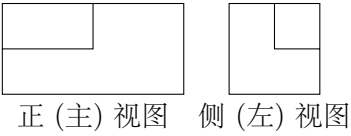
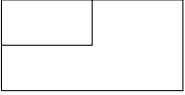


理科数学

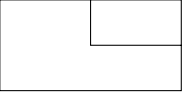
一、选择题

- 集合 $P = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M =$ ()
 (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{0, 1, 2\}$
 (C) $\{x \mid 0 \leq x < 3\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公比 $|q| \neq 1$. 若 $a_m = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$, 则 $m =$ ()
 (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
- 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正 (主) 视图与侧 (左) 视图分别如图所示, 则该几何体的俯视图为 ()


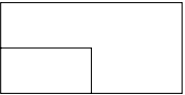
正 (主) 视图
侧 (左) 视图



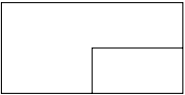
(A)



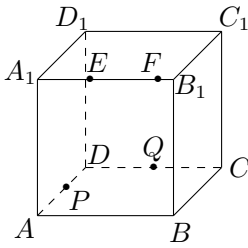
(B)



(C)



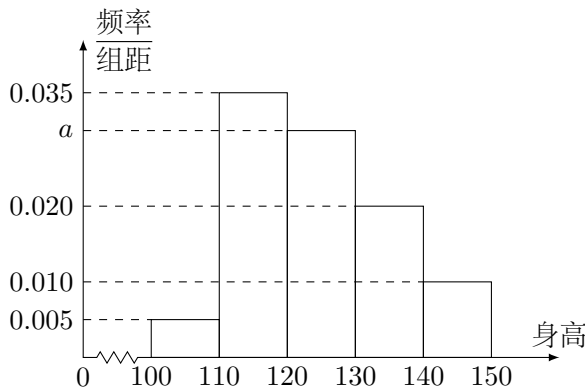
(D)
- 8 名学生和 2 位老师站成一排合影, 2 位老师不相邻的排法种数为 ()
 (A) $A_8^8 A_9^2$ (B) $A_8^8 C_9^2$ (C) $A_8^8 A_7^2$ (D) $A_8^8 C_7^2$
- 极坐标方程 $(\rho - 1)(\theta - \pi) = 0$ ($\rho \geq 0$) 表示的图形是 ()
 (A) 两个圆 (B) 两条直线
 (C) 一个圆和一条射线 (D) 一条直线和一条射线
- \mathbf{a}, \mathbf{b} 为非零向量. “ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ”是“函数 $f(x) = (x\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (x\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 为一次函数”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 设不等式组 $\begin{cases} x + y - 11 \geq 0 \\ 3x - y + 3 \geq 0 \\ 5x - 3y + 9 \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 若指数函数 $y = a^x$ 的图象上存在区域 D 内的点, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $(1, 3]$ (B) $[2, 3]$ (C) $(1, 2]$ (D) $[3, +\infty)$
- 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上, 动点 P, Q 分别在棱 AD, CD 上, 若 $EF = 1$, $A_1E = x$, $DQ = y$, $DP = z$ (x, y, z 大于零), 则四面体 $PEFQ$ 的体积 ()



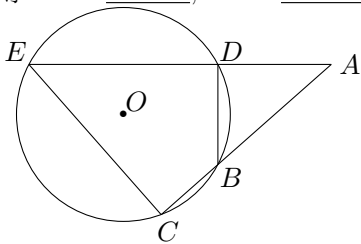
- (A) 与 x, y, z 都有关 (B) 与 x 有关, 与 y, z 无关
 (C) 与 y 有关, 与 x, z 无关 (D) 与 z 有关, 与 x, y 无关

二、填空题

- 在复平面内, 复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 1, c = \sqrt{3}, \angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $a =$ _____.
- 从某小学随机抽取 100 名同学, 将他们的身高 (单位: 厘米) 数据绘制成频率分布直方图 (如图). 由图中数据可知 $a =$ _____. 若要从身高在 $[120, 130), [130, 140), [140, 150]$ 三组内的学生中, 用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动, 则从身高在 $[140, 150]$ 内的学生中选取的人数应为_____.

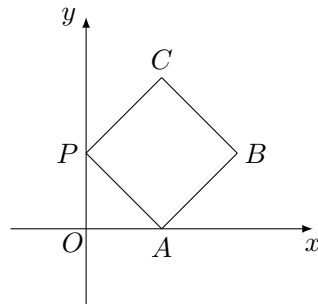


- 如图, $\odot O$ 的弦 ED, CB 的延长线交于点 A . 若 $BD \perp AE$, $AB = 4, BC = 2, AD = 3$, 则 $DE =$ _____; $CE =$ _____.



- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为_____; 渐近线方程为_____.
- 如图放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动. 设顶点 $P(x, y)$ 的轨迹方程是 $y = f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为; $y = f(x)$ 在其两个相邻零点间的图象与 x 轴所围区域的面积为_____.
 说明: “正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动”包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B

落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.

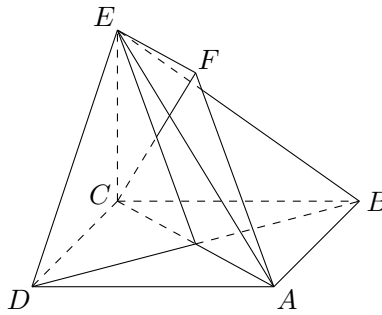


三、解答题

- 已知函数 $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x$.
 (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;
 (2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

- 如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $CE \perp AC$, $EF \parallel AC$, $AB = \sqrt{2}, CE = EF = 1$.

- 求证: $AF \parallel$ 平面 BDE ;
- 求证: $CF \perp$ 平面 BDE ;
- 求二面角 $A - BE - D$ 的大小.



17. 某同学参加 3 门课程的考试. 假设该同学第一门课程取得优秀成绩的概率为 $\frac{4}{5}$, 第二、第三门课程取得优秀成绩的概率分别为 p, q ($p > q$), 且不同课程是否取得优秀成绩相互独立. 记 ξ 为该生取得优秀成绩的课程数, 其分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{6}{125}$	a	b	$\frac{24}{125}$

- (1) 求该生至少有 1 门课程取得优秀成绩的概率;
- (2) 求 p, q 的值;
- (3) 求数学期望 $E\xi$.

18. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{k}{2}x^2$ ($k \geq 0$).

- (1) 当 $k = 2$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 B 与点 $A(-1, 1)$ 关于原点 O 对称, P 是动点, 且直线 AP 与 BP 的斜率之积等于 $-\frac{1}{3}$.

- (1) 求动点 P 的轨迹方程;
- (2) 设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x = 3$ 交于点 M, N , 问: 是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PMN$ 的面积相等? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. 已知集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$), 对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.

- (1) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;
- (2) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, $d(A, B), d(A, C), d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数;
- (3) 设 $P \subseteq S_n$, P 中有 m ($m \geq 2$) 个元素, 记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\bar{d}(P)$. 证明: $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$.