

理科数学

一、选择题

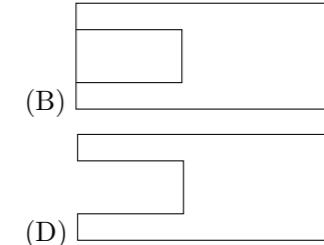
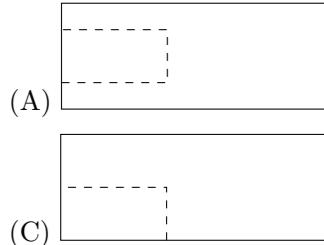
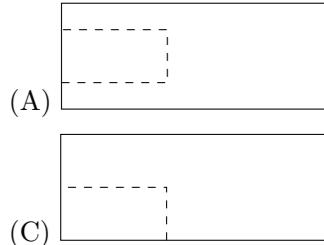
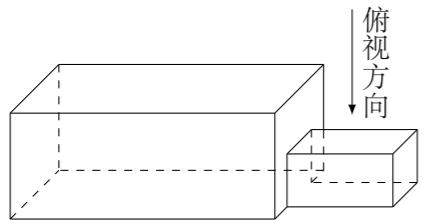
1. 已知集合 $A = \{x | x - 1 \geq 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- (A) {0} (B) {1} (C) {1, 2} (D) {0, 1, 2}

2. $(1+i)(2-i) =$ ()

- (A)
- $-3-i$
- (B)
- $-3+i$
- (C)
- $3-i$
- (D)
- $3+i$

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来, 构件的凸出部分叫榫头, 凹进部分叫卯眼, 图中木构件右边的小长方体是榫头. 若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体, 则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是 ()

4. 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()

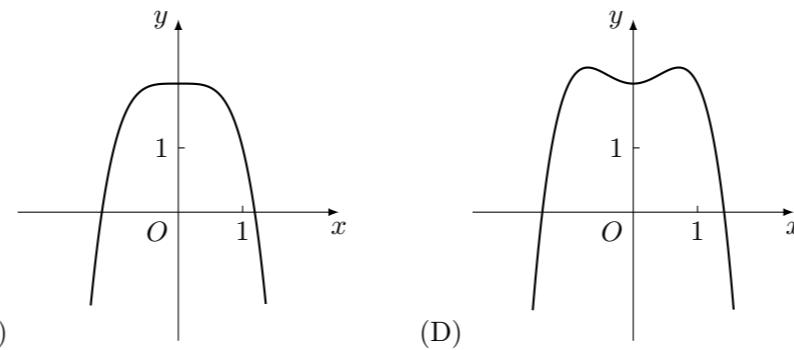
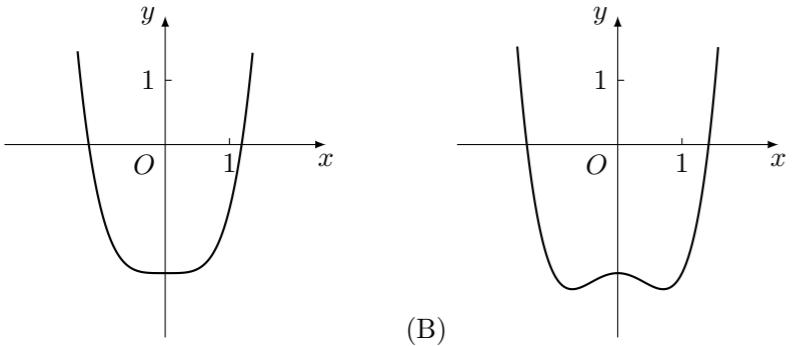
- (A)
- $\frac{8}{9}$
- (B)
- $\frac{7}{9}$
- (C)
- $-\frac{7}{9}$
- (D)
- $-\frac{8}{9}$

5. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 ()

- (A) 10 (B) 20 (C) 40 (D) 80

6. 直线 $x + y + 2 = 0$ 分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点, 点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上, 则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是 ()

- (A)
- $[2, 6]$
- (B)
- $[4, 8]$
- (C)
- $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$
- (D)
- $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

7. 函数 $y = -x^4 + x^2 + 2$ 的图象大致为 ()8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p , 各成员的支付方式相互独立, 设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数, $DX = 2.4$, $P(X=4) < P(X=6)$, 则 $p =$ ()

- (A) 0.7 (B) 0.6 (C) 0.4 (D) 0.3

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C =$ ()

- (A)
- $\frac{\pi}{2}$
- (B)
- $\frac{\pi}{3}$
- (C)
- $\frac{\pi}{4}$
- (D)
- $\frac{\pi}{6}$

10. 设 A, B, C, D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点, $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$, 则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 ()

- (A)
- $12\sqrt{3}$
- (B)
- $18\sqrt{3}$
- (C)
- $24\sqrt{3}$
- (D)
- $54\sqrt{3}$

11. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, O 是坐标原点. 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P . 若 $|PF_1| = \sqrt{6}|OP|$, 则 C 的离心率为 ()

- (A)
- $\sqrt{5}$
- (B) 2 (C)
- $\sqrt{3}$
- (D)
- $\sqrt{2}$

12. 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则 ()

- (A)
- $a+b < ab < 0$
- (B)
- $ab < a+b < 0$
-
- (C)
- $a+b < 0 < ab$
- (D)
- $ab < 0 < a+b$

二、填空题

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -2)$, $\mathbf{c} = (1, \lambda)$. 若 $\mathbf{c} \parallel (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$, 则 $\lambda =$ _____.14. 曲线 $y = (ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 , 则 $a =$ _____.15. 函数 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, \pi]$ 的零点个数为 _____.16. 已知点 $M(-1, 1)$ 和抛物线 $C: y^2 = 4x$, 过 C 的焦点且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $\angle AMB = 90^\circ$, 则 $k =$ _____.

三、解答题

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_5 = 4a_3$.

- (1) 求
- $\{a_n\}$
- 的通项公式;
-
- (2) 记
- S_n
- 为
- $\{a_n\}$
- 的前
- n
- 项和. 若
- $S_m = 63$
- , 求
- m
- .

18. 某工厂为提高生产效率, 开展技术创新活动, 提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率, 选取 40 名工人, 将他们随机分成两组, 每组 20 人, 第一组工人用第一种生产方式, 第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成生产任务的工作时间 (单位: min) 绘制了如图茎叶图:

第一种生产方式	第二种生产方式						
	8	5	5	6	8	9	
	9	7	6	2	7	0	1
	9	8	7	6	5	3	2
	2	1	1	0	0	9	0

- (1) 根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高? 并说明理由;
(2) 求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m , 并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入下面的列联表:

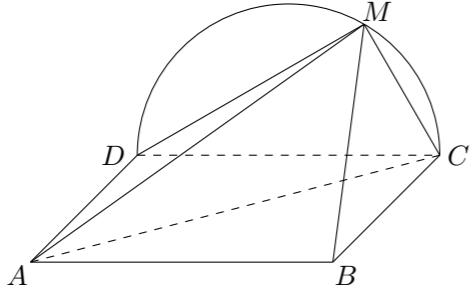
	超过 m	不超过 m
第一种生产方式		
第二种生产方式		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 能否有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 \widehat{CD} 所在平面垂直, M 是 \widehat{CD} 上异于 C, D 的点.
- 证明: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC ;
 - 当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时, 求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x) = (2 + x + ax^2) \ln(1+x) - 2x$.

- 若 $a=0$, 证明: 当 $-1 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;
- 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a .

20. 已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点. 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$).

- 证明: $k < -\frac{1}{2}$;
- 设 F 为 C 的右焦点, P 为 C 上一点, 且 $\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$. 证明: $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列, 并求该数列的公差.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 过点 $(0, -\sqrt{2})$ 且倾斜角为 α 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A, B 两点.
- 求 α 的取值范围;
 - 求 AB 中点 P 的轨迹的参数方程.

23. 设函数 $f(x) = |2x+1| + |x-1|$.

- 画出 $y=f(x)$ 的图象;
- 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \leq ax+b$, 求 $a+b$ 的最小值.

