2015 年普通高等学校招生考试（湖南卷）

理科数学

一、选择题

1. 已知 $\frac{(1-\mathrm{i})^2}{z}=1+\mathrm{i}$ (i 为虚数单位), 则复数 $z=$ （ ）

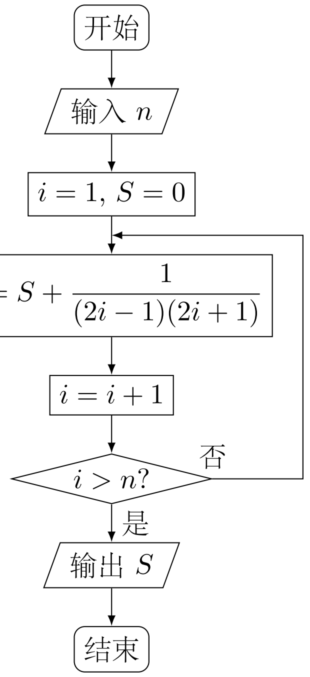
(A) $1+\mathrm{i}$　(B) $1-\mathrm{i}$　(C) $-1+\mathrm{i}$　(D) $-1-\mathrm{i}$

2. 设 A, B 是两个集合, 则“$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的 （ ）

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

3. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n=3$, 则输出的 $S=$ （ ）



(A) $\frac{6}{7}$　(B) $\frac{3}{7}$　(C) $\frac{8}{9}$　(D) $\frac{4}{9}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant -1\\ 2x-y\leqslant 1\\ y\leqslant 1\end{cases}$, 则 $z=3x-y$ 的最小值为( )

(A) -7　(B) -1　(C) 1　(D) 2

5. 设函数 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 （ ）

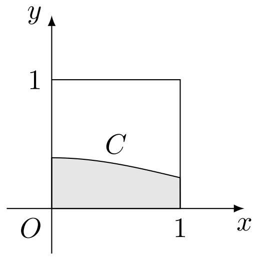
(A) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(B) 奇函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

(C) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是增函数　(D) 偶函数, 且在 $(0,1)$ 是减函数

6. 已知 $\left(\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a=$ （ ）

(A) $\sqrt{3}$　(B) $-\sqrt{3}$　(C) 6　(D) -6

7. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(0,1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 （ ）



附: 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$, $P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$.

(A) 2386　(B) 2718　(C) 3413　(D) 4772

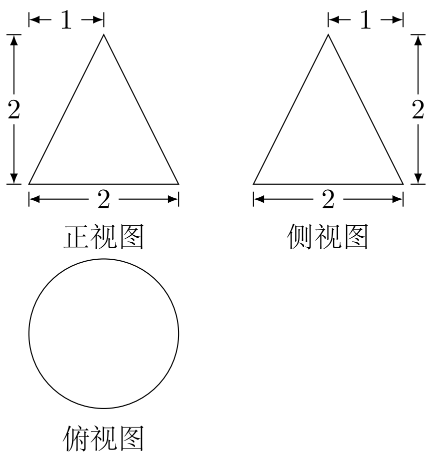
8. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动, 且 $AB\perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2,0)$, 则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right|$ 的最大值为 （ ）

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

9. 将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 φ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1, x_2, 有 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi=$ （ ）

(A) $\frac{5\pi}{12}$　(B) $\frac{\pi}{3}$　(C) $\frac{\pi}{4}$　(D) $\frac{\pi}{6}$

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的长方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 $=\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) （ ）



(A) $\frac{8}{9\pi}$　(B) $\frac{16}{9\pi}$　(C) $\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$　(D) $\frac{12\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{\pi}$

二、填空题

11. $\int_0^2(x-1)\,\mathrm{d}x=$______.

12. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9					
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3									

若将运动员按成绩由好到差编为 $1\sim 35$ 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139,151]$ 上的运动员的人数是______.

13. 设 F 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点, 若 C 上存在点 P, 使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点, 则 C 的离心率为______.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1=1$, 且 $3S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列, 则 $a_n=$______.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,\ x\leqslant a\\ x^2,\ x>a\end{cases}$, 若存在实数 b, 使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是______.

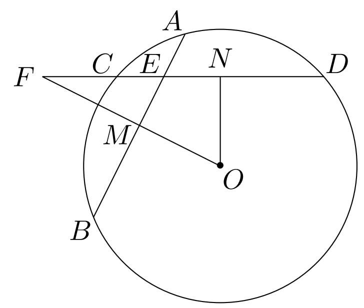
三、解答题

16. 三选二.

【A】如图, 在 $\odot O$ 中, 相交于点 E 的两弦 AB, CD 的中点分别是 M, N, 直线 MO 与直线 CD 相交于点 F. 证明:

(1) $\angle MEN+\angle NOM=180^\circ$;

(2) $FE\cdot FN=FM\cdot FO$.



【B】已知直线 $l:\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

(1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 设点 M 的直角坐标为 $(5,\sqrt{3})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B, 求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值.

【C】设 $a>0, b>0$, 且 $a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, 证明:

(1) $a+b\geqslant 2$;

(2) $a^2+a<2$ 与 $b^2+b<2$ 不可能同时成立.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, $a=b\tan A$, 且 B 为钝角.

(1) 证明: $B-A=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) 求 $\sin A+\sin C$ 的取值范围.

18. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 每次抽奖都是从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中, 各随机摸出 1 个球. 在摸出的 2 个球中, 若都是红球, 则获一等奖; 若只有 1 个红球, 则获二等奖; 若没有红球, 则不获奖.

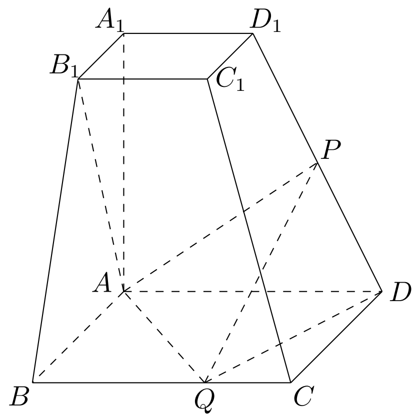
(1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率;

(2) 若某顾客有 3 次抽奖的机会, 记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 已知四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形, $AA_1=6$, 且 $AA_1\perp$ 底面 $ABCD$, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BC 上.

(1) 若点 P 是 DD_1 的中点, 证明: $AB_1\perp PQ$;

(2) 若 $PQ\parallel$ 平面 ABB_1A_1, 二面角 $P-QD-A$ 的余弦值为 $\dfrac{3}{7}$, 求四面体 $ADPQ$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2=4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$.

(1) 求 C_2 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 同向.

① 若 $|AC|=|BD|$, 求直线 l 的斜率;

② 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M, 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

21. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}\sin x\ (x\in[0,+\infty))$, 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 个极值点. 证明:

(1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;

(2) 若 $a\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2-1}}$, 则对一切 $n\in\mathbf{N}^*$, $x_n<|f(x_n)|$ 恒成立.