2009 年普通高等学校招生考试（四川卷）

理科数学

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x||x|<5\}$, $T=\{x|x^2+4x-21<0\}$, 则 $S\cap T=$ （ ）

(A) $\{x|-7<x<-5\}$ (B) $\{x|3<x<5\}$

(C) $\{x|-5<x<3\}$ (D) $\{x|-7<x<5\}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+\log_2 x\ (当\ x\geqslant 2\ 时)\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}\ (当\ x<2\ 时)\end{cases}$ 在点 $x=2$ 处连续, 则常数 a 的值是 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 复数 $\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2}{3-4\mathrm{i}}$ 的值是 （ ）

(A) -1 (B) 1 (C) $-\mathrm{i}$ (D) i

4. 已知函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 下面结论错误的是 （ ）

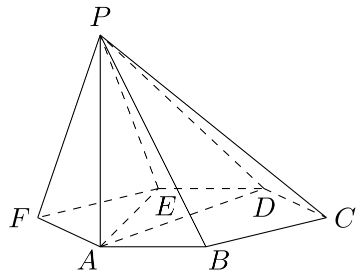
(A) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

(B) 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数

(C) 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

(D) 函数 $f(x)$ 是奇函数

5. 如图, 已知六棱锥 $P-ABCDEF$ 的底面是正六边形, $PA\perp$ 平面 ABC, $PA=2AB$, 则下列结论正确的是 （ ）



(A) $PB\perp AD$

(B) 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC

(C) 直线 $BC\parallel$ 平面 PAE

(D) 直线 PD 与平面 ABC 所成的角为 45°

6. 已知 a,b,c,d 为实数, 且 $c>d$. 则“$a>b$”是“$a-c>b-d$”的 （ ）

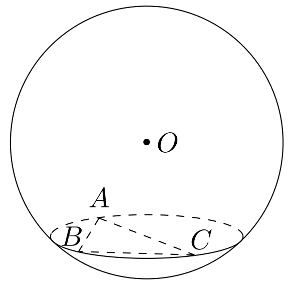
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 其一条渐近线方程为 $y=x$, 点 $P(\sqrt{3},y_0)$ 在该双曲线上, 则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=$ （ ）

(A) -12 (B) -2 (C) 0 (D) 4

8. 如图, 在半径为 3 的球面上有 A、B、C 三点, $\angle ABC=90^\circ$, $BA=BC$, 球心 O 到平面 ABC 的距离是 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 B、C 两点的球面距离是 （ ）



(A) $\dfrac{\pi}{3}$ (B) π (C) $\dfrac{4\pi}{3}$ (D) 2π

9. 已知直线 l_1: $4x-3y+6=0$ 和直线 l_2: $x=-1$, 抛物线 $y^2=4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 （ ）

(A) 2 (B) 3 (C) $\dfrac{11}{5}$ (D) $\dfrac{37}{16}$

10. 某企业生产甲、乙两种产品, 已知生产每吨甲产品要用 A 原料 3 吨、B 原料 2 吨; 生产每吨乙产品要用 A 原料 1 吨、B 原料 3 吨. 销售每吨甲产品可获得利润 5 万元, 每吨乙产品可获得利润 3 万元, 该企业在一个生产周期内消耗 A 原料不超过 13 吨, B 原料不超过 18 吨, 那么该企业可获得最大利润是 （ ）

(A) 12 万元 (B) 20 万元 (C) 25 万元 (D) 27 万元

11. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排, 若男生甲不站两端, 3 位女生中有且只有两位女生相邻, 则不同排法的种数是 （ ）

(A) 360 (B) 188 (C) 216 (D) 96

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$, 则 $f\left(f\left(\dfrac{5}{2}\right)\right)$ 的值是 （ ）

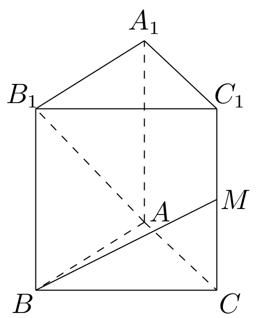
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\dfrac{5}{2}$

二、填空题

13. $\left(2x-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的常数项是______. (用数字作答)

14. 若 $\odot O_1$: $x^2+y^2=5$ 与 $\odot O_2$: $(x-m)^2+y^2=20\ (m\in\mathbf{R})$ 相交于 A、B 两点, 且两圆在点 A 处的切线互相垂直, 则线段 AB 的长度是______.

15. 如图, 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长都相等, M 是侧棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AB_1 和 BM 所成的角的大小是______.



16. 设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合. 对于映射 f: $V\to V$, $\boldsymbol{a}\in V$, 记 $\boldsymbol{a}$ 的象为 $f(\boldsymbol{a})$. 若映射 f: $V\to V$ 满足: 对所有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ 及任意实数 λ, μ 都有 $f(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda f(\boldsymbol{a})+\mu f(\boldsymbol{b})$, 则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题:

① 设 f 是平面 M 上的线性变换, 则 $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$;

② 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{a}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

③ 若 $\boldsymbol{e}$ 是平面 M 上的单位向量, 对 $\boldsymbol{a}\in V$, 设 $f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$, 则 f 是平面 M 上的线性变换;

④ 设 f 是平面 M 上的线性变换, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$, 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线, 则 $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})$ 也共线.

其中真命题是______. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B 为锐角, 角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c, 且 $\cos 2A=\dfrac{3}{5}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(1) 求 $A+B$ 的值;

(2) 若 $a-b=\sqrt{2}-1$, 求 a, b, c 的值.

18. 为振兴旅游业, 四川省 2009 年面向国内发行总量为 2000 万张的熊猫优惠卡, 向省外人士发行的是熊猫金卡 (简称金卡), 向省内人士发行的是熊猫银卡 (简称银卡). 某旅游公司组织了一个有 36 名游客的旅游团到四川名胜旅游, 其中 $\dfrac{3}{4}$ 是省外游客, 其余是省内游客. 在省外游客中有 $\dfrac{1}{3}$ 持金卡, 在省内游客中有 $\dfrac{2}{3}$ 持银卡.

(1) 在该团中随机采访 3 名游客, 求恰有 1 人持金卡且持银卡者少于 2 人的概率;

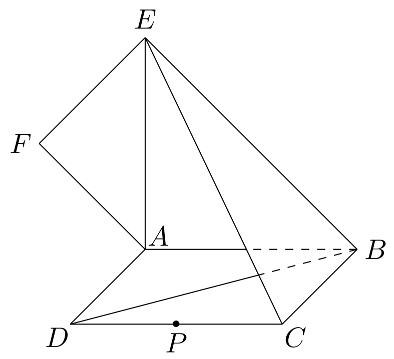
(2) 在该团的省内游客中随机采访 3 名游客, 设其中持银卡人数为随机变量 ξ, 求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

19. 如图, 正方形 $ABCD$ 所在平面与平面四边形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形, $AB=AE$, $FA=FE$, $\angle AEF=45^{\circ}$.

(1) 求证: $EF\perp$ 平面 BCE;

(2) 设线段 CD 的中点为 P, 在直线 AE 上是否存在一点 M, 使得 $PM\,/\!/$ 平面 BCE? 若存在, 请指出点 M 的位置, 并证明你的结论; 若不存在, 请说明理由;

(3) 求二面角 $F-BD-A$ 的大小.



20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1\ (a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 右准线方程为 $x=2$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过点 F_1 的直线 l 与该椭圆交于 M, N 两点, 且 $\left|\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right|=\dfrac{2\sqrt{26}}{3}$, 求直线 l 的方程.

21. 已知 $a>0$, 且 $a\neq 1$ 函数 $f(x)=\log_a(1-a^x)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $n\in\mathbf{N}^*$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{f(n)}}{a^n+a}$;

(3) 当 $a=\mathrm{e}$ (e 为自然对数的底数) 时, 设 $h(x)=(1-\mathrm{e}^{f(x)})(x^2-m+1)$. 若函数 $h(x)$ 的极值存在, 求实数 m 的取值范围以及函数 $h(x)$ 的极值.

22. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 对任意的正整数 n, 都有 $a_n=5S_n+1$ 成立, 记 $b_n=\dfrac{4+a_n}{1-a_n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=b_{2n}-b_{2n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 求证: 对任意正整数 n 都有 $T_n<\dfrac{3}{2}$;

(3) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 R_n. 已知正实数 λ 满足: 对任意正整数 n, $R_n\leqslant\lambda n$ 恒成立, 求 λ 的最小值.