

2013 年普通高等学校招生考试 (天津卷)

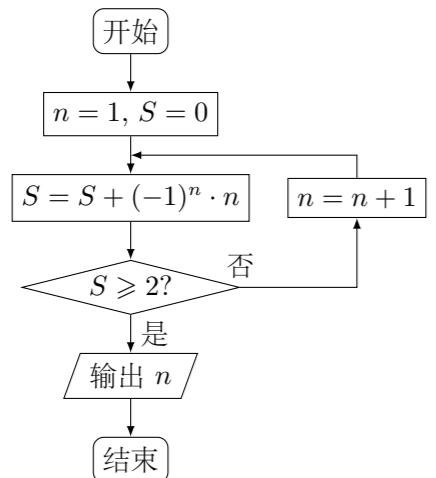
文科数学

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$, 则 $A \cap B = (\)$
- (A) $(-\infty, 2]$ (B) $[1, 2]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[-2, 1]$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + y - 6 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ y - 3 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = y - 2x$ 的最小值为 ()
- (A) -7 (B) -4 (C) 1 (D) 2

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 n 的值为 ()



- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

4. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $(a - b) \cdot a^2 < 0$ ”是“ $a < b$ ”的 ()
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知过点 $P(2, 2)$ 的直线与圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ 相切, 且与直线 $ax - y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ ()

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

6. 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 ()

- (A) -1 (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 0

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是 ()

- (A) $[1, 2]$ (B) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (D) $(0, 2]$

8. 设函数 $f(x) = e^x + x - 2$, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$. 若实数 a, b 满足 $f(a) = 0$, $g(b) = 0$, 则 ()

- (A) $g(a) < 0 < f(b)$ (B) $f(b) < 0 < g(a)$
 (C) $0 < g(a) < f(b)$ (D) $f(b) < g(a) < 0$

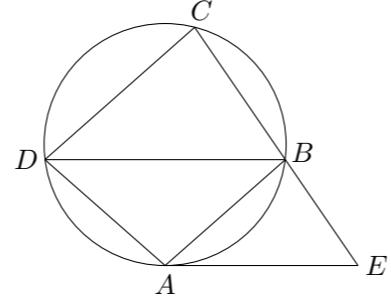
二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $(3+i)(1-2i) =$ _____.
10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$, 则正方体的棱长为 _____.

11. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点, 且双曲线的离心率为 2, 则该双曲线的方程为 _____.

12. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 1$, 则 AB 的长为 _____.

13. 如图, 在圆内接梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, 过点 A 作圆的切线与 CB 的延长线交于点 E . 若 $AB = AD = 5$, $BE = 4$, 则弦 BD 的长为 _____.



14. 设 $a + b = 2$, $b > 0$, 则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 _____.

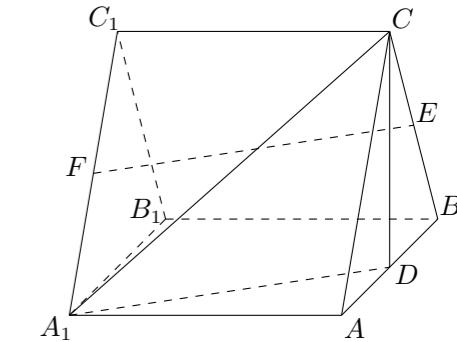
三、解答题

15. 某产品的三个质量指标分别为 x, y, z , 用综合指标 $S = x + y + z$ 评价该产品的等级. 若 $S \leq 4$, 则该产品为一等品. 现从一批该产品中, 随机抽取 10 件产品作为样本, 其质量指标列表如下:

产品编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
质量指标 (x, y, z)	(1, 1, 2)	(2, 1, 1)	(2, 2, 2)	(1, 1, 1)	(1, 2, 1)
产品编号	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
质量指标 (x, y, z)	(1, 2, 2)	(2, 1, 1)	(2, 2, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 2)

- (1) 利用上表提供的样本数据估计该批产品的一等品率;
 (2) 在该样本的一等品中, 随机抽取 2 件产品.
 ① 用产品编号列出所有可能的结果;
 ② 设事件 B 为“在取出的 2 件产品中, 每件产品的综合指标 S 都等于 4”, 求事件 B 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $b \sin A = 3c \sin B$, $a = 3$, $\cos B = \frac{2}{3}$.
- (1) 求 b 的值;
 (2) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.



18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 F , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设 A, B 分别为椭圆的左、右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = 8$, 求 k 的值.

19. 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $-2S_2, S_3, 4S_4$ 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明 $S_n + \frac{1}{S_n} \leq \frac{13}{6}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

20. 设 $a \in [-2, 0]$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - (a+5)x, & x \leq 0 \\ x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + ax, & x > 0 \end{cases}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增;

(2) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_i(x_i, f(x_i))$ ($i = 1, 2, 3$) 处的切线相互平行, 且 $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, 证明: $x_1 + x_2 + x_3 > -\frac{1}{3}$.