2011 年普通高等学校招生考试（福建卷）

文科数学

一、选择题

1. 若集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{0,1,2\}$, 则 $M\cap N$ 等于 ( )

(A) $\{0,1\}$ (B) $\{-1,0,1\}$ (C) $\{0,1,2\}$ (D) $\{-1,0,1,2\}$

2. i 是虚数单位, $1+\mathrm{i}^3$ 等于 ( )

(A) i (B) $-\mathrm{i}$ (C) $1+\mathrm{i}$ (D) $1-\mathrm{i}$

3. 若 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a=1$”是“$|a|=1$”的 ( )

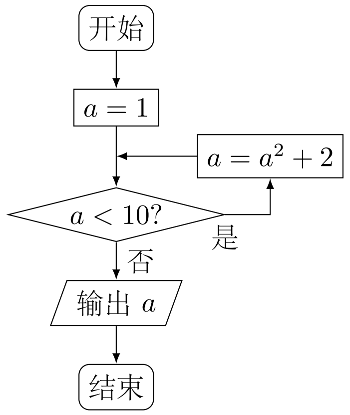
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 某校选修乒乓球课程的学生中, 高一年级有 30 名, 高二年级有 40 名. 现用分层抽样的方法在这 70 名学生中抽取一个样本, 已知在高一年级的学生中抽取了 6 名, 则在高二年级的学生中应抽取的人数为 ( )

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

5. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 输出的结果是 ( )



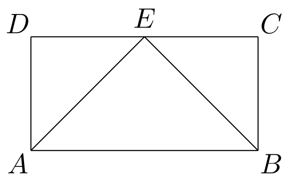
(A) 3 (B) 11 (C) 38 (D) 123

6. 若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是 ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(-2,2)$

(C) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ (D) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

7. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 的中点, 若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q, 则点 Q 取自 $\triangle ABE$ 内部的概率等于 ( )



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$, 若 $f(a)+f(1)=0$, 则实数 a 的值等于 ( )

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

9. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$, 则 $\tan\alpha$ 的值等于 ( )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

10. 若 $a>0$, $b>0$, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 $x=1$ 处有极值, 则 ab 的最大值等于 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 9

11. 设圆锥曲线 $\mathit{\Gamma}$ 的两个焦点分别为 F_1, F_2. 若曲线 $\mathit{\Gamma}$ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$, 则曲线 $\mathit{\Gamma}$ 的离心率等于 ( )

(A) $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ 或 2 (C) $\frac{1}{2}$ 或 2 (D) $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$

12. 在整数集 $\mathbf{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”, 记为 $[k]$, 即 $[k]=\{5n+k\mid n\in\mathbf{Z}\}$, $k=0, 1, 2, 3, 4$. 给出如下四个结论:

① $2011\in[1]$;

② $-3\in[3]$;

③ $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$;

④ “整数 a, b 属于同一‘类’”的充要条件是“$a-b\in[0]$”.

其中, 正确结论的个数是 ( )

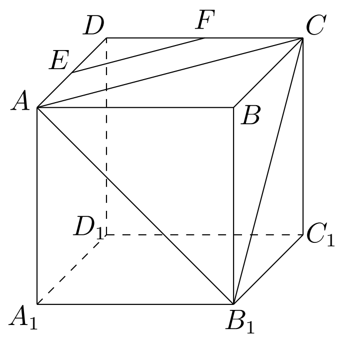
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题

13. 若向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于______.

14. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $BC=2$, $C=60^\circ$, 则边 AB 的长度等于______.

15. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, 点 E 为 AD 的中点, 点 F 在 CD 上, 若 $EF\parallel$ 平面 AB_1C, 则线段 EF 的长度等于______.



16. 商家通常依据“乐观系数准则”确定商品销售价格, 即根据商品的最低销售限价 a, 最高销售限价 b $(b>a)$ 以及实数 x $(0<x<1)$ 确定实际销售价格 $c=a+x(b-a)$. 这里, x 被称为乐观系数. 经验表明, 最佳乐观系数 x 恰好使得 $(c-a)$ 是 $(b-c)$ 和 $(b-a)$ 的等比中项. 据此可得, 最佳乐观系数 x 的值等于______.

三、解答题

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_3=-3$.

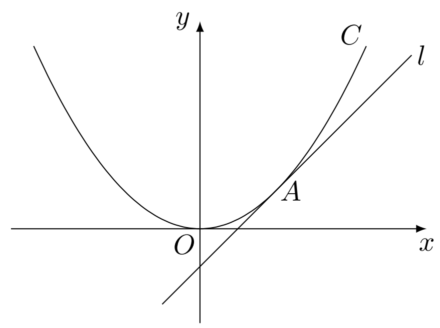
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 k 项和 $S_k=-35$, 求 k 的值.

18. 如图, 直线 $l: y=x+b$ 与抛物线 $C: x^2=4y$ 相切于点 A.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 求以点 A 为圆心, 且与抛物线 C 的准线相切的圆的方程.



19. 某日用品按行业质量标准分成五个等级, 等级系数 X 依次为 1, 2, 3, 4, 5. 现从一批该日用品中随机抽取 20 件, 对其等级系数进行统计分析, 得到频率分布表如下:

X	1	2	3	4	5
f	a	0.2	0.45	b	c

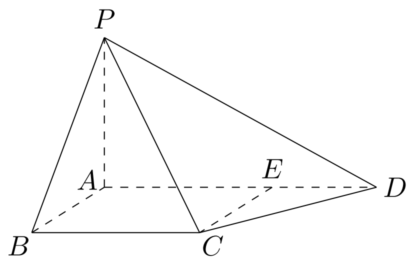
(1) 若所抽取的 20 件日用品中, 等级系数为 4 的恰有 3 件, 等级系数为 5 的恰有 2 件, 求 a, b, c 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 将等级系数为 4 的 3 件日用品记为 x_1, x_2, x_3, 等级系数为 5 的 2 件日用品记为 y_1, y_2, 现从 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 这 5 件日用品中任取两件 (假定每件日用品被取出的可能性相同), 写出所有可能的结果, 并求这两件日用品的等级系数恰好相等的概率.

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 底面 $ABCD$, $AB\perp AD$, 点 E 在线段 AD 上, 且 $CE\parallel AB$.

(1) 求证: $CE\perp$ 平面 PAD;

(2) 若 $PA=AB=1$, $AD=3$, $CD=\sqrt{2}$, $\angle CDA=45^\circ$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



21. 设函数 $f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$, 其中, 角 θ 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴非负半轴重合, 终边经过点 $P(x,y)$, 且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(1) 若点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 求 $f(\theta)$ 的值;

(2) 若点 $P(x,y)$ 为平面区域 $\varOmega:\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x\leqslant 1\\ y\leqslant 1\end{cases}$ 上的一个动点, 试确定角 θ 的取值范围, 并求函数 $f(\theta)$ 的最小值和最大值.

22. 已知 a, b 为常数, 且 $a\neq 0$, 函数 $f(x)=-ax+b+ax\ln x$, $f(\mathrm{e})=2$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数).

(1) 求实数 b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $a=1$ 时, 是否同时存在实数 m 和 M $(m<M)$, 使得对每一个 $t\in[m,M]$, 直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$ $\left(x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]\right)$ 都有公共点? 若存在, 求出最小的实数 m 和最大的实数 M; 若不存在, 说明理由.