

2003 年普通高等学校招生考试 (辽宁卷)  
数学试卷

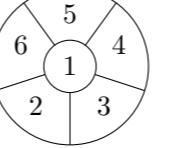
一、选择题

1. 与曲线  $y = \frac{1}{x-1}$  关于原点对称的曲线为 ( )  
 (A)  $y = \frac{1}{1+x}$     (B)  $y = -\frac{1}{1+x}$     (C)  $y = \frac{1}{1-x}$     (D)  $y = -\frac{1}{1-x}$
2. 已知  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x =$  ( )  
 (A)  $\frac{7}{24}$     (B)  $-\frac{7}{24}$     (C)  $\frac{24}{7}$     (D)  $-\frac{24}{7}$
3.  $\frac{1-\sqrt{3}i}{(\sqrt{3}+i)^2} =$  ( )  
 (A)  $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$     (B)  $-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$     (C)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$     (D)  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. 已知四边形  $ABCD$  是菱形, 点  $P$  在对角线  $AC$  上 (不包括端点  $A, C$ ), 则  $\overrightarrow{AP} =$  ( )  
 (A)  $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ ,  $\lambda \in (0, 1)$     (B)  $\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ ,  $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$   
 (C)  $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ ,  $\lambda \in (0, 1)$     (D)  $\lambda(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$ ,  $\lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$ , 若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $(-1, 1)$     (B)  $(-1, +\infty)$   
 (C)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$     (D)  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
6. 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 + a_5 = 4$ ,  $a_n = 33$ , 则  $n$  为 ( )  
 (A) 48    (B) 49    (C) 50    (D) 51
7. 函数  $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x \in (1, +\infty)$  的反函数为 ( )  
 (A)  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$     (B)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$   
 (C)  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$     (D)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$
8. 棱长为  $a$  的正方体中, 连结相邻面的中心, 以这些线段为棱的八面体的体积为 ( )  
 (A)  $\frac{a^3}{3}$     (B)  $\frac{a^3}{4}$     (C)  $\frac{a^3}{6}$     (D)  $\frac{a^3}{12}$
9. 设  $a > 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $P(x_0, f(x_0))$  处切线的倾斜角的取值范围为  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , 则  $P$  到曲线  $y = f(x)$  对称轴距离的取值范围为 ( )  
 (A)  $\left[0, \frac{1}{a}\right]$     (B)  $\left[0, \frac{1}{2a}\right]$     (C)  $\left[0, \left|\frac{b}{2a}\right|\right]$     (D)  $\left[0, \left|\frac{b-1}{2a}\right|\right]$

10. 已知双曲线中心在原点且一个焦点为  $F(\sqrt{7}, 0)$ , 直线  $y = x - 1$  与其相交于  $M, N$  两点,  $MN$  中点的横坐标为  $-\frac{2}{3}$ , 则此双曲线的方程是 ( )  
 (A)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$     (B)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$     (C)  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$     (D)  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$
11. 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  的夹角  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角), 设  $P_4$  的坐标为  $(x_4, 0)$ , 若  $1 < x_4 < 2$ , 则  $\tan \theta$  的取值范围是 ( )  
 (A)  $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$     (B)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$     (C)  $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$     (D)  $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right)$
12. 一个四面体的所有棱长都为  $\sqrt{2}$ , 四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )  
 (A)  $3\pi$     (B)  $4\pi$     (C)  $3\sqrt{3}\pi$     (D)  $6\pi$

二、填空题

13.  $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9$  的展开式中  $x^9$  系数是\_\_\_\_\_.
14. 某公司生产三种型号的轿车, 产量分别为 1200 辆, 6000 辆和 2000 辆. 为检验该公司的产品质量, 现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验, 这三种型号的轿车依次应抽取\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ 辆.
15. 某城市在中心广场建造一个花圃, 花圃分为 6 个部分 (如图). 现要栽种 4 种不同颜色的花, 每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花, 不同的栽种方法有\_\_\_\_\_ 种. (以数字作答)

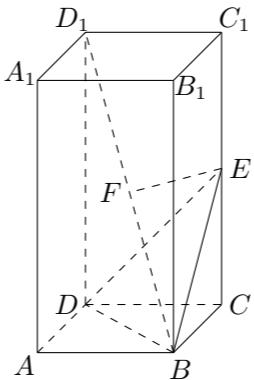


19. 设  $a > 0$ , 求函数  $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x+a)$ ,  $x \in (0, +\infty)$  的单调区间.

16. 对于四面体  $ABCD$ , 给出下列四个命题: ①若  $AB = AC, BD = CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ②若  $AB = CD, AC = BD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ③若  $AB \perp AC, BD \perp CD$ , 则  $BC \perp AD$ ; ④若  $AB \perp CD, AC \perp BD$ , 则  $BC \perp AD$ . 其中真命题的序号是\_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

17. 已知正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB = 1$ ,  $AA_1 = 2$ ,  $E$  为  $CC_1$  中点,  $F$  为  $BD_1$  中点.  
 (1) 证明:  $EF$  为  $BD_1$  与  $CC_1$  的公垂线;  
 (2) 求点  $D_1$  到面  $BDE$  的距离.



20.  $A$ 、 $B$  两个代表队进行乒乓球对抗赛, 每队三名队员,  $A$  队队员是  $A_1, A_2, A_3$ ,  $B$  队队员是  $B_1, B_2, B_3$ , 按以往多次比赛的统计, 对阵队员之间胜负概率如下:

对阵队员	$A$ 队队员胜的概率	$A$ 队队员负的概率
$A_1$ 对 $B_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$A_2$ 对 $B_2$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
$A_3$ 对 $B_3$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场, 每场胜队得 1 分, 负队得 0 分, 设  $A$  队、 $B$  队最后所得总分分别为  $\xi$ 、 $\eta$ .

- (1) 求  $\xi, \eta$  的概率分布;  
(2) 求  $E\xi, E\eta$ .

21. 设  $a_0$  为常数, 且  $a_n = 3^{n-1} - 2a_{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

- (1) 证明对任意  $n \geq 1$ ,  $a_n = \frac{1}{5}[3^n + (-1)^{n-1} \cdot 2^n] + (-1)^n \cdot 2^n a_0$ ;  
(2) 假设对任意  $n \geq 1$  有  $a_n > a_{n-1}$ , 求  $a_0$  的取值范围.

22. 已知常数  $a > 0$ , 向量  $\vec{c} = (0, a)$ ,  $\vec{i} = (1, 0)$ . 经过原点  $O$  以  $\vec{c} + \lambda \vec{i}$  为方向向量的直线与经过定点  $A(0, a)$  以  $\vec{i} - 2\lambda \vec{c}$  为方向向量的直线相交于  $P$ , 其中  $\lambda \in \mathbf{R}$ . 试问: 是否存在两个定点  $E, F$ , 使得  $|PE| + |PF|$  为定值. 若存在, 求出  $E, F$  的坐标; 若不存在, 说明理由.