

数学试卷

一、选择题

- 下列函数中, 周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的是 ()
 (A) $y = \sin \frac{x}{2}$ (B) $y = \sin 2x$ (C) $y = \cos \frac{x}{4}$ (D) $y = \cos 4x$
- 已知全集 $U = \mathbf{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x|x^2 = x\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为 ()
 (A) $\{-1, 2\}$ (B) $\{-1, 0\}$ (C) $\{0, 1\}$ (D) $\{1, 2\}$
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线的中心在坐标原点, 焦点在 y 轴上, 一条渐近线方程为 $x - 2y = 0$, 则它的离心率为 ()
 (A) $\sqrt{5}$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2
- 已知两条直线 m, n , 两个平面 α, β , 给出下面四个命题:
 ① $m \parallel n, m \perp \alpha \Rightarrow n \perp \alpha$;
 ② $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta \Rightarrow m \parallel n$;
 ③ $m \parallel n, m \parallel \alpha \Rightarrow n \parallel \alpha$;
 ④ $\alpha \parallel \beta, m \parallel n, m \perp \alpha \Rightarrow n \perp \beta$.
 其中正确命题的序号是 ()
 (A) ①③ (B) ②④ (C) ①④ (D) ②③
- 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ ($x \in [-\pi, 0]$) 的单调递增区间是 ()
 (A) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right]$ (B) $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$ (C) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$
- 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上, 它的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 且当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则有 ()
 (A) $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right)$ (B) $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$
 (C) $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$ (D) $f\left(\frac{3}{2}\right) < f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right)$
- 若对于任意实数 x , 有 $x^3 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3$, 则 a_2 的值为 ()
 (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
- 设 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()
 (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$
 (C) $(-\infty, 0)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的导数为 $f'(x)$, $f'(0) > 0$, 对于任意实数 x 都有 $f(x) \geq 0$, 则 $\frac{f(1)}{f'(0)}$ 的最小值为 ()
 (A) 3 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{3}{2}$

- 在平面直角坐标系 xOy , 已知平面区域 $A = \{(x, y)|x + y \leq 1, \text{ 且 } x \geq 0, y \geq 0\}$, 则平面区域 $B = \{(x + y, x - y)|(x, y) \in A\}$ 的面积为 ()
 (A) 2 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

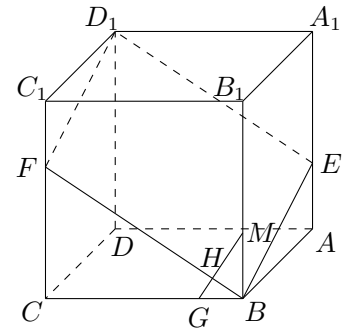
二、填空题

- 若 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \alpha \tan \beta =$ _____.
- 某校开设 9 门课程供学生选修, 其中 A, B, C 三门由于上课时间相同, 学校规定, 每位同学选修 4 门, 共有_____种不同的选修方案. (用数值作答)
- 已知函数 $f(x) = x^3 - 12x + 8$ 在区间 $[-3, 3]$ 上的最大值与最小值分别为 M, m , 则 $M - m =$ _____.
- 正三棱锥 $P-ABC$ 高为 2, 侧棱与底面 ABC 成 45° , 则点 A 到侧面 PBC 的距离为_____.
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle ABC$ 顶点 $A(-4, 0)$ 和 $C(4, 0)$, 顶点 B 在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上, 则 $\frac{\sin A + \sin C}{\sin B} =$ _____.
- 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm, 秒针均匀地绕点 O 旋转, 当时间 $t = 0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合, 将 A, B 两点的距离 d (cm) 表示成 $t(s)$ 的函数, 则 $d =$ _____.

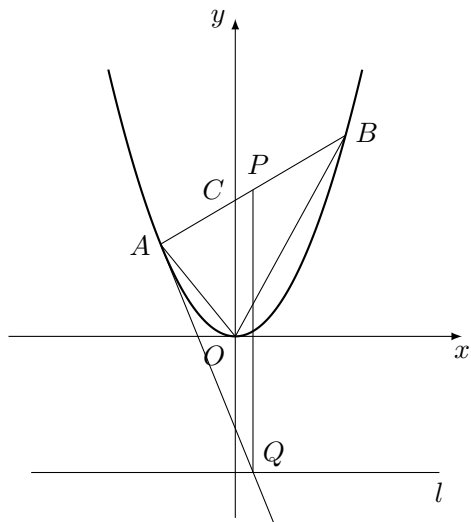
三、解答题

- 某气象站天气预报的准确率为 80%, 计算 (结果保留到小数点后面第 2 位)
 (1) 5 次预报中恰有 2 次准确的概率;
 (2) 5 次预报中至少有 2 次准确的概率;
 (3) 5 次预报中恰有 2 次准确, 且其中第 3 次预报准确的概率.

- 如图, 已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 3 的正方体, 点 E 在 AA_1 上, 点 F 在 CC_1 上, 且 $AE = FC_1 = 1$.
 (1) 求证: E, B, F, D_1 四点共面;
 (2) 若点 G 在 BC 上, $BG = \frac{2}{3}$, 点 M 在 BB_1 上, $GM \perp BF$, 垂足为 H , 求证: $EM \perp$ 面 BCC_1B_1 ;
 (3) 用 θ 表示截面 $EBFD_1$ 和面 BCC_1B_1 所成锐二面角大小, 求 $\tan \theta$



19. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 过 y 轴正方向上一点 $C(0, c)$ 任作一直线, 与抛物线 $y = x^2$ 相交于 A, B 两点, 一条垂直于 x 轴的直线, 分别与线段 AB 和直线 $l: y = -c$ 交于 P, Q .
- (1) 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$, 求 c 的值;
 - (2) 若 P 为线段 AB 的中点, 求证: QA 为此抛物线的切线;
 - (3) 试问 (2) 的逆命题是否成立? 说明理由.



20. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, $a_1 = b_1, a_2 = b_2 \neq a_1$, 记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
- (1) 若 $b_k = a_m$ (m, k 是大于 2 正整数), 求证: $S_{k-1} = (m-1)a_1$;
 - (2) 若 $b_3 = a_i$ (i 是某一正整数), 求证: q 是整数, 且数列 $\{b_n\}$ 中每一项都是数列 $\{a_n\}$ 中的项;
 - (3) 是否存在这样的正数 q , 使等比数列 $\{b_n\}$ 中有三项成等差数列? 若存在, 写出一个 q 的值, 并加以说明; 若不存在, 请说明理由.
21. 已知 a, b, c, d 是不全为零的实数, 函数 $f(x) = bx^2 + cx + d, g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. 方程 $f(x) = 0$ 有实数根, 且 $f(x) = 0$ 的实数根都是 $g(f(x)) = 0$ 的根; 反之, $g(f(x)) = 0$ 的实数根都是 $f(x) = 0$ 的根.
- (1) 求 d 的值;
 - (2) 若 $a = 0$, 求 c 的取值范围;
 - (3) 若 $a = 1, f(1) = 0$, 求 c 的取值范围.