2005 年普通高等学校招生考试（福建卷）

理科数学

一、选择题

1. 复数 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (B) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ (C) $1-\mathrm{i}$ (D) $1+\mathrm{i}$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7+a_9=16$, $a_4=1$, 则 a_{12} 的值是 ( )

(A) 15 (B) 30 (C) 31 (D) 64

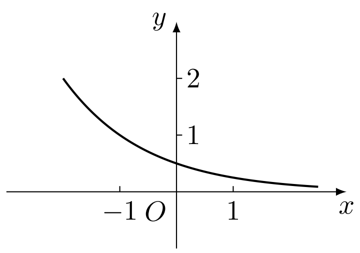
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\overrightarrow{AB}=(k,1)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3)$, 则 k 的值是 ( )

(A) 5 (B) -5 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) $-\dfrac{3}{2}$

4. 已知直线 m、n 与平面 α, β, 给出下列三个命题:
① 若 $m\parallel\alpha$, $n\parallel\alpha$, 则 $m\parallel n$;
② 若 $m\parallel\alpha$, $n\perp\alpha$, 则 $n\perp m$;
③ 若 $m\perp\alpha$, $m\parallel\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$.
其中真命题的个数是 ( )

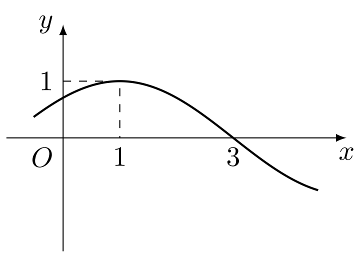
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 若函数 $f(x)=a^{x-b}$ 的图象如图, 其中 a、b 为常数, 则下列结论正确的是 ( )



(A) $a>1$, $b<0$ (B) $a>1$, $b>0$
(C) $0<a<1$, $b>0$ (D) $0<a<1$, $b<0$

6. 若函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(x\in\mathbf{R},\ \omega>0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi)$ 的部分图象如图, 则 ( )

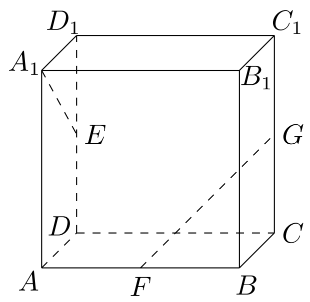


(A) $\omega=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\omega=\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$
(C) $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\omega=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$

7. 已知 $p:|2x-3|<1$, $q:x(x-3)<0$, 则 p 是 q 的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=AB=2$, $AD=1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是 ( )



(A) $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

9. 从 6 人中选 4 人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览, 要求每个城市有一人游览, 每人只游览一个城市, 且这 6 人中甲、乙两人不去巴黎游览, 则不同的选择方案共有 ( )

(A) 300 种 (B) 240 种 (C) 144 种 (D) 96 种

10. 已知 F_1、F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两焦点, 以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2, 若边 MF_1 的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率是 ( )

(A) $4+2\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}-1$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ (D) $\sqrt{3}+1$

11. 设 $a,b\in\mathbf{R}$, $a^2+2b^2=6$, 则 $a+b$ 的最小值是 ( )

(A) $-2\sqrt{2}$ (B) $-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ (C) -3 (D) $-\dfrac{7}{2}$

12. $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数, 且 $f(2)=0$, 则方程在 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 ( )

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7

二、填空题

13. $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项是______. (用数字作答)

14. 非负实数 x, y 满足 $\begin{cases}2x+y\leqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\end{cases}$, 则 $x+3y$ 的最大值为______.

15. 若常数 b 满足 $|b|>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{b^n}=$______.

16. 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题:
若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于______对称, 则函数 $g(x)=$______.
注: 填上你认为可以成为真命题的一件情形即可, 不必考虑所有可能的情形.

三、解答题

17. 已知 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$.
(1) 求 $\sin x-\cos x$ 的值;
(2) 求 $\dfrac{3\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\tan x+\cot x}$ 的值.

18. 甲、乙两人在罚球线投球命中的概率分别为 $\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{2}{5}$, 投中得 1 分, 投不中得 0 分.
(1) 甲、乙两人在罚球线各投球一次, 求两人得分之和 ξ 的数学期望;
(2) 甲、乙两人在罚球线各投球二次, 求这四次投球中至少一次命中的概率;

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-6}{x^2+b}$ 的图象在点 $M(-1,f(x))$ 处的切线方程为 $x+2y+5=0$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

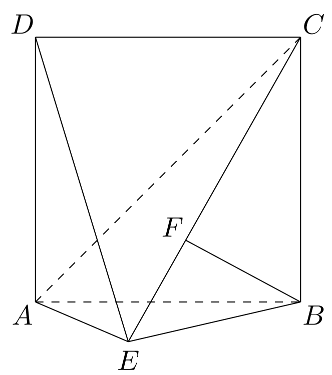
(2) 求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

20. 如图, 直二面角 $D-AB-E$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $AE=EB$, F 为 CE 上的点, 且 $BF\perp$ 平面 ACE.

(1) 求证 $AE\perp$ 平面 BCE;

(2) 求二面角 $B-AC-E$ 的大小;

(3) 求点 D 到平面 ACE 的距离.



21. 已知方向向量为 $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ 的直线 l 过点 $(0,-2\sqrt{3})$ 和椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的焦点, 且椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在椭圆 C 的右准线上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 是否存在过点 $E(-2,0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M、N, 满足 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\cot\angle MON\neq 0$ (O 为原点). 若存在, 求直线 m 的方程; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$, $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$. 我们知道当 a 取不同的值时, 得到不同的数列, 如当 $a=1$ 时, 得到无穷数列: $1, 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \cdots$; 当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时, 得到有穷数列: $-\dfrac{1}{2}, -1, 0$.

(1) 求当 a 为何值时 $a_4=0$;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1$, $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n-1}\ (n\in\mathbf{N}_+)$, 求证 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数, 都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$;

(3) 若 $\dfrac{3}{2}<a_n<2\ (n\geqslant 4)$, 求 a 的取值范围.