

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $N = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, 则 $M \cap N$ 中元素的个数为 ()
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7
2. 已知角 α 的终边经过点 $(-4, 3)$, 则 $\cos \alpha =$ ()
(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$
3. 不等式组 $\begin{cases} x(x+2) > 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$ 的解集为 ()
(A) $\{x | -2 < x < -1\}$ (B) $\{x | -1 < x < 0\}$
(C) $\{x | 0 < x < 1\}$ (D) $\{x | x > 1\}$
4. 已知正四面体 $ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, 则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 ()
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. 函数 $y = \ln(\sqrt[3]{x} + 1)$ ($x > -1$) 的反函数是 ()
(A) $y = (1 - e^x)^3$ ($x > -1$) (B) $y = (e^x - 1)^3$ ($x > -1$)
(C) $y = (1 - e^x)^3$ ($x \in \mathbf{R}$) (D) $y = (e^x - 1)^3$ ($x \in \mathbf{R}$)
6. 已知 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 为单位向量, 其夹角为 60° , 则 $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} =$ ()
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
7. 有 6 名男医生、5 名女医生, 从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组, 则不同的选法共有 ()
(A) 60 种 (B) 70 种 (C) 75 种 (D) 150 种
8. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2 = 3$, $S_4 = 15$, 则 $S_6 =$ ()
(A) 31 (B) 32 (C) 63 (D) 64
9. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过 F_2 的直线 l 交 C 于 A 、 B 两点, 若 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$, 则 C 的方程为 ()
(A) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ (C) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$
10. 正四棱锥的顶点都在同一球面上, 若该棱锥的高为 4, 底面边长为 2, 则该球的表面积为 ()
(A) $\frac{81\pi}{4}$ (B) 16π (C) 9π (D) $\frac{27\pi}{4}$
11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 2, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$, 则 C 的焦距等于 ()
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$

12. 奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(1) = 1$, 则 $f(8) + f(9) =$ ()
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

二、填空题

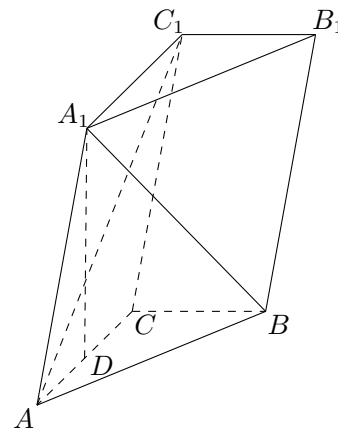
13. $(x-2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为_____. (用数字作答)
14. 函数 $y = \cos 2x + 2 \sin x$ 的最大值为_____.
15. 设 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ x - 2y \leq 1 \end{cases}$, 则 $z = x + 4y$ 的最大值为_____.
16. 直线 l_1 和 l_2 是圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的两条切线, 若 l_1 与 l_2 的交点为 $(1, 3)$, 则 l_1 与 l_2 的夹角的正切值等于_____.

三、解答题

17. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$.
(1) 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $3a \cos C = 2c \cos A$, $\tan A = \frac{1}{3}$, 求 B .

19. 如图, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, $AC = CC_1 = 2$.
(1) 证明: $AC_1 \perp A_1B$;
(2) 设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为 $\sqrt{3}$, 求二面角 $A_1 - AB - C$ 的大小.



20. 设每个工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某种设备的概率分别为 0.6、0.5、0.5、0.4, 各人是否需使用设备相互独立.
- (1) 求同一工作日至少 3 人需使用设备的概率;
- (2) 实验室计划购买 k 台设备供甲、乙、丙、丁使用, 若要求“同一工作日需使用设备的人数大于 k ”的概率小于 0.1, 求 k 的最小值.

21. 函数 $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 3x$ ($a \neq 0$).
- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 是增函数, 求 a 的取值范围.

22. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P , 与 C 的交点为 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A 、 B 两点, 若 AB 的垂直平分线 l' 与 C 相交于 M 、 N 两点, 且 A 、 M 、 B 、 N 四点在同一圆上, 求 l 的方程.