

理科数学

一、选择题

1. 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是 ()
 (A) 第一或第二象限 (B) 第二或第三象限
 (C) 第一或第三象限 (D) 第二或第四象限
2. 已知过点 $A(-2, m)$ 和 $B(m, 4)$ 的直线与直线 $2x + y - 1 = 0$ 平行, 则 m 的值为 ()
 (A) 0 (B) -8 (C) 2 (D) 10
3. 在 $(x - 1)(x + 1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 ()
 (A) -14 (B) 14 (C) -28 (D) 28
4. 设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 V , P 、 Q 分别是侧棱 AA_1 、 CC_1 上的点, 且 $PA = QC_1$, 则四棱锥 $B - APQC$ 的体积为 ()
 (A) $\frac{1}{6}V$ (B) $\frac{1}{4}V$ (C) $\frac{1}{3}V$ (D) $\frac{1}{2}V$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right) =$ ()
 (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$
6. 若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()
 (A) $a < b < c$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $b < a < c$
7. 设 $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, 且 $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x$, 则 ()
 (A) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (B) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}$
 (C) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$
8. $\frac{2 \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} =$ ()
 (A) $\tan \alpha$ (B) $\tan 2\alpha$ (C) 1 (D) $\frac{1}{2}$
9. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 , 点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$, 则点 M 到 x 轴的距离为 ()
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$
10. 设椭圆的两个焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P , 若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 ()
 (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (C) $2 - \sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$
11. 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等, 这样的平面 α 共有 ()
 (A) 3 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 7 个

12. 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0 ~ 9 和字母 $A \sim F$ 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7
十六进制	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E + D = 1B$, 则 $A \times B =$ ()

- (A) 6E (B) 72 (C) 5F (D) B0

二、填空题

13. 已知复数 $z_0 = 3 + 2i$, 复数 z 满足 $z \cdot z_0 = 3z + z_0$, 则复数 $z =$ _____.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (k, 12)$, $\overrightarrow{OB} = (4, 5)$, $\overrightarrow{OC} = (-k, 10)$, 且 A 、 B 、 C 三点共线, 则 $k =$ _____.

15. 设 l 为平面上过点 $(0, 1)$ 的直线, l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 0 , $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, 用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离, 则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi =$ _____.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, P 是 AB 上的点, 则点 P 到 AC 、 BC 的距离乘积的最大值是 _____.

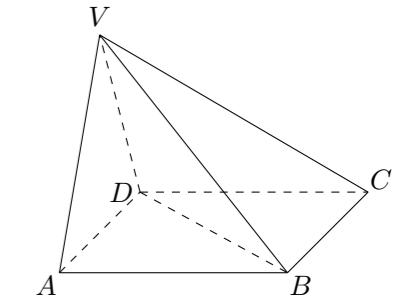
三、解答题

17. 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某个小时内, 甲、乙都需要照顾的概率为 0.05, 甲、丙都需要照顾的概率为 0.1, 乙、丙都需要照顾的概率为 0.125,

- (1) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少;
 (2) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率.

18. 如图, 在四棱锥 $V - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 VAD 是正三角形, 平面 $VAD \perp$ 底面 $ABCD$.

- (1) 证明: $AB \perp$ 平面 VAD ;
 (2) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小.



20. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差 $d \neq 0$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项. 已知数列 $a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots$ 成等比数列, 求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n .
21. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上, l 是 AB 的垂直平分线.
- (1) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F ? 证明你的结论;
 - (2) 当直线 l 的斜率为 2 时, 求 l 在 y 轴上截距的取值范围.
22. 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;
 - (2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$. 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求 a 的取值范围.