

文科数学

一、选择题

1. 集合 $P = \{x \in \mathbf{Z} \mid 0 \leq x < 3\}$, $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 \leq 9\}$, 则 $P \cap M = \text{()}$

(A) {1, 2} (B) {0, 1, 2} (C) {1, 2, 3} (D) {0, 1, 2, 3}

2. 在复平面内, 复数 $6 + 5i$, $-2 + 3i$ 对应的点分别为 A , B . 若 C 为线段 AB 的中点, 则点 C 对应的复数是 ()

(A) $4 + 8i$ (B) $8 + 2i$ (C) $2 + 4i$ (D) $4 + i$

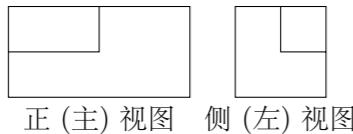
3. 从 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中随机选取一个数为 a , 从 $\{1, 2, 3\}$ 中随机选取一个数为 b , 则 $b > a$ 的概率是 ()

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

4. 若 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是非零向量, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$, 则函数 $f(x) = (\mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{x}\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 是 ()

(A) 一次函数且是奇函数 (B) 一次函数但不是奇函数
(C) 二次函数且是偶函数 (D) 二次函数但不是偶函数

5. 一个长方体去掉一个小长方体, 所得几何体的正(主)视图与侧(左)视图分别如图所示, 则该几何体的俯视图为 ()



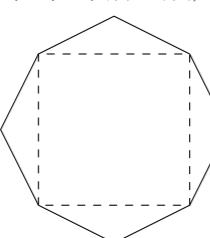
正(主)视图 侧(左)视图

- (A)
(B)
(C)
(D)

6. 给定函数: ① $y = x^{\frac{1}{2}}$, ② $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$, ③ $y = |x-1|$, ④ $y = 2^{x+1}$, 其中在区间 $(0, 1)$ 上单调递减的函数序号是 ()

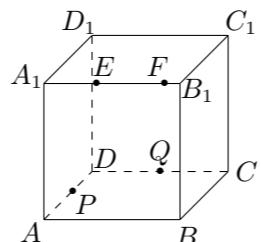
(A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

7. 某班设计了一个八边形的班徽(如图), 它由腰长为 1、顶角为 α 的四个等腰三角形, 及其底边构成的正方形所组成, 该八边形的面积为 ()



(A) $2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha + 2$ (B) $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + 3$
(C) $3 \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha + 1$ (D) $2 \sin \alpha - \cos \alpha + 1$

8. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 动点 E, F 在棱 A_1B_1 上. 点 Q 是棱 CD 的中点, 动点 P 在棱 AD 上, 若 $EF = 1$, $DP = x$, $A_1E = y$ (x, y 大于零), 则三棱锥 $P-EFQ$ 的体积 ()



- (A) 与 x, y 都有关 (B) 与 x, y 都无关
(C) 与 x 有关, 与 y 无关 (D) 与 y 有关, 与 x 无关

二、填空题

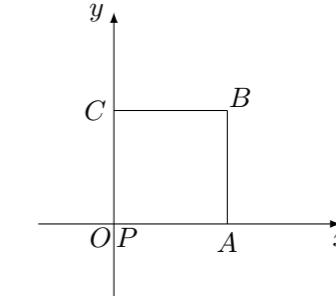
9. 已知函数 $y = \begin{cases} \log_2 x, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$. 如图表示的是给定 x 的值, 求其对应的函数值 y 的程序框图. ① 处应填写_____; ② 处应填写_____.
开始
输入 x
①
是
 $y = 2 - x$
否
②
输出 y
结束

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b = 1$, $c = \sqrt{3}$, $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 若点 $P(m, 3)$ 到直线 $4x - 3y + 1 = 0$ 的距离为 4, 且点 P 在不等式 $2x + y < 3$ 表示的平面区域内, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 从某小学随机抽取 100 名同学, 将他们的身高(单位: 厘米)数据绘制成频率分布直方图(如图). 由图中数据可知 $a = \underline{\hspace{2cm}}$. 若要从身高在 $[120, 130]$, $[130, 140]$, $[140, 150]$ 三组内的学生中, 用分层抽样的方法选取 18 人参加一项活动, 则从身高在 $[140, 150]$ 内的学生中选取的人数应为_____.
频率
组距
0.035
0.020
0.010
0.005
0 100 110 120 130 140 150 身高

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 焦点与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同, 那么双曲线的焦点坐标为_____; 渐近线方程为_____.
说明: “正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动”包括沿 x 轴正方向和沿 x 轴负方向滚动. 沿 x 轴正方向滚动指的是先以顶点 A 为中心顺时针旋转, 当顶点 B 落在 x 轴上时, 再以顶点 B 为中心顺时针旋转, 如此继续. 类似地, 正方形 $PABC$ 可以沿 x 轴负方向滚动.



三、解答题

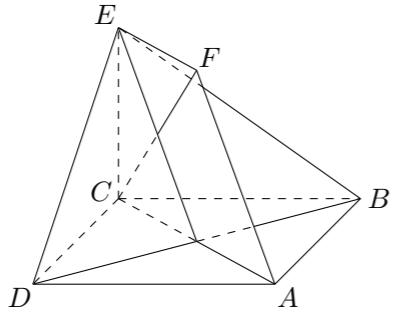
15. 已知函数 $f(x) = 2 \cos 2x + \sin^2 x$.

- (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 的值;
(2) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.

16. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = -6$, $a_6 = 0$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = -8$, $b_2 = a_1 + a_2 + a_3$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直, $EF \parallel AC$, $AB = \sqrt{2}$, $CE = EF = 1$.
- (1) 求证: $AF \parallel$ 平面 BDE ;
 - (2) 求证: $CF \perp$ 平面 BDE ;



19. 已知椭圆 C 的左、右焦点坐标分别是 $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, 离心率是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 直线 $y = t$ 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N , 以线段 MN 为直径作圆 P , 圆心为 P .
- (1) 求椭圆 C 的方程;
 - (2) 若圆 P 与 x 轴相切, 求圆心 P 的坐标;
 - (3) 设 $Q(x, y)$ 是圆 P 上的动点, 当 t 变化时, 求 y 的最大值.

18. 设函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$), 且方程 $f'(x) - 9x = 0$ 的两个根分别为 1, 4.
- (1) 当 $a = 3$ 且曲线 $y = f(x)$ 过原点时, 求 $f(x)$ 的解析式;
 - (2) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无极值点, 求 a 的取值范围.

20. 已知集合 $S_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$), 对于 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 A 与 B 的差为 $A - B = (|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|)$; A 与 B 之间的距离为 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.
- (1) 当 $n = 5$ 时, 设 $A = (0, 1, 0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1, 0, 0)$, 求 $A - B$, $d(A, B)$;
 - (2) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, 有 $A - B \in S_n$, 且 $d(A - C, B - C) = d(A, B)$;
 - (3) 证明: $\forall A, B, C \in S_n$, $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(B, C)$ 三个数中至少有一个是偶数.