

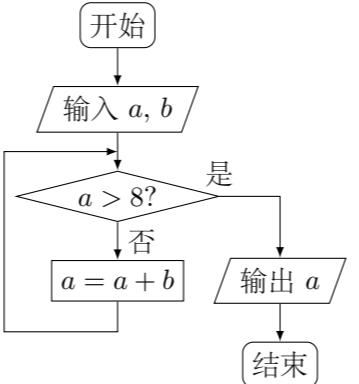
文科数学

一、选择题

1. 复数 $z = i \cdot (1+i)$ (i 为虚数单位) 在复平面上对应的点位于 ()
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. “ $1 < x < 2$ ”是“ $x < 2$ ”成立的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 某工厂甲、乙、丙三个车间生产了同一种产品, 数量分别为 120 件, 80 件, 60 件. 为了解它们的产品质量是否存在显著差异, 用分层抽样方法抽取了一个容量为 n 的样本进行调查, 其中从丙车间的产品中抽取了 3 件, 则 $n =$ ()
 (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13
4. 已知 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且 $f(-1)+g(1)=2$, $f(1)+g(-1)=4$, 则 $g(1)$ 等于 ()
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 所对的边长分别为 a, b . 若 $2a \sin B = \sqrt{3}b$, 则角 A 等于 ()
 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$
6. 函数 $f(x) = \ln x$ 的图象与函数 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 的图象的交点个数为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
7. 已知正方体的棱长为 1, 其俯视图是一个面积为 1 的正方形, 侧视图是一个面积为 $\sqrt{2}$ 的矩形, 则该正方体的正视图的面积等于 ()
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$
8. 已知 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是单位向量, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 若向量 \mathbf{c} 满足 $|\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$, 则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值为 ()
 (A) $\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}+1$ (D) $\sqrt{2}+2$
9. 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P , 使 $\triangle APB$ 的最大边是 AB ”发生的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\frac{AD}{AB} =$ ()
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{4}$
10. 已知集合 $U = \{2, 3, 6, 8\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若直线 $l_1: \begin{cases} x = 2s + 1 \\ y = s \end{cases}$ (s 为参数) 和直线 $l_2: \begin{cases} x = at \\ y = 2t - 1 \end{cases}$ (t 为参数) 平行, 则常数 a 的值为 _____.

12. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $a = 1, b = 2$, 则输出的 a 的值为 _____.



13. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y \leqslant 8 \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$, 则 $x + y$ 的最大值为 _____.

14. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点. 若在 C 上存在一点 P , 使 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$, 则 C 的离心率为 _____.

15. 对于 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ 的子集 $X = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, 定义 X 的“特征数列”为 x_1, x_2, \dots, x_{100} , 其中 $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 1$, 其余项均为 0, 例如: 子集 $\{a_2, a_3\}$ 的“特征数列”为 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

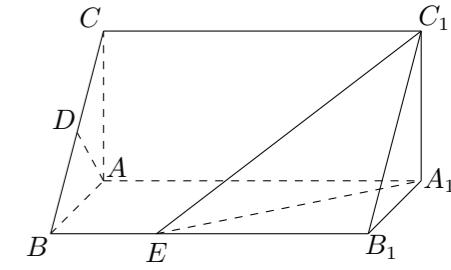
- (1) 子集 $\{a_1, a_3, a_5\}$ 的“特征数列”的前 3 项和等于 _____.
 (2) 若 E 的子集 P 的“特征数列” p_1, p_2, \dots, p_{100} 满足 $p_1 = 1, p_i + p_{i+1} = 1, 1 \leqslant i \leqslant 99$; E 的子集 Q 的“特征数列” q_1, q_2, \dots, q_{100} 满足 $q_1 = 1, q_j + q_{j+1} + q_{j+2} = 1, 1 \leqslant j \leqslant 98$, 则 $P \cap Q$ 的元素个数为 _____.

三、解答题

16. 已知函数 $f(x) = \cos x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值;
 (2) 求使 $f(x) < \frac{1}{4}$ 成立的 x 的取值集合.

17. 如图, 在直棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 3$, D 是 BC 的中点, 点 E 在棱 BB_1 上运动.
- (1) 证明: $AD \perp C_1E$;
 (2) 当异面直线 AC, C_1E 所成的角为 60° 时, 求三棱锥 $C_1 - A_1B_1E$ 的体积.



18. 某人在如图所示的直角边长为 4 米的直角三角形地块的每个格点 (指纵、横直线的交叉点以及三角形的顶点) 处都种了一株相同品种的作物. 根据历年种植经验, 一株该种作物的年收获量 Y (单位: kg) 与它的“相近”作物株数 X 之间的关系如下表所示:

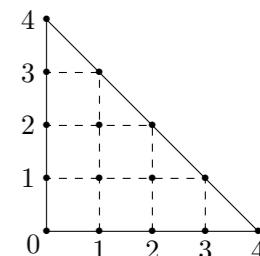
X	1	2	3	4
Y	51	48	45	42

这里, 两株作物“相近”是指它们之间的直线距离不超过 1 米.

- (1) 完成下表, 并求所种作物的平均年收获量;

Y	51	48	45	42
频数		4		

- (2) 在所种作物中随机选取一株, 求它的年收获量至少为 48 kg 的概率.



二、填空题

10. 已知集合 $U = \{2, 3, 6, 8\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B =$ _____.

19. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 \neq 0$, $2a_n - a_1 = S_1 \cdot S_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- (1) 求 a_1, a_2 , 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.
20. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点, F_1, F_2 关于直线 $x + y - 2 = 0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.
- (1) 求圆 C 的方程;
 - (2) 设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a, b . 当 ab 最大时, 求直线 l 的方程.
21. 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} e^x$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, $x_1 + x_2 < 0$.