

2015 年普通高等学校招生考试 (全国卷 II)

理科数学

一、选择题

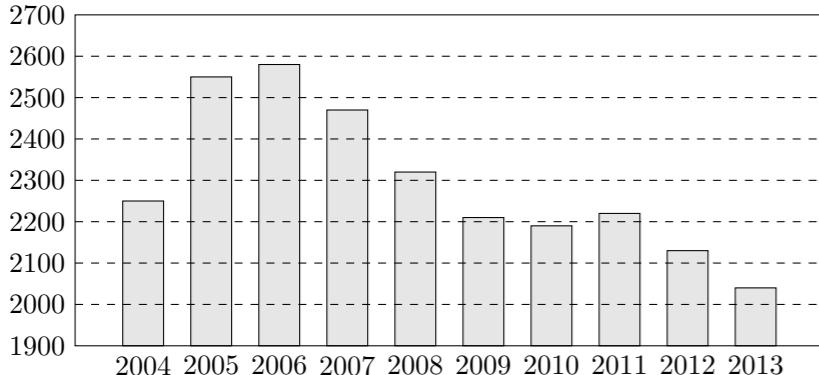
1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x+2) < 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

(A) $\{-1, 0\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$

2. 若 a 为实数, 且 $(2+ai)(a-2i) = -4i$, 则 $a =$ ()

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

3. 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ()



- (A) 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
 (B) 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
 (C) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
 (D) 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

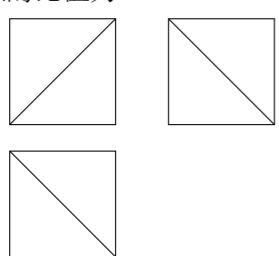
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 =$ ()

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$ 则 $f(-2) + f(\log_2 12) =$ ()

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

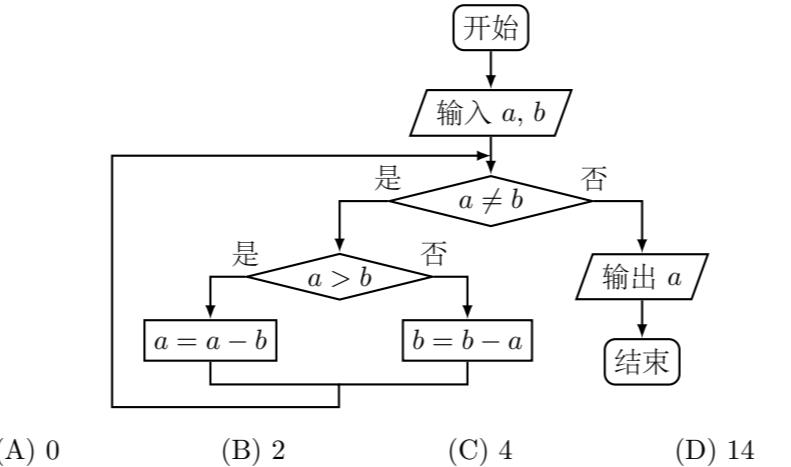
6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 ()



(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{5}$

7. 过三点 $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, $C(1, -7)$ 的圆交 y 轴于 M , N 两点, 则 $|MN| =$ ()
 (A) $2\sqrt{6}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{6}$ (D) 10

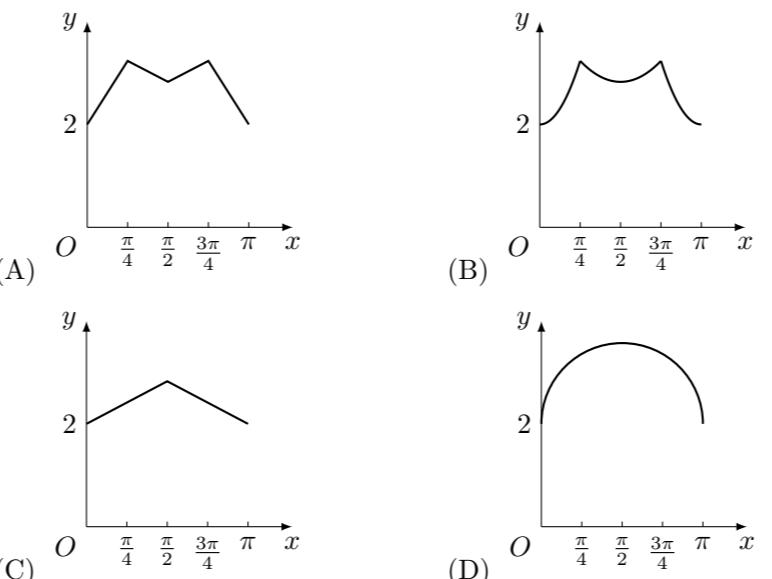
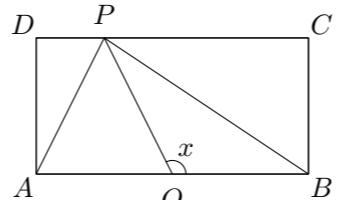
8. 下边程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 $a =$ ()



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 14

9. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()
 (A) 36π (B) 64π (C) 144π (D) 256π

10. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB = 2$, $BC = 1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP = x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象大致为 ()



11. 已知 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 且顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

(A) $\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{2}$

12. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ (B) $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 (C) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ (D) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

二、填空题

13. 设向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不平行, 向量 $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 平行, 则实数 $\lambda =$ _____.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为 _____.

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a =$ _____.

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n =$ _____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin B}{\sin C}$;

(2) 若 $AD = 1$, $DC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

18. 某公司为了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区: 62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区: 73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

- (1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度 (不要求计算出具体值, 给出结论即可);

A 地区		B 地区
4		
5		
6		
7		
8		
9		

(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分为三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C : “A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果相互独立. 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率, 求 C 的概率.

20. 已知椭圆 $C: 9x^2 + y^2 = m^2$ ($m > 0$), 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

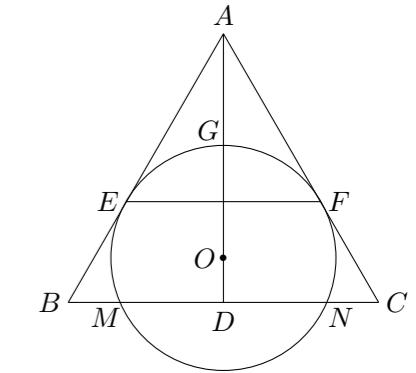
(1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(2) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G , 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.

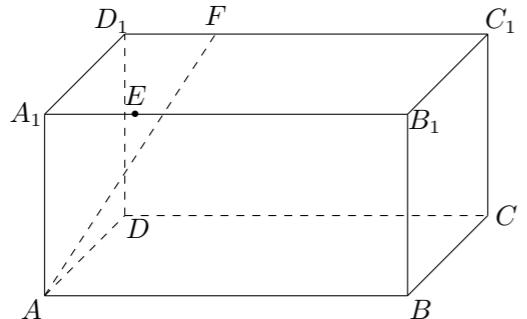
(1) 证明: $EF \parallel BC$;

(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.



19. 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 16$, $BC = 10$, $AA_1 = 8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E = D_1F = 4$. 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.

- (1) 在图中画出这个正方形 (不必说明画法和理由);
(2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值.



21. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1 : \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$. 在以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2 : \rho = 2 \sin \theta$, $C_3 : \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$.

- (1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;
(2) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a + b = c + d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a - b| < |c - d|$ 的充要条件.