

文科数学

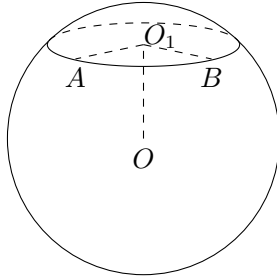
一、选择题

1. 设不等式 $x^2 - x \leq 0$ 的解集为 M , 函数 $f(x) = \ln(1 - |x|)$ 的定义域为 N , 则 $M \cap N$ 为 ()
(A) $[0, 1)$ (B) $(0, 1)$ (C) $[0, 1]$ (D) $(-1, 0]$
2. 若 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}$ 的值为 ()
(A) 0 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{4}$
3. 函数 $f(x) = \sqrt{2x - 4} (x \geq 4)$ 的反函数为 ()
(A) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 (x \geq 0)$ (B) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 (x \geq 2)$
(C) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 (x \geq 0)$ (D) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2 (x \geq 2)$
4. 过原点且倾斜角为 60° 的直线被圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 所截得的弦长为 ()
(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{6}$ (D) $2\sqrt{3}$
5. 某单位共有老、中、青职工 430 人, 其中青年职工 160 人, 中年职工人数是老年职工人数的 2 倍. 为了解职工身体状况, 现采用分层抽样方法进行调査, 在抽取的样本中有青年职工 32 人, 则该样本中的老年职工人数为 ()
(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36
6. 若 $(1 - 2x)^{2009} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2009}x^{2009} (x \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{2009}}{2^{2009}}$ 的值为 ()
(A) 2 (B) 0 (C) -1 (D) -2
7. “ $m > n > 0$ ”是“方程 $mx^2 + ny^2 = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的 ()
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
8. 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM = 1$, 点 P 在 AM 上且满足 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 等于 ()
(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{4}{9}$
9. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这七个数字中任取两个奇数和两个偶数, 组成没有重复数字的四位数, 其中奇数的个数为 ()
(A) 432 (B) 288 (C) 216 (D) 108
10. 定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. 则 ()
(A) $f(3) < f(-2) < f(1)$ (B) $f(1) < f(-2) < f(3)$
(C) $f(-2) < f(1) < f(3)$ (D) $f(3) < f(1) < f(-2)$

11. 若正方体的棱长为 $\sqrt{2}$, 则以该正方体各个面的中心为顶点的凸多面体的体积为 ()
(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$
12. 设曲线 $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点的横坐标为 x_n , 则 $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ 的值为 ()
(A) $\frac{1}{n}$ (B) $\frac{1}{n+1}$ (C) $\frac{n}{n+1}$ (D) 1

二、填空题

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_6 = S_3 = 12$, 则 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n =$ _____.
14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \geq -1 \\ 2x - y \leq 2 \end{cases}$, 目标函数 $z = x + 2y$ 的最小值是_____, 最大值是_____.
15. 如图球 O 的半径为 2, 圆 O_1 是一小圆, $O_1O = \sqrt{2}$, A, B 是圆 O_1 上两点. 若 A, B 两点间的球面距离为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle AO_1B =$ _____.



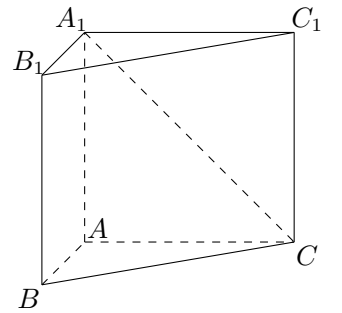
16. 某班有 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有 6 人, 同时参加物理和化学小组的有 4 人, 则同时参加数学和化学小组的有_____人.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的周期为 π , 且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的最值.

18. 据统计, 某食品企业一个月内被消费者投诉的次数为 0, 1, 2 的概率分别为 0.4, 0.5, 0.1.
(1) 求该企业一个月内共被消费者投诉不超过 1 次的概率;
(2) 假设一月份与二月份被消费者投诉的次数互不影响, 求该企业在这两个月内共被消费者投诉 2 次的概率.

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 1, AC = AA_1 = \sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$.
(1) 证明: $AB \perp A_1C$;
(2) 求二面角 $A - A_1C - B$ 的大小.



20. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax - 1$, $a \neq 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图象有三个不同的交点, 求 m 的取值范围.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$), 离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 顶点到渐近线的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 如图, P 是双曲线 C 上一点, A, B 两点在双曲线 C 的两条渐近线上, 且分别位于第一、二象限, 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{PB}$, $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, 2\right]$, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围.

