2006 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 则复数 $(a+bi)(c+di)$ 为实数的充要条件是　（　）
(A) $ad-bc=0$　(B) $ac-bd=0$　(C) $ac+bd=0$　(D) $ad+bc=0$

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=2$, $a_2+a_3=13$, 则 $a_4+a_5+a_6$ 等于（　）
(A) 40　(B) 42　(C) 43　(D) 45

3. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 等于　（　）
(A) $\dfrac{1}{7}$　(B) 7　(C) $-\dfrac{1}{7}$　(D) -7

4. 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 且 $A=\{x\,|\,|x-1|>2\}$, $B=\{x\,|\,x^2-6x+8<0\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B$ 等于　（　）
(A) $[-1,4)$　(B) $(2,3)$　(C) $(2,3]$　(D) $(-1,4)$

5. 已知正方体外接球的体积是 $\dfrac{32}{3}\pi$, 那么正方体的棱长等于　（　）
(A) $2\sqrt{2}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(D) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

6. 在一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球, 这些球除颜色外完全相同, 从中摸出 3 个球, 至少摸到 2 个黑球的概率等于　（　）
(A) $\dfrac{2}{7}$　(B) $\dfrac{3}{8}$　(C) $\dfrac{3}{7}$　(D) $\dfrac{9}{28}$

7. 对于平面 α 和共面的直线 m、n, 下列命题中真命题是　（　）
(A) 若 $m\perp\alpha$, $m\perp n$, 则 $n\parallel\alpha$
(B) 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$
(C) 若 $m\subset\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$
(D) 若 m、n 与 α 所成的角相等, 则 $m\parallel n$

8. 函数 $y=\log_2\dfrac{x}{x-1}$ $(x>1)$ 的反函数是　（　）
(A) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$ $(x>0)$　(B) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$ $(x<0)$
(C) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}$ $(x>0)$　(D) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x}$ $(x<0)$

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上的最小值是 -2, 则 ω 的最小值等于　（　）
(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点为 F, 若过点 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是　（　）
(A) $(1,2]$　(B) $(1,2)$　(C) $[2,+\infty)$　(D) $(2,+\infty)$

11. 已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=1$, $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 点 C 在 $\angle AOB$ 内, 且 $\angle AOC=30^\circ$. 设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ (m、$n\in\mathbf{R}$), 则 $\dfrac{m}{n}$ 等于　（　）
(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) 3　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\sqrt{3}$

12. 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 定义它们之间的一种"距离": $\|AB\|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$. 给出下列三个命题:
① 若点 C 在线段 AB 上, 则 $\|AC\|+\|CB\|=\|AB\|$;
② 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C=90^\circ$, 则 $\|AC\|^2+\|CB\|^2=\|AB\|^2$;
③ 在 $\triangle ABC$ 中, $\|AC\|+\|CB\|>\|AB\|$.
其中真命题的个数为　（　）
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

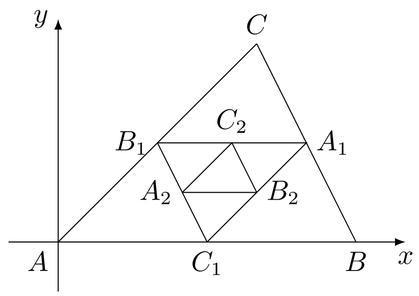
二、填空题

13. $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$ 展开式中 x^4 的系数是______. (用数字作答)

14. 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切, 则 $a=$______.

15. 一个均匀小正方体的六个面中, 三个面上标以数 0, 两个面上标以数 1, 一个面上标以数 2. 将这个小正方体抛掷 2 次, 则向上的数之积的数学期望是______.

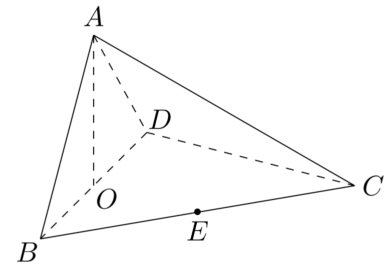
16. 如图, 连结 $\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_1B_1C_1$, 又连结 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到一个新的 $\triangle A_2B_2C_2$, 如此无限继续下去, 得到一系列三角形: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\cdots$, 这一系列三角形趋向于一个点 M. 已知 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,2)$, 则点 M 的坐标是______.



三、解答题

17. 已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2x$, $x\in\mathbf{R}$.
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调增区间;
(2) 函数 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin 2x$ $(x\in\mathbf{R})$ 的图象经过怎样的变换得到?

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, O、E 分别是 BD、BC 的中点, $CA=CB=CD=BD=2$, $AB=AD=\sqrt{2}$.
(1) 求证: $AO\perp$ 平面 BCD;
(2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;
(3) 求点 E 到平面 ACD 的距离.

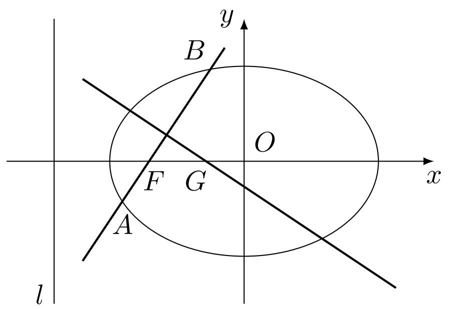


19. 统计表明, 某种型号的汽车在匀速行驶中每小时的耗油量 y (升) 关于行驶速度 x (千米/小时) 的函数解析式可以表示为: $y=\dfrac{1}{128000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8$ $(0<x\leqslant 120)$. 已知甲、乙两地相距 100 千米.
(1) 当汽车以 40 千米/小时的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地要耗油多少升?
(2) 当汽车以多大的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地耗油最少? 最少为多少升?

20. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点为 F, O 为坐标原点.

(1) 求过点 O、F, 并且与椭圆的左准线 l 相切的圆的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 G, 求点 G 横坐标的取值范围.



21. 已知函数 $f(x)=-x^2+8x$, $g(x)=6\ln x+m$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值 $h(t)$;

(2) 是否存在实数 m, 使得 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且只有三个不同的交点? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}4^{b_3-1}\cdots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 证明: $\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.