2004 年普通高等学校招生考试（全国卷 II）

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M=\{x|x^2<4\}$, $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$, 则集合 $M\cap N=$(　)

(A) $\{x|x<-2\}$　(B) $\{x|x>3\}$

(C) $\{x|-1<x<2\}$　(D) $\{x|2<x<3\}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x-5}=$　(　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

3. 设复数 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则 $1+\omega=$　(　)

(A) $-\omega$　(B) ω^2　(C) $-\dfrac{1}{\omega}$　(D) $\dfrac{1}{\omega^2}$

4. 已知圆 C 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 关于直线 $y=-x$ 对称, 则圆 C 的方程为　(　)

(A) $(x+1)^2+y^2=1$　(B) $x^2+y^2=1$

(C) $x^2+(y+1)^2=1$　(D) $x^2+(y-1)^2=1$

5. 已知函数 $y=\tan(2x+\varphi)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$, 则 φ 可以是　(　)

(A) $-\dfrac{\pi}{6}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $-\dfrac{\pi}{12}$　(D) $\dfrac{\pi}{12}$

6. 函数 $y=-\mathrm{e}^x$ 的图象　(　)

(A) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于 y 轴对称

(B) 与 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象关于坐标原点对称

(C) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称

(D) 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的图象关于坐标原点对称

7. 已知球 O 的半径为 1, A、B、C 三点都在球面上, 且每两点间的球面距离为 $\dfrac{\pi}{2}$, 则球心 O 到平面 ABC 的距离为　(　)

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

8. 在坐标平面内, 与点 $A(1,2)$ 距离为 1, 且与点 $B(3,1)$ 距离为 2 的直线共有　(　)

(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

9. 已知平面上直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{e}=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$, 点 $O(0,0)$ 和 $A(1,-2)$ 在 L 上的射影分别是 O_1 和 A_1, 则 $\overrightarrow{O_1A_1}=\lambda\boldsymbol{e}$, 其中 $\lambda=$　(　)

(A) $\dfrac{11}{5}$　(B) $-\dfrac{11}{5}$　(C) 2　(D) -2

10. 函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在下面哪个区间内是增函数　(　)

(A) $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$　(B) $(\pi,2\pi)$　(C) $\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2}\right)$　(D) $(2\pi,3\pi)$

11. 函数 $y=\sin^4x+\cos^2x$ 的最小正周期为　(　)

(A) $\dfrac{\pi}{4}$　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　(C) π　(D) 2π

12. 在由数字 1, 2, 3, 4, 5 组成的所有没有重复数字的 5 位数中, 大于 23145 且小于 43521 的数共有　(　)

(A) 56 个　(B) 57 个　(C) 58 个　(D) 60 个

二、填空题

13. 从装有 3 个红球, 2 个白球的袋中随机取出 2 个球, 设其中有 ξ 个红球, 则随机变量 ξ 的概率分布为:

ξ	0	1	2
P			

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant0\\x\geqslant y\\2x-y\leqslant1\end{cases}$, 则 $z=3x+2y$ 的最大值是______.

15. 设中心在原点的椭圆与双曲线 $2x^2-2y^2=1$ 有公共的焦点, 且它们的离心率互为倒数, 则该椭圆的方程是______.

16. 下面是关于四棱柱的四个命题:

① 若有两个侧面垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

② 若两个过相对侧棱的截面都垂直于底面, 则该四棱柱为直四棱柱;

③ 若四个侧面两两全等, 则该四棱柱为直四棱柱;

④ 若四棱柱的四条对角线两两相等, 则该四棱柱为直四棱柱.

其中, 真命题的编号是______. (写出所有真命题的编号)

三、解答题

17. 已知锐角三角形 ABC 中, $\sin(A+B)=\dfrac{3}{5}$, $\sin(A-B)=\dfrac{1}{5}$.

(1) 求证: $\tan A=2\tan B$;

(2) 设 $AB=3$, 求 AB 边上的高.

18. 已知 8 支球队中有 3 支弱队, 以抽签方式将这 8 支球队分为 A、B 两组, 每组 4 支. 求:

(1) A、B 两组中有一组恰有两支弱队的概率;

(2) A 组中至少有两支弱队的概率.

19. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n, 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}S_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 证明:

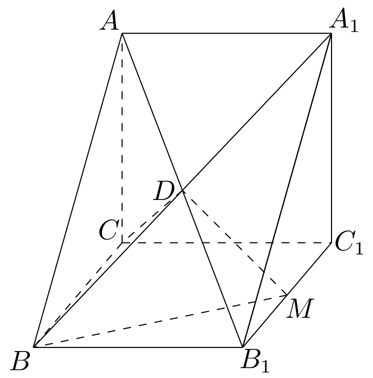
(1) 数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等比数列;

(2) $S_{n+1}=4a_n$.

20. 如图, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90°$, $AC=1$, $CB=\sqrt{2}$, 侧棱 $AA_1=1$, 侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D, B_1C_1 的中点为 M.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 BDM;

(2) 求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.



21. 给定抛物线 $C: y^2=4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

(1) 设 l 的斜率为 1, 求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小;

(2) 设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda\in[4,9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

22. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$, $g(x)=x\ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 设 $0<a<b$, 证明: $0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.