

文科数学

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $B \cap \complement_U A =$ ()

(A) {2} (B) {3, 4} (C) {1, 4, 5} (D) {2, 3, 4, 5}

2. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 则双曲线 $C_1: \frac{x^2}{\sin^2 \theta} - \frac{y^2}{\cos^2 \theta} = 1$ 与 $C_2: \frac{y^2}{\cos^2 \theta} - \frac{x^2}{\sin^2 \theta} = 1$ 的

(A) 实轴长相等 (B) 虚轴长相等 (C) 离心率相等 (D) 焦距相等

3. 在一次跳伞训练中, 甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”, q 是“乙降落在指定范围”, 则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 ()

(A) $(\neg p) \vee (\neg q)$ (B) $p \vee (\neg q)$ (C) $(\neg p) \wedge (\neg q)$ (D) $p \vee q$

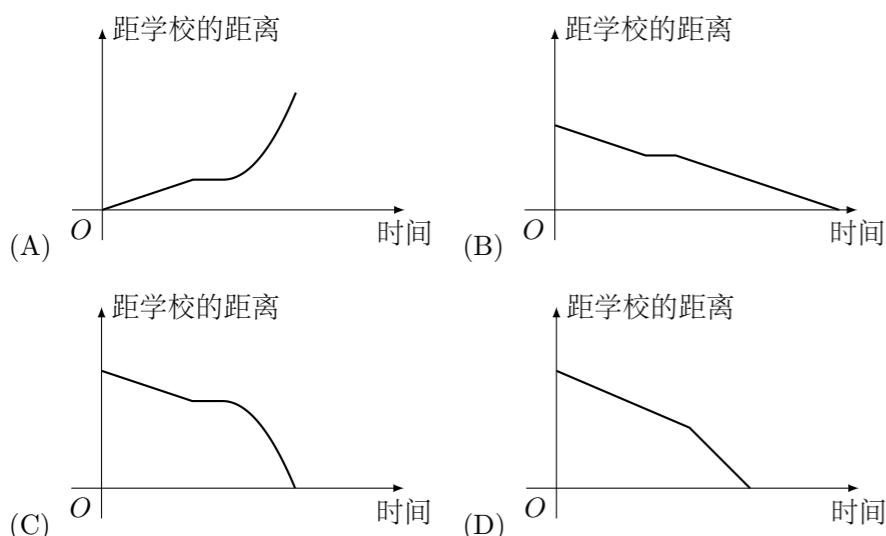
4. 四名同学根据各自的样本数据研究变量 x, y 之间的相关关系, 并求得回归直线方程, 分别得到以下四个结论:

- ① y 与 x 负相关且 $\hat{y} = 2.347x - 6.423$;
 ② y 与 x 负相关且 $\hat{y} = -3.476x + 5.648$;
 ③ y 与 x 正相关且 $\hat{y} = 5.437x + 8.493$;
 ④ y 与 x 正相关且 $\hat{y} = -4.326x - 4.578$.

其中一定不正确的结论的序号是 ()

(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

5. 小明骑车上学, 开始时匀速行驶, 途中因交通堵塞停留了一段时间后, 为了赶时间加快速度行驶, 与以上事件吻合得最好的图象是 ()



6. 将函数 $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的图象向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度后, 所得到的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是 ()

(A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

7. 已知点 $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-2, -1)$, $D(3, 4)$, 则向量 \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{CD} 方向上的投影为 ()

(A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ (C) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\frac{3\sqrt{15}}{2}$

8. x 为实数, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $f(x) = x - [x]$ 在 \mathbf{R} 上为 ()

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 增函数 (D) 周期函数

9. 某旅行社租用 A , B 两种型号的客车安排 900 名客人旅行, A , B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人, 租金分别为 1600 元/辆和 2400 元/辆, 旅行社要求租车总数不超过 21 辆, 且 B 型车不多于 A 型车 7 辆, 则租金最少为 ()

(A) 31200 元 (B) 36000 元 (C) 36800 元 (D) 38400 元

10. 已知函数 $f(x) = x(\ln x - ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, \frac{1}{2})$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, +\infty)$

二、填空题

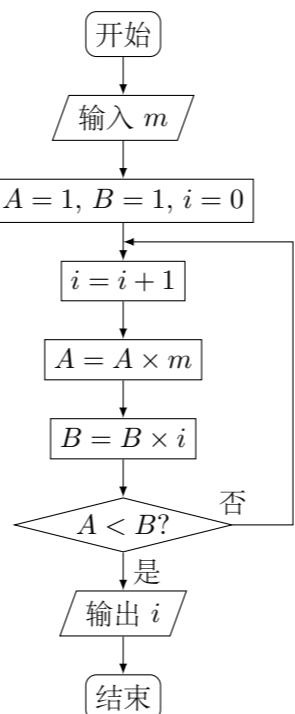
11. i 为虚数单位, 设复数 z_1 , z_2 在复平面内对应的点关于原点对称, 若 $z_1 = 2 - 3i$, 则 $z_2 =$ _____.

12. 某学员在一次射击测试中射靶 10 次, 命中环数如下:

7, 8, 7, 9, 5, 4, 9, 10, 7, 4

则: (1) 平均命中环数为 _____; (2) 命中环数的标准差为 _____.

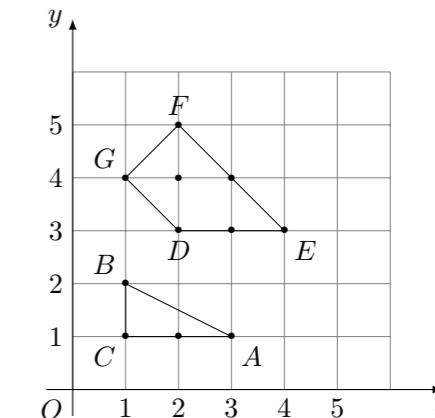
13. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序. 若输入 m 的值为 2, 则输出的结果 $i =$ _____.



15. 在区间 $[-2, 4]$ 上随机地取一个数 x , 若 x 满足 $|x| \leq m$ 的概率为 $\frac{5}{6}$, 则 $m =$ _____.

16. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题: 在下雨时, 用一个圆台形的天池盆接雨水, 天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸, 若盆中积水深九寸, 则平地降雨量是 _____ 寸.
 (注: ① 平地降雨量等于盆中积水体积除以盆口面积; ② 一尺等于十寸)

17. 在平面直角坐标系中, 若点 $P(x, y)$ 的坐标 x, y 均为整数, 则称点 P 为格点, 若一个多边形的顶点全是格点, 则称该多边形为格点多边形, 格点多边形的面积为 S , 其内部的格点数记为 N , 边界上的格点数记为 L . 例如图中 $\triangle ABC$ 是格点三角形, 对应的 $S = 1$, $N = 0$, $L = 4$.



(1) 图中格点四边形 $DEFG$ 对应的 S, N, L 分别是 _____;

(2) 已知格点多边形的面积可表示为 $S = aN + bL + c$, 其中 a, b, c 为常数. 若某格点多边形对应的 $N = 71$, $L = 18$, 则 $S =$ _____. (用数值作答)

三、解答题

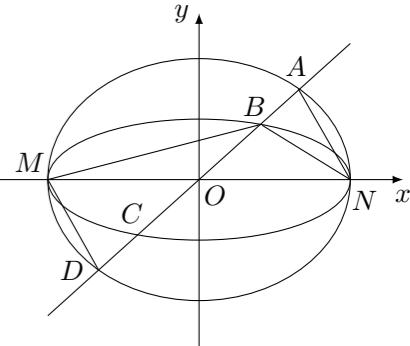
18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边分别是 a, b, c , 已知 $\cos 2A - 3 \cos(B+C) = 1$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = 5\sqrt{3}$, $b = 5$, 求 $\sin B \sin C$ 的值.

14. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 5$, 直线 $l: x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$). 设圆 O 上到直线 l 的距离等于 1 的点的个数为 k , 则 $k =$ _____.

19. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, S_4, S_2, S_3 成等差数列, 且 $a_2 + a_3 + a_4 = -18$.
- 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 是否存在正整数 n , 使得 $S_n \geq 2013$? 若存在, 求出符合条件的所有 n 的集合; 若不存在, 说明理由.
21. 设 $a > 0, b > 0$, 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$.
- 当 $a \neq b$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 - 当 $x > 0$ 时, 称 $f(x)$ 为 a, b 关于 x 的加权平均数.
- 判断 $f(1), f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right), f\left(\frac{b}{a}\right)$ 是否成等比数列, 并证明 $f\left(\frac{b}{a}\right) \leq f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$;
 - a, b 的几何平均数记为 G , 称 $\frac{2ab}{a+b}$ 为 a, b 的调和平均数, 记为 H , 若 $H \leq f(x) \leq G$, 求 x 的取值范围.
22. 如图, 已知椭圆 C_1 与 C_2 的中心在坐标原点 O , 长轴均为 MN 且在 x 轴上, 短轴长分别为 $2m, 2n$ ($m > n$), 过原点且不与 x 轴重合的直线 l 与 C_1, C_2 的四个交点按纵坐标从大到小依次为 A, B, C, D , 记 $\lambda = \frac{m}{n}$, $\triangle BDM$ 和 $\triangle ABN$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 .
- 当直线 l 与 y 轴重合时, 若 $S_1 = \lambda S_2$, 求 λ 的值;
 - 当 λ 变化时, 是否存在与坐标轴不重合的直线 l , 使得 $S_1 = \lambda S_2$? 并说明理由.



20. 如图, 某地质队自水平地面 A, B, C 三处垂直向地下钻探, 自 A 点向下钻到 A_1 处发现矿藏, 再继续下钻到 A_2 处后下面已无矿, 从而得到在 A 处正下方的矿层厚度为 $A_1A_2 = d_1$, 同样可得在 B, C 处正下方的矿层厚度分别为 $B_1B_2 = d_2, C_1C_2 = d_3$, 且 $d_1 < d_2 < d_3$, 过 AB, AC 的中点 M, N 且与直线 AA_2 平行的平面截多面体 $A_1B_1C_1 - A_2B_2C_2$ 所得的截面 $DEFG$ 为该多面体的一个中截面, 其面积记为 $S_{\text{中}}$.

- 证明: 中截面 $DEFG$ 是梯形;
- 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $BC = a$, BC 边上的高为 h , 面积为 S . 在估测三角形 ABC 区域内正下方的矿藏储量 (即多面体 $A_1B_1C_1 - A_2B_2C_2$ 的体积 V) 时, 可用近似公式 $V_{\text{估}} = S_{\text{中}} \cdot h$ 来估算. 已知 $V = \frac{1}{3}(d_1 + d_2 + d_3)S$, 试判断 $V_{\text{估}}$ 与 V 的大小关系, 并加以证明.

