

## 文科数学

## 一、选择题

1.  $\sin 330^\circ$  等于 ( )

- (A)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       (B)  $-\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$ , 则集合  $C_U(A \cap B) =$  ( )

- (A)  $\{3\}$       (B)  $\{4, 5\}$       (C)  $\{3, 4, 5\}$       (D)  $\{1, 2, 4, 5\}$

3. 某林场有树苗 30000 棵, 其中松树苗 4000 棵. 为调查树苗的生长情况, 采用分层抽样的方法抽取一个容量为 150 的样本, 则样本中松树苗的数量为 ( )

- (A) 30      (B) 25      (C) 20      (D) 15

4. 已知  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_1 + a_2 = 4$ ,  $a_7 + a_8 = 28$ , 则该数列前 10 项和  $S_{10}$  等于 ( )

- (A) 64      (B) 100      (C) 110      (D) 120

5. 直线  $\sqrt{3}x - y + m = 0$  与圆  $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$  相切, 则实数  $m$  等于 ( )  
(A)  $-3\sqrt{3}$  或  $\sqrt{3}$       (B)  $-3\sqrt{3}$  或  $3\sqrt{3}$       (C)  $\sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3}$       (D)  $-\sqrt{3}$  或  $3\sqrt{3}$ 6. “ $a = \frac{1}{8}$ ”是“对任意的正数  $x$ ,  $2x + \frac{a}{x} \geqslant 1$ ”的 ( )

- (A) 充分不必要条件      (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件      (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知函数  $f(x) = 2^{x+3}$ ,  $f^{-1}(x)$  是  $f(x)$  的反函数, 若  $mn = 16$  ( $m, n \in \mathbf{R}^+$ ), 则  $f^{-1}(m) + f^{-1}(n)$  的值为 ( )

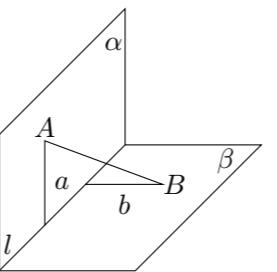
- (A) 10      (B) 4      (C) 1      (D) -2

8. 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的各顶点都在半径为 1 的球面上, 其中  $AB : AD : AA_1 = 2 : 1 : \sqrt{3}$ , 则两  $A, B$  点的球面距离为 ( )

- (A)  $\frac{\pi}{4}$       (B)  $\frac{\pi}{3}$       (C)  $\frac{\pi}{2}$       (D)  $\frac{2\pi}{3}$

9. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别是  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  作倾斜角为  $30^\circ$  的直线交双曲线右支于  $M$  点. 若  $MF_2$  垂直于  $x$  轴, 则双曲线的离心率为 ( )

- (A)  $\sqrt{6}$       (B)  $\sqrt{3}$       (C)  $\sqrt{2}$       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 如图,  $\alpha \perp \beta$ ,  $\alpha \cap \beta = l$ ,  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ,  $A, B$  到  $l$  的距离分别是  $a$  和  $b$ ,  $AB$  与  $\alpha, \beta$  所成的角分别是  $\theta$  和  $\varphi$ ,  $AB$  在  $\alpha, \beta$  内的射影分别是  $m$  和  $n$ , 若  $a > b$ , 则 ( )

18. 一个口袋中装有大小相同的 2 个红球, 3 个黑球和 4 个白球, 从口袋中一次摸出一个球, 摸出的球不再放回.  
(1) 连续摸球 2 次, 求第一次摸出黑球, 第二次摸出白球的概率;  
(2) 如果摸出红球, 则停止摸球, 求摸球次数不超过 3 次的概率.

- (A)  $\theta > \varphi, m < n$   
(B)  $\theta > \varphi, m > n$   
(C)  $\theta < \varphi, m < n$   
(D)  $\theta < \varphi, m > n$

11. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ),  $f(1) = 2$ , 则  $f(-2)$  等于 ( )  
(A) 2      (B) 3      (C) 6      (D) 9

12. 为提高信息在传输中的抗干扰能力, 通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息. 设定原信息为  $a_0a_1a_2$ ,  $a_i \in \{0, 1\}$  ( $i = 0, 1, 2$ ), 传输信息为  $h_0a_0a_1a_2h_1$ , 其中  $h_0 = a_0 \oplus a_1$ ,  $h_1 = h_0 \oplus a_2$ ,  $\oplus$  运算规则为:  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1$ ,  $1 \oplus 0 = 1$ ,  $1 \oplus 1 = 0$ . 例如原信息为 111, 则传输信息为 01111. 传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错, 则下列接收信息一定有误的是 ( )

- (A) 11010      (B) 01100      (C) 10111      (D) 00011

## 二、填空题

13.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $c = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{6}$ ,  $B = 120^\circ$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.  
\_\_\_\_\_.

14.  $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^7$  的展开式中  $\frac{1}{x^2}$  的系数为 \_\_\_\_\_. (用数字作答)

15. 关于平面向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , 有下列三个命题:

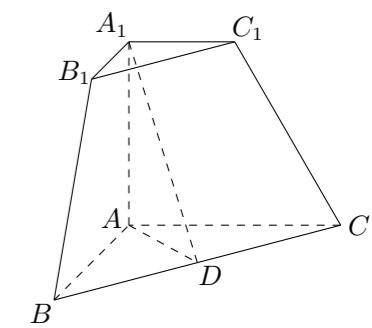
- ① 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ , 则  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ ;  
② 若  $\mathbf{a} = (1, k)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, 6)$ ,  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 则  $k = -3$ ;  
③ 非零向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ , 则  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  的夹角为  $60^\circ$ .  
其中真命题的序号为 \_\_\_\_\_. (写出所有真命题的序号)

16. 某地奥运火炬接力传递路线共分 6 段, 传递活动分别由 6 名火炬手完成. 如果第一棒火炬手只能从甲、乙、丙三人中产生, 最后一棒火炬手只能从甲、乙两人中产生, 则不同的传递方案共有 \_\_\_\_\_. 种. (用数字作答)

## 三、解答题

17. 已知函数  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2}$ .

- (1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期及最值;  
(2) 令  $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 判断函数  $g(x)$  的奇偶性, 并说明理由.



- (A)  $\sqrt{6}$       (B)  $\sqrt{3}$       (C)  $\sqrt{2}$       (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. 已知数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- 证明: 数列  $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$  是等比数列;
  - 数列  $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .
21. 已知抛物线  $C: y = 2x^2$ , 直线  $y = kx + 2$  交  $C$  于  $A, B$  两点,  $M$  是线段  $AB$  的中点, 过  $M$  作  $x$  轴的垂线交  $C$  于点  $N$ .
- 证明: 抛物线  $C$  在点  $N$  处的切线与  $AB$  平行;
  - 是否存在实数  $k$  使  $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 0$ , 若存在, 求  $k$  的值; 若不存在, 说明理由.
22. 设函数  $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$ ,  $g(x) = ax^2 - 2x + 1$ , 其中实数  $a \neq 0$ .
- 若  $a > 0$ , 求函数  $f(x)$  的单调区间;
  - 当函数  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  的图象只有一个公共点且  $g(x)$  存在最小值时, 记  $g(x)$  的最小值为  $h(a)$ , 求  $h(a)$  的值域;
  - 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在区间  $(a, a+2)$  内均为增函数, 求  $a$  的取值范围.