

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $M = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$, 则 M 中元素的个数为 ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6
2. $(1 + \sqrt{3}i)^3 =$ ()
(A) -8 (B) 8 (C) $-8i$ (D) $8i$
3. 已知向量 $\boldsymbol{m} = (\lambda + 1, 1)$, $\boldsymbol{n} = (\lambda + 2, 2)$, 若 $(\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}) \perp (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{n})$, 则 $\lambda =$ ()
(A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1
4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则函数 $f(2x + 1)$ 的定义域为 ()
(A) $(-1, 1)$ (B) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $(-1, 0)$ (D) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
5. 函数 $f(x) = \log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ()
(A) $\frac{1}{2^x - 1}$ ($x > 0$) (B) $\frac{1}{2^x - 1}$ ($x \neq 0$)
(C) $2^x - 1$ ($x \in \mathbf{R}$) (D) $2^x - 1$ ($x > 0$)
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_2 = -\frac{4}{3}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于 ()
(A) $-6(1 - 3^{-10})$ (B) $\frac{1}{9}(1 - 3^{10})$ (C) $3(1 - 3^{-10})$ (D) $3(1 + 3^{-10})$
7. $(1 + x)^8(1 + y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是 ()
(A) 56 (B) 84 (C) 112 (D) 168
8. 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1 、 A_2 , 点 P 在 C 上且直线 PA_2 斜率的取值范围是 $[-2, -1]$, 那么直线 PA_1 斜率的取值范围是 ()
(A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ (B) $\left[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$
9. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 ()
(A) $[-1, 0]$ (B) $[-1, +\infty)$ (C) $[0, 3]$ (D) $[3, +\infty)$
10. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ()
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
11. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 与点 $M(-2, 2)$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, 则 $k =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

12. 已知函数 $f(x) = \cos x \sin 2x$, 下列结论中错误的是 ()
(A) $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 中心对称
(B) $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
(C) $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(D) $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

二、填空题

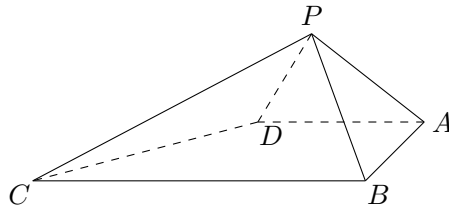
13. 已知 α 是第三象限角, $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $\cot \alpha =$ _____.
14. 6 个人排成一行, 其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有_____种. (用数字作答)
15. 记不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 4 \\ 3x + y \leq 4 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 D , 若直线 $y = a(x + 1)$ 与 D 有公共点, 则 a 的取值范围是_____.
16. 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆, 其公共弦长等于球 O 的半径, $OK = \frac{3}{2}$, 且圆 O 与圆 K 所在的平面所成的一个二面角为 60° , 则球 O 的表面积等于_____.

三、解答题

17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_3 = a_2^2$, 且 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $(a + b + c)(a - b + c) = ac$.
(1) 求 B ;
(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$, 求 C .

19. 如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = 2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是等边三角形.
(1) 证明: $PB \perp CD$;
(2) 求二面角 $A - PD - C$ 的大小.



20. 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判. 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.
- (1) 求第 4 局甲当裁判的概率;
- (2) X 表示前 4 局中乙当裁判的次数, 求 X 的数学期望.
21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 3, 直线 $y = 2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.
- (1) 求 a, b ;
- (2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点, 且 $|AF_1| = |BF_1|$, 证明: $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等比数列.
22. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x(1+\lambda x)}{1+x}$.
- (1) 若 $x \geq 0$ 时 $f(x) \leq 0$, 求 λ 的最小值;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, 证明: $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$.