2021 年普通高等学校招生考试（全国卷 I）

理科数学

一、选择题

1. 设 $2(z+\overline{z})+3(z-\overline{z})=4+6\mathrm{i}$, 则 $z=$ （ ）

(A) $1-2\mathrm{i}$　(B) $1+2\mathrm{i}$　(C) $1+\mathrm{i}$　(D) $1-\mathrm{i}$

2. 已知集合 $S=\{s\,|s=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$, $T=\{t\,|t=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$, 则 $S\cap T=$ （ ）

(A) $\varnothing$　(B) S　(C) T　(D) $\mathbf{Z}$

3. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x<1$; 命题 q: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{|x|}\geqslant 1$, 则下列命题中为真命题的是 （ ）

(A) $p\wedge q$　(B) $\neg p\wedge q$　(C) $p\wedge\neg q$　(D) $\neg(p\vee q)$

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 （ ）

(A) $f(x-1)-1$　(B) $f(x-1)+1$

(C) $f(x+1)-1$　(D) $f(x+1)+1$

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成角为 （ ）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $\dfrac{\pi}{3}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{6}$ （ ）

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 （ ）

(A) 60 种　(B) 120 种　(C) 240 种　(D) 480 种

7. 把函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x)=$ （ ）

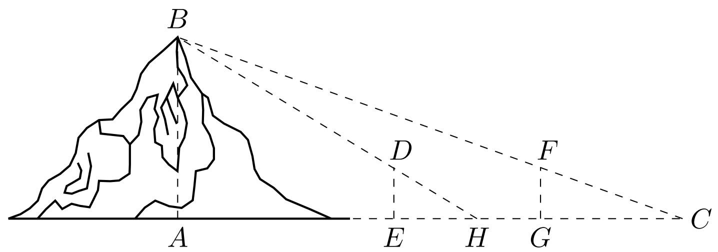
(A) $\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　(B) $\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$

(C) $\sin\left(2x-\dfrac{7\pi}{12}\right)$　(D) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

8. 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\dfrac{7}{4}$ 的概率为( )

(A) $\dfrac{7}{9}$　(B) $\dfrac{23}{32}$　(C) $\dfrac{9}{32}$　(D) $\dfrac{2}{9}$

9. 魏晋时期刘徽编写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高. 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB=$ （ ）



(A) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表高}$　(B) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表高}$

(C) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}+\text{表距}$　(D) $\dfrac{\text{表高}\times\text{表距}}{\text{表目距的差}}-\text{表距}$

10. 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 是函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则（ ）

(A) $a<b$　(B) $a>b$　(C) $ab<a^2$　(D) $ab>a^2$

11. 设 B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的上顶点, 若 C 上任意一点 P 都满足 $|PB|\leqslant 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 （ ）

(A) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　(B) $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$　(C) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

12. 设 $a=2\ln 1.01$, $b=\ln 1.02$, $c=\sqrt{1.04}-1$, 则 （ ）

(A) $a<b<c$　(B) $b<c<a$　(C) $b<a<c$　(D) $c<a<b$

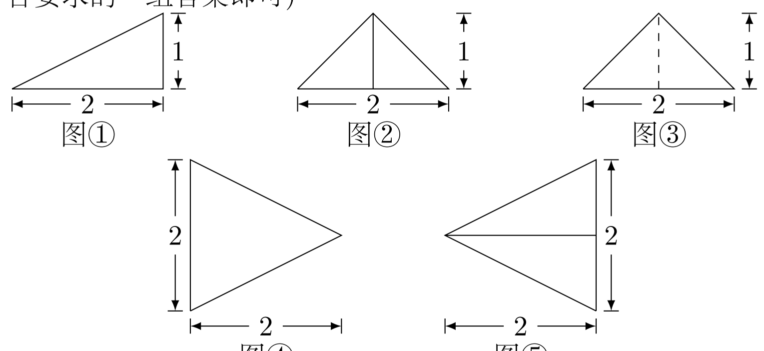
二、填空题

13. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ $(m>0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$, 则 C 的焦距为______.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,4)$, $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$______.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$______.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为______. (写出符合要求的一组答案即可)



图①　图②　图③　图④　图⑤

三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$, 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2.

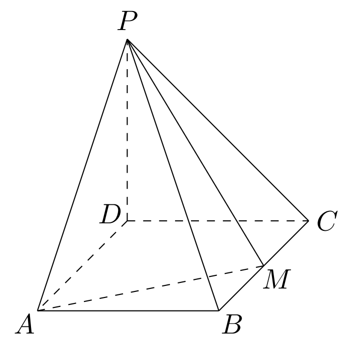
(1) 求 $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_1^2, s_2^2;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\overline{y}-\overline{x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $PD=DC=1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB\perp AM$.

(1) 求 BC;

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\dfrac{2}{S_n}+\dfrac{1}{b_n}=2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. 设函数 $f(x)=\ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a;

(2) 设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x)<1$.

21. 已知抛物线 C: $x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 且 F 与圆 M: $x^2+(y+4)^2=1$ 上的点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p;

(2) 若点 P 在圆 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x)>-a$, 求 a 的取值范围.