2007 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $\left(\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$ 等于 ( )

(A) $4\mathrm{i}$ (B) $-4\mathrm{i}$ (C) $2\mathrm{i}$ (D) $-2\mathrm{i}$

2. 不等式 $\dfrac{x-2}{x+1} \leqslant 0$ 的解集是 ( )

(A) $(-\infty,-1)\cup(-1,2]$ (B) $[-1,2]$

(C) $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$ (D) $(-1,2]$

3. 设 M, N 是两个集合, 则“$M\cup N\neq\varnothing$”是“$M\cap N\neq\varnothing$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是非零向量, 若函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b})$ 的图象是一条直线, 则必有 ( )

(A) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ (B) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ (C) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ (D) $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

5. 设随机变量 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$. 已知 $\varPhi(-1.96)=0.025$, 则 $P(|\xi|<1.96)=$ ( )

(A) 0.025 (B) 0.050 (C) 0.950 (D) 0.975

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4, & x\leqslant 1\\ x^2-4x+3, & x>1\end{cases}$ 的图象和函数 $g(x)=\log_2 x$ 的图象的交点个数是 ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

7. 下列四个命题中, 不正确的是 ( )

(A) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

(B) 函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ 的不连续点是 $x=2$ 和 $x=-2$

(C) 若函数 $f(x), g(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

(D) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

8. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上, E、F 分别是棱 AA_1、DD_1 的中点, 则直线 EF 被球 O 截得的线段长为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

9. 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点, 若在其右准线上存在 P, 使线段 PF_1 的中垂线过点 F_2, 则椭圆离心率的取值范围是 ( )

(A) $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (B) $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ (D) $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$

10. 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$, S_1、S_2、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集, 且满足: 对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$, $S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j,\ i、j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$, 都有 $\min\left\{\dfrac{a_i}{b_i},\dfrac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\dfrac{a_j}{b_j},\dfrac{b_j}{a_j}\right\}$ ($\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者). 则 k 的最大值是 ( )

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

二、填空题

11. 圆心为 $(1,1)$ 且与直线 $x+y=4$ 相切的圆的方程是______.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $a=1$, $b=\sqrt{7}$, $c=\sqrt{3}$, 则 $B=$______.

13. 函数 $f(x)=12x-x^3$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最小值是______.

14. 设集合 $A=\left\{(x,y)\mid y\geqslant\dfrac{1}{2}|x-2|\right\}$, $B=\{(x,y)\mid y\leqslant-|x|+b\}$, $A\cap B\neq\varnothing$.

(1) b 的取值范围是______;

(2) 若 $(x,y)\in A\cap B$, 且 $x+2y$ 的最大值为 9, 则 b 的值是______.

15. 将杨辉三角中的奇数换成 1, 偶数换成 0, 得到如图所示的 $0-1$ 三角数表, 从上往下数, 第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行, 第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行, $\cdots$, 第 n 次全行的数都为 1 的是第______行; 第 61 行中 1 的个数是______.

第 1 行 1 1
第 2 行 1 0 1
第 3 行 1 1 1 1
第 4 行 1 0 0 0 1
第 5 行 1 1 0 0 1 1

三、解答题

16. 已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$, $g(x)=1+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

(1) 设 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;

(2) 求函数 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的单调递增区间.

17. 某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训, 以提高下岗人员的再就业能力. 每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训, 已知参加过财会培训的有 60%, 参加过计算机培训的有 75%. 假设每个人对培训项目的选择是相互独立的, 且各人的选择相互之间没有影响.

(1) 任选 1 名下岗人员, 求该人参加过培训的概率;

(2) 任选 3 名下岗人员, 记 ξ 为 3 人中参加过培训的人数, 求 ξ 的分布列和期望.

18. 如图 1, E, F 分别是矩形 $ABCD$ 的边 AB, CD 的中点, G 是 EF 上的一点, 将 $\triangle GAB$, $\triangle GCD$ 分别沿 AB, CD 翻折成 $\triangle G_1AB$, $\triangle G_2CD$, 并连接 G_1G_2, 使得平面 $G_1AB\perp$ 平面 $ABCD$, $G_1G_2\parallel AD$, 且 $G_1G_2<AD$, 连接 BG_2, 如图 2.

(1) 证明: 平面 $G_1AB\perp$ 平面 G_1ADG_2;

(2) 当 $AB=12$, $BC=25$, $EG=8$ 时, 求直线 BG_2 和平面 G_1ADG_2 所成的角.

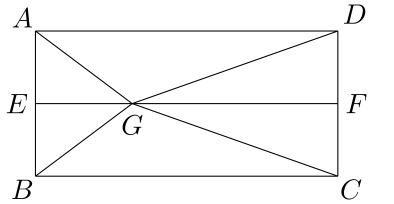


图 1

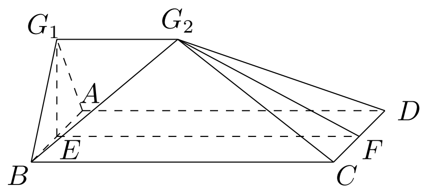


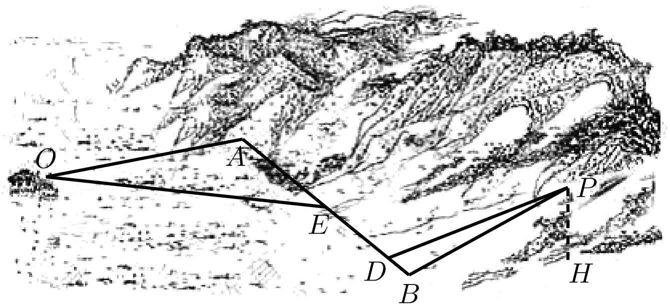
图 2

19. 如图, 某地为了开发旅游资源, 欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路, 点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), 且 $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$, 点 P 到平面 α 的距离 $PH = 0.4$ (km). 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用, 从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元/km, 原有公路改建费用为 $\dfrac{a}{2}$ 万元/km, 当山坡上公路长度为 l km ($1 \leqslant l \leqslant 2$) 时, 其造价为 $(l^2+1)a$ 万元, 已知 $OA \perp AB$, $PB \perp AB$, $AB = 1.5$ (km), $OA = \sqrt{3}$ (km).

(1) 在 AB 上求一点 D, 使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小;

(2) 对于 (1) 中得到的点 D, 在 DA 上求一点 E, 使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小;

(3) 在 AB 上是否存在两个不同的点 D', E', 使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于 (2) 中得到的最小总造价, 证明你的结论.



20. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A, B 两点.

(1) 若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1O}$ (其中 O 为坐标原点), 求点 M 的轨迹方程;

(2) 在 x 轴上是否存在定点 C, 使 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 为常数? 若存在, 求出点 C 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $A_n(a_n, b_n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 是曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 上的点, $a_1 = a$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $S_n^2 = 3n^2 a_n + S_{n-1}^2$, $a_n \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \cdots$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}$ ($n \geqslant 2$) 是常数数列;

(2) 确定 a 的取值集合 M, 使 $a \in M$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

(3) 证明: 当 $a \in M$ 时, 弦 A_nA_{n+1} ($n \in \mathbf{N}^*$) 的斜率随 n 单调递增.