1. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 17 \\ 14 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

1.1 ด้วยวิธี Jacobi Method โดยค่าเริ่มต้น x1=x2=x3=x4=0 โดยแสดงวิธีทำจำนวน 4 iterations (คำนวณมือ) และถ้ากำหนดค่า ε = 0.000001 แล้ววิธี Jacobi Method ต้องทำกี่รอบ (เขียนปรแกรม)

1.2 ด้วยวิธี Gauss-Seidel Iteration Method โดยค่าเริ่มต้น x1=x2=x3=x4=0 โดยแสดงวิธีทำจำนวน 4 iterations (คำนวณมือ) และถ้ากำหนดค่า ε = 0.000001 แล้ววิธี Gauss-Seidel Method ต้องทำกี่รอบ (เขียนปรแกรม)

1.3 ด้วยวิธี Conjugate Gradient Method โดยค่าเริ่มต้น x1=x2=x3=x4=0 โดยแสดงวิธีทำจำนวน 4 iterations (คำนวณมือ) และถ้ากำหนดค่า ε = 0.000001 แล้ววิธี Conjugate Gradient Method ต้องทำกี่รอบ (เขียนปรแกรม)

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \underset{(1\times2)}{\lfloor X \rfloor} \underset{(2\times2)}{[A]} \underset{(2\times1)}{\{X\}} - \underset{(1\times2)}{\lfloor B \rfloor} \underset{(2\times1)}{\{X\}}$$

จงหาร $f(x_1, x_2)$ พร้อมวาดกราฟ contour

3. กำหนดให้

CONJUGATE GRADIENT PROCEDURE

Start from the quadratic function for the system of n eqs.,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \underset{(1\times n)}{\lfloor X \rfloor} \underset{(n\times n)}{[A]} \underset{(n\times1)}{\{X\}} - \underset{(1\times n)}{\lfloor B \rfloor} \underset{(n\times1)}{\{X\}}$$

So that their first derivatives wrt. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are determined and set to zero.

$$\frac{\partial f}{\partial\{X\}} = [A]\{X\} - \{B\} = 0$$

yielding the original system of n eqs.

The conjugate gradient method is an iterative technique, a set of initial guess values in $\{X\}$ is needed. The new $\{X\}$ at $(k+1)^{th}$ iteration is obtained from,

$$\{X\}^{k+1} = \{X\}^{k} + \lambda_k \{D\}^{k}$$

where

$\{D\}^{k}$ = search direction vector

λ_k = step size of $\{D\}^{k}$

$$\{D\}^{k+1} = -\{R\}^{k+1} + \alpha_k \{D\}^{k}$$

จงพิสูนจ์ว่า

$$\lambda_k = -\frac{\lfloor D \rfloor^{k} \{R\}^{k}}{\lfloor D \rfloor^{k} [A] \{D\}^{k}}$$

$$\alpha_k = \frac{\lfloor R \rfloor^{k+1} [A] \{D\}^{k}}{\lfloor D \rfloor^{k} [A] \{D\}^{k}}$$