

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()
(A) $\{2\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{3\}$ (D) $\{1, 3\}$
2. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 则 $f(-a) =$ ()
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2
3. 已知 \boldsymbol{a} 、 \boldsymbol{b} 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}| =$ ()
(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) 4
4. 函数 $y = \sqrt{x-1} + 1$ ($x \geq 1$) 的反函数是 ()
(A) $y = x^2 - 2x + 2$ ($x < 1$) (B) $y = x^2 - 2x + 2$ ($x \geq 1$)
(C) $y = x^2 - 2x$ ($x < 1$) (D) $y = x^2 - 2x$ ($x \geq 1$)
5. $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是 ()
(A) 14 (B) -14 (C) 42 (D) -42
6. 设 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()
(A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{7}{5}$ (D) $-\frac{1}{5}$
7. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点为 F_1 、 F_2 , 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交, 一个交点为 P , 则 $|\overrightarrow{PF_2}| =$ ()
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) 4
8. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q , 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是 ()
(A) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $[-1, 1]$ (D) $[-4, 4]$
9. 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象
(A) 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (B) 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
10. 已知正四面体 $ABCD$ 的表面积为 S , 其四个面的中心分别为 E 、 F 、 G 、 H . 设四面体 $EFGH$ 的表面积为 T , 则 $\frac{T}{S}$ 等于 ()
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$
11. 从数字 1, 2, \dots , 9, 中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率为 ()
(A) $\frac{5}{9}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{11}{21}$ (D) $\frac{10}{21}$

12. $a^2 + b^2 = 1$, $b^2 + c^2 = 2$, $c^2 + a^2 = 2$, $ab + bc + ca$ 的最小值为 ()
(A) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ (C) $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ (D) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

二、填空题

13. 不等式 $x + x^3 \geq 0$ 的解集是_____.
14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 3$, $a_{10} = 384$, 则该数列的通项 $a_n =$ _____.
15. 由动点 P 向圆 $x^2 + y^2 = 1$ 引两条切线 PA 、 PB , 切点分别为 A 、 B , $\angle APB = 60^\circ$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.
16. 已知 a 、 b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a 、 b 在 α 上的射影有可能是:
① 两条平行直线;
② 两条互相垂直的直线;
③ 同一条直线;
④ 一条直线及其外一点.
在上面结论中, 正确结论的编号是_____. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题

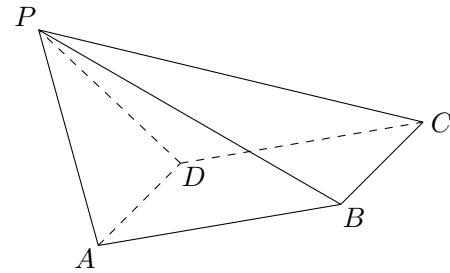
17. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n . 已知 $a_{10} = 30$, $a_{20} = 50$.
(1) 求通项 a_n ;
(2) 若 $S_n = 242$, 求 n .

18. 求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

19. 已知 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 求 a 的取值范围.

20. 从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为 $\frac{4}{5}$, 每位男同学能通过测验的概率均为 $\frac{3}{5}$. 试求:
- (1) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;
 - (2) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120° .
- (1) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;
 - (2) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



22. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ ($a > 0$) 与直线 $l: x + y = 1$ 相交于两个不同的点 A 、 B .
- (1) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;
 - (2) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P , 且 $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.