

## 理科数学

## 一、选择题

1. 设集合  $A = \{x | 1 < x < 4\}$ , 集合  $B = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$  ( )

(A)  $(1, 4)$  (B)  $(3, 4)$  (C)  $(1, 3)$  (D)  $(1, 2) \cup (3, 4)$

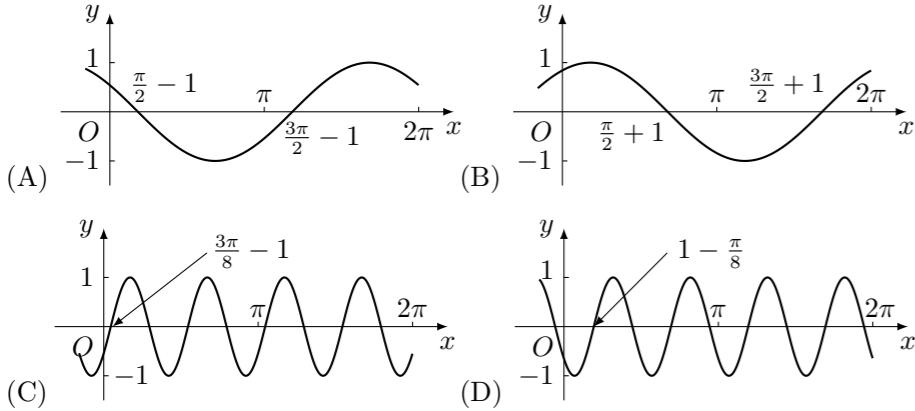
2. 已知  $i$  是虚数单位, 则  $\frac{3+i}{1-i} =$  ( )

(A)  $1-2i$  (B)  $2-i$  (C)  $2+i$  (D)  $1+2i$

3. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 则“ $a = 1$ ”是“直线  $l_1 : ax + 2y - 1 = 0$  与直线  $l_2 : x + (a+1)y + 4 = 0$  平行”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 把函数  $y = \cos 2x + 1$  的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 然后向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度, 得到的图象是 ( )



5. 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是两个非零向量. ( )

(A) 若  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$   
(B) 若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$   
(C) 若  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ , 则存在实数  $\lambda$ , 使得  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$   
(D) 若存在实数  $\lambda$ , 使得  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ , 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$

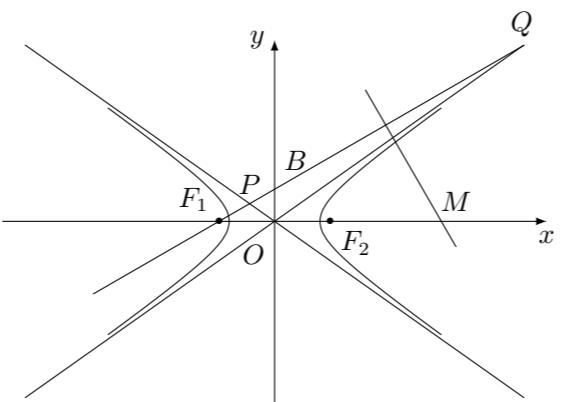
6. 若从 1, 2, 3, …, 9 这 9 个整数中同时取 4 个不同的数, 其和为偶数, 则不同的取法共有 ( )

(A) 60 种 (B) 63 种 (C) 65 种 (D) 66 种

7. 设  $S_n$  是公差为  $d$  ( $d \neq 0$ ) 的无穷等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则下列命题错误的是 ( )

(A) 若  $d < 0$ , 则数列  $\{S_n\}$  有最大项  
(B) 若数列  $\{S_n\}$  有最大项, 则  $d < 0$   
(C) 若数列  $\{S_n\}$  是递增数列, 则对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 均有  $S_n > 0$   
(D) 若对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 均有  $S_n > 0$ , 则数列  $\{S_n\}$  是递增数列

8. 如图,  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ) 的左、右焦点,  $B$  是虚轴的端点, 直线  $F_1B$  与  $C$  的两条渐近线分别交于  $P, Q$  两点, 线段  $PQ$  的垂直平分线与  $x$  轴交于点  $M$ . 若  $|MF_2| = |F_1F_2|$ , 则  $C$  的离心率是 ( )



(A)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (C)  $\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{3}$

9. 设  $a > 0, b > 0$ . ( )

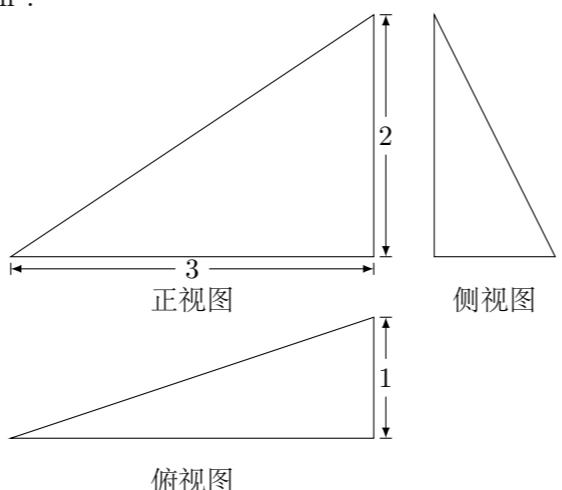
(A) 若  $2^a + 2a = 2^b + 3b$ , 则  $a > b$  (B) 若  $2^a + 2a = 2^b + 3b$ , 则  $a < b$   
(C) 若  $2^a - 2a = 2^b - 3b$ , 则  $a > b$  (D) 若  $2^a - 2a = 2^b - 3b$ , 则  $a < b$

10. 已知矩形  $ABCD$ ,  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ , 将  $\triangle ABD$  沿矩形的对角线  $BD$  所在的直线进行翻折, 在翻折过程中 ( )

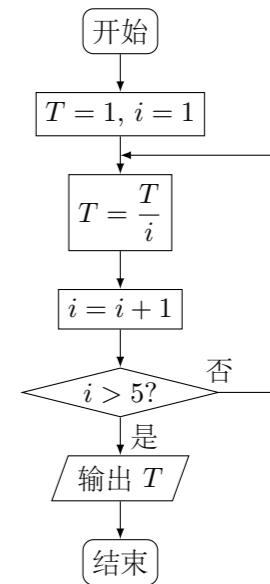
(A) 存在某个位置, 使得直线  $AC$  与直线  $BD$  垂直  
(B) 存在某个位置, 使得直线  $AB$  与直线  $CD$  垂直  
(C) 存在某个位置, 使得直线  $AD$  与直线  $BC$  垂直  
(D) 对任意位置, 三对直线“ $AC$  与  $BD$ ”, “ $AB$  与  $CD$ ”, “ $AD$  与  $BC$ ”均不垂直

## 二、填空题

11. 已知某三棱锥的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该三棱锥的体积等于 \_\_\_\_\_ cm<sup>3</sup>.



12. 若某程序框图如图所示, 则该程序运行后输出的值是 \_\_\_\_\_.



13. 设公比为  $q$  ( $q > 0$ ) 的等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 若  $S_2 = 3a_2 + 2$ ,  $S_4 = 3a_4 + 2$ , 则  $q =$  \_\_\_\_\_.

14. 若将函数  $f(x) = x^5$  表示为  $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_5(1+x)^5$ , 其中  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_5$  为实数, 则  $a_3 =$  \_\_\_\_\_.

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $M$  是  $BC$  的中点,  $AM = 3, BC = 10$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$  \_\_\_\_\_.

16. 定义: 曲线  $C$  上的点到直线  $l$  的距离的最小值称为曲线  $C$  到直线  $l$  的距离. 已知曲线  $C_1 : y = x^2 + a$  到直线  $l : y = x$  的距离等于曲线  $C_2 : x^2 + (y+4)^2 = 2$  到直线  $l : y = x$  的距离, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

17. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $x > 0$  时均有  $[(a-1)x-1](x^2-ax-1) \geq 0$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

18. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $\cos A = \frac{2}{3}$ ,  $\sin B = \sqrt{5} \cos C$ .

(1) 求  $\tan C$  的值;  
(2) 若  $a = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. 已知箱中装有 4 个白球和 5 个黑球, 且规定: 取出一个白球得 2 分, 取出一个黑球得 1 分. 现从该箱中任取 (无放回, 且每球取到的机会均等) 3 个球, 记随机变量  $X$  为取出此 3 球所得分数之和.

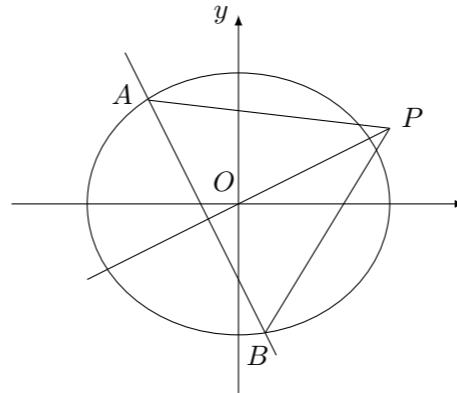
- (1) 求  $X$  的分布列;
- (2) 求  $X$  的数学期望  $E(X)$ .

21. 如图, 椭圆  $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 其左焦点到点  $P(2, 1)$  的距离为  $\sqrt{10}$ , 不过原点  $O$  的直线  $l$  与  $C$  相交于  $A, B$  两点, 且线段  $AB$  被直线  $OP$  平分.

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 求  $\triangle ABP$  面积取最大值时直线  $l$  的方程.

22. 已知  $a > 0, b \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = 4ax^3 - 2bx - a + b$ .

- (1) 证明: 当  $0 \leq x \leq 1$  时,
  - ① 函数  $f(x)$  的最大值为  $|2a - b| + a$ ;
  - ②  $f(x) + |2a - b| + a \geq 0$ ;
- (2) 若  $-1 \leq f(x) \leq 1$  对  $x \in [0, 1]$  恒成立, 求  $a + b$  的取值范围.



20. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面是边长为  $2\sqrt{3}$  的菱形,  $\angle BAD = 120^\circ$ , 且  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA = 2\sqrt{6}$ ,  $M, N$  分别为  $PB, PD$  的中点.

- (1) 证明:  $MN \parallel$  平面  $ABCD$ ;
- (2) 过点  $A$  作  $AQ \perp PC$ , 垂足为点  $Q$ , 求二面角  $A-MN-Q$  的平面角的余弦值.

