

文科数学

一、选择题

1. 复数 $z = i(-2 - i)$ (i 为虚数单位) 在复平面内所对应的点在 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 若集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + ax + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 $a =$ ()

- (A) 4 (B) 2 (C) 0 (D) 0 或 4

3. 若 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- (A)
- $-\frac{2}{3}$
- (B)
- $-\frac{1}{3}$
- (C)
- $\frac{1}{3}$
- (D)
- $\frac{2}{3}$

4. 集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A, B 中各任意取一个数, 则这两数之和等于 4 的概率是 ()

- (A)
- $\frac{2}{3}$
- (B)
- $\frac{1}{2}$
- (C)
- $\frac{1}{3}$
- (D)
- $\frac{1}{6}$

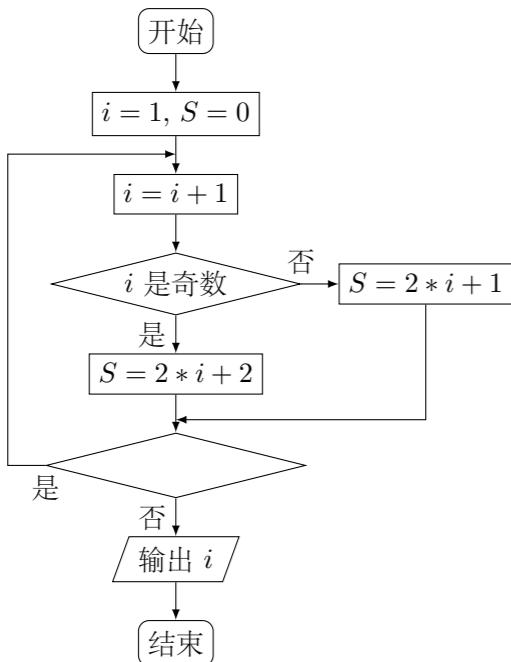
5. 总体由编号为 01, 02, …, 19, 20 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

- (A) 08 (B) 07 (C) 02 (D) 01

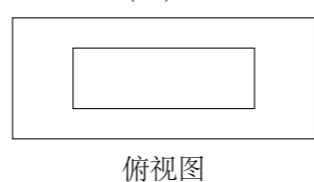
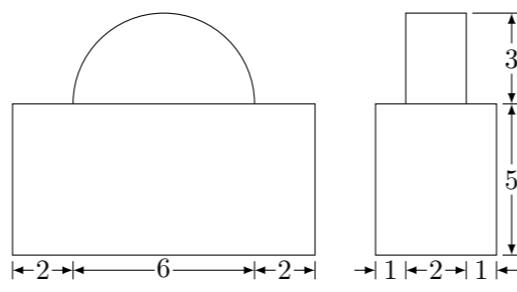
6. 下列选项中, 使不等式 $x < \frac{1}{x} < x^2$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- (A)
- $(-\infty, -1)$
- (B)
- $(-1, 0)$
- (C)
- $(0, 1)$
- (D)
- $(1, +\infty)$

7. 阅读如图所示程序框图, 如果输出 $i = 4$, 那么在空白的判断框中应填入的条件是 ()

- (A)
- $S < 8$
- (B)
- $S < 9$
- (C)
- $S < 10$
- (D)
- $S < 11$

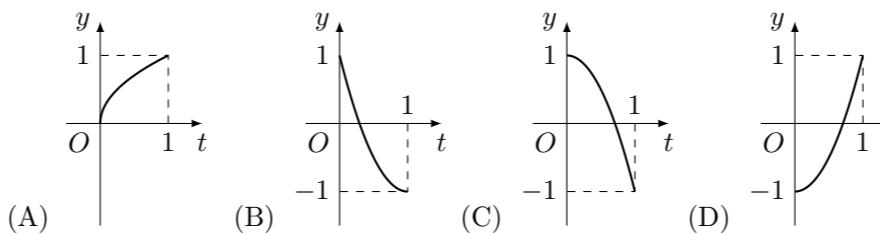
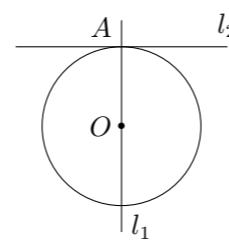
8. 一几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



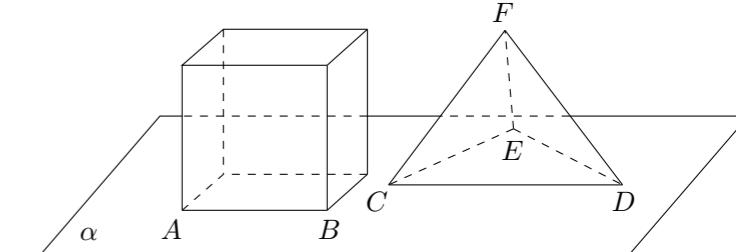
- (A)
- $200 + 9\pi$
- (B)
- $200 + 18\pi$
- (C)
- $140 + 9\pi$
- (D)
- $140 + 18\pi$

9. 已知点 $A(2, 0)$, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M , 与其准线相交于点 N , 则 $|FM| : |MN| =$ ()

- (A)
- $2 : \sqrt{5}$
- (B)
- $1 : 2$
- (C)
- $1 : \sqrt{5}$
- (D)
- $1 : 3$

10. 如图, 已知 $l_1 \perp l_2$, 圆心在 l_1 上, 半径为 1 m 的圆 O 在 $t = 0$ 时与 l_2 相切于点 A , 圆 O 沿 l_1 以 1 m/s 的速度匀速向上移动, 圆被直线 l_2 所截上方圆弧长记为 x , 令 $y = \cos x$, 则 y 与时间 t ($0 \leq t \leq 1$, 单位: s) 的函数 $y = f(t)$ 的图象大致为 ()

二、填空题

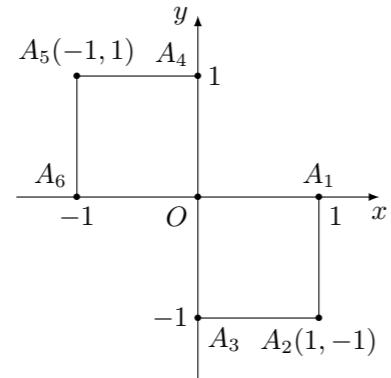
11. 若曲线 $y = x^\alpha + 1$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) 在点 $(1, 2)$ 处的切线经过坐标原点, 则 $\alpha =$ ____.12. 某住宅小区计划植树不少于 100 棵, 若第一天植 2 棵, 以后每天植树的棵数是前一天的 2 倍, 则需要的最少天数 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 等于 ____.13. 设 $f(x) = \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x$, 若对任意实数 x 都有 $|f(x)| \leq a$, 则实数 a 的取值范围是 ____.14. 若圆 C 经过坐标原点和点 $(4, 0)$, 且与直线 $y = 1$ 相切, 则圆 C 的方程是 ____.15. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 则直线 EF 与正方体的六个面所在的平面相交的平面个数为 ____.

三、解答题

16. 正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n^2 - (2n - 1)a_n - 2n = 0$.(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;(2) 令 $b_n = \frac{1}{(n+1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A \sin B + \sin B \sin C + \cos 2B = 1$.(1) 求证: a, b, c 成等差数列;(2) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\frac{a}{b}$ 的值.

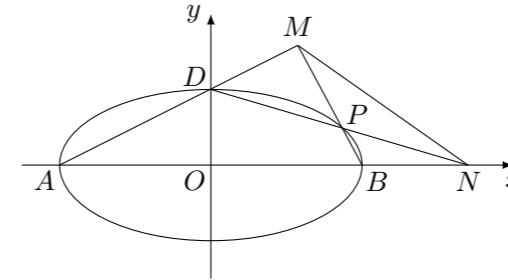
18. 小波以游戏方式决定是去打球、唱歌还是去下棋，游戏规则为：以 O 为起点，再从 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (如图) 这 6 个点中任取两点分别为终点得到两个向量，记这两个向量的数量积为 X ，若 $X > 0$ 就去打球，若 $X = 0$ 就去唱歌，若 $X < 0$ 就去下棋。

- (1) 写出数量积 X 的所有可能取值；
(2) 分别求小波去下棋的概率和不去唱歌的概率。



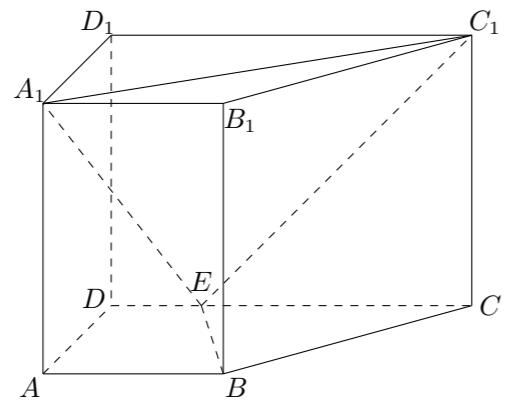
20. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a + b = 3$.

- (1) 求椭圆 C 的方程；
(2) 如图所示， A, B, D 是椭圆 C 的顶点， P 是椭圆 C 上除顶点外的任意一点，直线 DP 交 x 轴于点 N ，直线 AD 交 BP 于点 M ，设 BP 的斜率为 k , MN 的斜率为 m , 证明: $2m - k$ 为定值。



19. 如图，直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $AA_1 = 3$, E 为 CD 上一点, $DE = 1$, $EC = 3$.

- (1) 证明: $BE \perp$ 平面 BB_1C_1C ；
(2) 求点 B_1 到平面 EA_1C_1 的距离。



21. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x, & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{1-a}(1-x), & a < x \leq 1 \end{cases}$, a 为常数且 $a \in (0, 1)$.

- (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 求 $f(f(\frac{1}{3}))$ ；
(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$, 但 $f(x_0) \neq x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的二阶周期点, 证明: 函数 $f(x)$ 有且仅有两个二阶周期点, 并求出二阶周期点 x_1, x_2 ；
(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2 , 设 $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(a^2, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 求 $S(a)$ 在区间 $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 上的最大值和最小值。