

文科数学

一、选择题

1. 若 $P = \{x \mid x < 1\}$, $Q = \{x \mid x > -1\}$, 则 ()

- (A)
- $P \subseteq Q$
- (B)
- $Q \subseteq P$
- (C)
- $\complement_{\mathbb{R}}P \subseteq Q$
- (D)
- $Q \subseteq \complement_{\mathbb{R}}P$

2. 若复数 $z = 1 + i$, i 为虚数单位, 则 $(1+z) \cdot z =$ ()

- (A)
- $1+3i$
- (B)
- $3+3i$
- (C)
- $3-i$
- (D) 3

3. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+2y-5 \geq 0 \\ 2x+y-7 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$, 则 $3x+4y$ 的最小值是()

- (A) 13 (B) 15 (C) 20 (D) 28

4. 若直线 l 不平行于平面 α , 且 $l \not\subset \alpha$, 则 ()

- (A)
- α
- 内的所有直线与
- l
- 异面 (B)
- α
- 内不存在与
- l
- 平行的直线
-
- (C)
- α
- 内存在唯一的直线与
- l
- 平行 (D)
- α
- 内的直线与
- l
- 都相交

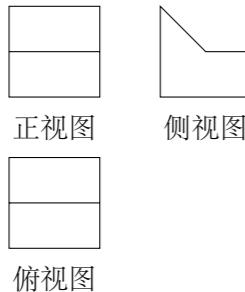
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a \cos A = b \sin B$, 则 $\sin A \cos A + \cos^2 B =$ ()

- (A)
- $-\frac{1}{2}$
- (B)
- $\frac{1}{2}$
- (C) -1 (D) 1

6. 若 a, b 为实数, 则“ $0 < ab < 1$ ”是“ $b < \frac{1}{a}$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
-
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 若某几何体的三视图如图所示, 则这个几何体的直观图可以是 ()



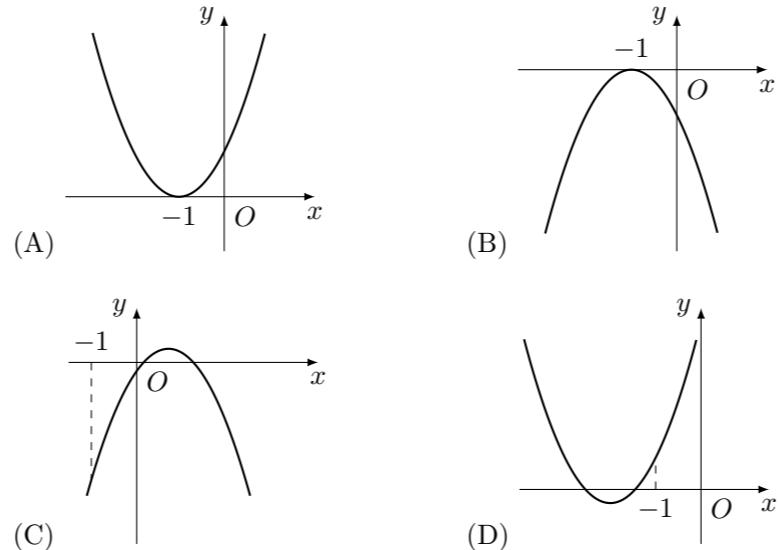
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

8. 从装有 3 个红球、2 个白球的袋中任取 3 个球, 则所取的 3 个球中至少有 1 个白球的概率是 ()

- (A)
- $\frac{1}{10}$
- (B)
- $\frac{3}{10}$
- (C)
- $\frac{3}{5}$
- (D)
- $\frac{9}{10}$

9. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 有公共的焦点, C_2 的一条渐近线与以 C_1 的长轴为直径的圆相交于 A, B 两点. 若 C_1 恰好将线段 AB 三等分, 则 ()

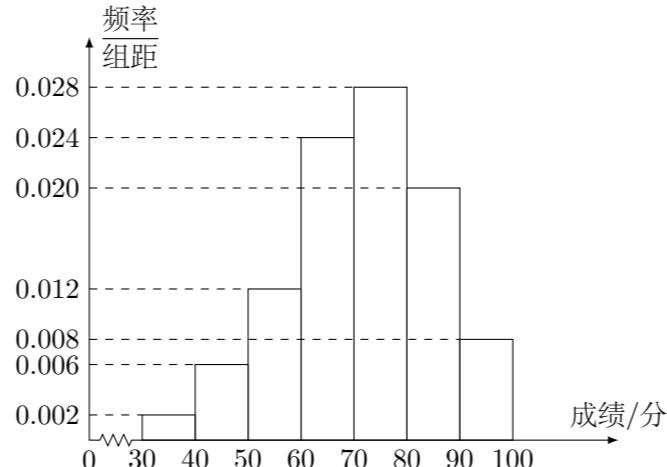
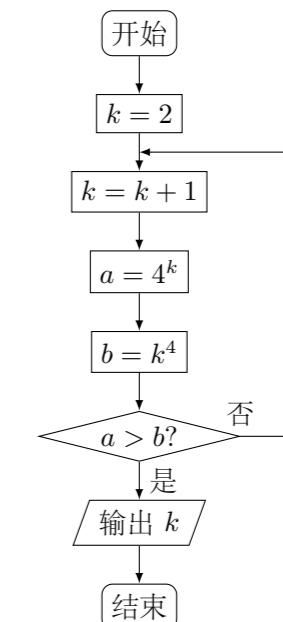
- (A)
- $a^2 = \frac{13}{2}$
- (B)
- $a^2 = 13$
- (C)
- $b^2 = \frac{1}{2}$
- (D)
- $b^2 = 2$

10. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). 若 $x = -1$ 为函数 $y = f(x)e^x$ 的一个极值点, 则下列图象不可能为 $y = f(x)$ 图象的是 ()

二、填空题

11. 设函数 $f(x) = \frac{4}{1-x}$. 若 $f(a) = 2$, 则实数 $a =$ _____.12. 若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直, 则实数 $m =$ _____.

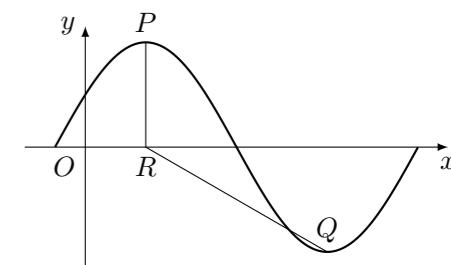
13. 某小学为了解学生数学课程的学习情况, 在 3000 名学生中随机抽取 200 名, 并统计这 200 名学生的某次数学考试成绩, 得到了样本的频率分布直方图 (如图). 根据频率分布直方图, 3000 名学生在该次数学考试中成绩小于 60 分的学生数是 _____.

14. 某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的 k 的值是 _____.15. 若平面向量 α, β 满足 $|\alpha| = 1, |\beta| \leq 1$, 且以向量 α, β 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$, 则 α 和 β 的夹角 θ 的取值范围是 _____.16. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是 _____.17. 若数列 $\left\{ n(n+4) \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$ 中的最大项是第 k 项, 则 $k =$ _____.

三、解答题

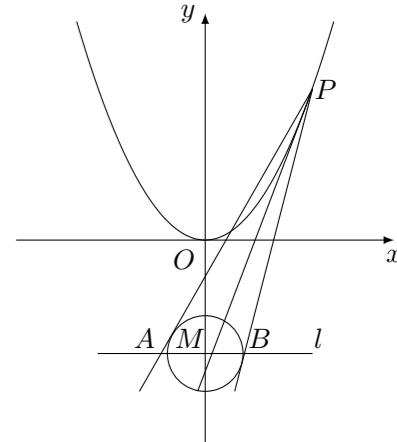
18. 已知函数 $f(x) = A \sin\left(\frac{\pi}{3}x + \varphi\right)$, $x \in \mathbb{R}, A > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. $y = f(x)$ 的部分图象如图所示, P, Q 分别为该图象的最高点和最低点, 点 P 的坐标为 $(1, A)$.

- (1) 求
- $f(x)$
- 的最小正周期及
- φ
- 的值;
-
- (2) 若点
- R
- 的坐标为
- $(1, 0)$
- ,
- $\angle PRQ = \frac{2\pi}{3}$
- , 求
- A
- 的值.



19. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 为 a ($a \in \mathbf{R}$), 且 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_4}$ 成等比数列.
 (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 试比较 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{2^2}} + \frac{1}{a_{2^3}} + \cdots + \frac{1}{a_{2^n}}$ 与 $\frac{1}{a_1}$ 的大小.
21. 设函数 $f(x) = a^2 \ln x - x^2 + ax, a > 0$.
 (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 求所有实数 a , 使 $e - 1 \leq f(x) \leq e^2$ 对 $x \in [1, e]$ 恒成立.
 注: e 为自然对数的底数.

22. 如图, 设 P 为抛物线 $C_1: x^2 = y$ 上的动点, 过点 P 做圆 $C_2: x^2 + (y + 3)^2 = 1$ 的两条切线, 交直线 $l: y = -3$ 于 A, B 两点.
 (1) 求 C_2 的圆心 M 到抛物线 C_1 准线的距离.
 (2) 是否存在点 P , 使线段 AB 被抛物线 C_1 在点 P 处的切线平分, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



20. 如图, 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 的中点, $PO \perp$ 平面 ABC , 垂足 O 落在线段 AD 上.
 (1) 证明: $AP \perp BC$;
 (2) 已知 $BC = 8$, $PO = 4$, $AO = 3$, $OD = 2$. 求二面角 $B - AP - C$ 的大小.

