1. กำหนดให้เมตริกซ์ A และ B เป็นดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบแบ่งเมตริกซ์ย่อยพร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

1.2 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบอัลกอริทึม Strassen พร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

1.3 จาก Pseudo Code ต่อไปนี้ จงเขียนโปรแกรมเพื่อหาผลคูณของเมตริกซ์ A และเมตริกซ์ B เก็บผลลัพธ์ใน เมตริกซ์ C

**Input:** $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ **and** $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

**if** $n = 1$ **then**
  $C = A \cdot B$
**else**
  $M_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$
  $M_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11}$
  $M_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$
  $M_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$
  $M_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$
  $M_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12})$
  $M_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$
  $C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$
  $C_{12} = M_3 + M_5$
  $C_{21} = M_2 + M_4$
  $C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$

**ข้อมูลนำเข้า**

บรรทัดที่ 1 จำนวนเต็ม n แทนขนาดของเมตริกซ์ A และ B โดยที่ 2 <= n <= 10

n+1 บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ A คั่นด้วยช่องว่าง โดยมีค่าอยู่ระหว่าง -10 ถึง 10

n+1 บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ B คั่นด้วยช่องว่าง โดยมีค่าอยู่ระหว่าง -10 ถึง 10

**ข้อมูลส่งออก**

n+1 บรรทัดถัดไป แต่ละบรรทัดประกอบไปด้วยรายการคอลัมน์ของเมตริกซ์ C ซึ่งเกิดจากการคูณ A และ B คั่นด้วยช่องว่าง

การบ้าน Divide and Conquer Part 2

| ตัวอย่างข้อมูลนำเข้า | ตัวอย่างข้อมูลส่งออก |
| --- | --- |
| 4<br>1 0 1 0<br>2 0 2 0<br>3 0 3 0<br>4 0 0 0<br>-1 1 0 0<br>1 1 0 0<br>0 0 1 1<br>1 1 0 0 | -1 1 1 1<br>-2 2 2 2<br>-3 3 3 3<br>-4 4 0 0 |

2. กำหนดให้ P = { (7, 2), (3, 1), (9, 3), (4, 5), (1, 4), (6, 9), (2, 6), (5, 7), (8, 6) } จงวาด recursive tree เพื่อแสดงขั้นตอนการค้นหา maxima set ด้วยวิธี divide and conquer พร้อมหาจำนวนครั้งทั้งหมดในการเปรียบเทียบแต่ละสมาชิกของเซตย่อย M1 และ M2 เพื่อรวมคำตอบ

3. จากอัลกอริทึม Karatsuba ด้านล่าง

$Multiply(a, b)$ :

1. WLOG assume $n = length(a) = length(b)$, can pad 0's for shorter number
2. if $length(a) <= 1$ then return $a * b$
3. Partition a,b into $a = a1 * 10^{n/2} + a2$ and $b = b1 * 10^{n/2} + b2$
4. $A = Multiply(a1, b1)$
5. $B = Multiply(a2, b2)$
6. $C = Multiply(a1 + a1, b1 + b2)$
7. Return $A * 10^n + (C - A - B) * 10^{n/2} + B$

3.1 จงวิเคราะห์เวลา T(n) เมื่อ n เป็นจำนวนหลักของเลข a และ b

3.2 จงเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงผลคูณของ a = 4568 และ b = 3275 พร้อมแสดงขั้นตอนในแต่ละ step อย่างละเอียด

1. กำหนดให้เมตริกซ์ A และ B เป็นดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบแบ่งเมตริกซ์ย่อยพร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

แบ่ง Matrix ออกเป็น Matrix ย่อยขนาด 2×2

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

โดยที่

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

นำ A × B

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

1. $A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A_{11}B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

6. $A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $A_{21}B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $A_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore C = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

คำตอบ: 8 × 8 = 64 ครั้ง

1.2 จงแสดงวิธีการคูณเมตริกซ์ A และ B แบบอัลกอริทึม Strassen พร้อมนับจำนวนครั้งของการคูณ

แบ่ง Matrix ออกเป็น Matrix ย่อยขนาด 2 × 2

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

โดยที่

- $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
- $A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

คำนวณค่า $M_1$ ถึง $M_7$

1. $M_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$
2. $M_2 = (A_{21} + A_{22}) B_{11}$
3. $M_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$
4. $M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$
5. $M_5 = (A_{11} + A_{12}) B_{22}$
6. $M_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$
7. $M_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$

1. $M_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. $M_2 = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

3. $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

4. $M_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. $M_5 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

6. $M_6 = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

7. $M_7 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$

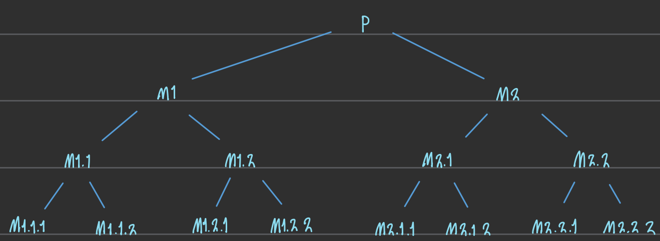
$C_{12} = M_3 + M_5$

$C_{21} = M_2 + M_4$

$C_{22} = M_1 - M_2 + M_3 + M_6$

คำตอบ : ทำ $M_1$ ถึง $M_7$ เท่ากับ คูณ 7 ครั้ง

2. กำหนดให้ P = { (7, 2), (3, 1), (9, 3), (4, 5), (1, 4), (6, 9), (2, 6), (5, 7), (8, 6) } จงวาด recursive tree เพื่อแสดงขั้นตอนการค้นหา maxima set ด้วยวิธี divide and conquer พร้อมหาจำนวนครั้งทั้งหมดในการเปรียบเทียบแต่ละสมาชิกของเซตย่อย M1 และ M2 เพื่อรวมคำตอบ




1. สำหรับ M1:

- เปรียบเทียบ (7,2) กับ (3,1) → 1 ครั้ง
- เปรียบเทียบ (9,3) กับ (4,5) → 1 ครั้ง
- เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จาก 2 คู่ที่เหลือ → 1 ครั้ง
- รวมเป็น 3 ครั้ง

2. สำหรับ M2:

- เปรียบเทียบ (1,4) กับ (6,9) → 1 ครั้ง
- เปรียบเทียบ (2,6) กับ (5,7) → 1 ครั้ง
- เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จาก 2 คู่ที่เหลือ 1 ครั้ง
- รวมทั้งหมด 3 ครั้ง

นำมาเปรียบเทียบครั้งสุดท้าย = 6 + 1

= 7 ครั้ง ฯ

3. จากอัลกอริทึม Karatsuba ด้านล่าง

$Multiply(a, b)$ :

1. WLOG assume $n = length(a) = length(b)$, can pad 0's for shorter number
2. if $length(a) <= 1$ then return $a * b$
3. Partition a,b into $a = a1 * 10^{n/2} + a2$ and $b = b1 * 10^{n/2} + b2$
4. $A = Multiply(a1, b1)$
5. $B = Multiply(a2, b2)$
6. $C = Multiply(a1 + a1, b1 + b2)$
7. Return $A * 10^n + (C - A - B) * 10^{n/2} + B$

ถูกเรียกใช้ 3 ครั้ง และมีการแบ่งครึ่ง = $n/2$

3.1 จงวิเคราะห์เวลา T(n) เมื่อ n เป็นจำนวนหลักของเลข a และ b

สมการเวลา (Recurrence Relation)

มาจากการแบ่งครึ่งข้อมูล

$$T(n) = 3T(n/2) + O(n)$$ ← ทำจำนวน n รอบ

มาจากการทำ Recursive

ใช้ Master Theorem

$a = 3$ , $b = 2$ , $f(n) = O(n)$

คำนวณ $p = \log_b a$

$= \log_2 3 \approx 1.585$

นำ $f(n)$ เปรียบเทียบ $O(n)$ กับ $n^p$

- $f(n)$ โตน้อยกว่า $n^p$

ดังนั้น เวลาในการทำงาน คือ $T(n) = O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$