

理科数学

一、选择题

1. 已知集合 $M = \{1, 2, zi\}$, i 为虚数单位, $N = \{3, 4\}$, $M \cap N = \{4\}$, 则复数 z 等于 ()
 (A) $-2i$ (B) $2i$ (C) $-4i$ (D) $4i$

2. 函数 $y = \sqrt{x} \ln(1-x)$ 的定义域为 ()
 (A) $(0, 1)$ (B) $[0, 1)$ (C) $(0, 1]$ (D) $[0, 1]$

3. 等比数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第四项等于 ()
 (A) -24 (B) 0 (C) 12 (D) 24

4. 总体由编号为 $01, 02, \dots, 19, 20$ 的 20 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

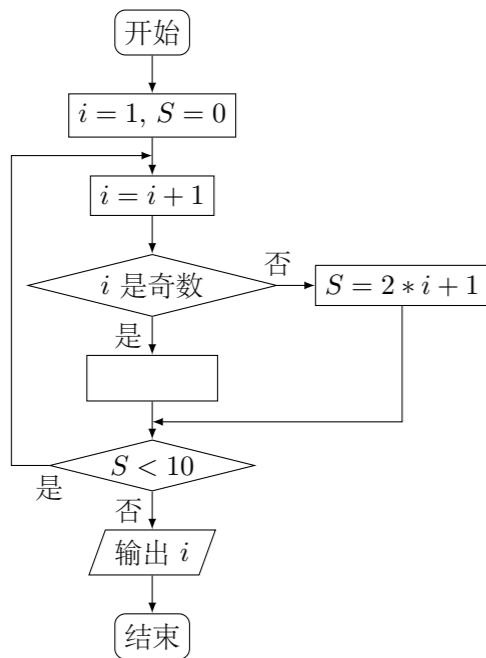
- (A) 08 (B) 07 (C) 02 (D) 01

5. $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^5$ 展开式中的常数项为 ()
 (A) 80 (B) -80 (C) 40 (D) -40

6. 若 $S_1 = \int_1^2 x^2 dx$, $S_2 = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $S_3 = \int_1^2 e^x dx$, 则 S_1, S_2, S_3 的大小关系为 ()

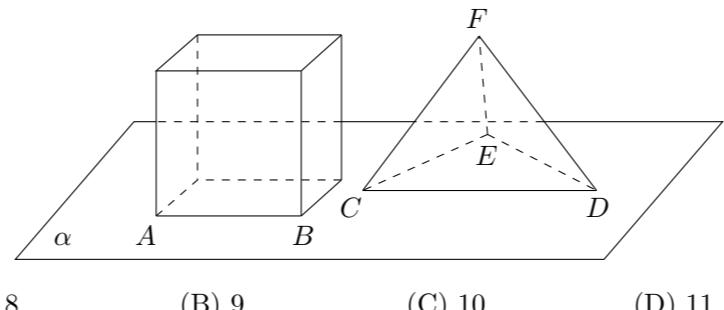
- (A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_2 < S_1 < S_3$ (C) $S_2 < S_3 < S_1$ (D) $S_3 < S_2 < S_1$

7. 阅读如图所示程序框图, 如果输出 $i = 5$, 那么在空白矩形框中应填入的语句为 ()



- (A) $S = 2 * i - 2$ (B) $S = 2 * i - 1$ (C) $S = 2 * i$ (D) $S = 2 * i + 4$

8. 如图, 正方体的底面与正四面体的底面在同一平面 α 上, 且 $AB \parallel CD$, 正方体的六个面所在的平面与直线 CE, EF 相交的平面个数分别记为 m, n , 那么 $m+n=$ ()

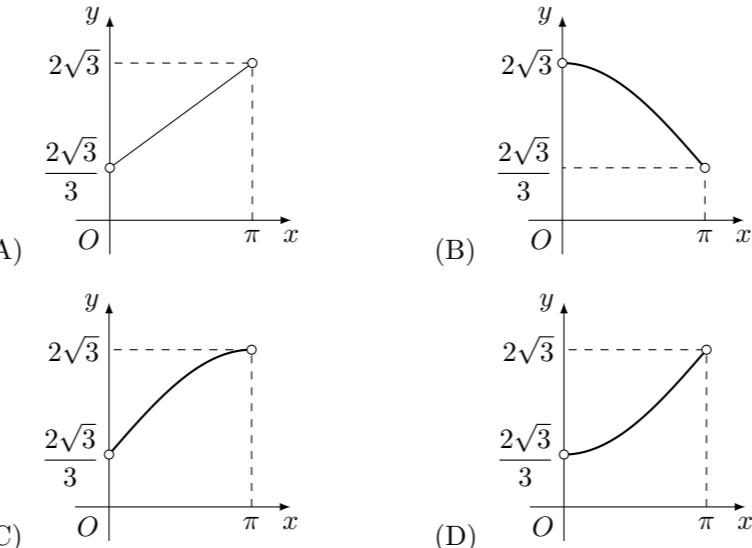
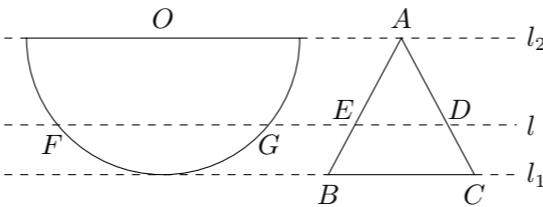


- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

9. 过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 引直线 l 与曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $\triangle AOB$ 的面积取最大值时, 直线 l 的斜率等于 ()

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $-\sqrt{3}$

10. 如图, 半径为 1 的半圆 O 与等边三角形 ABC 夹在两平行线 l_1, l_2 之间, $l \parallel l_1, l$ 与半圆相交于 F, G 两点, 与三角形 ABC 两边相交于 E, D 两点. 设弧 \widehat{FG} 的长为 x ($0 < x < \pi$), $y = EB + BC + CD$, 若 l 从 l_1 平行移动到 l_2 , 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致是 ()



二、填空题

11. 函数 $y = \sin 2x + 2\sqrt{3}\sin^2 x$ 的最小正周期 T 为_____.

12. e_1, e_2 为单位向量, 且 e_1, e_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若 $\mathbf{a} = e_1 + 3e_2$, $\mathbf{b} = 2e_1$, 则向量 \mathbf{a} 在 \mathbf{b} 方向上的射影为_____.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $f(e^x) = x + e^x$, 则 $f'(1) =$ _____.

14. 抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 其准线与双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ 相交于 A, B 两点, 若 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 则 $p =$ _____.

15. 设曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ (t 为参数), 若以直角坐标系的原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 则曲线 C 的极坐标方程为_____.

16. 在实数范围内, 不等式 $|x-2|-1 \leq 1$ 的解集为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$.

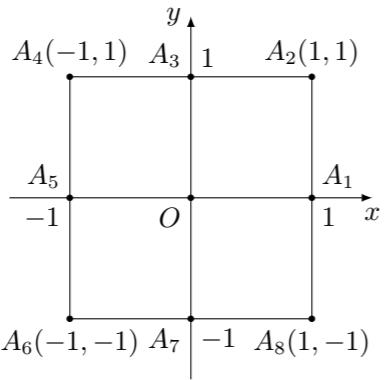
- (1) 求角 B 的大小;
 (2) 若 $a+c=1$, 求 b 的取值范围.

18. 正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足: $S_n^2 - (n^2 + n - 1)S_n - (n^2 + n) = 0$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 令 $b_n = \frac{n+1}{(n+2)^2 a_n^2}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n . 证明: 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $T_n < \frac{5}{64}$.

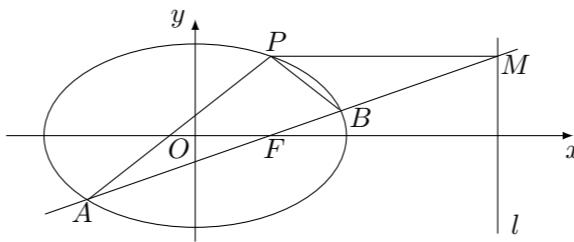
19. 小波以游戏方式决定是参加学校合唱团还是参加学校排球队, 游戏规则为: 以 O 为起点, 再从 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ (如图) 这 8 个点中任取两点分别为终点得到两个向量, 记这两个向量的数量积为 X . 若 $X = 0$ 就参加学校合唱团, 否则就参加学校排球队.

- (1) 求小波参加学校合唱团的概率;
(2) 求 X 的分布列和数学期望.



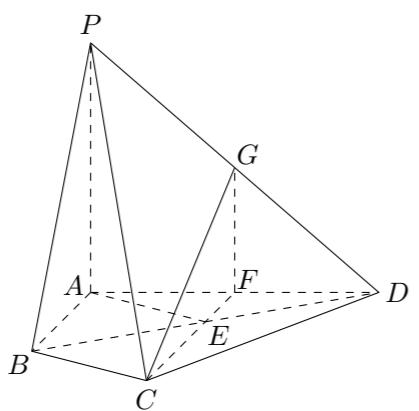
21. 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 BD 的中点, G 为 PD 的中点, $\triangle DAB \cong \triangle DCB$, $EA = EB = AB = 1$, $PA = \frac{3}{2}$, 连接 CE 并延长交 AD 于 F .

- (1) 求证: $AD \perp$ 平面 CFG ;
(2) 求平面 BCP 与平面 DCP 的夹角的余弦值.



22. 已知函数 $f(x) = a\left(1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$, a 为常数且 $a > 0$.

- (1) 证明: 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称;
(2) 若 x_0 满足 $f(f(x_0)) = x_0$, 但 $f(x_0) \neq x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的二阶周期点, 如果 $f(x)$ 有两个二阶周期点 x_1, x_2 , 试确定 a 的取值范围;
(3) 对于 (2) 中的 x_1, x_2 和 a , 设 x_3 为函数 $f(f(x))$ 的最大值点, $A(x_1, f(f(x_1))), B(x_2, f(f(x_2))), C(x_3, 0)$, 记 $\triangle ABC$ 的面积为 $S(a)$, 讨论 $S(a)$ 的单调性.