

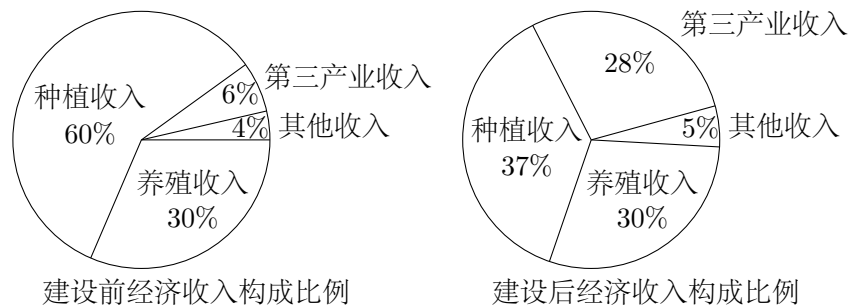
理科数学

一、选择题

1. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$ ()
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}} A =$
 (A) $\{x | -1 < x < 2\}$ (B) $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
 (C) $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$ (D) $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



则下面结论中不正确的是 ()

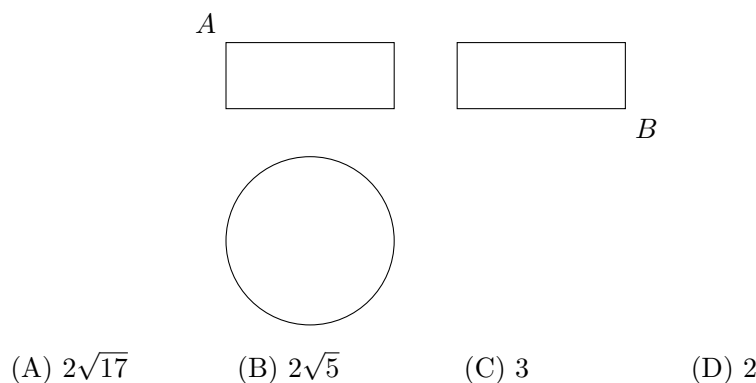
- (A) 新农村建设后, 种植收入减少
 (B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上
 (C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍
 (D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3 = S_2 + S_4$, $a_1 = 2$, 则 $a_5 =$ ()
 (A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12

5. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 ()
 (A) $y = -2x$ (B) $y = -x$ (C) $y = 2x$ (D) $y = x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB} =$ ()
 (A) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (B) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
 (C) $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (D) $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

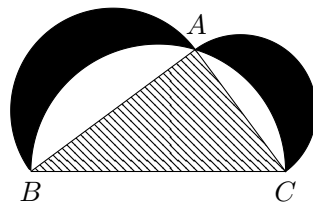
7. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ()



- (A) $2\sqrt{17}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 2
8. 设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2, 0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} =$ ()
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $[-1, 0)$ (B) $[0, +\infty)$ (C) $[-1, +\infty)$ (D) $[1, +\infty)$

10. 如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC , 直角边 AB, AC . $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1, p_2, p_3 , 则 ()



- (A) $p_1 = p_2$ (B) $p_1 = p_3$ (C) $p_2 = p_3$ (D) $p_1 = p_2 + p_3$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{3} - y^2 = 1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N . 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN| =$ ()
 (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $2\sqrt{3}$ (D) 4

12. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 ()
 (A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y - 2 \leq 0 \\ x - y + 1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 2a_n + 1$, 则 $S_6 =$ _____.

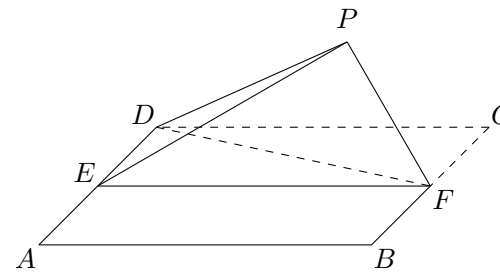
15. 从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有_____种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.

三、解答题

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 2$, $BD = 5$.
 (1) 求 $\cos \angle ADB$;
 (2) 若 $DC = 2\sqrt{2}$, 求 BC .

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕, 把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF \perp BF$.
 (1) 证明: 平面 $PEF \perp$ 平面 $ABFD$;
 (2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2, 0)$.
- (1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
- (2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA = \angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p ($0 < p < 1$), 且各件产品是否为不合格品相互独立.
- (1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 ;
- (2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.
- ① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X , 求 EX ;
- ② 以检验费用与赔偿费用 and 的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0$.
- (1) 求 C_2 的直角坐标方程;
- (2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x) = |x + 1| - |ax - 1|$.
- (1) 当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;
- (2) 若 $x \in (0, 1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围.