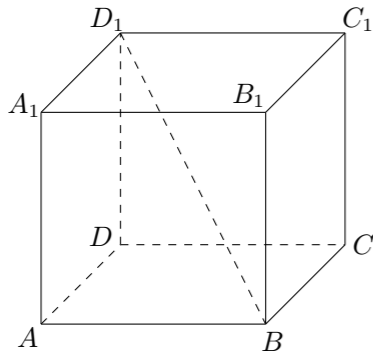


理科数学

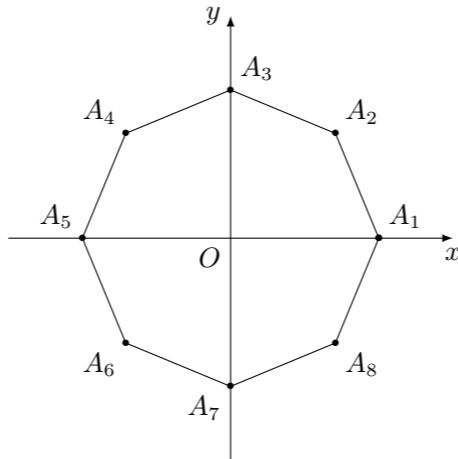
一、填空题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $|x - 3| < 1$ 的解集为_____.
2. 设 $z = \frac{3 + 2i}{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\text{Im } z =$ _____.
3. 已知平行直线 $l_1 : 2x + y - 1 = 0$, $l_2 : 2x + y + 1 = 0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是_____.
4. 某次体检, 6 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.75, 1.80, 1.69, 1.77, 则这组数据的中位数是_____(米).
5. 已知点 $(3, 9)$ 在函数 $f(x) = 1 + a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 的边长为 3, BD_1 与底面所成角的大小为 $\arctan \frac{2}{3}$, 则该正四棱柱的高等于_____.



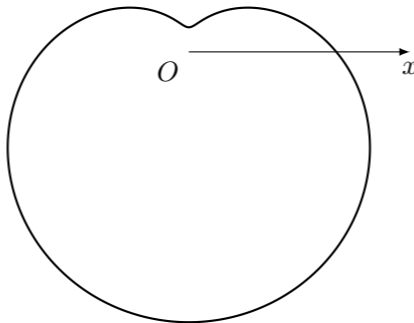
7. 方程 $3 \sin x = 1 + \cos 2x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的解为_____.
8. 在 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于_____.
9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于_____.
10. 设 $a > 0, b > 0$, 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 1 \end{cases}$ 无解, 则 $a + b$ 的取值范围是_____.
11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*, S_n \in \{2, 3\}$, 则 k 的最大值为_____.
12. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1, 0), B(0, -1)$, P 是曲线 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.
13. 设 $a, b \in \mathbf{R}, c \in [0, 2\pi)$, 若对任意实数 x 都有 $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = a \sin(bx + c)$, 则满足条件的有序实数组 (a, b, c) 的组数为_____.

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为正八边形 $A_1A_2 \cdots A_8$ 的中心, $A_1(1, 0)$, 任取不同的两点 A_i, A_j , 点 P 满足 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} = \vec{0}$, 则点 P 落在第一象限的概率是_____.



二、选择题

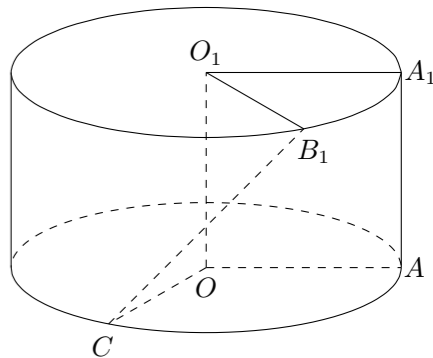
15. 设 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的 ()
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件
16. 下列极坐标方程中, 对应的曲线为下图的是 ()



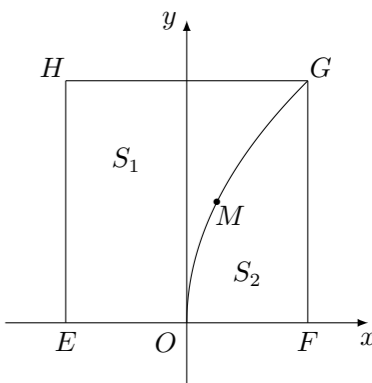
- (A) $\rho = 6 + 5 \cos \theta$ (B) $\rho = 6 + 5 \sin \theta$
(C) $\rho = 6 - 5 \cos \theta$ (D) $\rho = 6 - 5 \sin \theta$
17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 下列条件中, 使得 $2S_n < S$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 恒成立的是 ()
(A) $a_1 > 0, 0.6 < q < 0.7$ (B) $a_1 < 0, -0.7 < q < -0.6$
(C) $a_1 > 0, 0.7 < q < 0.8$ (D) $a_1 < 0, -0.8 < q < -0.7$
18. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x) + g(x), f(x) + h(x), g(x) + h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x), g(x), h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ()
(A) ①和②均为真命题 (B) ①和②均为假命题
(C) ①为真命题, ②为假命题 (D) ①为假命题, ②为真命题

三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕 OO_1 旋转一周形成圆柱, 如图, \widehat{AC} 长为 $\frac{2\pi}{3}$, $\widehat{A_1B_1}$ 长为 $\frac{\pi}{3}$, 其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.
(1) 求三棱锥 $C - O_1A_1B_1$ 的体积.
(2) 求异面直线 B_1C 与 AA_1 所成角的大小.



20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2 , 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 如图.
(1) 求菜地内的分界线 C 的方程.
(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的“经验值”为 $\frac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 EH 为一边, 另一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A 、 B 两点.
- (1) 若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.
- (2) 设 $b = \sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 求 l 的斜率.
22. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x} + a \right)$.
- (1) 当 $a = 5$ 时, 解不等式 $f(x) > 0$.
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) - \log_2 [(a - 4)x + 2a - 5] = 0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的取值范围.
- (3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t + 1]$ 上的最大值和最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.
23. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p = a_q$ ($p, q \in \mathbf{N}^*$), 必有 $a_{p+1} = a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P .
- (1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P . 且 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2, a_6 + a_7 + a_8 = 21$, 求 a_3 .
- (2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1 = c_5 = 1, b_5 = c_1 = 81, a_n = b_n + c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;
- (3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1} = b_n + \sin a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求证: “对任意 $a_1, \{a_n\}$ 都具有性质 P ”的充要条件为“ $\{b_n\}$ 是常数列”.