

理科数学

一、选择题

1. 函数 $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$ 的定义域是 ()

- (A)
- $(3, +\infty)$
- (B)
- $[3, +\infty)$
- (C)
- $(4, +\infty)$
- (D)
- $[4, +\infty)$

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{3}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) =$ ()

- (A)
- $\frac{1}{2}$
- (B)
- $\frac{2}{3}$
- (C)
- $\frac{3}{2}$
- (D) 2

3. 过平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有 ()

- (A) 4 条 (B) 6 条 (C) 8 条 (D) 12 条

4. “ $a = 1$ ”是“函数 $f(x) = |x - a|$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
-
- (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$, 且关于 x 的方程 $x^2 + |\vec{a}|x + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 有实根, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角的取值范围是 ()

- (A)
- $[0, \frac{\pi}{6}]$
- (B)
- $[\frac{\pi}{3}, \pi]$
- (C)
- $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$
- (D)
- $[\frac{\pi}{6}, \pi]$

6. 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有 ()

- (A) 16 种 (B) 36 种 (C) 42 种 (D) 60 种

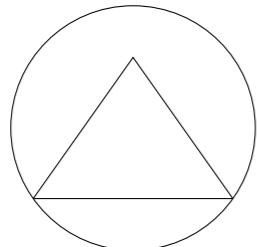
7. 过双曲线 $M: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l , 若 l 与双曲线 M 的两条渐近线分别相交于点 B, C , 且 $|AB| = |BC|$, 则双曲线 M 的离心率是 ()

- (A)
- $\sqrt{10}$
- (B)
- $\sqrt{5}$
- (C)
- $\frac{\sqrt{10}}{3}$
- (D)
- $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x|f(x) < 0\}$, $P = \{x|f'(x) > 0\}$, 若 $M \subsetneqq P$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- (A)
- $(-\infty, 1)$
- (B)
- $(0, 1)$
- (C)
- $(1, +\infty)$
- (D)
- $[1, +\infty)$

9. 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图, 则图中三角形 (正四面体的截面) 的面积是 ()

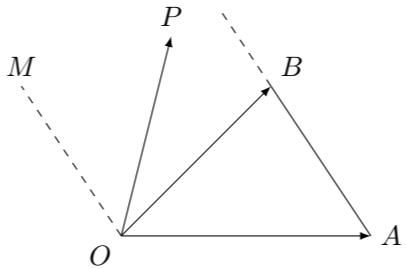


- (A)
- $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (B)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C)
- $\sqrt{2}$
- (D)
- $\sqrt{3}$

10. 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是 ()

- (A)
- $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$
- (B)
- $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$
- (C)
- $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$
- (D)
- $[0, \frac{\pi}{2}]$

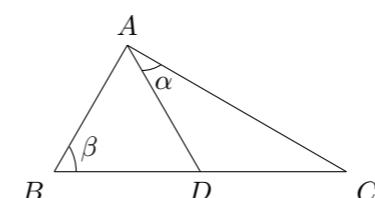
二、填空题

11. 若 $(ax - 1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80 , 则实数 a 的值是 ____.12. 已知 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x - y + 1 \leqslant 0 \\ 2x - y - 2 \leqslant 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是 ____.13. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和 $y = x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是 ____.14. 若 $f(x) = a \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + b \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ($ab \neq 0$) 是偶函数, 则有序实数对 (a, b) 可以是 _____. (写出你认为正确的一组数字即可)15. 如图, $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM 、线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 则 x 的取值范围是 _____; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是 _____.


三、解答题

16. 如图, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB = AD$, 记 $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

- (1) 证明:
- $\sin \alpha + \cos 2\beta = 0$
- ;
-
- (2) 若
- $AC = \sqrt{3}DC$
- , 求
- β
- 的值.
-
-

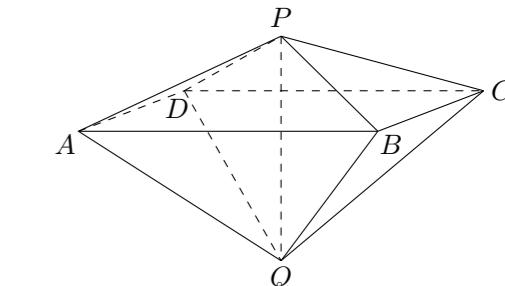


17. 某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查 (简称安检). 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前安检合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算 (结果精确到 0.01):

- (1) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;
-
- (2) 平均有多少家煤矿必须整改;
-
- (3) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. 如图, 已知两个正四棱锥 $P - ABCD$ 与 $Q - ABCD$ 的高分别为 1 和 2, $AB = 4$.

- (1) 证明:
- $PQ \perp$
- 平面
- $ABCD$
- ;
-
- (2) 求异面直线
- AQ
- 与
- PB
- 所成的角;
-
- (3) 求点
- P
- 到平面
- QAD
- 的距离.
-
-



19. 已知函数 $f(x) = x - \sin x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 < a_1 < 1$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 证明:
- (1) $0 < a_{n+1} < a_n < 1$;
 - (2) $a_{n+1} < \frac{1}{6}a_n^3$.
20. 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度 (含污物体的清洁度定义为: $1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$) 为 0.8, 要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a ($1 \leq a \leq 3$). 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}$ ($x > a-1$), 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$, 其中 c ($0.8 < c < 0.99$) 是该物体初次清洗后的清洁度.
- (1) 分别求出方案甲以及 $c = 0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;
 - (2) 若采用方案乙, 当 a 为某定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.
21. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 抛物线 $C_2: (y-m)^2 = 2px$ ($p > 0$), 且 C_1 、 C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.
- (1) 当 $AB \perp x$ 轴时, 求 m 、 p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;
 - (2) 是否存在 m 、 p 的值, 使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上? 若存在, 求出符合条件的 m 、 p 的值; 若不存在, 请说明理由.