2012 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是（　）

(A) 42　(B) 35　(C) 28　(D) 21

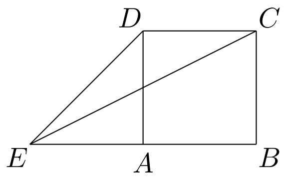
2. 复数 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2\mathrm{i}}=$（　）

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3},\ x<3\\ \ln(x-2),\ x\geqslant 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处的极限是（　）

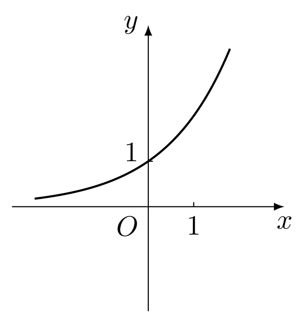
(A) 不存在　(B) 等于 6　(C) 等于 3　(D) 等于 0

4. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 延长 BA 至 E, 使 $AE=1$, 连接 EC, ED, 则 $\sin\angle CED=$（　）

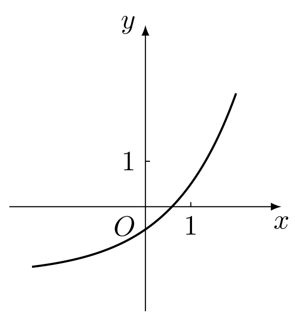


(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(C) $\dfrac{\sqrt5}{10}$　(D) $\dfrac{\sqrt5}{15}$

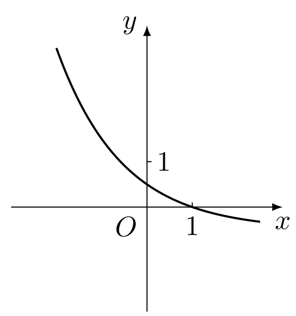
5. 函数 $y=a^x-\dfrac{1}{a}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 的图象可能是（　）



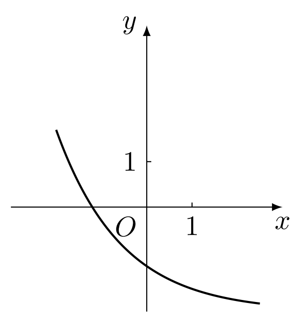
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 下列命题正确的是（　）

(A) 若两条直线和同一个平面所成的角相等, 则这两条直线平行

(B) 若一个平面内有三个点到另一个平面的距离相等, 则这两个平面平行

(C) 若一条直线平行于两个相交平面, 则这条直线与这两个平面的交线平行

(D) 若两个平面都垂直于第三个平面, 则这两个平面平行

7. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量. 下列四个条件中, 使 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ 成立的充分条件是（　）

(A) $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$　(B) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

(C) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$　(D) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$

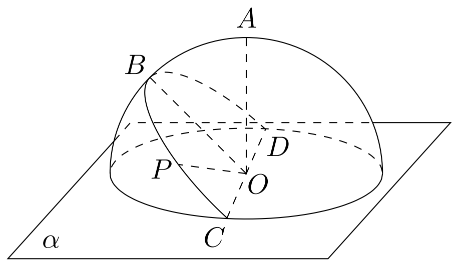
8. 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在坐标原点 O, 并且经过点 $M(2,y_0)$. 若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3, 则 $|OM|=$（　）

(A) $2\sqrt2$　(B) $2\sqrt3$　(C) 4　(D) $2\sqrt5$

9. 某公司生产甲、乙两种桶装产品. 已知生产甲产品 1 桶需耗 A 原料 1 千克、B 原料 2 千克; 生产乙产品 1 桶需耗 A 原料 2 千克, B 原料 1 千克. 每桶甲产品的利润是 300 元, 每桶乙产品的利润是 400 元. 公司在生产这两种产品的计划中, 要求每天消耗 A, B 原料都不超过 12 千克. 通过合理安排生产计划, 从每天生产的甲、乙两种产品中, 公司共可获得的最大利润是（　）

(A) 1800 元　(B) 2400 元　(C) 2800 元　(D) 3100 元

10. 如图, 半径为 R 的半球 O 的底面圆 O 在平面 α 内, 过点 O 作平面 α 的垂线交半球面于点 A, 过圆 O 的直径 CD 作与平面 α 成 $45°$ 角的平面与半球面相交, 所得交线上到平面 α 的距离最大的点为 B, 该交线上的一点 P 满足 $\angle BOP=60°$, 则 A, P 两点间的球面距离为（　）



(A) $R\arccos\dfrac{\sqrt2}{4}$　(B) $\dfrac{\pi R}{4}$　(C) $R\arccos\dfrac{\sqrt3}{3}$　(D) $\dfrac{\pi R}{3}$

11. 方程 $ay=b^2x^2+c$ 中的 a, b, $c\in\{-3,-2,0,1,2,3\}$, 且 a, b, c 互不相同, 在所有这些方程所表示的曲线中, 不同的抛物线共有（　）

(A) 60 条　(B) 62 条　(C) 71 条　(D) 80 条

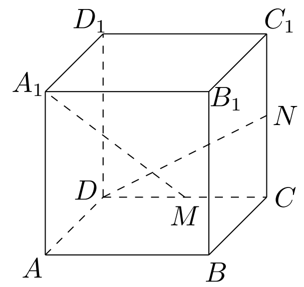
12. 设函数 $f(x)=2x-\cos x$, $\{a_n\}$ 是公差为 $\dfrac{\pi}{8}$ 的等差数列, $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_5)=5\pi$, 则 $[f(a_3)]^2-a_1a_5=$（　）

(A) 0　(B) $\dfrac{1}{16}\pi^2$　(C) $\dfrac18\pi^2$　(D) $\dfrac{13}{16}\pi^2$

二、填空题

13. 设全集 $U=\{a,b,c,d\}$, 集合 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$, 则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$______.

14. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 CD, CC_1 的中点, 则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是______.



15. 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F, 直线 $x=m$ 与椭圆相交于点 A, B, 当 $\triangle FAB$ 的周长最大时, $\triangle FAB$ 的面积是______.

16. 记 $[x]$ 为不超过实数 x 的最大整数, 例如, $[2]=2$, $[1.5]=1$, $[-0.3]=-1$. 设 a 为正整数, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=a$, $x_{n+1}=\left[\dfrac{x_n+\left[\dfrac{a}{x_n}\right]}{2}\right]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,

现有下列命题:

① 当 $a=5$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 的前 3 项依次为 5, 3, 2;

② 对数列 $\{x_n\}$ 都存在正整数 k, 当 $n\geqslant k$ 时总有 $x_n=x_k$;

③ 当 $n\geqslant 1$ 时, $x_n>\sqrt{a}-1$;

④ 对某个正整数 k, 若 $x_{k+1}\geqslant x_k$, 则 $x_n=[\sqrt{a}]$.

其中的真命题有______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 某居民小区有两个相互独立的安全防范系统 (简称系统)A 和 B, 系统 A 和 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\dfrac{1}{10}$ 和 p.

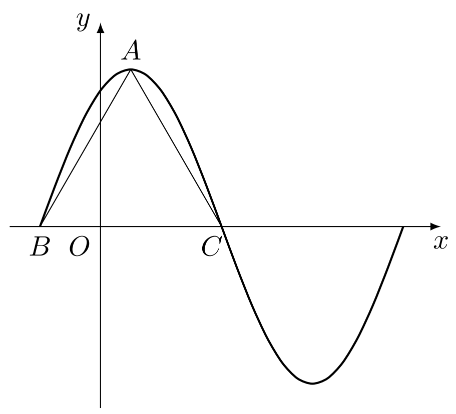
(1) 若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\dfrac{49}{50}$, 求 p 的值;

(2) 设系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数为随机变量 ξ, 求 ξ 的概率分布列及数学期望 $E\xi$.

18. 函数 $f(x)=6\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3\ (\omega>0)$ 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.

(1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域;

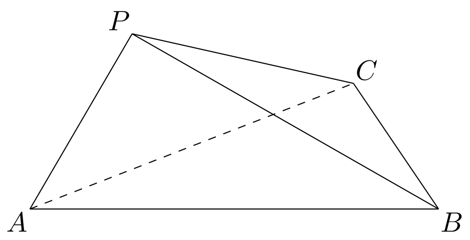
(2) 若 $f(x_0)=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0\in\left(-\dfrac{10}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, 求 $f(x_0+1)$ 的值.



19. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle APB=90^\circ,\angle PAB=60^\circ$, $AB=BC=CA$, 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC.

(1) 求直线 PC 与平面 ABC 所成角的正弦值;

(2) 求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 且 $a_2a_n=S_2+S_n$ 对一切正整数 n 都成立.

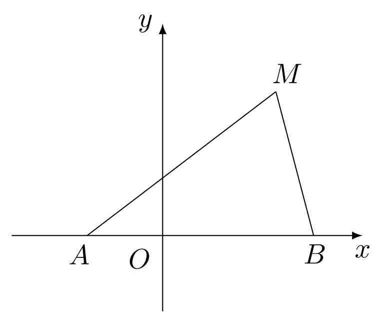
(1) 求 a_1, a_2 的值;

(2) 设 $a_1>0$, 数列 $\left\{\lg\dfrac{10a_1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n, 当 n 为何值时, T_n 最大? 并求出 T_n 的最大值.

21. 如图, 动点 M 与两定点 $A(-1,0)$, $B(2,0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且 $\angle MBA=2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C.

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 设直线 $y=-2x+m$ 与 y 轴相交于点 P, 与轨迹 C 相交于点 Q、R, 且 $|PQ|<|PR|$, 求 $\dfrac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.



22. 已知 a 为正实数, n 为自然数, 抛物线 $y=-x^2+\dfrac{a^n}{2}$ 与 x 轴正半轴相交于点 A, 设 $f(n)$ 为该抛物线在点 A 处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 用 a 和 n 表示 $f(n)$;

(2) 求对所有 n 都有 $\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}\geqslant\dfrac{n^3}{n^3+1}$ 成立的 a 的最小值;

(3) 当 $0<a<1$ 时, 比较 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{f(k)-f(2k)}$ 与 $\dfrac{27}{4}\cdot\dfrac{f(1)-f(n)}{f(0)-f(1)}$ 的大小, 并说明理由.