

文科数学

一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 2\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$ ()

(A) $\{-1, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{2, 3, 4\}$

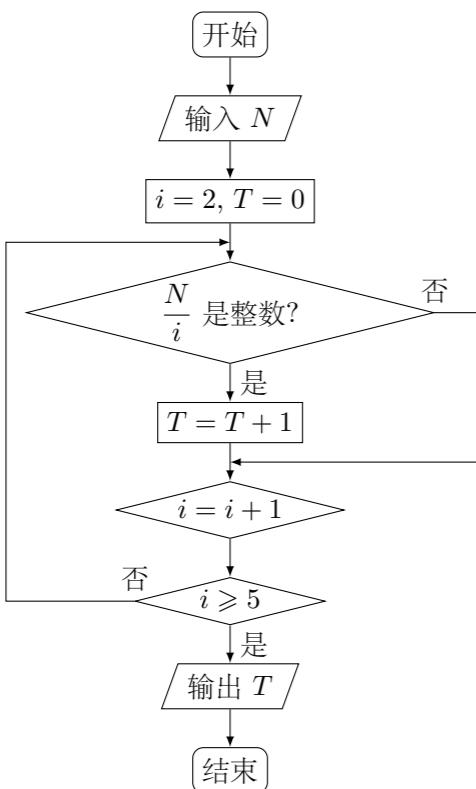
2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \leq 4 \\ -x + y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 3x + 5y$ 的最大值为 ()

(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^3 > 8$ ”是“ $|x| > 2$ ”的 ()

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为 ()



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$

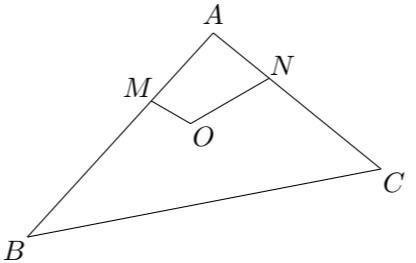
6. 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ()

(A) 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增 (B) 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ 上单调递减
(C) 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增 (D) 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2 , 且 $d_1 + d_2 = 6$, 则双曲线的方程为 ()

(A) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

8. 在如图的平面图形中, 已知 $OM = 1$, $ON = 2$, $\angle MON = 120^\circ$, $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM}$ 的值为 ()



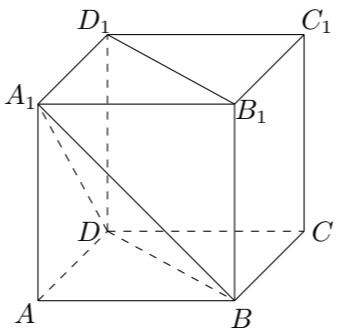
(A) -15 (B) -9 (C) -6 (D) 0

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7i}{1+2i} =$ _____.

10. 已知函数 $f(x) = e^x \ln x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为 _____.

11. 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 则四棱锥 $A_1 - BB_1D_1D$ 的体积为 _____.



12. 在平面直角坐标系中, 经过三点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ 的圆的方程为 _____.

13. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a - 3b + 6 = 0$, 则 $2^a + \frac{1}{8^b}$ 的最小值为 _____.

14. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a, & x > 0 \end{cases}$. 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题

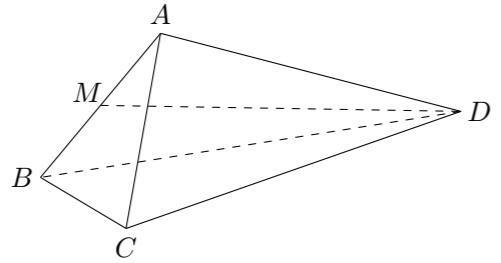
15. 已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为 240, 160, 160. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学去某敬老院参加献爱心活动.

- (1) 应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人?
(2) 设抽出的 7 名同学分别用 A, B, C, D, E, F, G 表示, 现从中随机抽取 2 名同学承担敬老院的卫生工作.

① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;
② 设 M 为事件“抽取的 2 名同学来自同一年级”, 求事件 M 发生的概率.

17. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 点 M 为棱 AB 的中点, $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$.

- (1) 求证: $AD \perp BC$;
- (2) 求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值;
- (3) 求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 A , 上顶点为 B . 已知椭圆的

离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB| = \sqrt{13}$.

- (1) 求椭圆的方程;
- (2) 设直线 $l: y = kx$ ($k < 0$) 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限. 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbb{N}^*$). 已知 $b_1 = 1$, $b_3 = b_2 + 2$, $b_4 = a_3 + a_5$, $b_5 = a_4 + 2a_6$.

- (1) 求 S_n 和 T_n ;
- (2) 若 $S_n + (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = a_n + 4b_n$, 求正整数 n 的值.

20. 设函数 $f(x) = (x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)$, 其中 $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$, 且 t_1, t_2, t_3 是公差为 d 的等差数列.

- (1) 若 $t_2 = 0$, $d = 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $d = 3$, 求 $f(x)$ 的极值;
- (3) 若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -(x - t_2) - 6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点, 求 d 的取值范围.