2013 年普通高等学校招生考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+20}{3n+13}=$______.

2. 设 $m\in\mathbf{R}$, $m^2+m-2+(m^2-1)\,\mathrm{i}$ 是纯虚数, 其中 i 是虚数单位, 则 $m=$______.

3. 若 $\begin{vmatrix}x^2 & y^2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & x\\ y & -y\end{vmatrix}$, 则 $x+y=$______.

4. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 若 $3a^2+2ab+3b^2-3c^2=0$, 则角 C 的大小是______. (结果用反三角函数值表示)

5. 设常数 $a\in\mathbf{R}$. 若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10, 则 $a=$______.

6. 方程 $\dfrac{3}{3^x-1}+\dfrac{1}{3}=3^{x-1}$ 的实数解为______.

7. 在极坐标系中, 曲线 $\rho=\cos\theta+1$ 与 $\rho\cos\theta=1$ 的公共点到极点的距离为______.

8. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是______. (结果用最简分数表示)

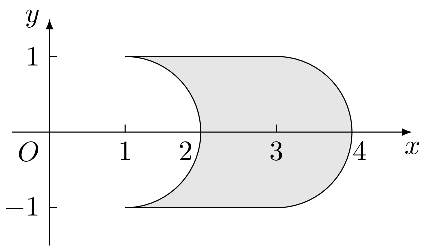
9. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴, 点 C 在 Γ 上, 且 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$, 若 $AB=4$, $BC=\sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为______.

10. 设非零常数 d 是等差数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{19}$ 的公差, 随机变量 ξ 等可能地取值 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{19}$, 则方差 $D\xi=$______.

11. 若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{2}$, $\sin 2x+\sin 2y=\dfrac{2}{3}$, 则 $\sin(x+y)=$______.

12. 设 a 为实常数, $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=9x+\dfrac{a^2}{x}+7$, 若 $f(x)\geqslant a+1$ 对一切 $x\geqslant 0$ 成立, 则 a 的取值范围为______.

13. 在 xOy 平面上, 将两个半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1\ (x\geqslant 1)$ 和 $(x-3)^2+y^2=1\ (x\geqslant 3)$、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D, 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω, 过 $(0,y)$ $(|y|\leqslant 1)$ 作 Ω 的水平截面, 所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$, 试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出 Ω 的体积值为______.



14. 对区间 I 上有定义的函数 $g(x)$, 记 $g(I)=\{y\mid y=g(x), x\in I\}$, 已知定义域为 $[0,3]$ 的函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}([0,1))=[1,2)$, $f^{-1}((2,4])=[0,1)$, 若方程 $f(x)-x=0$ 有解 x_0, 则 $x_0=$______.

二、选择题

15. 设常数 $a\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid(x-1)(x-a)\geqslant 0\}$, $B=\{x\mid x\geqslant a-1\}$. 若 $A\cup B=\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围为 (　)

(A) $(-\infty,2)$　(B) $(-\infty,2]$　(C) $(2,+\infty)$　(D) $[2,+\infty)$

16. 钱大姐常说“便宜没好货”, 她这句话的意思是: “不便宜”是“好货”的 (　)

(A) 充分条件　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　(D) 既非充分也非必要条件

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=2^n-1$, 若一个 7 行 12 列的矩阵的第 i 行第 j 列的元素 $a_{ij}=a_i\cdot a_j+a_i+a_j$ $(i=1,2,\cdots,7;\ j=1,2,\cdots,12)$ 则该矩阵元素能取到的不同数值的个数为 (　)

(A) 18　(B) 28　(C) 48　(D) 63

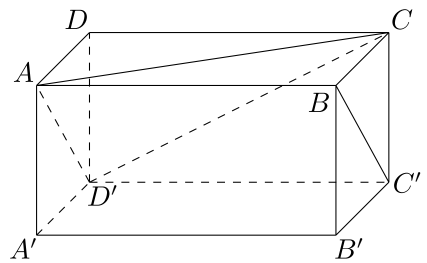
18. 在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中, 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}$; 以 D 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}, \overrightarrow{d_3}, \overrightarrow{d_4}, \overrightarrow{d_5}$. 若 m, M 分别为 $(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j}+\overrightarrow{a_k})\cdot\left(\overrightarrow{d_r}+\overrightarrow{d_s}+\overrightarrow{d_t}\right)$ 的最小值、最大值, 其中 $\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, $\{r,s,t\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$, 则 m、M 满足 (　)

(A) $m=0, M>0$　(B) $m<0, M>0$

(C) $m<0, M=0$　(D) $m<0, M<0$

三、解答题

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB=2$, $AD=1$, $AA'=1$, 证明直线 BC' 平行于平面 $D'AC$, 并求直线 BC' 到平面 $D'AC$ 的距离.



20. 甲厂以 x 千克/小时的速度运输生产某种产品 (生产条件要求 $1\leqslant x\leqslant 10$), 每一小时可获得利润是 $100\left(5x+1-\dfrac{3}{x}\right)$ 元.

(1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 3000 元, 求 x 的取值范围;

(2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求最大利润.

21. 已知函数 $f(x)=2\sin\omega x$, 其中常数 $\omega>0$.

(1) 若 $y=f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围;

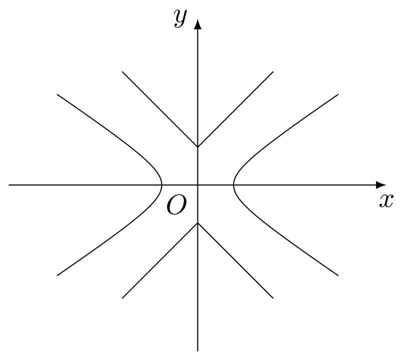
(2) 令 $\omega=2$, 将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 区间 $[a,b]$ (a, $b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$) 满足: $y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少含有 30 个零点, 在所有满足上述条件的 $[a,b]$ 中, 求 $b-a$ 的最小值.

22. 如图, 已知双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$, 曲线 $C_2:|y|=|x|+1$. P 是平面内一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点, 则称 P 为"C_1-C_2 型点".

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是"C_1-C_2 型点"时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k|>1$, 进而证明原点不是"C_1-C_2 型点";

(3) 求证: 圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 内的点都不是"C_1-C_2 型点".



23. 给定常数 $c>0$, 定义函数 $f(x)=2|x+c+4|-|x+c|$, 数列 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $a_1=-c-2$, 求 a_2 及 a_3;

(2) 求证: 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+1}-a_n\geqslant c$;

(3) 是否存在 a_1, 使得 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1, 若不存在, 说明理由.