

2021年普通高等学校招生考试（新高考II） 数学试卷

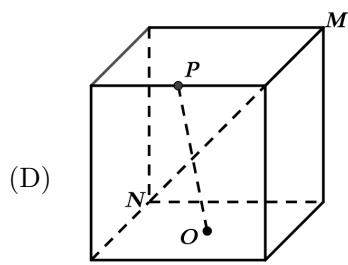
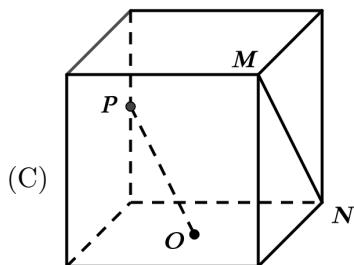
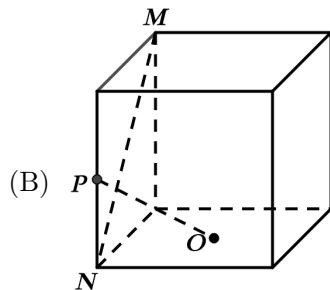
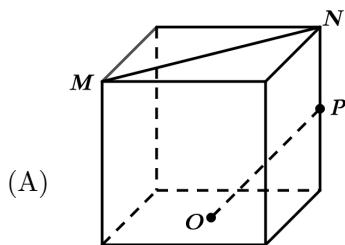
一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 在复平面内，复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap \complement_U B =$ ()
(A) {3} (B) {1, 6} (C) {5, 6} (D) {1, 3}
3. 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $\sqrt{2}$, 则 $p =$ ()
(A) 1 (B) 2 (C) $2\sqrt{2}$ (D) 4
4. 卫星导航系统中，地球静止同步轨道卫星的轨道位于地球赤道所在平面，轨迹高度为 $36000km$ （轨道高度指卫星到地球表面的最短距离），把地球看成一个球心为 O 半径为 $64000km$ 的球，其上点 A 的纬度是指 OA 与赤道所在平面所成角的度数，地球表面能直接观测到的一颗地球静止同步轨道卫星的点的纬度的最大值记为 α ，该卫星信号覆盖的地球表面积 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha)$ ，（单位： km^2 ），则 S 占地球表面积的百分比为 ()
(A) 26% (B) 34% (C) 42% (D) 50%
5. 正四棱台的上、下底面的边长为 2, 4, 侧棱长 2, 则四棱台的体积为 ()
(A) (B) (C) (D)
6. 某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$ 则下列结论中不正确的是 ()
(A) a 越小, 该物理量一次测量结果落在 $(9.9, 10.1)$ 内的概率越大
(B) a 越小, 该物理量一次测量结果大于 10 的概率为 0.5
(C) a 越小, 该物理量一次测量结果大于 10.01 的概率与小于为 9.99 的概率相等
(D) a 越小, 该物理量一次测量结果落在 $(9.9, 10.2)$ 内的概率与落在 $(10, 10.3)$ 内的概率相等
7. 若 $a = \log_5 2, b = \log_8 3, c = \frac{1}{2}$, 则 ()
(A) $c < b < a$ (B) $b < a < c$ (C) $a < c < b$ (D) $a < b < c$
8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且 $f(x+2)$ 为偶函数, $f(2x+1)$ 为奇函数, 则 ()
(A) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ (B) $f(-1) = 0$ (C) $f(2) = 0$ (D) $f(4) = 0$

二、多项选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求的。全选对得5分，选对但不全得2分，有错误答案得0分）

9. 下列统计量中可用于度量样本 x_1, x_2, \dots, x_n 离散程度的有 ()
(A) x_1, x_2, \dots, x_n 的标准差 (B) x_1, x_2, \dots, x_n 中位数 (C) x_1, x_2, \dots, x_n 极差 (D) x_1, x_2, \dots, x_n 平均数

10. 如图,下列各正方体中, O 为下底的中点, M, M' 为顶点, P 为所在棱的中点,则满足 $MN \perp OP$ 的是 ()



11. 已知直线 $l: ax + by - r^2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = r^2$, 点 $A(a, b)$, 则下列说法正确的是 ()

- | | |
|--|--|
| (A) 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切 | (B) 若点 A 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 相离 |
| (C) 若点 A 在圆 C 外, 则直线 l 与圆 C 相离 | (D) 若点 A 在圆 C 上, 则直线 l 与圆 C 相切 |

12. 设正整数 $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 记 $\omega(n) = a_0 + a_1 + \cdots + k$ 则 ()

- | | | | |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| (A) $\omega(2n) = \omega(n)$ | (B) $\omega(2n+3) = \omega(n)+1$ | (C) $\omega(8n+5) = \omega(4n+3)$ | (D) $\omega(2^n - 1) = n$ |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------|

三、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分。把答案填在答题卡上)

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 离心率 $e = 2$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 _____.

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$ _____.

- ① $f(x_1 x_2) = f(x_1)f(x_2)$; ② 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数.

15. 已知向量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直, 且分别交轴于 M, N 两点, 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是 _____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 90 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。把答案填在答题卡上)

17. (本小题满分 10 分)

记 S_n 是公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = S_3, a_2 a_4 = S_4$.

(I) 求数列 a_n 的通项公式 a_n ;

(II) 求使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长为 $a, b, c, b = a + 1, c = a + 2$.

(I) 若 $2 \sin C = 3 \sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

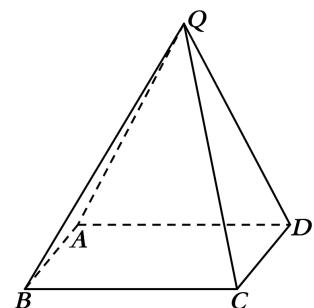
(II) 是否存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形? 若存在, 求 a ; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $Q-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 若 $AD = 2, QD = QA = 5, QC = 3$.

(I) 求证: 平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 右焦点为 $F(2, 0)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设 M, N 是椭圆 C 上的两点, 直线 M 与曲线 $x^2 + y^2 = b^2 (x > 0)$ 相切. 证明: M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

21. (本小题满分 12 分)

一种微生物群体可以经过自身繁殖不断生存下来, 设一个这种微生物为第 0 代, 经过一次繁殖后为第 1 代, 再经过一次繁殖后为第 2 代. 该微生物每代繁殖的个数是相互独立的且有相同的分布列, 设 X 表示 1 个微生物个体繁殖下代的个数, $P(X = i) = p_i (i = 0, 1, 2, 3)$.

(I) 已知 $P_0 = 0.4, P_1 = 0.3, P_2 = 0.2, P_3 = 0.1$, 求 $E(X)$;

(II) 设 p 表示该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率, p 是关于 x 的方程:

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$$

的一个最小正实根, 求证: 当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$, 当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

(III) 根据你的理解说明 (2) 问结论的实际含义.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x - 1)e^x - ax^2 + b$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 从下面两个条件中选一个, 证明: $f(x)$ 有一个零点

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$;

② $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b \leq 2a$.