A 是奇数集, 集合 B 是偶数集. 若命题 $p: \forall x \in A, 2x \in B$, 则 ()

- (A) $\neg p: \forall x \in A, 2x \notin B$ (B) $\neg p: \forall x \notin A, 2x \notin B$
(C) $\neg p: \exists x \notin A, 2x \in B$ (D) $\neg p: \exists x \in A, 2x \notin B$

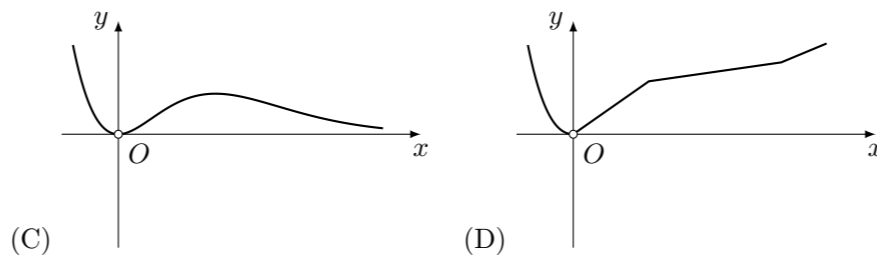
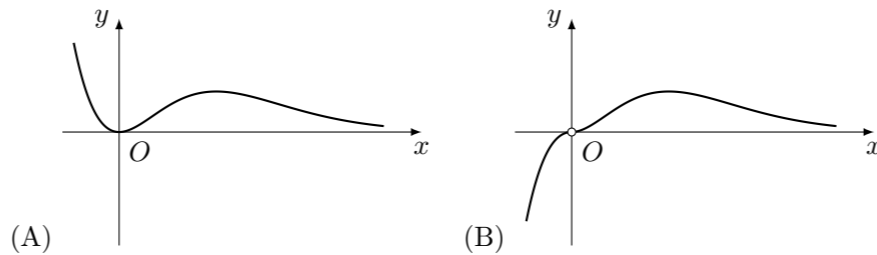
5. 函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ω, φ 的值分别是 ()



- (A) $2, -\frac{\pi}{3}$ (B) $2, -\frac{\pi}{6}$ (C) $4, -\frac{\pi}{6}$ (D) $4, \frac{\pi}{3}$
6. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的距离是 ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$

7. 函数 $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$ 的图象大致是 ()



8. 从 1, 3, 5, 7, 9 这五个数中, 每次取出两个不同的数分别为 a, b , 共可得到 $\lg a - \lg b$ 的不同值的个数是 ()

- (A) 9 (B) 10 (C) 18 (D) 20

9. 节日前夕, 小李在家门前的树上挂了两串彩灯, 这两串彩灯的第一次闪亮相互独立, 且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生, 然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮. 那么这两串彩灯同时通电后, 它们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒的概率是 ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{7}{8}$

10. 设函数 $f(x) = \sqrt{e^x + x - a}$ ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数). 若曲线 $y = \sin x$ 上存在 (x_0, y_0) 使得 $f(f(y_0)) = y_0$, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[1, e]$ (B) $[e^{-1} - 1, 1]$
(C) $[1, 1 + e]$ (D) $[e^{-1} - 1, e + 1]$

二、填空题

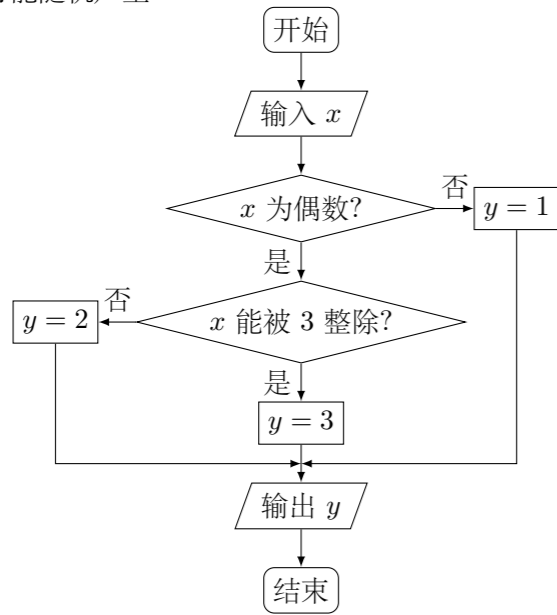
11. 二项式 $(x + y)^5$ 的展开式中, 含 $x^2 y^3$ 的项的系数是_____. (用数字作答)
12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AO}$, 则 $\lambda =$ _____.
13. 设 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\tan 2\alpha$ 的值是_____.
14. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 那么, 不等式 $f(x + 2) < 5$ 的解集是_____.
15. 设 P_1, P_2, \dots, P_n 为平面 α 内的 n 个点, 在平面 α 内的所有点中, 若点 P 到 P_1, P_2, \dots, P_n 点的距离之和最小, 则称点 P 为 P_1, P_2, \dots, P_n 点的一个“中位点”. 例如, 线段 AB 上的任意点都是端点 A, B 的中位点. 则有下列命题:
① 若三个点 A, B, C 共线, C 在线段 AB 上, 则 C 是 A, B, C 的中位点;
② 直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中位点;
③ 若四个点 A, B, C, D 共线, 则它们的中位点存在且唯一;
④ 梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.
其中的真命题是_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 8$, 且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项、公差及前 n 项和.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2\cos^2 \frac{A+B}{2} \cos B - \sin(A-B) \sin B + \cos(A+C) = -\frac{3}{5}$.
(1) 求 $\cos A$ 的值;
(2) 若 $a = 4\sqrt{2}$, $b = 5$, 求向量 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 方向上的投影.

18. 某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 $1, 2, 3, \dots, 24$ 这 24 个整数中等可能随机产生.



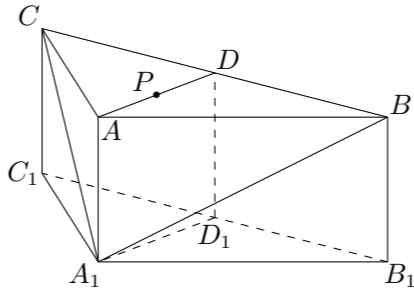
- (1) 分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 P_i ($i = 1, 2, 3$);
- (2) 甲、乙两同学依据自己对程序框图的理解, 各自编写程序重复运行 n 次后, 统计记录了输出 y 的值为 i ($i = 1, 2, 3$) 的频数. 以下是甲、乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计表 (部分)			
运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
...
2100	1027	376	697

乙的频数统计表 (部分)			
运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
...
2100	1051	696	353

- 当 $n = 2100$ 时, 根据表中的数据, 分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i ($i = 1, 2, 3$) 的频率 (用分数表示), 并判断两位同学中哪一位所编写程序符合算法要求的可能性较大;
- (3) 按程序框图正确编写的程序运行 3 次, 求输出 y 的值为 2 的次数 ξ 的分布列及数学期望.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB = AC = 2AA_1$, $\angle BAC = 120^\circ$, D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点, P 是线段 AD 的中点.
- (1) 在平面 ABC 内, 试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l , 说明理由, 并证明直线 $l \perp$ 平面 ADD_1A_1 ;
- (2) 设 (1) 中的直线 l 交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N , 求二面角 $A - A_1M - N$ 的余弦值.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 且椭圆 C 经过点 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
- (1) 求椭圆 C 的离心率;
- (2) 设过点 $A(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 点 Q 是线段 MN 上的点, 且 $\frac{2}{|AQ|^2} = \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|AN|^2}$, 求点 Q 的轨迹方程.

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 其中 a 是实数. 设 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 为该函数图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$.
- (1) 指出函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线互相垂直, 且 $x_2 < 0$, 求 $x_2 - x_1$ 的最小值;
- (3) 若函数 $f(x)$ 的图象在点 A, B 处的切线重合, 求 a 的取值范围.