2014 年普通高等学校招生考试（山东卷）

文科数学

一、选择题

1. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $a + \mathrm{i} = 2 - b\mathrm{i}$, 则 $(a + b\mathrm{i})^2 =$ ( )

(A) $3 - 4\mathrm{i}$ (B) $3 + 4\mathrm{i}$ (C) $4 - 3\mathrm{i}$ (D) $4 + 3\mathrm{i}$

2. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x < 0\}$, $B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, 则 $A \cap B =$ ( )

(A) $(0, 2]$ (B) $(1, 2)$ (C) $[1, 2)$ (D) $(1, 4)$

3. 函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$ 的定义域为 ( )

(A) $(0, 2)$ (B) $(0, 2]$ (C) $(2, +\infty)$ (D) $[2, +\infty)$

4. 用反证法证明命题“设 a, b 为实数, 则方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至少有一个实根”时, 要做的假设是 ( )

(A) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 没有实根

(B) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有一个实根

(C) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 至多有两个实根

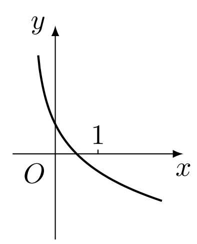
(D) 方程 $x^3 + ax + b = 0$ 恰好有两个实根

5. 已知实数 x, y 满足 $a^x < a^y$ $(0 < a < 1)$, 则下列关系式恒成立的是 ( )

(A) $x^3 > y^3$ (B) $\sin x > \sin y$

(C) $\ln(x^2 + 1) > \ln(y^2 + 1)$ (D) $\dfrac{1}{x^2 + 1} > \dfrac{1}{y^2 + 1}$

6. 已知函数 $y = \log_a(x + c)$ (a, c 为常数, 其中 $a > 0, a \neq 1$) 的图象如图, 则下列结论成立的是 ( )



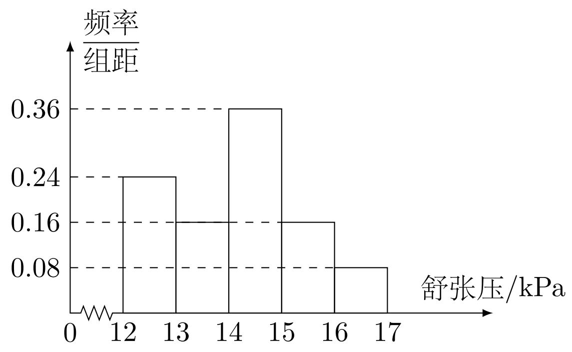
(A) $a > 1, c > 1$ (B) $a > 1, 0 < c < 1$

(C) $0 < a < 1, c > 1$ (D) $0 < a < 1, 0 < c < 1$

7. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (1, \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b} = (3, m)$. 若向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$, 则实数 $m =$ ( )

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $-\sqrt{3}$

8. 为了研究某种药品的疗效, 选取若干名志愿者进行临床试验. 所有志愿者的舒张压数据 (单位: kPa) 的分组区间为 $[12, 13)$, $[13, 14)$, $[14, 15)$, $[15, 16)$, $[16, 17]$, 将其按从左到右的顺序分别编号为第一组, 第二组, $\cdots$, 第五组. 如图所示是根据试验数据制成的频率分布直方图. 已知第一组与第二组共有 20 人, 第三组中没有疗效的有 6 人, 则第三组中有疗效的人数为 ( )



(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 18

9. 对于函数 $f(x)$, 若存在常数 $a \neq 0$, 使得 x 取定义域内的每一个值, 都有 $f(x) = f(2a - x)$, 则称 $f(x)$ 为准偶函数, 下列函数中是准偶函数的是 ( )

(A) $f(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = x^3$

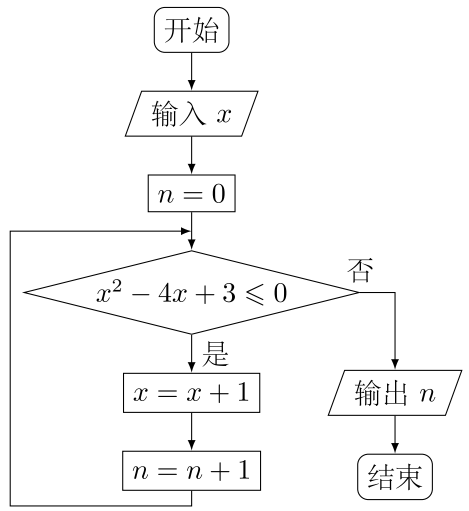
(C) $f(x) = \tan x$ (D) $f(x) = \cos(x + 1)$

10. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y - 1 \leqslant 0 \\ 2x - y - 3 \geqslant 0 \end{cases}$, 当目标函数 $z = ax + by$ $(a > 0,\ b > 0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时, $a^2 + b^2$ 的最小值为 ( )

(A) 5 (B) 4 (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

二、填空题

11. 执行如图所示的程序框图, 若输入的 x 的值为 1, 则输出的 n 的值为______.



12. 函数 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \cos^2 x$ 最小正周期为______.

13. 一个六棱锥的体积为 $2\sqrt{3}$, 其底面是边长为 2 的正六边形, 侧棱长都相等, 则该六棱锥的侧面积为______.

14. 圆心在直线 $x - 2y = 0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切, 圆 C 截 x 轴所得弦的长为 $2\sqrt{3}$, 则圆 C 的标准方程为______.

15. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 右顶点为 A, 抛物线 $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ 的焦点为 F. 若双曲线截抛物线的准线所得线段长为 $2c$, 且 $FA = c$, 则双曲线的渐近线方程为______.

三、解答题

16. 海关对同时从 A, B, C 三个不同地区进口的某种商品进行抽样检测, 从各地区进口此商品的数量 (单位: 件) 如下表所示. 工作人员用分层抽样的方法从这些商品中共抽取 6 件样品进行检测.

地区	A	B	C
数量	50	150	100

(1) 求这 6 件样品中来自 A, B, C 各地区商品的数量;

(2) 若在这 6 件样品中随机抽取 2 件送往甲机构进行进一步检测, 求这 2 件商品来自相同地区的概率.

17. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $a = 3$, $\cos A = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $B = A + \dfrac{\pi}{2}$.

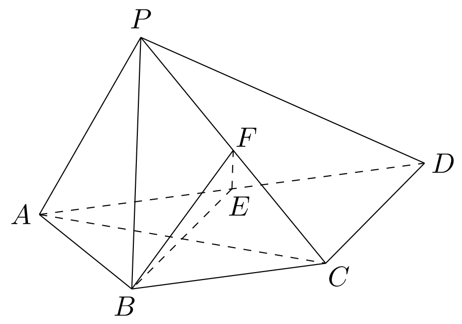
(1) 求 b 的值;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP\perp$ 平面 PCD, $AD\parallel BC$, $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, E, F 分别为线段 AD, PC 的中点.

(1) 求证: $AP\parallel$ 平面 BEF;

(2) 求证: $BE\perp$ 平面 PAC.



19. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知公差 $d=2$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$, 记 $T_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\cdots+(-1)^n b_n$, 求 T_n.

20. 设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{x-1}{x+1}$, 其中 a 为常数.

(1) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $y=x$ 被椭圆 C 截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过原点的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点 (A, B 不是椭圆 C 的顶点). 点 D 在椭圆 C 上, 且 $AD\perp AB$, 直线 BD 与 x 轴、y 轴分别交于 M, N 两点.

① 设直线 BD, AM 的斜率分别为 k_1, k_2, 证明存在常数 λ 使得 $k_1=\lambda k_2$, 并求出 λ 的值;

② 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.