2014 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 函数 $y=1-2\cos^2(2x)$ 的最小正周期是______.

2. 若复数 $z=1+2\mathrm{i}$, 其中 i 是虚数单位, 则 $\left(z+\dfrac{1}{\overline{z}}\right)\cdot\overline{z}=$______.

3. 若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点重合, 则该抛物线的准线方程为______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x,\ x\in(-\infty,a)\\ x^2,\ x\in[a,+\infty)\end{cases}$, 若 $f(2)=4$, 则 a 的取值范围为______.

5. 若实数 x, y 满足 $xy=1$, 则 x^2+2y^2 的最小值为______.

6. 若圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 则其母线与底面夹角的大小为______. (结果用反三角函数值表示)

7. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(3\cos\theta-4\sin\theta)=1$, 则 C 与极轴的交点到极点的距离是______.

8. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 若 $a_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_3+a_4+\cdots+a_n)$, 则 $q=$______.

9. 若 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{2}}$, 则满足 $f(x)<0$ 的 x 的取值范围是______.

10. 为强化安全意识, 某商场拟在未来的连续 10 天中随机选择 3 天进行紧急疏散演练, 则选择的 3 天恰好为连续 3 天的概率是______. (结果用最简分数表示)

11. 已知互异的复数 a, b 满足 $ab\neq 0$, 集合 $\{a,b\}=\{a^2,b^2\}$, 则 $a+b=$______.

12. 设常数 a 使方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上恰有三个解 x_1, x_2, x_3, 则 $x_1+x_2+x_3=$______.

13. 某游戏的得分为 1, 2, 3, 4, 5, 随机变量 ξ 表示小白玩该游戏的得分. 若 $E(\xi)=4.2$, 则小白得 5 分的概率至少为______.

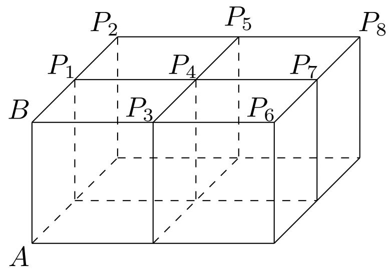
14. 已知曲线 $C:x=-\sqrt{4-y^2}$, 直线 $l:x=6$. 若对于点 $A(m,0)$, 存在 C 上的点 P 和 l 上的 Q 使得 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$, 则 m 的取值范围为______.

二、选择题

15. 设 $a, b\in\mathbf{R}$, 则“$a+b>4$”是“$a>2$ 且 $b>2$”的 ( )

(A) 充分非必要条件　(B) 必要非充分条件
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

16. 如图, 四个棱长为 1 的正方体排成一个正四棱柱, AB 是一条侧棱, P_i $(i=1, 2, \cdots, 8)$ 是上底面上其余的八个点, 则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_i}$ $(i=1, 2, \cdots, 8)$ 的不同值的个数为 ( )



(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

17. 已知 $P_1(a_1,b_1)$ 与 $P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$ (k 为常数) 上两个不同的点, 则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\ a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是 ( )

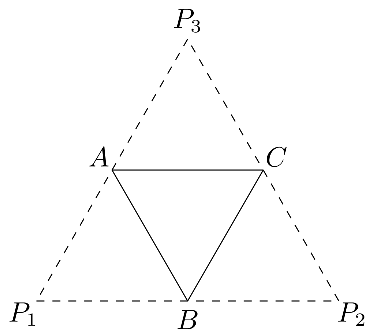
(A) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总是无解　(B) 无论 k, P_1, P_2 如何, 总有唯一解
(C) 存在 k, P_1, P_2, 使之恰有两解　(D) 存在 k, P_1, P_2, 使之有无穷多解

18. 设 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2,\ x\leqslant 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a,\ x>0\end{cases}$, 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $[-1,2]$　(B) $[-1,0]$　(C) $[1,2]$　(D) $[0,2]$

三、解答题

19. 底面边长为 2 的正三棱锥 $P-ABC$, 其表面展开图是三角形 $P_1P_2P_3$, 如图, 求 $\triangle P_1P_2P_3$ 的各边长及此三棱锥的体积 V.



20. 设常数 $a\geqslant 0$, 函数 $f(x)=\dfrac{2^x+a}{2^x-a}$.

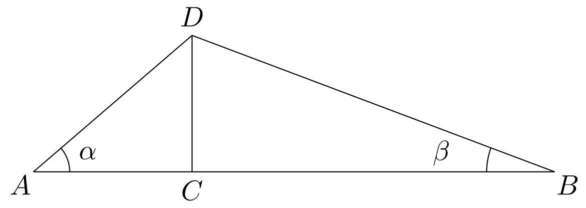
(1) 若 $a=4$, 求函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$;

(2) 根据 a 的不同取值, 讨论函数 $y=f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

21. 如图, 某公司要在 A、B 两地连线上的定点 C 处建造广告牌 CD, 其中 D 为顶端, AC 长 35 米, CB 长 80 米. 设点 A、B 在同一水平面上, 从 A 和 B 看 D 的仰角分别为 α 和 β.

(1) 设计中 CD 是铅垂方向. 若要求 $\alpha \geqslant 2\beta$, 问 CD 的长至多为多少 (结果精确到 0.01 米)?

(2) 施工完成后, CD 与铅垂方向有偏差. 现在实测得 $\alpha = 38.12^\circ$, $\beta = 18.45^\circ$, 求 CD 的长 (结果精确到 0.01 米).



22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于直线 $l: ax+by+c=0$ 和点 $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, 记 $\eta=(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)$. 若 $\eta<0$, 则称点 P_1, P_2 被直线 l 分隔. 若曲线 C 与直线 l 没有公共点, 且曲线 C 上存在点 P_1, P_2 被直线 l 分隔, 则称直线 l 为曲线 C 的一条分隔线.

(1) 求证: 点 $A(1,2)$, $B(-1,0)$ 被直线 $x+y-1=0$ 分隔;

(2) 若直线 $y=kx$ 是曲线 $x^2-4y^2=1$ 的分隔线, 求实数 k 的取值范围;

(3) 动点 M 到点 $Q(0,2)$ 的距离与到 y 轴的距离之积为 1, 设点 M 的轨迹为 E, 求证: 通过原点的直线中, 有且仅有一条直线是 E 的分割线.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{3}a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 3a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, $a_1=1$.

(1) 若 $a_2=2$, $a_3=x$, $a_4=9$, 求 x 的取值范围;

(2) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 若 $\dfrac{1}{3}S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant 3S_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求 q 的取值范围;

(3) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 成等差数列, 且 $a_1+a_2+\cdots+a_k=1000$, 求正整数 k 的最大值, 以及 k 取最大值时相应数列 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公差.