2002 年普通高等学校春季招生考试（上海卷）

数学试卷

一、填空题

1. 函数 $y=\dfrac{1}{3-2x-x^2}$ 的定义域为______.

2. 若椭圆的两个焦点坐标为 $F_1(-1,0)$, $F_2(5,0)$, 长轴长为 10, 则椭圆的方程为______.

3. 若全集 $I=\mathbf{R}$, $f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P=\{x\,|f(x)<0\}$, $Q=\{x\,|g(x)\geqslant 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=\log_3(1+x)$, 则 $f(-2)=$______.

5. 若在 $\left(\sqrt[5]{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中, 第 4 项是常数项, 则 $n=$______.

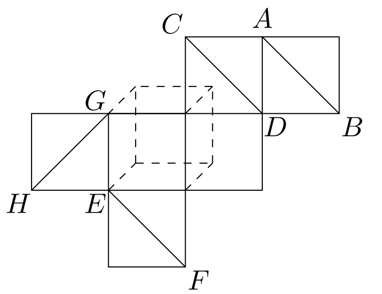
6. 已知 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 若 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $f(\cos\alpha)+f(-\cos\alpha)$ 可化简为______.

7. 六位身高全不相同的同学拍照留念, 摄影师要求前后两排各三人, 则后排每人均比前排同学高的概率是______.

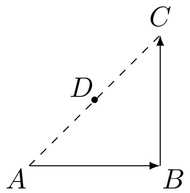
8. 设曲线 C_1 和 C_2 的方程分别为 $F_1(x,y)=0$ 和 $F_2(x,y)=0$, 则点 $P(a,b)\notin C_1\cap C_2$ 的一个充分条件为______.

9. 若 $f(x)=2\sin\omega x$ $(0<\omega<1)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值是 $\sqrt{2}$, 则 $\omega=$______.

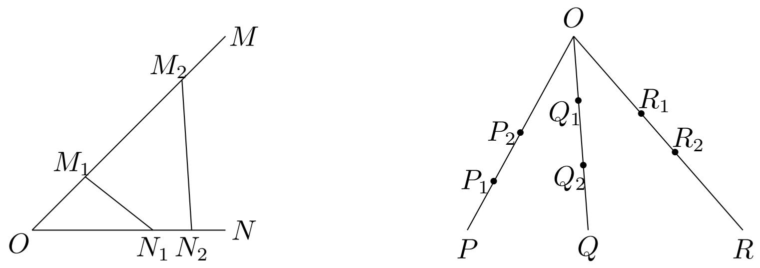
10. 如图表示一个正方体表面的一种展开图, 图中的四条线段 AB、CD、EF 和 GH 在原正方体中相互异面的有______对.



11. 如图所示, 客轮以速度 $2v$ 由 A 至 B 再到 C 匀速航行, 货轮从 AC 的中点 D 出发, 以速度 v 沿直线匀速航行, 将货物送达客轮. 已知 $AB\perp BC$, 且 $AB=BC=50$ 海里. 若两船同时出发, 则两船相遇之处距 C 点______海里. (结果精确到小数点后 1 位)



12. 如图, 若从点 O 所作的两条射线 OM、ON 上分别有点 M_1、M_2 与点 N_1、N_2, 则三角形面积之比 $\dfrac{S_{\triangle OM_1N_1}}{S_{\triangle OM_2N_2}}=\dfrac{OM_1}{OM_2}\cdot\dfrac{ON_1}{ON_2}$. 若从点 O 所作的不在同一平面内的三条射线 OP、OQ 和 OR 上, 分别有点 P_1、P_2, 点 Q_1、Q_2 和点 R_1、R_2, 则类似的结论为______.



二、选择题

13. 若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意向量, $m\in\mathbf{R}$, 则下列等式不一定成立的是 ( )

(A) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (B) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(C) $m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$ (D) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $2\cos B\sin A=\sin C$, 则 $\triangle ABC$ 的形状一定是 ( )

(A) 等腰直角三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰三角形 (D) 等边三角形

15. 设 $A>0$, $a\neq 1$, 函数 $y=\log_a x$ 的反函数和 $y=\log_a\dfrac{1}{x}$ 的反函数的图象关于 ( )

(A) x 轴对称 (B) y 轴对称 (C) $y=x$ 对称 (D) 原点对称

16. 设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N})$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项的和, 且 $S_5<S_6$, $S_6=S_7>S_8$, 则下列结论错误的是 ( )

(A) $d<0$ (B) $a_7=0$

(C) $S_9>S_5$ (D) S_6 和 S_7 均为 S_n 的最大值

三、解答题

17. 已知 z、ω 为复数, $(1+3\mathrm{i})z$ 为纯虚数, $\omega=\dfrac{z}{2+\mathrm{i}}$, 且 $|\omega|=5\sqrt{2}$, 求 ω.

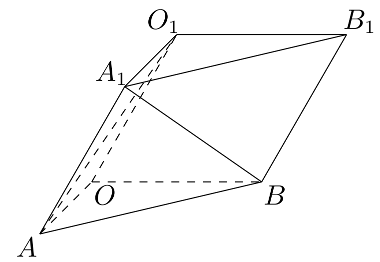
18. 已知 F_1、F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的焦点. 过 F_2 作垂直 x 轴的直线交双曲线于点 P, 且 $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 求双曲线的渐近方程.

19. 如图, 三棱柱 $OAB\text{–}O_1A_1B_1$, 平面 $OBB_1O_1\perp$ 平面 OAB, $\angle O_1OB=60^\circ$, $\angle AOB=90^\circ$, 且 $OB=OO_1=2$, $OA=\sqrt{3}$. 求:

(1) 二面角 O_1-AB-O 的大小;

(2) 异面直线 A_1B 与 AO_1 所成角的大小.

(上述结果用反三角函数值表示)



20. 已知函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-2}{x+1}$ $(a>1)$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数;

(2) 用反证法证明方程 $f(x)=0$ 没有负数根.

21. 某公司全年的利润为 b 元, 其中一部分作为奖金发给 n 位职工, 奖金分配方案如下: 首先将职工按工作业绩 (工作业绩均不相同) 从大到小, 由 1 到 n 排序, 第 1 位职工得奖金 $\dfrac{b}{n}$ 元, 然后再将余额除以 n 发给第 2 位职工, 按此方法将奖金逐一发给每位职工, 并将最后剩余部分作为公司发展基金.

(1) 设 a_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ 为第 k 位职工所得奖金额, 试求 a_2、a_3, 并用 k、n 和 b 表示 a (不必证明);

(2) 证明 $a_k>a_{k+1}$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$, 并解释此不等式关于分配原则的实际意义;

(3) 发展基金与 n 和 b 有关, 记为 $P_n(b)$, 对常数 b, 当 n 变化时, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(b)$.

22. 对于函数 $f(x)$, 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$, 使 $f(x_0)=x_0$ 成立, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点. 已知函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+(b-1)$ $(a\neq 0)$.

(1) 当 $a=1$, $b=-2$ 时, 求函数 $f(x)$ 的不动点;

(2) 若对任意实数 b, 函数 $f(x)$ 恒有两个相异的不动点, 求 a 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $y=f(x)$ 图上 A、B 两点的横坐标是函数 $f(x)$ 的不动点, 且 A, B 两点关于直线 $y=kx+\dfrac{1}{2a^2+1}$ 对称, 求 b 的最小值.