

数学试卷

一、填空题

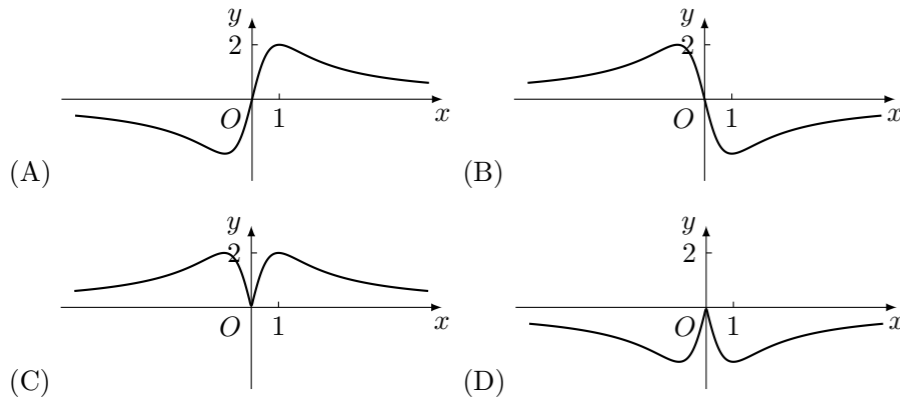
1. 设全集 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()

- (A) $\{-3, 3\}$ (B) $\{0, 2\}$
(C) $\{-1, 1\}$ (D) $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$

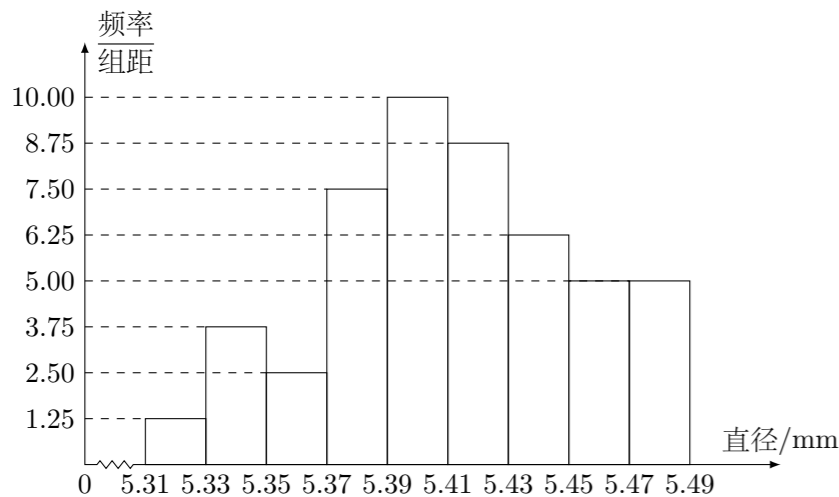
2. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的 ()

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 ()



4. 从一批零件中抽取 80 个, 测量其直径 (单位: mm), 将所得数据分为 9 组: $[5.31, 5.33)$, $[5.33, 5.35)$, \dots , $[5.45, 5.47)$, $[5.47, 5.49]$, 并整理得到如下频率分布直方图, 则在被抽取的零件中, 直径落在区间 $[5.43, 5.47)$ 内的个数为 ()



- (A) 10 (B) 18 (C) 20 (D) 36

5. 若棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为 ()

- (A) 12π (B) 24π (C) 36π (D) 144π

6. 设 $a = 3^{0.7}$, $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$, $c = \log_{0.7} 0.8$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $b < c < a$ (D) $c < a < b$

7. 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点和点 $(0, b)$ 的直线为 l . 若 C 的一条渐近线与 l 平行, 另一条渐近线与 l 垂直, 则双曲线 C 的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (D) $x^2 - y^2 = 1$

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. 给出下列结论:

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;
② $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值;
③ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.
其中所有正确结论的序号是 ()

- (A) ① (B) ①③ (C) ②③ (D) ①②③

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$. 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbf{R}$) 恰有 4 个零点, 则 k 的取值范围是 ()

- (A) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ (B) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2\sqrt{2})$
(C) $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$ (D) $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

二、填空题

10. i 是虚数单位, 复数 $\frac{8-i}{2+i} =$ _____.

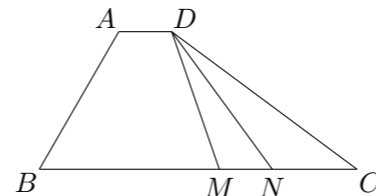
11. 在 $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是_____.

12. 已知直线 $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点. 若 $|AB| = 6$, 则 r 的值为_____.

13. 已知甲、乙两球落入盒子的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$. 假定两球是否落入盒子互不影响, 则甲、乙两球都落入盒子的概率为_____; 甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为_____.

14. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为_____.

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 3$, $BC = 6$, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为, 若 M, N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}| = 1$, 则 $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ 的最小值为_____.



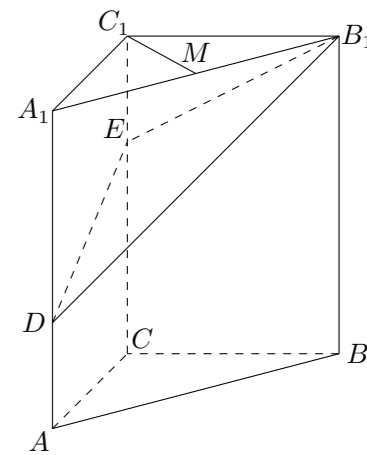
三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a = 2\sqrt{2}$, $b = 5$, $c = \sqrt{13}$.

- (1) 求角 C 的大小;
(2) 求 $\sin A$ 的值;
(3) 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

17. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $CC_1 = 3$, 点 D, E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上, 且 $AD = 1$, $CE = 2$, M 为棱 A_1B_1 的中点.

- (1) 求证: $C_1M \perp B_1D$;
(2) 求二面角 $B - B_1E - D$ 的正弦值;
(3) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.



18. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $|OA| = |OF|$, 其中 O 为原点.
- (1) 求椭圆方程;
- (2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.
19. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, $a_5 = 5(a_4 - a_3)$, $b_5 = 4(b_4 - b_3)$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$);
- (3) 对任意的正整数 n , 设 $c_n = \begin{cases} \frac{(3a_n - 2)b_n}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和.
20. 已知函数 $f(x) = x^3 + k \ln x$ ($k \in \mathbf{R}$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
- (1) 当 $k = 6$ 时,
- ① 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- ② 求函数 $g(x) = f(x) - f'(x) + \frac{9}{x}$ 的单调区间和极值;
- (2) 当 $k \geq -3$ 时, 求证: 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$, 有 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.