

文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, 集合 $Q = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()

(A) {2} (B) {3} (C) {-2, 3} (D) {-3, 2}

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的值域是 ()

(A) (0, 1) (B) (0, 1] (C) [0, 1) (D) [0, 1]

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_8 = 8$, 则该数列前 9 项和 S_9 等于 ()

(A) 18 (B) 27 (C) 36 (D) 45

4. 设函数 $f(x) = \log_a(x+b)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过点 $(0, 0)$, 其反函数的图象过点 $(1, 2)$, 则 $a+b$ 等于 ()

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

5. 设直线过点 $(0, a)$, 其斜率为 1, 且与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 则 a 的值为 ()

(A) $\pm\sqrt{2}$ (B) ± 2 (C) $\pm 2\sqrt{2}$ (D) ± 4

6. “ α, β, γ 成等差数列”是“等式 $\sin(\alpha + \gamma) = \sin 2\beta$ 成立”的 ()

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 设 x, y 为正数, 则 $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right)$ 的最小值为 ()

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15

8. 已知非零向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 且 $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 为 ()

(A) 三边均不相等的三角形 (B) 直角三角形
(C) 等腰非等边三角形 (D) 等边三角形

9. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2ax + 4$ ($a > 0$). 若 $x_1 < x_2$, $x_1 + x_2 = 0$, 则 ()

(A) $f(x_1) < f(x_2)$ (B) $f(x_1) = f(x_2)$
(C) $f(x_1) > f(x_2)$ (D) $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小不能确定

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2} = 1$ ($a > \sqrt{2}$) 的两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则双曲线的离心率为 ()

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11. 已知平面 α 外不共线的三点 A, B, C 到 α 的距离都相等, 则正确的结论是 ()

(A) 平面 ABC 必平行于 α
(B) 平面 ABC 必与 α 相交
(C) 平面 ABC 必不垂直于 α
(D) 存在 $\triangle ABC$ 的一条中位线平行于 α 或在 α 内

18. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$). (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求使函数 $f(x)$ 取得最大值的 x 的集合.

二、填空题

13. $\cos 43^\circ \cos 77^\circ + \sin 43^\circ \cos 167^\circ$ 的值为_____.

14. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项为_____. (用数字作答)

15. 某校从 8 名教师中选派 4 名教师同时去 4 个边远地区支教 (每地 1 人), 其中甲和乙不同去, 则不同的选派方案共有_____种.

16. 水平桌面 α 上放有 4 个半径均为 $2R$ 的球, 且相邻的球都相切 (球心的连线构成正方形). 在这 4 个球的上面放 1 个半径为 R 的小球, 它和下面的 4 个球恰好都相切, 则小球的球心到水平桌面 α 的距离是_____.

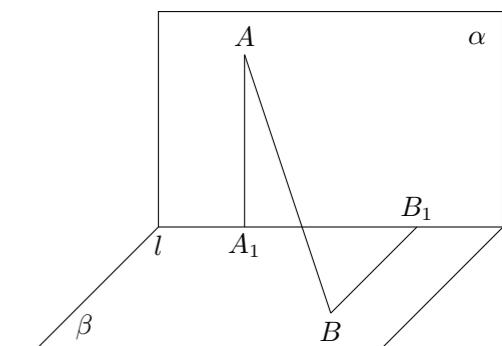
三、解答题

17. 甲、乙、丙 3 人投篮, 投进的概率分别是 $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$. 现 3 人各投篮 1 次, 求:

(1) 3 人都投进的概率;
(2) 3 人中恰有 2 人投进的概率.

19. 如图, $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, A \in \alpha, B \in \beta$, 点 A 在直线 l 上的射影为 A_1 , 点 B 在 l 上的射影为 B_1 . 已知 $AB = 2, AA_1 = 1, BB_1 = \sqrt{2}$. 求:

(1) 直线 AB 分别与平面 α, β 所成角的大小;
(2) 二面角 $A_1 - AB - B_1$ 的大小.



20. 已知正项数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 S_n 满足 $10S_n = a_n^2 + 5a_n + 6$, 且 a_1, a_3, a_{15} 成等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .
21. 如图, 三定点 $A(2, 1)$, $B(0, -1)$, $C(-2, 1)$, 三动点 D, E, M 满足 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DE}$, $t \in [0, 1]$.
- 求动直线 DE 斜率的变化范围;
 - 求动点 M 的轨迹方程.
22. 设函数 $f(x) = kx^3 - 3x^2 + 1$ ($k \geq 0$).
- 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 - 若函数 $f(x)$ 的极小值大于 0, 求 k 的取值范围.

