2011 年普通高等学校招生考试（广东卷）

理科数学

一、选择题

1. 设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})\,z=2$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$ （ ）

(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $2+2\mathrm{i}$　(D) $2-2\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x,\,y$ 为实数, 且 $x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)\,|\,x,\,y$ 为实数, 且 $y=x\}$, 则 $A\cap B$ 的元素个数为 （ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3. 若非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=$ （ ）

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 0

4. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数, 则下列结论恒成立的是 （ ）

(A) $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数　(B) $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

(C) $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数　(D) $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

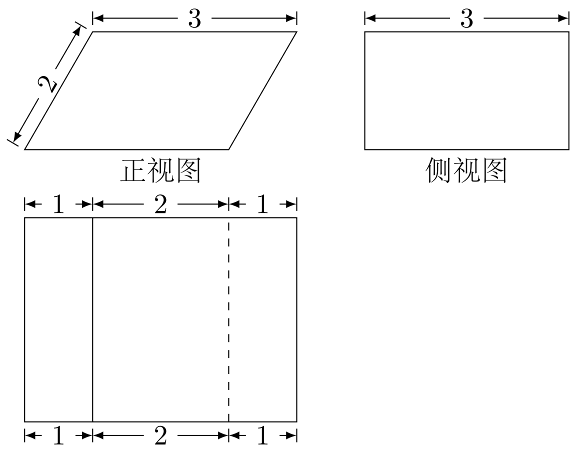
5. 已知平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$ 给定. 若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点, 点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$, 则 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最大值为 （ ）

(A) $4\sqrt{2}$　(B) $3\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 3

6. 甲、乙两队进行排球决赛. 现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军, 乙队需要再赢两局才能得冠军. 若两队胜每局的概率相同, 则甲队获得冠军的概率为 （ ）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{3}{5}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

7. 如图, 某几何体的正视图 (主视图) 是平行四边形, 侧视图 (左视图) 和俯视图都是矩形, 则该几何体的体积为 （ ）



正视图　侧视图　俯视图

(A) $6\sqrt{3}$　(B) $9\sqrt{3}$　(C) $12\sqrt{3}$　(D) $18\sqrt{3}$

8. 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集, 如果对于 $\forall a, b\in S$, 有 $ab\in S$, 则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T, V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个不相交的非空子集, $T\cup V=\mathbf{Z}$. 且对于 $\forall a, b, c\in T$, 有 $abc\in T$, $\forall x, y, z\in V$, 有 $xyz\in V$. 则下列结论恒成立的是 （ ）

(A) T, V 中至少有一个关于乘法是封闭的

(B) T, V 中至多有一个关于乘法是封闭的

(C) T, V 中有且只有一个关于乘法是封闭的

(D) T, V 中每一个关于乘法都是封闭的

二、填空题

9. 不等式 $|x+1|-|x-3|\geqslant 0$ 的解集是______.

10. $x\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中, x^4 的系数是______. (用数字作答)

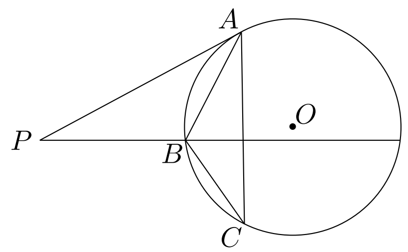
11. 等差数列 $\{a_n\}$ 前 9 项的和等于前 4 项的和. 若 $a_1=1$, $a_k+a_4=0$, 则 $k=$______.

12. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在 $x=$______处取得极小值.

13. 某数学老师身高 176 cm, 他爷爷、父亲和儿子的身高分别是 173 cm, 170 cm 和 182 cm. 因儿子的身高与父亲的身高有关, 该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为______cm.

14. 已知两曲线参数方程分别为 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$ 和 $\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}t^2\\ y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$, 它们的交点坐标为______.

15. 如图, 过圆 O 外一点 P 分别作圆的切线和割线交圆于 A, B, 且 $PB=7$, C 是圆上一点, 使得 $BC=5$, $\angle BAC=\angle APB$, 则 $AB=$______.



三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ 的值;

(2) 设 $\alpha, \beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(3\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{10}{13}$, $f(3\beta+2\pi)=\dfrac{6}{5}$, 求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

17. 为了解甲、乙两厂的产品质量, 采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽取 14 件和 5 件, 测量产品中微量元素 x, y 的含量 (单位: 毫克). 下表是乙厂的 5 件产品的测量数据:

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

(1) 已知甲厂生产的产品共有 98 件, 求乙厂生产的产品数量;

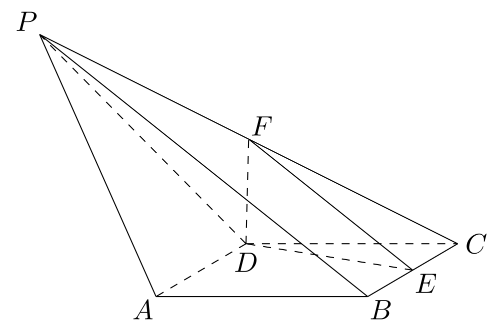
(2) 当产品中的微量元素 x, y 满足 $x\geqslant 175$ 且 $y\geqslant 75$ 时, 该产品为优等品. 用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量;

(3) 从乙厂抽出的上述 5 件产品中, 随机抽取 2 件, 求抽取的 2 件产品中优等品数 ξ 的分布列及其均值 (即数学期望).

18. 如图, 在锥体 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, 且 $\angle DAB=60°$, $PA=PD=\sqrt{2}$, $PB=2$, E, F 分别是 BC, PC 的中点.

(1) 证明: $AD\perp$ 平面 DEF;

(2) 求二面角 $P-AD-B$ 的余弦值.



19. 设圆 C 与两圆 $\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2=4$, $\left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2=4$ 中的一个内切, 另一个外切.

(1) 求 C 的圆心轨迹 L 的方程.

(2) 已知点 $M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$, $F\left(\sqrt{5},0\right)$, 且 P 为 L 上动点, 求 $||MP|-|FP||$ 的最大值及此时点 P 的坐标.

20. 设 $b>0$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=b$, $a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$ $(n\geqslant 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 对于一切正整数 n, $a_n\leqslant \frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$.

21. 在平面直角坐标系 xOy 上, 给定抛物线 $L: y=\frac{1}{4}x^2$. 实数 p, q 满足 $p^2-4q\geqslant 0$, x_1, x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两根, 记 $\varphi(p,q)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$.

(1) 过点 $A\left(p_0,\frac{1}{4}p_0^2\right)$ $(p_0\neq 0)$ 作 L 的切线交 y 轴于点 B. 证明: 对线段 AB 上的任一点 $Q(p,q)$, 有 $\varphi(p,q)=\frac{|p_0|}{2}$;

(2) 设 $M(a,b)$ 是定点, 其中 a, b 满足 $a^2-4b>0$, $a\neq 0$. 过点 $M(a,b)$ 作 L 的两条切线 l_1, l_2, 切点分别为 $E\left(p_1,\frac{1}{4}p_1^2\right)$, $E'\left(p_2,\frac{1}{4}p_2^2\right)$, l_1, l_2 与 y 分别交于 F, F'. 线段 EF 上异于两端点的点集记为 X. 证明: $M(a,b)\in X\Leftrightarrow |p_1|>|p_2|\Leftrightarrow \varphi(a,b)=\frac{|p_1|}{2}$;

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\mid y\leqslant x-1, y\geqslant \frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{5}{4}\right\}$, 当点 (p,q) 取遍 D 时, 求 $\varphi(p,q)$ 的最小值 (记为 $\varphi_{\min}$) 和最大值 (记为 $\varphi_{\max}$).