

数学试卷

一、选择题

1. 若 $\cos \theta > 0, \sin 2\theta < 0$, 则角 θ 的终边所在象限是 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 对于 $0 < a < 1$, 给出下列四个不等式: ① $\log_a(1+a) < \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ② $\log_a(1+a) > \log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$; ③ $a^{1+a} < a^{1+\frac{1}{a}}$; ④ $a^{1+a} > a^{1+\frac{1}{a}}$. 其中成立的是 ()

- (A) ①与③ (B) ①与④ (C) ②与③ (D) ②与④

3. 已知 α, β 是不同的两个平面, 直线 $a \subset \alpha$, 直线 $b \subset \beta$, 命题 p : a 与 b 无公共点; 命题 q : $\alpha // \beta$. 则 p 是 q 的 ()

- (A) 充分而不必要的条件 (B) 必要而不充分的条件
-
- (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要的条件

4. 设复数 z 满足 $\frac{1-z}{1+z} = i$, 则 $|1+z| =$ ()

- (A) 0 (B) 1 (C)
- $\sqrt{2}$
- (D) 2

5. 甲、乙两人独立地解同一问题, 甲解决这个问题的概率是 p_1 , 乙解决这个问题的概率是 p_2 , 那么恰好有 1 人解决这个问题的概率是 ()

- (A)
- $p_1 p_2$
- (B)
- $p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$
-
- (C)
- $1 - p_1 p_2$
- (D)
- $1 - (1-p_1)(1-p_2)$

6. 已知点 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$, 动点 $P(x, y)$ 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2$, 则点 P 的轨迹是 ()

- (A) 圆 (B) 椭圆 (C) 双曲线 (D) 抛物线

7. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$, 则下列命题正确的是 ()

- (A)
- $f(x)$
- 是周期为 1 的奇函数
-
- (B)
- $f(x)$
- 是周期为 2 的偶函数
-
- (C)
- $f(x)$
- 是周期为 1 的非奇非偶函数
-
- (D)
- $f(x)$
- 是周期为 2 的非奇非偶函数

8. 已知随机变量 ξ 的概率分布如下:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi = 10) =$ ()

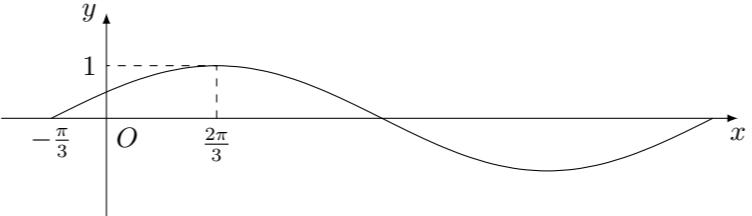
- (A)
- $\frac{2}{3^9}$
- (B)
- $\frac{2}{3^{10}}$
- (C)
- $\frac{1}{3^9}$
- (D)
- $\frac{1}{3^{10}}$

9. 已知点 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$, 动点 P 满足 $|PF_2| - |PF_1| = 2$. 当点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}$ 时, 点 P 到坐标原点的距离是 ()

- (A)
- $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- (B)
- $\frac{3}{2}$
- (C)
- $\sqrt{3}$
- (D) 2

10. 设 A, B, C, D 是球面上的四个点, 且在同一平面内, $AB = BC = CD = DA = 3$, 球心到该平面的距离是球半径的一半, 则球的体积是 ()

- (A)
- $8\sqrt{6}\pi$
- (B)
- $64\sqrt{6}\pi$
- (C)
- $24\sqrt{2}\pi$
- (D)
- $72\sqrt{2}\pi$

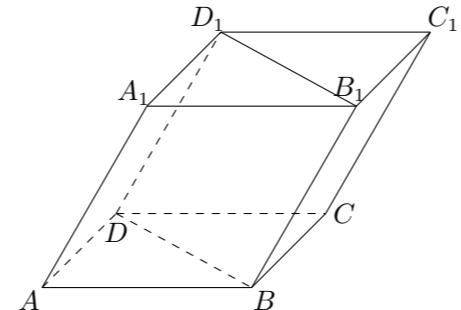
11. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 (部分) 如图所示, 则 ω 和 φ 的取值是 ()

- (A)
- $\omega = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$
- (B)
- $\omega = 1, \varphi = -\frac{\pi}{3}$
-
- (C)
- $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{\pi}{6}$
- (D)
- $\omega = \frac{1}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{6}$

12. 有两排座位, 前排 11 个座位, 后排 12 个座位, 现安排 2 人就座, 规定前排中间的 3 个座位不能坐, 并且这 2 人不左右相邻, 那么不同排法的种数是 ()

- (A) 234 (B) 346 (C) 350 (D) 363

二、填空题

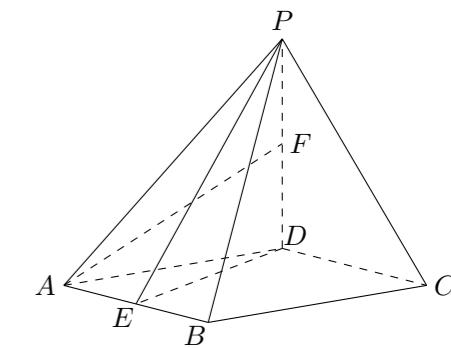
13. 若经过点 $P(-1, 0)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 相切, 则此直线在 y 轴上的截距是_____.14. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi) \cos x}{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}} =$ _____.15. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形, 侧棱与底面边长均为 $2a$, 且 $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60^\circ$, 则侧棱 AA_1 和截面 B_1D_1DB 的距离是_____.

16. 口袋内装有 10 个相同的球, 其中 5 个球标有数字 0, 5 个球标有数字 1, 若从袋中摸出 5 个球, 那么摸出的 5 个球所标数字之和小于 2 或大于 3 的概率是_____. (以数值作答)

三、解答题

17. 已知四棱锥 $P - ABCD$, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = AD$, 点 E 为 AB 中点, 点 F 为 PD 中点.

- (1) 证明: 平面
- $PED \perp$
- 平面
- PAB
- ;
-
- (2) 求二面角
- $P - AB - F$
- 的平面角的余弦值.

18. 设全集 $U = \mathbf{R}$.

- (1) 解关于
- x
- 的不等式
- $|x-1| + a - 1 > 0$
- (
- $a \in \mathbf{R}$
-);
-
- (2) 记
- A
- 为 (1) 中不等式的解集, 集合
- $B = \left\{x \mid \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right) = 0\right\}$
- , 若
- $(\complement_U A) \cap B$
- 恰有 3 个元素, 求
- a
- 的取值范围.

19. 设椭圆方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, 过点 $M(0, 1)$ 的直线 l 交椭圆于点 A, B, O 是坐标原点, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$, 点 N 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 当 l 绕点 M 旋转时, 求:
- (1) 动点 P 的轨迹方程;
 - (2) $|NP|$ 的最小值与最大值.
20. 甲方是一农场, 乙方是一工厂. 由于乙方生产须占用甲方的资源, 因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入, 在乙方不赔付甲方的情况下, 乙方的年利润 x (元) 与年产量 t (吨) 满足函数关系 $x = 2000\sqrt{t}$. 若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元 (以下称 s 为赔付价格).
- (1) 将乙方的年利润 w (元) 表示为年产量 t (吨) 的函数, 并求出乙方获得最大利润的年产量;
 - (2) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$ (元), 在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下, 甲方要在索赔中获得最大净收入, 应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?
21. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{3}{2}x^2$ 的最大值不大于 $\frac{1}{6}$, 又当 $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{8}$.
- (1) 求 a 的值;
 - (2) 设 $0 < a_1 < \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. 证明 $a_n < \frac{1}{n+1}$.
22. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)$ ($a > 0$).
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$;
 - (2) 假设对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$, 不等式 $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.