

2003 年普通高等学校招生考试 (北京卷)

# 文科数学

一、选择题

1. 设集合  $A = \{x|x^2 - 1 > 0\}$ ,  $B = \{x|\log_2 x > 0\}$ ,  $A \cap B$  等于 ( )

- (A)  $\{x|x > 1\}$       (B)  $\{x|x > 0\}$   
 (C)  $\{x|x < -1\}$       (D)  $\{x|x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

2. 设  $y_1 = 4^{0.9}$ ,  $y_2 = 8^{0.44}$ ,  $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$ , 则 ( )

- (A)  $y_3 > y_1 > y_2$    (B)  $y_2 > y_1 > y_3$    (C)  $y_1 > y_2 > y_3$    (D)  $y_1 > y_3 > y_2$

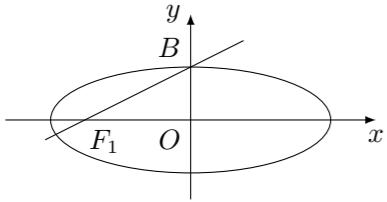
3. “ $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ”的 ( )

- (A) 必要非充分条件      (B) 充分非必要条件  
 (C) 充分必要条件      (D) 既非充分又非必要条件

4. 已知  $\alpha, \beta$  是平面,  $m, n$  是直线. 下列命题中不正确的是 ( )

- (A) 若  $m // n$ ,  $m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$    (B) 若  $m // \alpha$ ,  $\alpha \cap \beta = n$ , 则  $m // n$   
 (C) 若  $m \perp \alpha$ ,  $m \perp \beta$ , 则  $\alpha // \beta$    (D) 若  $m \perp \alpha$ ,  $m \subset \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$

5. 如图, 直线  $l: x - 2y + 2 = 0$  过椭圆的左焦点  $F_1$  和一个顶点  $B$ , 该椭圆的离心率是 ( )



- (A)  $\frac{1}{5}$       (B)  $\frac{2}{5}$       (C)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       (D)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 若  $z \in \mathbf{C}$  且  $|z + 2 - 2i| = 1$ , 则  $|z - 2 - 2i|$  的最小值是 ( )

- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5

7. 如果圆台的母线与底面成  $60^\circ$  角, 那么这个圆台的侧面积与轴截面面积的比为 ( )

- (A)  $2\pi$       (B)  $\frac{3}{2}\pi$       (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$       (D)  $\frac{1}{2}\pi$

8. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = \frac{3^{-n} + (-1)^n 3^{-n}}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  等于 ( )

- (A)  $\frac{1}{24}$       (B)  $\frac{1}{8}$       (C)  $\frac{1}{6}$       (D)  $\frac{1}{2}$

9. 从黄瓜、白菜、油菜、扁豆 4 种蔬菜品种中选出 3 种, 分别种在不同土质的三块土地上, 其中黄瓜必须种植, 不同的种植方法共有 ( )

- (A) 24 种      (B) 18 种      (C) 12 种      (D) 6 种

10. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人. 全班  $k$  名同学都有选举权和被选举权, 他们的编号分别为  $1, 2, \dots, k$ , 规定: 同意按“1”, 不同意(含弃权)按“0”, 令  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号同学同意第 } j \text{ 号同学当选} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号同学不同意第 } j \text{ 号同学当选} \end{cases}$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, k$ , 且  $j = 1, 2, \dots, k$ , 则同时同意第 1, 2 号同学当选的人数为 ( )

- (A)  $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2k}$   
 (B)  $a_{11} + a_{21} + \dots + a_{1k} + a_{12} + a_{22} + \dots + a_{2k}$   
 (C)  $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + \dots + a_{k1}a_{k2}$   
 (D)  $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \dots + a_{1k}a_{2k}$

二、填空题

11. 已知某球体的体积与其表面积的数值相等, 则此球体的半径为\_\_\_\_\_.

12. 函数  $f(x) = \lg(1+x^2)$ ,  $g(x) = 2-|x|$ ,  $h(x) = \tan 2x$  中, \_\_\_\_\_是偶函数.

13. 以双曲线  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  右顶点为顶点, 左焦点为焦点的抛物线的方程是\_\_\_\_\_.

14. 将长度为 1 的铁丝分成两段, 分别围成一个正方形和一个圆形, 要使正方形与圆的面积之和最小, 正方形的周长应为\_\_\_\_\_.

三、解答题

15. 已知函数  $f(x) = \cos^4 x - 2 \sin x \cos x - \sin^4 x$ .

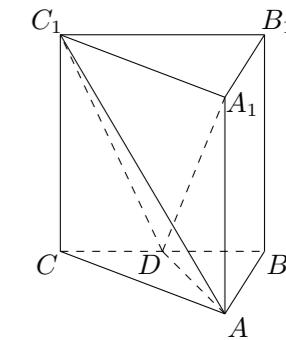
- (1) 求  $f(x)$  的最小正周期;  
 (2) 求  $f(x)$  的最大值、最小值.

16. 已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1 = 2$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
 (2) 令  $b_n = a_n \cdot 3^n$ . 求数列  $\{b_n\}$  前  $n$  项和的公式.

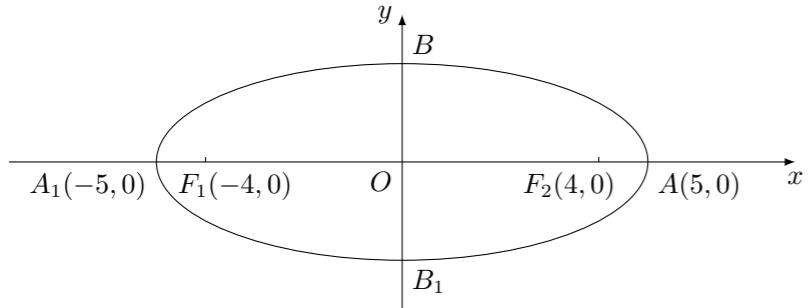
17. 如图, 正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $D$  是  $BC$  的中点,  $AB = a$ .

- (1) 求证: 直线  $A_1D \perp B_1C_1$ ;  
 (2) 求点  $D$  到平面  $ACC_1$  的距离;  
 (3) 判断  $A_1B$  与平面  $ADC$  的位置关系, 并证明你的结论.



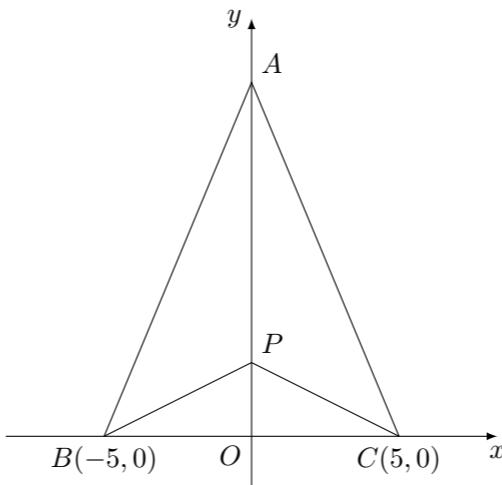
18. 如图,  $A_1, A_2$  为椭圆的两个顶点,  $F_1, F_2$  为椭圆的两个焦点.

- (1) 写出椭圆的方程及准线方程;
- (2) 过线段  $OA$  上异于  $O, A$  的任一点  $K$  作  $OA$  的垂线, 交椭圆于  $P, P_1$  两点, 直线  $A_1P$  与  $AP_1$  交于点  $M$ . 求证: 点  $M$  在双曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$  上.



19. 有三个新兴城镇, 分别位于  $A, B, C$  三点处, 且  $AB = AC = 13$  km,  $BC = 10$  km. 今计划合建一个中心医院, 为同时方便三镇, 准备建在  $BC$  的垂直平分线上的  $P$  点处. (建立坐标系如图)

- (1) 若希望点  $P$  到三镇距离的平方和为最小, 点  $P$  应位于何处?
- (2) 若希望点  $P$  到三镇的最远距离为最小, 点  $P$  应位于何处?



20. 设  $y = f(x)$  是定义在区间  $[-1, 1]$  上的函数, 且满足条件:

- ①  $f(-1) = f(1) = 0$ ;
- ② 对任意的  $u, v \in [-1, 1]$ , 都有  $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$ .

- (1) 证明: 对任意的  $x \in [-1, 1]$ ,  $x - 1 \leq f(x) \leq 1 - x$ ;
- (2) 判断函数  $g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & x \in [0, 1] \end{cases}$  是否满足题设条件;
- (3) 在区间  $[-1, 1]$  上是否存在满足题设条件的函数  $y = f(x)$ , 且使得对任意的  $u, v \in [-1, 1]$ , 都有  $|f(u) - f(v)| = u - v$ , 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.