2006 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$, $N=\{x||x|<2\}$, 则 ( )

(A) $M\cap N=\varnothing$ (B) $M\cap N=M$ (C) $M\cup N=M$ (D) $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 已知函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则 ( )

(A) $f(2x)=\mathrm{e}^{2x}\ (x\in\mathbf{R})$ (B) $f(2x)=\ln 2\cdot\ln x\ (x>0)$

(C) $f(2x)=2\mathrm{e}^x\ (x\in\mathbf{R})$ (D) $f(2x)=\ln x+\ln 2\ (x>0)$

3. 双曲线 $mx^2+y^2=1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍, 则 $m=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{4}$ (B) -4 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 如果复数 $(m^2+\mathrm{i})(1+m\mathrm{i})$ 是实数, 则实数 $m=$ ( )

(A) 1 (B) -1 (C) $\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{2}$

5. 函数 $f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 ( )

(A) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\in\mathbf{Z}$ (B) $(k\pi,(k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}$

(C) $\left(k\pi-\dfrac{3\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}$ (D) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right),\ k\in\mathbf{Z}$

6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

7. 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ( )

(A) 16π (B) 20π (C) 24π (D) 32π

8. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) $\dfrac{7}{5}$ (C) $\dfrac{8}{5}$ (D) 3

9. 设平面向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ 的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}$. 如果向量 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ 满足 $|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$, 且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 30° 后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向, 其中 $i=1,2,3$, 则( )

(A) $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (B) $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

(C) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$ (D) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

10. 设 a_n 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1+a_2+a_3=15$, $a_1a_2a_3=80$, 则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$ ( )

(A) 120 (B) 105 (C) 90 (D) 75

11. 用长度分别为 2, 3, 4, 5, 6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ( )

(A) $8\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$ (B) $6\sqrt{10}\ \mathrm{cm}^2$ (C) $3\sqrt{55}\ \mathrm{cm}^2$ (D) $20\ \mathrm{cm}^2$

12. 设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$. 选择 I 的两个非空子集 A 和 B, 要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数, 则不同的选择方法共有 ( )

(A) 50 种 (B) 49 种 (C) 48 种 (D) 47 种

二、填空题

13. 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于______.

14. 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件: $\begin{cases}2x-y\geqslant -1\\ 3x+2y\leqslant 23\\ y\geqslant 1\end{cases}$, 则 z 的最大值为______.

15. 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有______种. (用数字作答)

16. 函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)\ (0<\varphi<\pi)$. 若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数, 则 $\varphi=$______.

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C, 求当 A 为何值时, $\cos A+2\cos\dfrac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.

18. A, B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\dfrac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

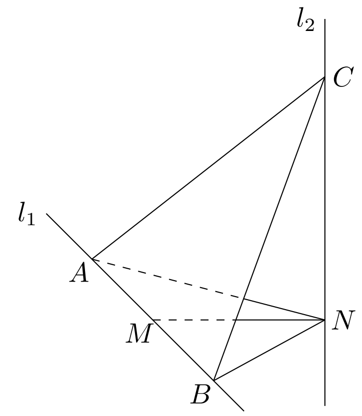
(1) 求一个试验组为甲类组的概率;

(2) 观察 3 个试验组, 用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. 如图, l_1, l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A, B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(1) 证明: $AC\perp NB$;

(2) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆, 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C, 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x, y 轴的交点分别为 A, B, 且向量 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求:

(1) 点 M 的轨迹方程;

(2) $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ 的最小值.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{e}^{-ax}$.

(1) 设 $a>0$, 讨论 $y=f(x)$ 的单调性;

(2) 若对任意 $x\in(0,1)$ 恒有 $f(x)>1$, 求 a 的取值范围.

22. 设数列 a_n 的前 n 项的和 $S_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}$, $n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求首项 a_1 与通项 a_n;

(2) 设 $T_n=\dfrac{2^n}{S_n}$, $n=1,2,3,\cdots$, 证明: $\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\dfrac{3}{2}$.