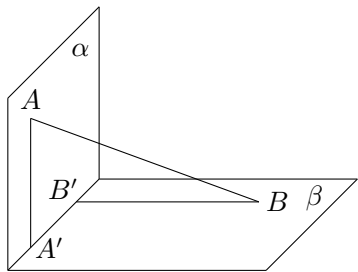


# 理科数学

## 一、选择题

- 已知集合  $M = \{x|x < 3\}$ ,  $N = \{x|\log_2 x > 1\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )  
(A)  $\emptyset$  (B)  $\{x|0 < x < 3\}$  (C)  $\{x|1 < x < 3\}$  (D)  $\{x|2 < x < 3\}$
- 函数  $y = \sin 2x \cos 2x$  的最小正周期是 ( )  
(A)  $2\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{3}{(1-i)^2} =$  ( )  
(A)  $\frac{3}{2}i$  (B)  $-\frac{3}{2}i$  (C)  $i$  (D)  $-i$
- 过球的一条半径的中点, 作垂直于该半径的平面, 则所得截面的面积与球的表面积的比为 ( )  
(A)  $\frac{3}{16}$  (B)  $\frac{9}{16}$  (C)  $\frac{3}{8}$  (D)  $\frac{9}{32}$
- 已知  $\triangle ABC$  的顶点  $B, C$  在椭圆  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上, 顶点  $A$  是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在  $BC$  边上, 则  $\triangle ABC$  的周长是 ( )  
(A)  $2\sqrt{3}$  (B) 6 (C)  $4\sqrt{3}$  (D) 12
- 已知函数  $f(x) = \ln x + 1$  ( $x > 0$ ), 则  $f(x)$  的反函数为 ( )  
(A)  $y = e^{x+1}$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) (B)  $y = e^{x-1}$  ( $x \in \mathbf{R}$ )  
(C)  $y = e^{x+1}$  ( $x > 1$ ) (D)  $y = e^{x-1}$  ( $x > 1$ )
- 如图, 平面  $\alpha \perp$  平面  $\beta$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $AB$  与两平面  $\alpha, \beta$  所成的角分别为  $\frac{\pi}{4}$  和  $\frac{\pi}{6}$ . 过  $A, B$  分别作两平面交线的垂线, 垂足为  $A', B'$ , 则  $AB : A'B' =$  ( )

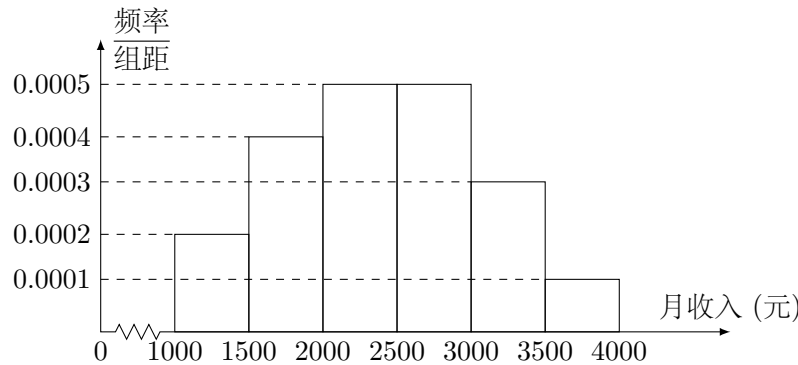


- (A) 2 : 1 (B) 3 : 1 (C) 3 : 2 (D) 4 : 3
- 函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $g(x) = \log_2 x$  ( $x > 0$ ) 的图象关于原点对称, 则  $f(x)$  的表达式为 ( )  
(A)  $f(x) = \frac{1}{\log_2 x}$  ( $x > 0$ ) (B)  $f(x) = \frac{1}{\log_2(-x)}$  ( $x < 0$ )  
(C)  $f(x) = -\log_2 x$  ( $x > 0$ ) (D)  $f(x) = -\log_2(-x)$  ( $x < 0$ )
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线方程为  $y = \frac{4}{3}x$ , 则双曲线的离心率为 ( )  
(A)  $\frac{5}{3}$  (B)  $\frac{4}{3}$  (C)  $\frac{5}{4}$  (D)  $\frac{3}{2}$

- 若  $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$ , 则  $f(\cos x) =$  ( )  
(A)  $3 - \cos 2x$  (B)  $3 - \sin 2x$  (C)  $3 + \cos 2x$  (D)  $3 + \sin 2x$
- 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{S_6}{S_{12}} =$  ( )  
(A)  $\frac{3}{10}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{8}$  (D)  $\frac{1}{9}$
- 函数  $\sum_{n=1}^{19} |x - n|$  的最小值为 ( )  
(A) 190 (B) 171 (C) 90 (D) 45

## 二、填空题

- 在  $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^{10}$  的展开式中常数项是\_\_\_\_\_. (用数字作答)
- 已知  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  成等差数列, 且  $AB = 1, BC = 4$ , 则边  $BC$  上的中线  $AD$  的长为\_\_\_\_\_.
- 过点  $(1, \sqrt{2})$  的直线  $l$  将圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时, 直线  $l$  的斜率  $k =$ \_\_\_\_\_.
- 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如图). 为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在 [2500, 3000) (元) 月收入段应抽出\_\_\_\_\_人.

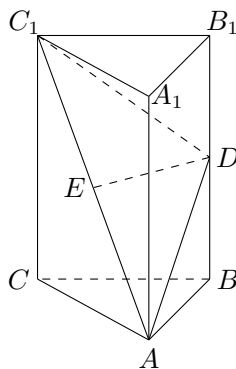


## 三、解答题

- 已知向量  $\mathbf{a} = (\sin \theta, \sqrt{3})$ ,  $\mathbf{b} = (1, \cos \theta)$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .  
(1) 若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 求  $\theta$ ;  
(2) 求  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  的最大值.

- 某批产品成箱包装, 每箱 5 件, 一用户在购进该批产品前先取出 3 箱, 再从每箱中任意取出 2 件产品进行检验. 设取出的第一, 二, 三箱中分别有 0 件, 1 件, 2 件二等品, 其余为一等品.  
(1) 用  $\xi$  表示抽检的 6 件产品中二等品的件数, 求  $\xi$  的分布列及  $\xi$  的数学期望;  
(2) 若抽检的 6 件产品中有 2 件或 2 件以上二等品, 用户就拒绝购买这批产品, 求这批产品被用户拒绝购买的概率.

- 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = BC$ ,  $D, E$  分别为  $BB_1, AC_1$  的中点.  
(1) 证明:  $ED$  为异面直线  $BB_1$  与  $AC_1$  的公垂线;  
(2) 设  $AA_1 = AC = \sqrt{2}AB$ , 求二面角  $A_1 - AD - C_1$  的大小.



20. 设函数  $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$ . 若对所有的  $x \geq 0$ , 都有  $f(x) \geq ax$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.
21. 已知抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ ,  $A$ 、 $B$  是抛物线上的两动点, 且  $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$  ( $\lambda > 0$ ). 过  $A$ 、 $B$  两点分别作抛物线的切线, 设其交点为  $M$ .
- (1) 证明  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$  为定值;
  - (2) 设  $\triangle ABM$  的面积为  $S$ , 写出  $S = f(\lambda)$  的表达式, 并求  $S$  的最小值.
22. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且方程  $x^2 - a_n x - a_n = 0$  有一根为  $S_n - 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .
- (1) 求  $a_1, a_2$ ;
  - (2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.